



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i
Informàtica

Universitat de Barcelona

LA CONGRUÈNCIA PER
TISORES

Àngel Prado Costa

Director: Dr. Ricardo García
Realitzat a: Universitat de Barcelona
(Departament de Matemàtiques
i Informàtica)
Barcelona, 18 de gener de 2019

Abstract

The third Hilbert's problem is related to the following question: given two polyhedra of the same volume, is it always possible to cut the first into finitely many polyhedral pieces which can be reassembled to yield the second? The aim of this project is to answer this question defining scissor's congruence and study the most important results of the scissor's congruence.

Resum

El tercer problema de Hilbert està relacionat amb la següent pregunta: donats dos poliedres del mateix volum, és sempre possible tallar el primer en un nombre finit de peces i reagrupar-les per formar el segon? L'objectiu d'aquest treball és respondre aquesta pregunta definint el concepte de congruència per tisores i estudiar els resultats més importants de la congruència per tisores.

Agraïments

Voldria agrair, primerament al Ricardo García per haver-se ofert com a tutor d'aquest treball, la facilitat amb la que he pogut contactar periòdicament amb ell i la seva dedicació.

Seguidament mencionar als companys i amics de la facultat que m'han acompanyat al llarg dels cursos. Pels seus consells i recolzament. Al Youwei, al Jesús, a l'Àlex, a l'Ignasi, i en especial al Pau.

Als meus pares.

A l'Àlicia.

Pel seu suport i estima.

Índex

1	Introducció	1
2	Congruència per tisores al pla	2
2.1	Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien	3
3	Congruència per tisores a l'espai	7
3.1	Invariant de Dehn per funcions íntegrament additives	7
3.2	Invariant de Dehn per productes tensorials	14
3.2.1	Producte tensorial	14
3.2.2	Invariant de Dehn	17
3.3	Relació entre les dues definicions de l'invariant de Dehn	19
3.4	Exemples de càlculs d'invariant de Dehn.	20
4	Els sòlids platònics	23
4.1	Existència i unicitat	23
4.1.1	Construcció	23
4.1.2	Teorema d'Euler per poliedres	25
4.2	L'angle diedral d'una piràmide	27
5	Aplicacions	33
5.1	Congruència estable per tisores	33
5.2	Poliedres que omplen l'espai	37
6	Conclusions	39

1 Introducció

El projecte

Els problemes de Hilbert conformen una llista de 23 problemes que va proposar el matemàtic David Hilbert en una conferència per al Congrés Internacional de matemàtics l'any 1900. És sabut des de fa segles que dos polígons que tenen la mateixa àrea poden ésser dividits en triangles congruents dos a dos. Hilbert, en el seu tercer problema va preguntar si era possible trobar dos poliedres del mateix volum que no es poguessin dividir en un nombre finit de peces polièdriques congruents dos a dos, és a dir, que del primer poliedre el podem descomposar en peces més petites de tal manera que muntant-les de manera diferent obtenim el segon poliedre. Al poc temps de proposar-lo, l'alemany Max Dehn, alumne de tesi de Hilbert, va demostrar que un cub i un tetraedre del mateix volum no ho complien.

Estructura de la Memòria

Clarament el fil conductor d'aquesta memòria és la congruència per tisores. La tractarem, primerament, en el pla. Seguidament en l'espai i veurem que, a diferència del pla, no és tan senzill. Introduïrem l'invariant de Dehn, un altre concepte clau en aquesta memòria. El definirem de dos maneres possibles tot relacionant-les. Al llarg d'aquesta secció i en particular al final, veurem uns exemples del càlcul de l'invariant de Dehn. A continuació treballarem els sòlids platònics. El càlcul dels angles diedrals d'un sòlid qualsevol no és gens trivial, per això se li ha dedicat una secció a aquests sòlids per poder explicar amb detall com trobar el valor d'aquests angles diedrals. Finalment veurem quines aplicacions té la congruència per tisores, introduïnt el concepte de congruència estable per tisores i quins poliedres ens poden servir per omplir l'espai.

2 Congruència per tisoires al pla

En aquesta primera part tractarem la congruència per tisoires (o congruència per peces) al pla, veurem quines condicions són necessàries i els resultats més importants. S'ha sabut des de molt temps enrere que dos triangles amb la mateixa àrea poden ésser dividits o tallats en un nombre finit de peces poligonals congruents dos a dos. Al llarg del segle XIX s'ha estudiat amb més profunditat i s'ha pogut concloure que funciona no només amb triangles, sino amb qual-sevol polígon. Per això començarem definint què entenem per descomposició poligonal.

Definició 2.1. Una **descomposició poligonal** d'un polígon P al pla és un conjunt finit $\{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ de polígons tals que la seva unió és P i la intersecció de dos ells és una aresta comú, un vèrtex o bé el buit. En aquest cas posem $P = P_1 + P_2 + \dots + P_k$.

Observació 2.2. Dos polígons P i Q són **congruents** si existeix una isometria $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(P) = Q$.

Definició 2.3. Dos polígons $P, Q \subset \mathbb{R}^2$ són **congruents per tisoires** si existeixen descomposicions poligonals $\{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ i $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_k\}$ de P i Q respectivament amb la propietat que P_i és congruent a Q_i , per $1 \leq i \leq k$.

Notació 1. A partir d'ara si P i Q són dos polígons congruents per tisoires direm que són **SC** i ho denotarem com $P \simeq Q$.

Proposició 2.4. La congruència per tisoires és una relació d'equivalència.

Demostració: (Reflexivitat): $\forall P \subset \mathbb{R}^2 \ P \simeq P$.

(Simetria): $\forall P, R \subset \mathbb{R}^2$ es compleix que si $P \simeq R$ llavors $R \simeq P$. És clar que si tenim una descomposició poligonal que ens transforma P a R podem usar-la de nou per passar de R a P .

(Transitivitat): $\forall P, R, Q \subset \mathbb{R}^2$ si $P \simeq R$ i $R \simeq Q$ llavors $P \simeq Q$. Com $P \simeq R$ existeixen descomposicions poligonals $\{P_1, \dots, P_k\}$ i $\{R_1, \dots, R_k\}$ tals que P_i es congruent amb R_i per a tot i . De la mateixa manera, com $R \simeq Q$ tenim $\{R'_1, \dots, R'_l\}$ i $\{Q_1, \dots, Q_l\}$ amb R_i congruent amb Q_i per a tot i . Podem trobar una descomposició en R que refina simultàniament les descomposicions $\{R_i\}_i$ i $\{R'_i\}$, anomenem-la $\{R''_1, \dots, R''_m\}$. Aquesta descomposició defineix a P un refinament $\{P''_1, \dots, P''_m\}$ de la descomposició inicial i a Q un refinament $\{Q''_1, \dots, Q''_m\}$.

Com la congruència és transitiva i P''_i és congruent amb R''_i per a tot i i aquest és congruent alhora amb Q''_i obtenim que P''_i és congruent amb Q''_i . Finalment $P \simeq Q$.

■

2.1 Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien

Veurem que aquest teorema és el resultat més important d'aquesta secció, per això, enunciam els lemes i proposicions necessàries per a demostrar-ho. Farkas Bolyai fou el primer en formular-lo, Paul Gerwein va provar el teorema al 1833, però de fet William Wallace va provar el mateix resultat al 1807. Segons altres fonts, Bolyai i Gerwien haurien provat el teorema independentment al 1833 i 1835, respectivament.[2]

Una de les primeres i més antigues qüestions va ser identificar els invariants dels tisores-isomorfismes; veiem que l'àrea n'és un.

Proposició 2.5. *Siguin P, Q dos polígons, $P \simeq Q \Rightarrow A(P) = A(Q)$. On A denota l'àrea.*

Demostració: Com $P \simeq Q$ tenim per la defició 2.3 que existeixen descomposicions poligonals $\{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ i $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_k\}$ de P i Q respectivament de tal manera que P_i és congruent a Q_i per $1 \leq i \leq k$. Per la observació 2.2, com P_i i Q_i són congruents $A(P_i) = A(Q_i)$. Finalment

$$A(P) = A(P_1) + A(P_2) + \dots + A(P_k) = A(Q_1) + A(Q_2) + \dots + A(Q_k) = A(Q).$$

■

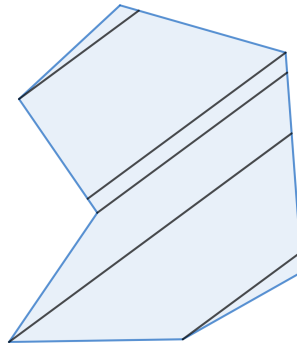
Anem a veure que el fet que l'àrea de dos polígons sigui la mateixa és una condició, no només necessària, sino suficient. Per demostrar que és suficient ho farem veient que entre qualsevol parell de polígons de la mateixa àrea són *SC*.

Notació 2. *Suposem fixada una unitat de mesura al pla que denotem per u .*

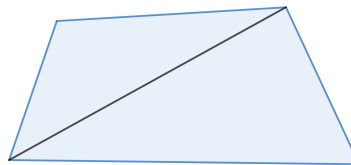
Anem a provar, doncs, que tot polígon P és *SC* a un rectangle de costats $A(P) \times 1u$ on A denota l'àrea. Per això, un pas previ és demostrar el següent lema.

Lema 2.6. *Tot polígon té una descomposició poligonal per triangles.*

Demostració: Sigui P un polígon qualsevol, i sigui m un pendent arbitrari diferent a qualsevol dels pendents dels costats de P . Tracem línies amb pendent m a través de tots els vèrtex de P , obtenint una descomposició poligonal en triangles i trapezoides.



Finalment, per a cada trapeziode fem la diagonal que el descomposa en dos triangles.



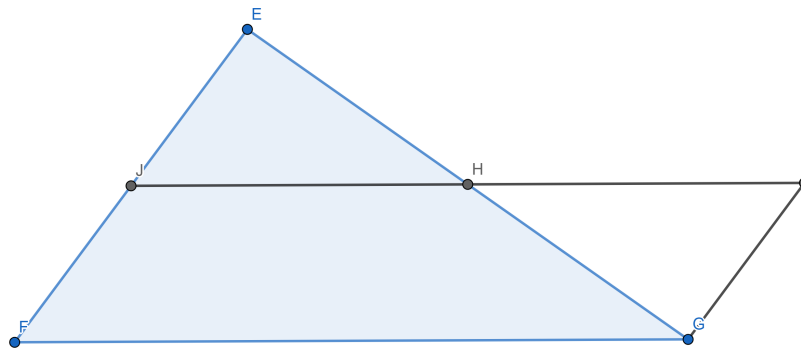
Obtenint dos triangles per a cada trapezi. Així provem que P pot ésser descomposat tal que $P = T_1 + \dots + T_k$ amb T_i triangle $\forall 1 \leq i \leq k$.

■

Teorema 2.7. *Tot polígon P és congruent per tisores a un rectangle un dels costats del qual mesura $1u$.*

Demostració: Com tot polígon pot ser descomposat en triangles (pel Lema 2.6), podem assumir que P és un triangle.

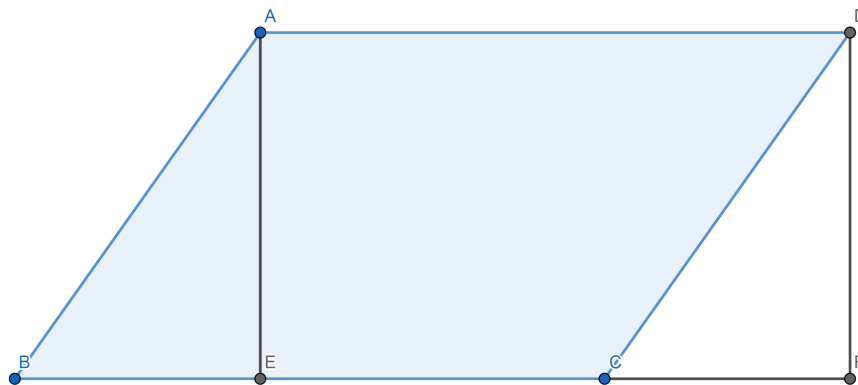
Primer, com s'indica a la següent figura, tot triangle és congruent per tisores a un paral·lelogram.



On J i H són els punts mitjos de les rectes FE i EG , respectivament, i tracem una recta paral·lela a FE desde G . I és la intersecció d'aquesta recta amb la recta JH .

El triangle EJH és semblant al triangle HGI , per tant $EFG \simeq JFGI$.

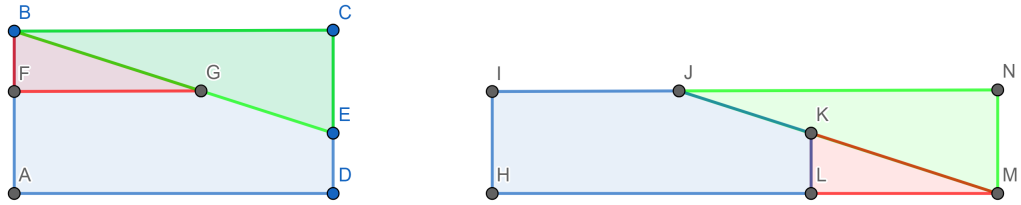
Ara, com indica la següent figura, tot paral·lelogram és congruent per tisores a un rectangle.



Els punts E i F són les projeccions ortogonals de A i D sobre la recta BC .

Els triangles ABE i DCF són semblants, per tant $ABCD \simeq ABEF$.

Finalment, transformant aquest rectangle $a \times b$ en un $ab \times 1$ ja ho tenim.



Amb $AB = a$, $BC = b$, $CE = 1$. Els triangles BFG i KLM són semblants i també BCE i JMN . Doncs $ABCD \simeq HINM$, amb $IN = ab$ i $NM = 1$. Aquesta construcció només funciona si $1 \leq a \leq 2$ però tots els altres casos es poden reduir a aquest.

Si $a > 2$ tallem el costat a en suficients peces perquè es compleixi que $a \leq 2$ per a cadascun dels nous rectangles. Apliquem el teorema en cada rectangle per separat.

Si $a < 1$ es tracta de trobar un $n \in \mathbb{N}$ tal que $na \geq 1$. Construïm un nou rectangle dividint l'inicial en dos i acoblant-lo a la part superior obtenint-ne un de costats $2a$ i $b/2$. Clarament és SC al primer. Si encara $2a < 1$ repetim el mateix procediment fins que trobem aquest n . Finalment tindrem un rectangle de costats na i b/n que complirà que $1 \leq na \leq 2$.

■

A l'antiga Grècia i a Xina ja eren conscients d'aquest resultat [5].

Observem que el rectangle construït al teorema 2.7 té la propietat que un costat mesura $1u$ i l'altra mesura $A(P)u$.

Teorema 2.8. (Wallace-Bolyai-Gerwien). $P \simeq Q \Leftrightarrow A(P) = A(Q)$.

Demostració: \Rightarrow) Vista a la proposició 2.5.

\Leftarrow) Aplicant el teorema 2.7 als polígons P i Q obtenim dos rectangles idèntics.

■

3 Congruència per tisoires a l'espai

Considerem ara dos poliedres $R, S \subset \mathbb{R}^3$. La qüestió fonamental de la congruència per tisoires és veure si es possible tallar R en un nombre finit de peces poliedrals i acoblar-les de nou per formar S . A \mathbb{R}^2 hem vist que l'àrea era un invariant per SC , en aquest capítol veurem que el volum també ho és, però en aquest cas no és l'únic invariant a \mathbb{R}^3 .

Definició 3.1. Una *descomposició poliedral* d'un poliedre $R \subset \mathbb{R}^3$ és un conjunt finit $\{R_1, R_2, \dots, R_k\}$ de poliedres tals que la seva unió és R i la intersecció dos a dos és una cara, una aresta, un vèrtex o bé el buit. En aquest cas escribim $R = R_1 + R_2 + \dots + R_k$.

Observació 3.2. Dos poliedres R i S són **congruents** si existeix una isometria $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(R) = S$.

Definició 3.3. Dos poliedres $R, S \subset \mathbb{R}^3$ són **congruents per tisoires** si existeixen descomposicions poliedrals $\{R_1, R_2, \dots, R_k\}$ i $\{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ d' R i S respectivament amb la propietat que R_i és congruent a S_i per a cada $1 \leq i \leq k$.

Proposició 3.4. $R \simeq S \Rightarrow V(R) = V(S)$. On V denota el Volum.

Demostració: Com $R \simeq S$ tenim per la definició 3.3 que existeixen descomposicions poligonals $\{R_1, R_2, \dots, R_k\}$ i $\{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ de R i S respectivament de tal manera que R_i és congruent a S_i per $1 \leq i \leq k$. Per la observació 3.2, com R_i i S_i són congruents implica que $V(R_i) = V(S_i)$. Finalment $V(R) = V(R_1) + V(R_2) + \dots + V(R_k) = V(S_1) + V(S_2) + \dots + V(S_k) = V(S)$.

■

3r Problema de Hilbert: Siguin $R, Q \subset \mathbb{R}^3$ dos poliedres del mateix volum. És cert que $R \simeq Q$?

Max Dehn el va resoldre demostrant que no sempre era possible [4]. Per això va introduir el que ara coneixem com l'*invariant de Dehn*. En els següents apartats definirem de dues maneres diferents aquest invariant, tot relacionant-les i finalment calculant alguns exemples.

3.1 Invariant de Dehn per funcions íntegrament additi- ves

Definició 3.5. Sigui $A \subset \mathbb{R}$. Una funció $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ és **íntegrament additiva** si per tot $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{Z}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in A$ es compleix que si:

$$n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \dots + n_m\alpha_m = 0$$

llavors:

$$n_1 f(\alpha_1) + n_2 f(\alpha_2) + \dots + n_m f(\alpha_m) = 0.$$

Definició 3.6. *L'angle diedral θ de dos plans és l'angle que formen els vectors ortogonals a aquests plans.*

Definició 3.7. *Sigui P un poliedre, i $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ el conjunt format per tots els angles diedrals de P no necessàriament tots diferents. Considerem γ_i les longituds de les arestes de P a la que li fem correspondre l'angle diedral α_i per cada $1 \leq i \leq m$.*

Associem a una funció íntegrament additiva f en A la següent quantitat

$$f(P) := \gamma_1 f(\alpha_1) + \gamma_2 f(\alpha_2) + \dots + \gamma_m f(\alpha_m)$$

*que anomenem **invariant de Dehn de P associat a f** .*

Observem que les $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ no són necessàriament enteres.

A continuació provarem dos lemes que ens seran útils per poder enunciar el teorema més important d'aquesta secció. Aquest teorema assegura que si dos poliedres són *SC* llavors tenen el mateix invariant de Dehn associat a una mateixa funció f .

El primer lema ens assegura que l'invariant de Dehn es pot expressar com la suma dels invariants de Dehn dels corresponents subpoliedres.

Lema 3.8. *Suposem que tenim una descomposició poliedral d'un poliedre P :*

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_k.$$

Sigui A un conjunt format pel nombre π i els angles diedrals de P, P_1, P_2, \dots, P_k , i sigui f una funció íntegrament additiva d' A complint que $f(\pi) = 0$. Llavors:

$$f(P) = f(P_1) + f(P_2) + \dots + f(P_k). \tag{3.1}$$

Demostració: Anomenem χ_1, \dots, χ_m els costats de P_1, \dots, P_k . Fixem per a cada χ_i la seva longitud μ_i i li fem correspondre el seu angle diedral α_i .

A la quantitat $\mu_i f(\alpha_i)$ l'anomenem **pes** de χ_i . Clarament,

$$f(P) = \sum_{k=1}^m \mu_k f(\alpha_k).$$

Fixem un $\chi := \chi_i$ per algun i amb longitud μ , sigui $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_j}$ els poliedres de la descomposició que conté χ un dels seus costats i, per $1 \leq s \leq j$, prenem

γ_s l'angle diedral de P_{i_s} associat a χ .
Anem a estudiar la següent quantitat:

$$\mu f(\gamma_1) + \mu f(\gamma_2) + \dots + \mu f(\gamma_j)$$

que de fet, és una suma parcial de $f(P)$. Considerarem tres casos possibles:

Cas 1: χ es troba completament a l'interior de P (excepte els extrems), llavors

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_j = 2\pi$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_j - 2\pi = 0$$

aplicant f , donat que és una funció íntegrament additiva:

$$f(\gamma_1) + f(\gamma_2) + \dots + f(\gamma_j) - 2f(\pi) = 0$$

$$f(\gamma_1) + f(\gamma_2) + \dots + f(\gamma_j) = 0$$

i multiplicant per μ :

$$\mu f(\gamma_1) + \mu f(\gamma_2) + \dots + \mu f(\gamma_j) = 0.$$

Cas 2: χ es troba a una cara de P , però no a un costat, tenim:

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_j = \pi$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_j - \pi = 0.$$

Ara aplicant f de nou:

$$f(\gamma_1) + f(\gamma_2) + \dots + f(\gamma_j) - f(\pi) = 0$$

$$f(\gamma_1) + f(\gamma_2) + \dots + f(\gamma_j) = 0$$

multipliquem per μ :

$$\mu f(\gamma_1) + \mu f(\gamma_2) + \dots + \mu f(\gamma_j) = 0.$$

Cas 3: χ es troba en un costat de P . Sigui α l'angle diedral de P associat a aquest costat, la quantitat $\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_j$ ha de ser exactament α o bé $\alpha - \pi$. En ambdós casos, la condició $f(\pi) = 0$ implica que:

$$f(\gamma_1) + f(\gamma_2) + \dots + f(\gamma_j) - f(\alpha) = 0$$

per tant,

$$\mu f(\gamma_1) + \mu f(\gamma_2) + \dots + \mu f(\gamma_j) - \mu f(\alpha) = 0$$

$$\mu f(\gamma_1) + \mu f(\gamma_2) + \dots + \mu f(\gamma_j) = \mu f(\alpha),$$

que és el pes de χ en P . Finalment, si sumem els pesos de tots els χ_i de la nostra descomposició poliedral de P obtenim l'expressió 3.1.

■

Aquest segon lema ens permet estendre una funció íntegrament additiva de tal manera que el conjunt de sortida contingui tots els angles d'un poliedre i els corresponents subpoliedres.

Lema 3.9. *Sigui $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funció íntegrament additiva i $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \notin A$. Llavors f es pot estendre a una nova funció íntegrament additiva sobre $A \cup \{\beta\}$.*

Demostració: Considerem dos casos:

Cas 1: No existeix cap equació tal que $n_1\alpha_1 + \dots + n_k\alpha_k + n_\beta\beta = 0$ amb $n_\beta \neq 0$. En aquest cas definim $f(\beta) = k \in \mathbb{R}$.

Cas 2: Existeix l'equació

$$n_1\alpha_1 + \dots + n_k\alpha_k + n_\beta\beta = 0, \quad (3.2)$$

amb $n_\beta \neq 0$. Definim $f(\beta) = -\frac{n_1}{n_\beta}\alpha_1 - \dots - \frac{n_k}{n_\beta}\alpha_k$.

Hem de veure que f és íntegrament additiva sobre $A \cup \{\beta\}$. Suposem que tenim una dependència lineal:

$$m_1\alpha_1 + \dots + m_k\alpha_k + m_\beta\beta = 0. \quad (3.3)$$

Si $m_\beta = 0$, el lema queda demostrat. Suposem ara que $m_\beta \neq 0$. Si multipliquem l'equació (3.2) per m_β , l'equació (3.3) per n_β i restem per eliminar β ens queda:

$$(n_\beta m_1 - n_1 m_\beta)\alpha_1 + \dots + (n_\beta m_k - n_k m_\beta)\alpha_k = 0.$$

Com que f és íntegrament additiva sobre A :

$$(n_\beta m_1 - n_1 m_\beta)f(\alpha_1) + \dots + (n_\beta m_k - n_k m_\beta)f(\alpha_k) = 0. \quad (3.4)$$

Ara prenem l'equació

$$n_1 f(\alpha_1) + \dots + n_k f(\alpha_k) + n_\beta f(\beta) = 0$$

i la multipliquem per m_β i li restem la equació (3.4):

$$m_1 n_\beta f(\alpha_1) + \dots + m_k n_\beta f(\alpha_k) + m_\beta n_\beta f(\beta) = 0.$$

Ara, podem dividir per n_β doncs $n_\beta \neq 0$ per hipòtesi.

$$m_1 f(\alpha_1) + \dots + m_k f(\alpha_k) + m_\beta f(\beta) = 0.$$

■

Teorema 3.10. *Siguin P i Q dos poliedres. Llavors $P \simeq Q \Rightarrow f(P) = f(Q)$.*

Demostració: Definim

$$M = \{\pi\} \cup A_P \cup A_Q$$

on A_P i A_Q són els conjunts que contenen els angles diedrals de P i Q respectivament. Suposem que existeix una funció íntegrament additiva $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ complint que $f(\pi) = 0$ (f existeix pel lema 3.9). Considerem descomposicions poliedrals de P i Q :

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_k$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_k$$

amb la propietat que P_i i Q_i són congruents per $1 \leq i \leq k$. Clarament $f(P_i) = f(Q_i)$ per $1 \leq i \leq k$ i:

$$f(P) = f(P_1) + f(P_2) + \dots + f(P_k) = f(Q_1) + f(Q_2) + \dots + f(Q_k) = f(Q)$$

pel lema 3.8. ■

Proposició 3.11. *Que dos poliedres tinguin el mateix volum no és una condició suficient perquè siguin SC.*

Prèviament, cal demostrar el lema següent.

Lema 3.12. [4] *El nombre $\frac{1}{\pi} \arccos(1/3)$ és irracional.*

Demostració: Demostrarem aquest lema utilitzant els polinomis de Txebixov [12]. Definim la família de polinomis de Txebixov de primer tipus com:

$$T_n(x) = \cos(n\theta) \text{ amb } x = \cos(\theta)$$

Per veure que són polinomis veurem que poden ésser definits de la forma recurrent:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

amb $T_0(x) = 1$ i $T_1(x) = x$.

Fent servir la següent relació trigonomètrica:

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = -\frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta))$$

i utilitzant que,

$$T_{n+1}(x) = \cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta)$$

obtenim:

$$T_{n+1}(x) = xT_n(x) + \frac{\cos((n+1)\theta)}{2} - \frac{\cos((n-1)\theta)}{2} = xT_n(x) + \frac{T_{n+1}(x)}{2} - \frac{T_{n-1}(x)}{2}.$$

De la qual aïllant $T_{n+1}(x)$ arribem a l'expressió que volíem.

T_n és el polinomi de grau n amb coeficients enters on el terme principal és 2^{n-1} (entenem per terme principal el coeficient de grau n).

Demostrem el lema per reducció a l'absurd.

Suposem que $\phi = \arccos(1/3) = \frac{p}{q}\pi$ per alguns $p, q \in \mathbb{Z}^*$. Així $\cos(\phi) = 1/3$ i $\cos(\frac{p}{q}\pi) = 1/3$. Llavors:

$$T_q(1/3) = T_q(\cos(\phi)) = \cos(q\phi) = \cos(p\pi) = \pm 1.$$

Definim el polinomi $P_q(x) = T_q(x) \mp 1$, d'on $1/3$ és arrel. $P_q(x)$ és un polinomi amb coeficients enters amb terme principal 2^{q-1} .

Pel Teorema de l'arrel racional [1] sabem que si un polinomi amb coeficients enters té alguna arrel racional $x = r/s$ amb r i s coprimers aleshores $r|a_0$ i $s|a_n$ (a_0 és el terme independent i a_n el terme principal).

Deduïm que 3 divideix 2^{q-1} per algun q que és una contradicció. Per tant $(1/\pi)\arccos(1/3)$ és irracional. ■

Demostració de la proposició 3.11: Un tetraedre regular i un cub del mateix volum no són SC . Sigui T el tetraedre regular i C el cub de volum $1 u^3$ ambdós. Clarament tots els angles diedrals de C són $\pi/2$. Anem a veure analíticament quan valen els angles diedrals de T , per això prenem un tetraedre de costat $1u$.

Sigui $T' \subset \mathbb{R}^3$ un triangle equilàter amb coordenades $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$ i $C = (1/2, \sqrt{3}/2, 0)$. Volem trobar les coordenades del punt mig $M = (x, y, 0)$, per tant es compleix que:

$$d(A, M) = d(B, M) = d(C, M)$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1-x)^2 + y^2} = \sqrt{(1/2-x)^2 + (\sqrt{3}/2-y)^2}.$$

Resolent el sistema obtenim $M = (1/2, \sqrt{3}/6, 0)$. Ara busquem un punt $D = (1/2, \sqrt{3}/6, z)$ tal que $d(A, D) = d(B, D) = d(C, D) = 1$, tenim doncs:

$$\begin{aligned} \sqrt{(1/2)^2 + (\sqrt{3}/6)^2 + z^2} &= \sqrt{(1-1/2)^2 + (\sqrt{3}/6)^2 + z^2} = \\ &= \sqrt{(\sqrt{3}/2 - \sqrt{3}/6)^2 + z^2} = 1 \end{aligned}$$

$$1/4 + 1/12 + z^2 = 1/3 + z^2 = 1$$

$$z = \pm\sqrt{2/3} = \pm\sqrt{6}/3.$$

Finalment tenim el tetraedre regular amb vèrtexs A, B, C i D . Considerem el pla π_1 que passa pels punts A, B i D .

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/6 & \sqrt{6}/3 \end{vmatrix} = -2\sqrt{6}y + \sqrt{3}z = 0.$$

Considerem ara el pla π_2 que passa pels punts A, B, C . Aquest és clarament $\pi_2 : z = 0$

Com l'angle diedral dels plans és l'angle que formen els vectors ortogonals, prenem $u = (0, -2\sqrt{6}, \sqrt{3})$ i $v = (0, 0, 1)$. Finalment,

$$\cos(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = 1/3$$

$$(u, v) = \arccos(1/3).$$

Prenem $A = \{\pi, \pi/2, \phi\}$, amb $\phi = \arccos(1/3)$ i definim $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$f(\pi) = 0, f(\pi/2) = 0, f(\phi) = 1.$$

f està ben definida doncs ϕ no és de la forma $p\pi/q$ pel lema 3.12.

Recordem que una funció f íntegrament additiva ha de complir que si $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$

$$n_1\pi + n_2(\pi/2) + n_3\phi = 0$$

llavors

$$n_1f(\pi) + n_2f(\pi/2) + n_3f(\phi) = 0.$$

Suposem que:

$$n_1\pi + n_2\pi/2 + n_3\phi = 0$$

Si $n_3 = 0$,

$$n_1f(\pi) + n_2f(\pi/2) = 0$$

$\forall n_1, n_2$.

Per altra banda, si $n_3 \neq 0$ i existís una solució de $n_1\pi + n_2(\pi/2) + n_3\phi = 0$ implicaria que

$$\frac{\phi}{\pi} = -\frac{2n_1 + n_2}{2n_3}$$

que contradiria el lema 3.12. Per tant f és íntegrament additiva.

A continuació anem a calcular els invariants de Dehn de C i T associats a f . Tots els costats de C mesuren $1u$, per tant,

$$f(C) = 12 \cdot 1 \cdot f(\pi/2) = 0.$$

Ara, sigui m la llargada de cadascun dels costats de T . Per la fórmula del volum d'un tetraedre regular tenim:

$$V(T) = \frac{\sqrt{2}}{12} m^3.$$

Calculem aquest $m = \sqrt[3]{\frac{12}{\sqrt{2}}} \approx 2.04 \neq 0$. I així:

$$f(T) = 6mf(\phi) = 6\sqrt[3]{\frac{12}{\sqrt{2}}} \neq 0.$$

Que implica finalment que C i T no tenen el mateix invariant de Dehn i per tant no són SC .

■

Aquesta primera manera de definir l'invariant de Dehn no és molt comuna, doncs a la pràctica és més còmode la segona.

3.2 Invariant de Dehn per productes tensorials

Primerament explicarem què entenem per producte tensorial i després veurem una segona definició d'invariant de Dehn a partir del producte tensorial [10][14].

3.2.1 Producte tensorial

Definició 3.13. *Sigui K un cos. Siguin E_1, \dots, E_n, F K -espais vectorials. Prenem f aplicació lineal*

$$f : E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow F.$$

*Direm que f és K -**multilineal** si és lineal en cada variable, és a dir:*

- a) $f(e_1, \dots, e_i, e_{i'}, \dots, e_n) = f(e_1, \dots, e_i, \dots, e_n) + f(e_1, \dots, e_{i'}, \dots, e_n) \forall e_1, \dots, e_i, e_{i'}, \dots, e_n$
 $\forall 0 \leq i \leq n$.
- b) $f(e_1, \dots, \lambda e_i, \dots, e_n) = \lambda f(e_1, \dots, e_i, \dots, e_n) \forall e_1, \dots, e_i, \dots, e_n \forall 1 \leq i \leq n$.

Denotem com $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ el conjunt d'aplicacions multilineals $E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow F$.

$\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ té estructura de K -espai vectorial.

Exemple 3.14. a) $E_1 = E_2 = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f : E_1 \times E_2 &\longrightarrow F \\ (x, y) &\longrightarrow \sum x_i y_i. \end{aligned} \quad (3.5)$$

b) $E_1 = E_2 = M_n(\mathbb{R})$, $F = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f : E_1 \times E_2 &\longrightarrow F \\ (A, B) &\longrightarrow \text{tr}(AB). \end{aligned} \quad (3.6)$$

c) E_1 k -espai vectorial, $E_2 = E_1^*$, $F = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f : E_1 \times E_2 &\longrightarrow F \\ (u, \omega) &\longrightarrow \omega(u). \end{aligned} \quad (3.7)$$

El problema és poder convertir aplicacions multilineals en aplicacions lineals. Farem el cas $n = 2$, en general es fa igual.

Definició 3.15. *Sigui C un conjunt, sigui $c \in C$, denotarem per δ_c un símbol associat a c :*

$$\begin{aligned} \phi(C) &= \left\{ \sum_{i_1}^n \lambda_i \delta_{c_i} \mid n \geq 0, \lambda_i \in K \right\} = \\ &= \left\{ \sum_{c \in C} \lambda_c \delta_c \mid \text{Tots els } \lambda_c \text{ són nuls excepte un número finit} \right\}. \end{aligned}$$

Tenim que $\phi(C)$ és un K -espai vectorial amb les operacions $(+, \cdot)$.

$$\begin{aligned} (\sum \lambda_c \delta_c) + (\sum \mu_c \delta_c) &= (\sum (\lambda_c + \mu_c) \delta_c). \\ \rho(\sum \lambda_c \delta_c) &= \sum \rho \lambda_c \delta_c. \end{aligned}$$

Observació 3.16. Es diu que $\phi(C)$ és el K -espai vectorial generat per C .

Definició 3.17. *Siguin E_1, E_2 dos K -espais vectorials. Considerem el subespai vectorial de $\phi(E_1 \times E_2)$ generat per:*

$$\begin{aligned} \delta_{(e_1+e'_1, e_2)} - \delta_{(e_1, e_2)} - \delta_{(e'_1, e_2)} \\ \delta_{(e_1, e_2+e'_2)} - \delta_{(e_1, e_2)} - \delta_{(e_1, e'_2)} \\ \delta_{(\lambda e_1, e_2)} - \lambda \delta_{(e_1, e_2)} \\ \delta_{(e_1, \lambda e_2)} - \lambda \delta_{(e_1, e_2)} \end{aligned}$$

Al K -espai vectorial quocient el denotarem com $E_1 \otimes E_2$, i denotem per \otimes l'aplicació:

$$E_1 \times E_2 \longrightarrow \phi(E_1 \times E_2) \longrightarrow E_1 \otimes E_2$$

que envia $(e_1, e_2) \rightarrow \delta_{(e_1, e_2)} \rightarrow [\delta_{(e_1, e_2)}]$. i denotem $e_1 \otimes e_2$ la classe $[\delta_{(e_1, e_2)}]$

La propietat més important del producte tensorial és la següent:

Proposició 3.18. *Siguin E_1, E_2, F K -espais vectorials. Donada l'aplicació $f : E_1 \times E_2 \rightarrow F$ bilineal, $\exists!$ aplicació lineal $\hat{f} : E_1 \otimes E_2 \rightarrow F$ tal que:*

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 & \xrightarrow{\otimes} & E_1 \otimes E_2 \\ \downarrow f & \swarrow \hat{f} & \\ F & & \end{array}$$

Demostració: Existència. Definim $\hat{f}(\sum \lambda_{e_1, e_2}(e_1 \otimes e_2)) = \sum \lambda_{e_1, e_2} f(e_1, e_2)$. Volem veure que \hat{f} és lineal.

$$\begin{aligned} \hat{f}(e_1 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_4) &= f(e_1, e_2) + f(e_3, e_4) = \hat{f}(e_1 \otimes e_2) + \hat{f}(e_3 \otimes e_4) \\ \hat{f}(\lambda(e_1 \otimes e_2)) &= \lambda f(e_1, e_2) = \lambda \hat{f}(e_1 \otimes e_2). \end{aligned}$$

Per tant \hat{f} és lineal.

Unicitat. Suposem que existeix una altra aplicació lineal $g : E_1 \otimes E_2 \rightarrow F$. Per construcció de \hat{f} tenim que $\hat{f} \equiv g$.

Tenim així la bijecció:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(E_1, E_2; F) &\longrightarrow \mathcal{L}(E_1 \otimes E_2; F) \\ f &\longrightarrow \hat{f} \end{aligned} \tag{3.8}$$

■

Proposició 3.19. *Sigui e_1, \dots, e_n base d' E_1 i v_1, \dots, v_m base d' E_2 . Llavors $\{e_i \otimes v_j \mid i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}\}$ és base de $E_1 \otimes E_2$.*

Demostració. a) És fàcil veure que:

$$(e + e') \otimes v = e \otimes v + e' \otimes v$$

$$e \otimes (v + v') = e \otimes v + e \otimes v'$$

$$\lambda e \otimes v = e \otimes \lambda v = \lambda(e \otimes v)$$

b) Són linealment independents. Suposem que no, $\sum \lambda_{ij}(e_i \otimes v_j) = 0$. Fixem $i_0 \in \{1, \dots, n\}$, $j_0 \in \{1, \dots, m\}$ i considerem:

$$\begin{aligned} E_1 \times E_2 &\longrightarrow F \\ (e, v) &\longrightarrow \alpha_{i_0} \beta_{j_0} \end{aligned} \tag{3.9}$$

on $e = \sum \alpha_i e_i$, $v = \sum \beta_j v_j$.

Existeix $\hat{f} : E_1 \otimes E_2 \rightarrow K$ lineal tal que $\hat{f}(e \otimes v) = \alpha_{i_0} \beta_{j_0}$. En particular $\hat{f}(e_{i_0} \otimes v_{j_0}) = 1$, $\hat{f}(e_i \otimes v_j) = 0$ si $(i, j) \neq (i_0, j_0)$.

Aplicant \hat{f} a l'equació $\sum \lambda_{ij}(e_i \otimes v_j) = 0$ obtenim $\lambda_{i_0 j_0} = \hat{f}(0) = 0$.

■

Corol·lari 3.20. $\dim(E_1 \otimes E_2) = \dim(E_1) \cdot \dim(E_2)$.

3.2.2 Invariant de Dehn

Definició 3.21. Considerem \mathbb{R} i $\mathbb{R}/(\pi\mathbb{Q})$ com a \mathbb{Q} -espais vectorials. Definim:

$$\mathcal{W} = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}/(\pi\mathbb{Q}).$$

L'invariant de Dehn és una aplicació que assigna a cada poliedre un element de \mathcal{W}

$$\begin{aligned} \delta : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathcal{W} \\ P &\longrightarrow \sum_{\text{costats } e} l(e) \otimes [\theta(e)] \end{aligned} \quad (3.10)$$

on $l(e)$ denota la longitud del costat e , $\theta(e)$ denota l'angle diedral del costat e i $[\theta(e)]$ la corresponent classe d'equivalència a $\mathbb{R}/(\pi\mathbb{Q})$.

Teorema 3.22. (Dehn). Si $P \simeq Q \Rightarrow \delta(P) = \delta(Q)$.

Un pas previ per a demostrar aquest teorema és el següent lema.

Lema 3.23. Sigui $P \subset \mathbb{R}^3$ un poliedre i $\{P_1, \dots, P_k\}$ una descomposició poliedral. Llavors $\delta(P) = \delta(P_1) + \dots + \delta(P_k)$. També diem que l'invariant de Dehn es preserva per secció.

Demostració: Sigui χ una aresta d'un poliedre de la descomposició poliedral de P i siguin P_{i_1}, \dots, P_{i_k} tots els poliedres dels quals χ n'és una aresta. Classifiquem segons la disposició de χ respecte P :

Cas 1: χ està a l'interior de P . En aquest cas els angles diedrals corresponents a l'aresta χ són $\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_k}$ respecte P_{i_1}, \dots, P_{i_k} . Clarament $\theta_{i_1} + \dots + \theta_{i_k} = 2\pi$. Així:

$$\sum_{j=1}^k l(\chi) \otimes [\theta_{i_j}] = l(\chi) \otimes \sum_{j=1}^k [\theta_{i_j}] = l(\chi) \otimes \left[\sum_{j=1}^k \theta_{i_j} \right] = l(\chi) \otimes [2\pi] = l(\chi) \otimes 0 = 0.$$

Cas 2: χ està en una cara de P però no en una aresta. Prenem la mateixa notació del cas 1, ara tenim però $\theta_{i_1} + \dots + \theta_{i_k} = \pi$. Com la classe d'equivalència de π és la mateixa que de 2π obtenim el mateix resultat:

$$\sum_{j=1}^k l(\chi) \otimes [\theta_{i_j}] = 0.$$

Cas 3: χ està en una aresta de P . Tenim que $\theta_{i_1} + \dots + \theta_{i_k} = \theta$ o bé $\theta_{i_1} + \dots + \theta_{i_k} = \theta - \pi$, on θ és l'angle diedral que li correspon a l'aresta on es troba χ . Finalment:

$$\sum_{j=1}^k l(\chi) \otimes [\theta_{i_j}] = l(\chi) \otimes \left[\sum_{j=1}^k \theta_{i_j} \right] = l(\chi) \otimes [\theta]$$

o bé,

$$\sum_{j=1}^k l(\chi) \otimes [\theta_{i_j}] = l(\chi) \otimes \left[\sum_{j=1}^k \theta_{i_j} \right] = l(\chi) \otimes [\theta - \pi] = l(\chi) \otimes [\theta]$$

Prenem tots els χ_1, \dots, χ_r que formen l'aresta λ . Tots tenen el mateix angle diedral θ , i obtenim la següent igualtat:

$$\sum_{i_1}^r l(\chi_{i_1}) \otimes [\theta] = \left(\sum_{i_1}^r l(\chi_{i_1}) \right) \otimes [\theta] = l(\lambda) \otimes [\theta]$$

Que és una suma parcial de l'invariant de Dehn de P . Per tant podem expressar l'invariant de Deh de P com la suma de les quantitats

$$\sum_{i_1}^r l(\chi_{i_1}) \otimes [\theta]$$

per a cada χ_i arestes dels P_j . Reagrupem els χ_i de tal manera que formin l'invariant de Dehn dels P_j .

Finalment $\delta(P) = \delta(P_1) + \dots + \delta(P_k)$

■

Demostració del teorema: Com P_i és congruent amb Q_i es preserven les distàncies dels vèrtexs i com a conseqüència les longituds dels costats i els corresponents angles diedrals. Per tant, l'invariant de Dehn és invariant per isometria i:

$$P_i \simeq Q_i \Rightarrow \delta(P_i) = \delta(Q_i), \forall 1 \leq i \leq k.$$

Ara juntant aquest resultat i el lema 3.23 tenim que

$$\delta(P) = \delta(P_1) + \dots + \delta(P_k) = \delta(Q_1) + \dots + \delta(Q_k) = \delta(Q).$$

■

3.3 Relació entre les dues definicions de l'invariant de Dehn

A la definició per funcions íntegrament additives teniem que $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ és íntegrament additiva si $n_1\alpha_1 + \dots + n_m\alpha_m = 0 \Rightarrow n_1f(\alpha_1) + \dots + n_mf(\alpha_m) = 0 \forall n_i \in \mathbb{Z}$.

Proposició 3.24. *Si la implicació és certa per \mathbb{Z} també ho és per \mathbb{Q} .*

Demostració: Si $(p_1/q_1)\alpha_1 + \dots + (p_k/q_k)\alpha_k = 0$, prenem $m = \text{mcm}(q_1, \dots, q_k)$, llavors es compleix que $(mp_1/q_1)\alpha_1 + \dots + (mp_k/q_k)\alpha_k = 0$ i $(mp_i/q_i) \in \mathbb{Z} \forall 1 \leq i \leq k$.

Definició 3.25. *A partir de A definim el següent subespai vectorial:*

$$\mathbb{Q}(A) = \{q_1\alpha_1 + \dots + q_e\alpha_e \mid \alpha_i \in A, q_i \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}.$$

Clarament $\mathbb{Q}(A)$ és \mathbb{Q} -espai vectorial.

Considerem $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ funció íntegrament additiva. La podem estendre a una funció $\hat{f} : \mathbb{Q}(A) \rightarrow \mathbb{R}$ de tal manera que:

$$\hat{f}(q_1\alpha_1 + \dots + q_e\alpha_k) = q_1\hat{f}(\alpha_1) + \dots + q_e\hat{f}(\alpha_k)$$

que és \mathbb{Q} -lineal.

Com A conté una base de $\mathbb{Q}(A)$, f és íntegrament additiva i $\hat{f}(\alpha_i) = f(\alpha_i)$, llavors \hat{f} està ben definida.

Ara podem considerar la funció bilineal

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{Q}(A) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\xi, \alpha) &\longrightarrow \xi\hat{f}(\alpha) \end{aligned} \tag{3.11}$$

que determina $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(A) \rightarrow \mathbb{R}$.

Si $\pi \in A$ i $f(\pi) = 0$ tenim, de fet, una aplicació

$$h : \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(A) / (\pi\mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Sigui P un poliedre, considerem el conjunt

$$A = \{\pi\} \cup \{\alpha_i\}_{i \in I}$$

on α_i són els angles diedrals de P .

Sigui $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funció íntegrament additiva complint que $f(\pi) = 0$, considerem l'extensió

$$\hat{f} : \mathbb{R} \otimes \mathbb{Q}(A) / (\mathbb{Q}\pi) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Aleshores l'invariant de Dehn per funcions íntegrament additives és:

$$\hat{f}\left(\sum_i l_i \otimes [\alpha_i]\right) = \sum_i l_i f(\alpha_i).$$

I podem construir el següent diagrama,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(A)/(\mathbb{Q}\pi) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \downarrow i & \nearrow \hat{f} & \\ \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}/(\mathbb{Q}\pi) & & \end{array}$$

Recordem a l'exemple 3.12 que hem calculat l'invariant de Dehn d'un cub. En aquest cas consideràvem $A = \{\pi, \pi/2, \phi\}$ ($\phi = \arccos(1/3)$), amb $f(\pi) = f(\pi/2) = 0, f(\phi) = 1$. Tenim que:

$$\sum_i^n l_i \otimes [\alpha_i] = nl \otimes [\phi] \rightarrow nl$$

i així,

$$\delta_{ia}(P) = 0 \Leftrightarrow \delta_{pt}(P) = 0.$$

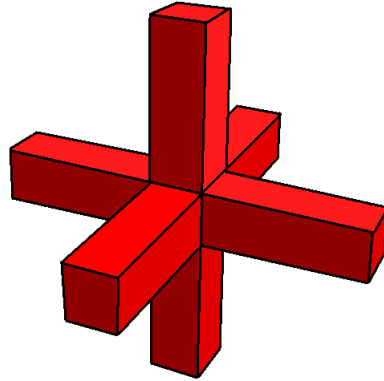
On δ_{ia} denota l'invariant de Dehn per funcions íntegrament additives i δ_{pt} per producte tensorial. En el cas de tetraedre, havíem imposat que el volum fos el mateix, com el cub té arestes $1u$ implica que les arestes del tetraedre mesuren $\sqrt[3]{\frac{12}{\sqrt{2}}}$. Considerant $f(\arccos(1/3))$, l'invariant de Dehn del tetraedre és:

$$\begin{aligned} \hat{f}\left(\sum_{i_1}^6 \sqrt[3]{\frac{12}{\sqrt{2}}} \otimes [\arccos(1/3)]\right) &= \hat{f}\left(6 \sqrt[3]{\frac{12}{\sqrt{2}}} \otimes [\arccos(1/3)]\right) = \\ &= 6 \sqrt[3]{\frac{12}{\sqrt{2}}} f(\arccos(1/3)) = 6 \sqrt[3]{\frac{12}{\sqrt{2}}}. \end{aligned}$$

3.4 Exemples de càlculs d'invariant de Dehn.

En aquesta secció calcularem l'invariant de Dehn d'alguns sòlids així utilitzant algunes de les seves propietats.

Tetrahemihexaedre. Sigui TH el nostre poliedre, tenim que una descomposició poliedral és $TH = P_1 + \dots + P_6 + C$ on P_i són els prismes de base quadrada i C el cub central.



Hem vist que l'invariant de Dehn es preserva per secció, per tant

$$\delta(TH) = 6 \cdot \delta(P_l) + \delta(C)$$

per un $1 \leq l \leq 6$ qualsevol, donat que $\delta(P_1) = \delta(P_2) = \dots = \delta(P_6)$.
Per l'exemple 3.12 $\delta(C) = 0$.

Ara,

$$\delta(P_l) = \sum_{i=1}^8 l(e_i) \otimes [\theta(e_i)] + \sum_{j=1}^4 l(r_j) \otimes [\varphi(r_j)]$$

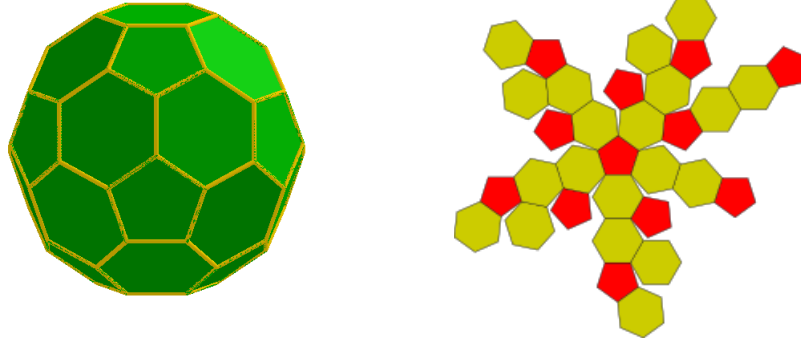
amb e_i els costats de les bases ($\theta(e_i)$ els corresponents angles diedrals) i r_j els costats de les cares ($\varphi(r_j)$ els corresponents angles diedrals). Notem que $\theta(e_1) = \dots = \theta(e_8) = \varphi(r_1) = \dots = \varphi(r_4) = \frac{\pi}{2}$ i la corresponent classe d'equivalència a \mathcal{W} és 0.

Per tant, independentment de les mesures de e_i i r_j , $\delta(P_l) = 0$.

Finalment $\delta(TH) = 0$.

Observació 3.26. L'invariant de Dehn de qualsevol paral·lelepípede recte és 0.

Icosaedre truncat. És un dels 13 poliedres arquimedians que s'obté truncant els 12 vèrtex d'un icosaedre. Consta de 12 pentàgons i 20 hexàgons.



Per obtenir els angles diedrals ho fem de manera semblant amb el tetraedre que hem vist a la demostració de la proposició 3.11. Les coordenades cartesianes dels vèrtexs d'un icosaedre truncat centrat a l'origen són totes les permutacions parelles de: $(0, \pm 1, \pm 3\varphi)$, $(\pm 1, \pm(2 + \varphi), \pm 2\varphi)$, $(\pm\varphi, \pm 2, \pm\varphi^3)$,

on $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. [3] Tenim dos tipus d'angles diedrals en aquesta figura:

Hexàgon-Hexàgon: $\arcsin(2/3)$.

Hexàgon-Pentàgon: $\arccos(-159/200)$.

En el desplegament podem comprovar que no hi ha cap connexió pentàgon-pentàgon. Per tant per cada costat dels pentàgons tenim una connexió pentàgon-hexàgon i la resta d'arestes seran hexàgon-hexàgon. Doncs tenim $12 \text{ pentàgons} \times 5 \text{ arestes} = 60 \text{ arestes}$ del tipus hexàgon-pentàgon.

Per tant,

$$\begin{aligned} \delta(IT) &= \sum_{i=1}^{60} l(e_p) \otimes [\arccos(-159/200)] + \sum_{j=1}^{30} l(e_h) \otimes [\arcsin(2/3)] = \\ &= 60l(e_p) \otimes [\arccos(-159/200)] + 30l(e_h) \otimes [\arcsin(2/3)] \end{aligned}$$

On $l(e_p)$ denota la longitud d'una aresta dels pentàgons i $l(e_h)$ la longitud d'una aresta dels hexàgons.

4 Els sòlids platònics

Havent estudiat les propietats necessàries perquè dos sòlids siguin SC , anem a estudiar aquest concepte en una família de sòlids amb molt pes històric: els sòlids platònics. Així doncs aquest capítol es basa en l'estudi d'aquests per poder finalment obtenir l'invariant de Dehn.

Els sòlids platònics són els 5 únics poliedres convexos regulars, que representaven antigament els quatre elements i l'univers: el tetraedre (foc), el cub (terra), l'octaedre (aire), l'icosaedre (aigua) i el dodecaedre (l'univers). Els Elements d'Euclides comencen amb la construcció d'un triangle equilàter i acabar al llibre XIII amb la construcció d'aquests sòlids. Euclides els va definir pel nombre i tipus de cares que tenien, després, els va construir en una esfera i va remarcar així que aquests 5 són els únics possibles.

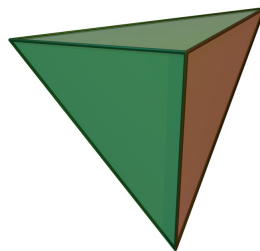
En aquesta secció provarem que només hi ha 5 poliedres regulars, estudiarem la seva construcció tot detallant el càlcul dels angles diedrals.

4.1 Existència i unicitat

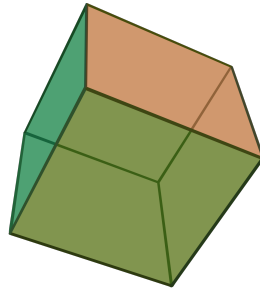
Aquesta secció està adaptada de [8].

4.1.1 Construcció

Tetraedre. Veure la demostració de la proposició 3.11.



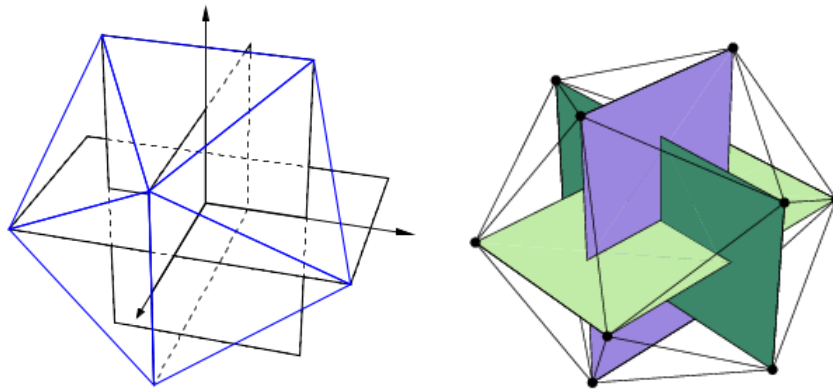
Hexaedre regular o Cub. Sigui $Q_1 \subset \mathbb{R}^3$ un quadrat amb coordenades $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (1, 1, 0)$ i $D = (0, 1, 0)$. Seguim amb un quadrat Q_2 amb coordenades $C, D, E = (1, 1, 1)$ i $F = (0, 1, 1)$. Seguim amb el quadrat Q_3 amb coordenades $E, F, G = (1, 0, 1)$, $H = (0, 0, 1)$. Clarament $ABGH$, $BCEG$ i $ADHF$ també són quadrats. Per tant podem construir l'hexaedre o cub Q les cares del qual són totes polígons regulars.



Icosaedre. Sigui $\phi = 1/2(1 + \sqrt{5})$ el nombre d'or. Considerem els plans amb les següents coordenades:

$$(0, \pm 1, \pm \phi), (\pm \phi, 0, \pm 1), (\pm 1, \pm \phi, 0)$$

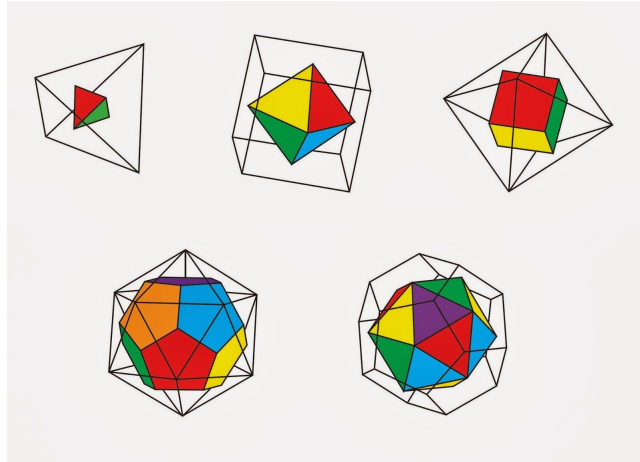
Els vèrtex d'aquests plans determinen 20 triangles equilàters de mesura 2 i en cada vèrtex connecten 5 triangles.



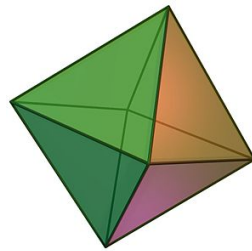
Per tant podem construir un poliedre $I \subset \mathbb{R}^3$ de 20 cares les quals són triangles equilàters.

Definició 4.1. Un *poliedre dual* o *conjugat* és el poliedre els vèrtexs dels quals corresponen al centre de les cares d'un altra poliedre donat. El dual del dual és semblant a ell mateix.

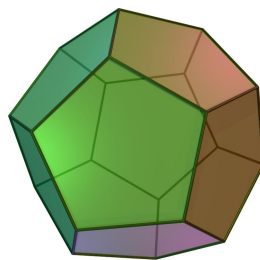
- Observació 4.2.**
- 1) El cub i l'octaedre són poliedres duals l'un de l'altre.
 - 2) El dodecaedre i l'icosaedre són poliedres duals l'un de l'altre.
 - 3) El tetraedre és dual d'ell mateix (auto-dual).



Octaedre. Sigui $O \subset \mathbb{R}^3$ un octaedre i $C \subset \mathbb{R}^3$ un cub. Com són duals l'un de l'altre $\exists O \Leftrightarrow \exists C$. Com hem provat l'existència del cub, queda provada la de l'octaedre.



Dodecaedre. Sigui $D \subset \mathbb{R}^3$ un dodecaedre i $I \subset \mathbb{R}^3$ un icosaedre. Com són duals l'un de l'altre $\exists D \Leftrightarrow \exists I$. Per tant com ja hem provat l'existència de l'icosaedre, queda provada la del dodecaedre.



4.1.2 Teorema d'Euler per poliedres

Utilitzarem el teorema d'Euler per poliedres per demostrar que no hi ha més poliedres regulars que els 5 platònics.

Primer de tot el que volem és mapejar la superfície d'un poliedre a una esfera que circumscriu el poliedre. El que obtenim és un conjunt de poliedres esfèrics o xarxa.

Definició 4.3. *Diem que una **xarxa** dins una esfera és una figura que consisteix d'un nombre finit de peces poligonals planes que en diem cares (m), un nombre finit d'arestes corbes que en diem cordes (s), i els nusos o vèrtexs (k) que compleixen aquestes condicions:*

- 1.- *Tot punt de l'esfera pertany, al menys, a una cara, i dos diferents cares no tenen cap punt interior en comú.*
- 2.- *La frontera de cada cara està formada per cordes.*
- 3.- *Un punt sobre una corda no és interior.*

Teorema 4.4 (Teorema d'Euler per poliedres). *Per a qualsevol poliedre, que és homeomorf a una xarxa, amb m, k, c els elements definits anteriorment es compleix que:*

$$m + k - s = 2$$

La demostració es pot trobar a [8].

Definició 4.5. *Diem que una **xarxa** és **regular** si existeixen λ, μ tals que per a cada vèrtex (k) en neixen λ cordes, i la frontera de cada cara (m) està formada per μ cordes.*

Proposició 4.6. *Existeixen exactament 5 poliedres regulars, amb $\lambda, \mu \leq 5$ tals que, o bé $\lambda = 3$ o bé $\mu = 3$.*

Demostració: Com tota cara està limitada per μ cordes i cada corda pertany a dos cares es compleix que:

$$s = \frac{\mu m}{2}, \quad s = \frac{\lambda k}{2}$$

Que ho podem reescriure com:

$$m = \frac{2c}{\mu}, \quad k = \frac{2c}{\lambda}$$

Aplicant el teorema d'Euler per poliedres obtenim:

$$\frac{2c}{\mu} + \frac{2c}{\lambda} - c = 2$$

$$\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} + \frac{1}{c}$$

Obtenint la desigualtat $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda} > \frac{1}{2}$ que prova que λ i μ almenys un d'ells ha de ser 3, donat que $1/4 + 1/4 = 1/2$.

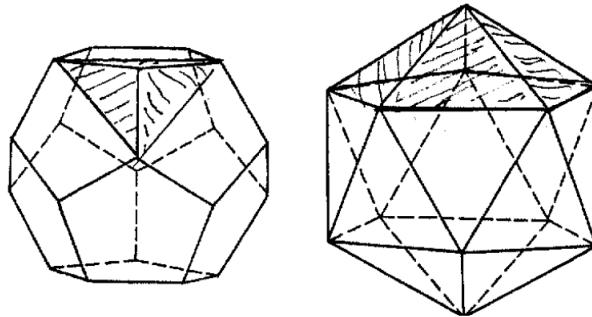
Finalment podem trobar una cota superior $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} < 1/6 + 1/3 = 1/2$ i veiem que només existeixen 5 combinacions possibles:

λ	μ	s	m	k	Poliedre
3	3	6	4	4	Tetraedre
3	4	12	6	8	Cub
3	5	30	12	20	Dodecaedre
4	3	12	8	6	Octaedre
5	3	30	20	12	Icosaedre

4.2 L'angle diedral d'una piràmide

Un cop vist que no hi ha més, veurem com calcular els angles diedrals i a continuació calcularem l'invariant de Dehn.

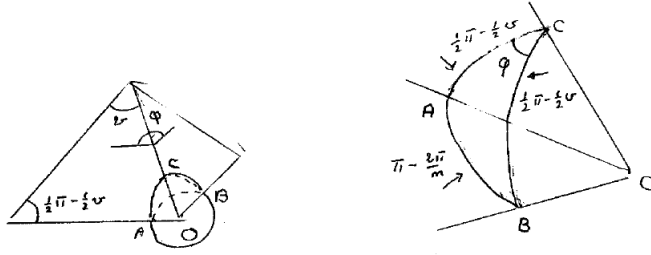
El càlcul dels angles diedrals del cub són força fàcils, per als altres quatre necessitem un pas previ, que consisteix en demostrar com calcular l'angle diedral de qualsevol piràmide, donat que el tetraedre és una piràmide triangular, l'octaedre està format per dues piràmides (quadrangulars) i tant del dodecaedre com de l'icosaedre en podem obtenir piràmides pentagonals en ambdós casos. Els angles diedrals de les piràmides corresponent a arestes que neixen de la cúspide, equivalen als dels corresponents poliedres, tal i com es mostra a la següent figura.



Sigui $P \subset \mathbb{R}^3$ una piràmide n-gonal els costats dels quals són m els de la base i $r > 1$ els que neixen de la cúspide. L'angle diedral de les cares que volem calcular és ϕ . Cada cara la formen triangles isòsceles d'angles v (el corresponent a la cúspide) i $\alpha = 1/2(\pi - v)$ els corresponents a la base.

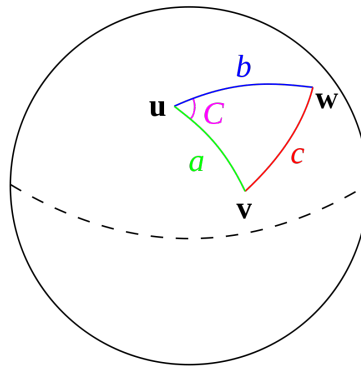
Construïm una esfera de radi 1 amb centre O vèrtex qualsevol de la piràmide. L'esfera intersecta la piràmide en tres arcs de circumferència, AB , BC i AC , els quals, per trigonometria, mesuren $AB = \pi - \frac{2\pi}{n}$, $AC = BC = 1/2(\pi - v)$.

Aquests arcs formen un triangle esfèric. Com l'angle C coincideix amb l'angle de les rectes tangents als arcs de circumferència, tenim que $C = \phi$.



Proposició 4.7. Fórmula del cosinus per a trigonometria esfèrica.
 Donada una esfera de radi $1u$, un triangle esfèric amb vèrtexs u, v i w i costats a (conecta u i v), b (conecta u i w) i c (conecta v i w), i l'angle del costat oposat de c és C , la fórmula del cosinus per trigonometria esfèrica és:

$$\cos(c) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\cos(C).$$



Demostració: Siguin u, v i w els vectors unitaris que van del centre de l'esfera als corresponents vèrtex del triangle. Com les longituds i els angles són invariants per rotació, movem tot el triangle de tal manera que u caigui al pol nord i v al pla $y = 0$. Les coordenades dels vectors són les següents:

$$u = (0, 0, 1)$$

$$v = (\sin(a), 0, \cos(a))$$

$$w = (\sin(b)\cos(C), \sin(b)\sin(C), \cos(b))$$

El valor de $\cos(c)$ correspon al producte escalar de v i w , que és:

$$\cos(c)\|v\|\|w\| = \sin(a)\sin(b)\cos(C) + \cos(a)\cos(b)$$

amb $\|v\| = 1, \|w\| = 1$.

■

L'angle diedral el podem trobar a través del triangle esfèric ABC . Utilitzant la fórmula del cosinus per trigonometria esfèrica obtenim:

$$\cos(c) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\cos(C)$$

$$\begin{aligned} \cos(AB) &= \cos(BC)\cos(AC) + \sin(BC)\sin(AC)\cos(\varphi) \\ \cos(\pi - (2\pi/n)) &= \cos(1/2(\pi - v))\cos(1/2(\pi - v)) + \sin(1/2(\pi - v))\sin(1/2(\pi - v))\cos(\varphi). \end{aligned}$$

Ara, usant les següents relacions trigonomètriques:

$$\begin{aligned} \cos(\pi - \alpha) &= -\cos(\alpha) \\ \sin((\pi/2) - \alpha) &= \cos(\alpha) \\ \cos((\pi/2) - \alpha) &= \sin(\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\cos(2\pi/n) &= \sin^2(v/2) + \cos^2(v/2)\cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) &= -\frac{\cos(2\pi/n) + \sin^2(v/2)}{\cos^2(v/2)}. \end{aligned}$$

Ara, de l'expressió $\cos(2x) = 1 - \sin^2 x$, tenim que $\sin(x) = \sqrt{\frac{1 - \cos(2x)}{2}}$, per tant:

$$\begin{aligned} \sin(\varphi/2) &= \sqrt{1/2 \left(1 + \frac{\cos(2\pi/n) + \sin^2(v/2)}{\cos^2(v/2)} \right)} \\ &= \sqrt{\frac{\cos^2(v/2) + \cos(2\pi/n) + \sin^2(v/2)}{2\cos^2(v/2)}} = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\pi/n)}{2\cos^2(v/2)}}. \end{aligned}$$

Finalment aplicant que $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 \Leftrightarrow 1 + \cos(2x) = 2\cos^2(x)$ al numerador:

$$\sin(\varphi) = \frac{\cos(\pi/n)}{\cos(v/2)}.$$

Observació 4.8. Sigui $R \subset \mathbb{R}^3$ un poliedre regular. Denotem al nombre de arestes que neixen d'un vèrtex com λ i al nombre de arestes que constitueixen qualsevol cara del poliedre com μ . Podem reescriure la fórmula anterior com:

$$\sin(\varphi/2) = \frac{\cos(\pi/\lambda)}{\cos((\pi/2) - (\pi/\mu))} = \frac{\cos(\pi/\lambda)}{\sin(\pi/\mu)}.$$

Donat que si n és el nombre de arestes de la base de la piràmide, coincideix amb el nombre de arestes que neixen de qualsevol vèrtex del poliedre, i si v és l'angle superior de qualsevol cara de la piràmide el podem escriure com $v = \pi - (2\pi/m)$ on m és el nombre d'arestes de qualsevol cara ($m = \mu$).

λ i μ recordem que prenen els següents valors per a cadascun dels sòlids platònics.

λ	μ	Poliedre
3	3	Tetraedre
3	4	Cub
3	5	Dodecaedre
4	3	Octaedre
5	3	Icosaedre

A continuació calcularem els angles diedrals dels sòlids platònics tot per poder calcular l'invariant de Dehn.

Tetraedre. Per l'apartat anterior, $(\lambda, \mu) = (3, 3)$, per tant l'angle diedral φ el podem calcular tal que:

$$\sin(\varphi/2) = \frac{\cos(\pi/3)}{\sin(\pi/3)} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \sqrt{3}/3$$

$$\varphi = 2\arcsin(\sqrt{3}/3) = \arccos(1/3).$$

Aquesta última igualtat la podem comprovar aplicant cosinus als dos costats i usant que $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$.

Per a calcular l'invariant de Dehn d'un tetraedre T considerarem que tots els costats mesuren $1u$. Per als següents casos ho prendrem així també.

$$\delta(T) = \sum_{i=1}^6 l(e_i) \otimes [e_i] = 6 \otimes [\arccos(1/3)].$$

Cub. En aquest cas $(\lambda, \mu) = (3, 4)$, doncs:

$$\sin(\varphi/2) = \frac{\cos(\pi/3)}{\sin(\pi/4)} = \frac{1/2}{\sqrt{2}/2} = \sqrt{2}/2$$

$$\varphi/2 = \arcsin(\sqrt{2}/2) = \pi/4$$

$$\varphi = \pi/2.$$

Anem a calcular l'invariant de Dehn d'un cub C . Anteriorment hem vist que val 0 per funcions íntegrament additives, i en la secció 3.3 hem vist que $\delta_{ia} = 0 \Leftrightarrow \delta_{pt} = 0$. No està de menys, però, comprovar-ho:

$$\delta(C) = \sum_{i=1}^{12} l(e_i) \otimes [e_i] = 12l(e_i) \otimes [\pi/2] = 12l(e_i) \otimes 0 = 0.$$

Icosaedre. Per a calcular els angles diedrals tenim $(\lambda, \mu) = (5, 3)$:

$$\sin(\varphi/2) = \frac{\cos(\pi/5)}{\sin(\pi/3)} = \frac{1/4(1 + \sqrt{5})}{\sqrt{3}/2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$$

$$\varphi/2 = \arcsin\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{3}}\right)$$

$$\varphi = 2\arcsin\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{3}}\right).$$

Passem a calcular l'invariant de Dehn. Consta de 30 arestes, els angles diedrals de les quals valen $2\arcsin\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}\right)$.

Per tant:

$$\delta(I) = \sum_{i_1}^{30} l(e_i) \otimes [\theta(e_i)] = 30 \otimes \left[2\arcsin\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}\right) \right] = 60 \otimes \left[\arcsin\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}\right) \right].$$

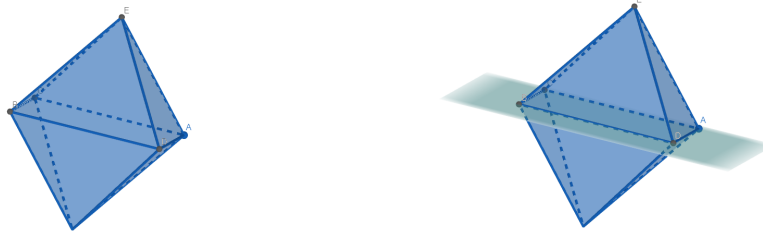
Octaedre. Anem a calcular els angles diedrals. $(\lambda, \mu) = (4, 3)$.

$$\sin(\varphi/2) = \frac{\cos(\pi/\lambda)}{\sin(\pi/\mu)} = \frac{\cos(\pi/4)}{\sin(\pi/3)}$$

$$\varphi/2 = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{3}/2}\right)$$

$$\varphi = 2\arcsin(\sqrt{2/3}) = \arccos(-1/3).$$

Al calcular $\delta(O)$ comprovarem que l'invariant de Dehn es preserva per secció. Per això seccionem per un pla l'octaedre.



Obtenim dues piràmides, de les quals podem calcular el seu invariant de Dehn per separat. En particular és el mateix per les dues per ser l'octaedre regular. Per tant tenim que

$$\delta(O) = 2\delta(P)$$

on O denota l'octaedre i P una piràmide.

Suposem que els costats dels octaedres mesuren $1u$, en conseqüència tots els costats de les piràmides mesuren $1u$.

$$\delta(O) = \sum_{i=1}^{12} l(e_i) [\theta(e_i)].$$

Tenim que $\theta(e_i) = \arccos(-1/3) \forall 1 \leq i \leq 12$, per tant:

$$\delta(O) = 12 \otimes [\arccos(-1/3)].$$

D'altra banda, els angles diedrals dels triangles de la piràmide són els mateixos que els de l'octaedre. En canvi els de la base són exactament la meitat $(1/2)\arccos(-1/3)$. Doncs:

$$\begin{aligned} \delta(P) &= \sum_{j=1}^8 l(e_j) \otimes [\theta(e_j)] = \sum_{j=1}^4 \otimes [\arccos(-1/3)] + \sum_{k=1}^4 (1/2) \otimes [\arccos(-1/3)] = \\ &= 4 \otimes [\arccos(-1/3)] + 2 \otimes [\arccos(-1/3)] = 6 \otimes [\arccos(-1/3)] = (1/2)\delta(O). \end{aligned}$$

Dodecaedre. $(\lambda, \mu) = (3, 5)$, per tant,

$$\begin{aligned} \sin(\varphi/2) &= \frac{\cos(\pi/\lambda)}{\sin(\pi/\mu)} = \frac{\cos(\pi/3)}{\sin(\pi/5)} \\ \varphi/2 &= \arcsin\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}}\right) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}}\right) \\ \varphi &= 2\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}}\right) = \arccos(-1/\sqrt{5}). \end{aligned}$$

La última igualtat es pot comprovar igual que abans.

Passem a calcular l'invariant de Dehn. En aquest cas no ens cal treballar el sòlid per seccions, doncs consta de 30 arestes els angles diedrals de les quals valen tots $\arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$.

$$\delta(D) = \sum_{i=1}^{30} l(e_i) \otimes [\theta(e_i)] = 30 \otimes \left[\arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right) \right].$$

5 Aplicacions

5.1 Congruència estable per tisores

En aquesta secció tractarem el concepte de congruència estable per tisores, conseqüència de la congruència per tisores. És necessària per a la demostració del teorema de Dehn-Sydler, tot i que en aquest treball no tractarem la seva demostració donat que són necessaris conceptes més avançats que s'escapen del grau.

El teorema de Dehn-Sydler afirma que dos poliedres a \mathbb{R}^3 són congruents per tisores si, i només si, tenen el mateix volum i invariant de Dehn. Max Dehn va provar al 1901 que la condició de l'invariant de Dehn era necessària [4]. 64 anys més tard, Sydler va provar que aquesta mateixa condició, junt amb la del volum eren suficients [11].

Passem a definir què vol dir que dos poliedres siguin congruents estables per tisores.

Sigui \mathcal{P} el grup abelià de sumes finites

$$a_1P_1 + \dots + a_nP_n \text{ amb } a_k \in \mathbb{Z}$$

on P_1, \dots, P_n són poliedres de \mathbb{R}^3 . El volum i l'invariant de Dehn s'extenen linealment a tot \mathcal{P} , com hem vist en el lema 3.8 i 3.23. Sigui $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}$ el subgrup generat per les relacions de la forma:

$P - (P_1 + \dots + P_n)$, on $P_1 + \dots + P_n$ és una descomposició poligonal de P .
 $P - I(P)$ on I és una isometria.

Definició 5.1. *Diem que P i Q són **congruents estables per tisores** (a partir d'ara SSC) si $P - Q \in \mathcal{E}$.*

Recordem que si dos poliedres $P, Q \subset \mathbb{R}^3$ són SC ho denotem com $P \simeq Q$. Abans de provar el resultat més important d'aquesta secció, és necessari el següent teorema.

Teorema 5.2. (Zylev). *Sigui $F \in \mathbb{R}^3$ un poliedre. Siguin $A, B \subset F$. Si $F - A \simeq F - B \Rightarrow A \simeq B$.*

Demostració: Reescribim el conjunt F a través de A i B com:

$$F = A \cup \bigcup_{k=1}^n P_k = B \cup \bigcup_{k=1}^n Q_k: \forall k: P_k \simeq Q_k \text{ i } V(P_k) < \frac{V(A)}{2}.$$

Diem que el trio (A, B, F) té ordre n .

Apliquem inducció sobre n . Si $n = 0$ vol dir $F - A = F - B = \emptyset$, llavors $A = B$. En aquest cas queda provat.

Suposem $n > 0$. La idea és anar "eliminant" Q_n . La cota del volum ens diu que $V(A - Q_n) > V(Q_n)$, això vol dir que podem trobar disjunts $T_1, \dots, T_n \in A - Q_n$ tals que $T_k \simeq P_k \cap Q_n$

La figura 1 ens mostra el cas $n = 3$, veiem que els T_k no han d'estar necessàriament connectats, però cada T_k és una unió finita de poliedres. Està dibuixat esquemàticament T_1 i T_2 assota de P_1 i P_2 respectivament. Definim ara:

$$F' = F - Q_n; Q'_k = Q_k; B' = F' - \bigcup_{k=1}^{n-1} Q'_k;$$

$$P'_k = (P_k - Q_n) \cup T_k \simeq Q'_k; A' = F' - \bigcup_{k=1}^{n-1} P'_k;$$

Ara, el trio (A', B', F') té ordre $n - 1$. Tenim que $B' = B$, i, per inducció sobre n $A' \simeq B'$. Només ens queda provar $A' \simeq A$. La idea està en introduir una regió intermitja A'' i provar que $A'' \simeq A'$ i $A' \simeq A$.

Definim A'' com a la figura 1. A'' s'obté d' A canviant els T_k pels $Q_n \cap P_k$ per tot k . Per tant $A \simeq A''$. Obtenim A' de A'' tallant els Q_n i movent les peces a $(P_n - Q_n) \cup T_n$. Això és possible perquè $Q_n \simeq (P_n - Q_n) \cup T_n$. Per tant $A'' \simeq A'$, per tant $A \simeq A'$.

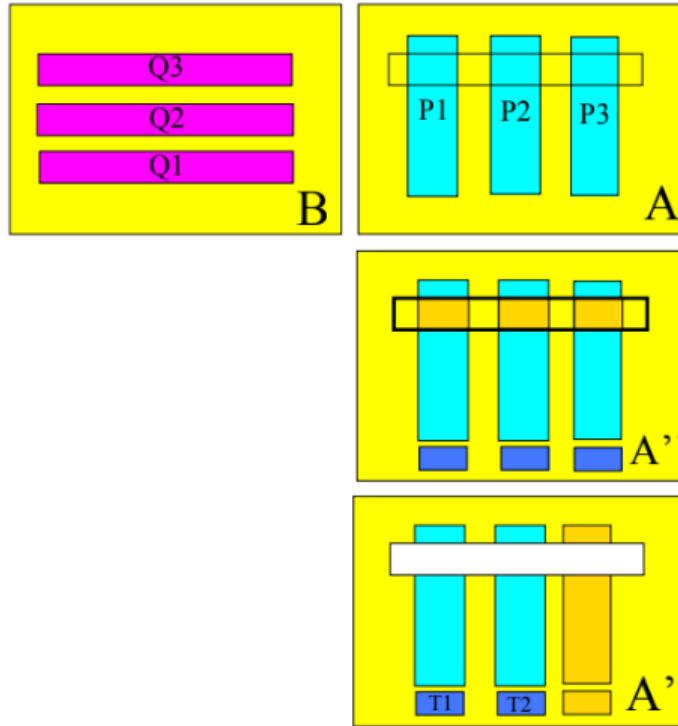


Figura 1

■

Teorema 5.3. $P \simeq Q \Leftrightarrow P$ i Q són SSC.

Demostració: \Rightarrow) Si tenim que $P = P_1 + \dots + P_n$ i $Q = Q_1 + \dots + Q_n$ podem generar \mathcal{E} a partir de qualsevol de les dues descomposicions. Com $Q_i \simeq P_i \forall 1 \leq i \leq n$ tenim que, en qualsevol dels dos casos $P \equiv Q \pmod{\mathcal{E}}$ o bé $Q \equiv P \pmod{\mathcal{E}}$. Per tant P i Q són SSC.

\Leftarrow) Suposem que P i Q són SSC. Extenent la suma sobre \mathcal{P} de tal manera que els $a_i = \pm 1, \forall i$

Com P i Q són SSC tenim que $P - Q \in \mathcal{E} = \langle R - (R_1 + \dots + R_n), R - I(R) \rangle$
Per tant,

$$P - Q = \sum n_i(R - (R_{i_1} + \dots + R_{i_n})) + \sum m_j(R - I(R))$$

El primer sumatori correspon a les relacions de dissecció i el segon a les relacions de isometria.

Ho podem reescriure com

$$P - Q = \sum (R_i - \sum R_{ij}) - \sum (S_i - \sum S_{ij}) + \sum (T_i - U_i)$$

$$P + \sum R_i + \sum S_{ij} + \sum T_i = Q + \sum S_i + \sum R_{ij} + \sum U_i$$

Podem trobar poliedres P' i Q' tals que:

$$P' = \sum R_i + \sum S_{ij} + \sum T_i, Q' = \sum S_i + \sum R_{ij} + \sum U_i$$

$$P \cap P' = Q \cap Q' = \emptyset; P' \simeq Q'; P \cup P' \simeq Q \cup Q'$$

Sigui $A = P$ i $F = P \cup P'$. Ara sigui θ la isometria que envia $Q \cup Q'$ a $P \cup P'$. Prenem $B = \theta(Q)$, llavors $B \simeq Q$ i θ defineix una congruència per tisores entre $F - B$ i Q' . Per tant $F - A = P' \simeq Q' \simeq F - B$. Pel teorema de Zylev $A \simeq B \Rightarrow P \simeq Q$.

■

5.2 Poliedres que omplen l'espai

El problema de caracteritzar poliedres que puguin omplir \mathbb{R}^3 amb còpies congruents en alguns casos pot ser trivial com el cub. Ens podem preguntar si és possible omplir l'espai amb altres poliedres. A continuació provarem una condició necessària perquè això sigui possible.

Definició 5.4. *Direm que un poliedre $P \subset \mathbb{R}^3$ és **space-filling** (a partir d'ara SF) si pot omplir \mathbb{R}^3 amb còpies congruents.*

Teorema 5.5. *Si $P \subset \mathbb{R}^3$ (convex o no convex) és $SF \Rightarrow P \simeq Q$ on Q és un cub del mateix volum que P .*

Demostració: [7] Pel teorema de Dehn-Sydler, com $\delta(Q) = 0$, és suficient demostrar que si P és SF llavors $\delta(P) = 0$.

Recordem que:

$$\delta(P) = \sum_{e \text{ costat de } P} l(e) \otimes \theta(e).$$

Considerem un enrajolat a \mathbb{R}^3 format per P , ara prenem el conjunt de còpies de P en aquest enrajolat que intersecten amb la bola de radi r i centre a l'origen B_r . Junts formen un poliedre $Q_r \supset B_r$. Calculem $\delta(Q_r)$ de dos maneres possibles:

1) Usant l'additivitat de δ tenim que:

$$\delta(Q_r) = n_r \delta(P)$$

on n_r és el nombre de còpies de P a Q_r . Si fem tendir $r \rightarrow \infty$, n_r creix proporcionalment al volum de B_r , és a dir, que creix amb un ordre de $o(r^3)$.

2) Utilitzant directament la fórmula de l'invariant de Dehn, veiem que $\delta(Q_r)$ creix proporcionalment a l'àrea de B_r , és a dir, que creix amb un ordre de $o(r^2)$.

Per un r prou gran obtenim una contradicció llevat que $\delta(P) = 0$.

Per a fer aquest argument més rigorós, trobarem una cota de $\delta(P)$.

Definim el conjunt dels angles diedrals de P com $\mathcal{D}(P)$, que és vàlid per a qualsevol Q_r . Com a conseqüència els termes de $\delta(P)$ viuen en un \mathbb{R} -subespai vectorial $V(P)$ de $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}/(\pi\mathbb{Q})$, en particular estan generats per

$$\{1 \otimes \theta | \theta \in \mathcal{D}(P)\}$$

Sigui ara $\mathcal{D}^+(P)$ un subconjunt de $\mathcal{D}(P)$ tal que $\{1 \otimes \theta | \theta \in \mathcal{D}^+(P)\}$ és una \mathbb{R} -base de $V(P)$, per tant per a cada angle $\theta_i \in \mathcal{D}(P) - \mathcal{D}^+(P)$ existeix una única expressió

$$1 \otimes \theta_i := \sum_{\theta_j \in \mathcal{D}^+(P)} c_{ij} (1 \otimes \theta_j).$$

Sigui X un element arbitrari de $V(P)$ amb

$$X := \sum_{\theta \in \mathcal{D}^+(P)} t_\theta (1 \otimes \theta),$$

definim la seva longitud com $\|X\|^2 = \sum_{\theta \in \mathcal{D}^+(P)} t_\theta^2$.

Ara, per l'additivitat de δ ,

$$\|\delta(Q_r)\| = n_r \|\delta(P)\| \geq \frac{\text{Vol}(B(r))}{\text{Vol}(P)} \|\delta(P)\|$$

$$\|\delta(Q_r)\| > C_0 r^3 \|\delta(P)\| \text{ quan } r \rightarrow \infty \quad (1)$$

on C_0 és una constant positiva que depen de P . Ara, usant la definició de $\delta(Q_r)$, tenim

$$\|\delta(Q_r)\| = \left\| \sum_{e \text{ costat de } Q_r} l(e) \otimes \theta(e) \right\| \leq C_1 \sum_{e \text{ costat de } Q_r} |l(e)|$$

On $C_1 := \max_i \sqrt{\sum_j c_{ij}^2}$. Tots els costats de Q_r sorgeixen dels costats de les còpies de P que pertanyen a la frontera de Q_r , i totes aquestes còpies toquen l'esfera de radi r , centrada al 0. Per tant totes les còpies pertanyen a l'interior de la regió concèntrica Ω_r definida com

$$\Omega_r := B(r + d_P) - B(r - d_P)$$

on d_P és el diàmetre de P . Com $\text{Vol}(\Omega_r) \leq C_2 r^2$ quan $r \rightarrow \infty$, hi ha com a molt $\frac{C_2}{\text{Vol}(P)} r^2$ còpies de P , i la suma de totes les longituds dels costats és $\leq C_3 r^2$. Finalment,

$$\|\delta(Q_r)\| \leq C_1 C_3 r^2 \text{ quan } r \rightarrow \infty$$

Comparant això amb l'equació (1) obtenim una contradicció, llevat que

$$\|\delta(P)\| = 0.$$

En conseqüència

$$\delta(P) = 0.$$

■

Per exemple, amb tetraedres o amb la majoria de poliedres que hem anat veient al llarg d'aquest treball no es pot omplir l'espai.

6 Conclusions

Hem vist com un concepte senzill treballat al pla es pot complicar molt al augmentar una dimensió. Un primer objectiu va ser estudiar el teorema de Dehn-Sydler, però després d'una recerca més intensa hem pogut comprovar que eren necessaris molts conceptes que s'escapen del nivell del grau. Tot i així hem pogut estudiar la congruència per tisores en profunditat i obtenir resultats importants com el teorema de Dehn desde dos enfocaments diferents.

Cal destacar que en alguns resultats en concret hem treballat usant àmbits de les matemàtiques molt diversos, per exemple per veure que un cub i un tetraedre del mateix volum no són SC hem usat polinomis de Txeixov, geometria analítica i el teorema de l'arrel racional.

Una gran part dels coneixements bàsics que hem hagut de fer servir han estat treballats en les cursos de mètodes numèrics, àlgebra, geometria i topologia.

Remarquem que la majoria de resultats donats s'han pogut demostrar aquí i els pocs que no, s'ha donat la cita bibliogràfica corresponent.

Referències

- [1] Arnold, G.: *Four unit mathematics*, pg. 120-121, 1993.
- [2] Bogomolny, A.: *Wallace-Bolyai-Gerwien Theorem*, Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles.
- [3] Coxeter, H. S. M.: *The Polyhedral Groups*, Chapter 3.5 in *Regular Polytopes*, 3rd ed. New York: Dover, pg. 46-47, 1973.
- [4] Dehn, M.: *Über den Rauminhalt*, Math. Ann. 105, pg. 465-479, 1901.
- [5] Hesselholt, L.: *Scissor's congruents groups*, 2009.
- [6] Hesselholt, L.: *Dehn's dissection theorem*, 2009.
- [7] Lagarias, J. C.; Moews, D.: *Polytopes that Fill \mathbb{R}^n and Scissor Congruence*, Discrete Computational Geometry 13, pg. 573-583, 1995.
- [8] Navarro, V.; Pascual, P.: *Topologia Algebraica*, Col·lecció UB 34, Capítol 1, pg. 56-61 1999.
- [9] Park, E.: *Scissor congruence*.
- [10] Schwartz, R.: *The Dehn-Sydler theorem explained*, 2010.
- [11] Sydler, J. P.: *Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien a trois dimensions*, Comment Math Helv. 40, pg. 43-80, 1965.
- [12] Txebitxov, P. L.: *Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrames*, Memories des Savants étrangers présentés à l'Académie de Saint-Pétersbourg, vol 7, pg. 539-586, 1854.
- [13] Weisstein, E. W.: *Icosahedral group*.
- [14] Zakharevich, I.: *Perspective on scissor congruence*, Bulletin of American mathematical society, pg. 269-294, 2016.