



UNIVERSITAT<sup>DE</sup>  
BARCELONA

Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica  
Universitat de Barcelona

---

## Homologia Persistent

---

Autora: Anna Sopena Gilboy

Director: Dr. Vicenç Navarro Aznar  
Realitzat a: Departament de  
Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 18 de gener de 2019

## Resum

L'homologia persistent és un mètode que permet extreure propietats topològiques globals d'una mostra discreta de punts. La idea consisteix en construir una filtració de complexos simplicials a partir de la mostra discreta, aleshores l'homologia persistent aprofita la functorialitat de l'homologia simplicial per fer el seguiment de propietats topològiques al llarg de la filtració. Les propietats que tinguin una vida més llarga dins la filtració són propietats candidates a ser propietats reals de les dades.

En aquesta memòria es pretén motivar aquesta eina, desenvolupar-ne la teoria matemàtica que la sosté i evidenciar-ne la seva aplicabilitat.

# Agraïments

Agraeixo al Dr. Vincenç Navarro el seu temps i dedicació. Agraeixo també a la meva mare i al meu pare així com a les meves amistats i a la Joana el seu recolzament.

# Índex

<b>1</b>	<b>Introducció</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Homologia</b>	<b>3</b>
2.1	Complex simplicial . . . . .	3
2.2	Grups d'homologia simplicial . . . . .	4
2.3	Morfismes de complexos de cadenes . . . . .	6
2.4	Homologia amb coeficients arbitraris . . . . .	6
2.5	Computabilitat de l'homologia simplicial . . . . .	7
2.5.1	Algoritme . . . . .	8
2.5.2	Exemple de càlcul usant <i>Macaulay2</i> . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Mòduls sobre dominis d'ideals principals</b>	<b>12</b>
3.1	Forma normal d'Smith . . . . .	13
3.2	Teorema d'estructura per a mòduls finitament generats sobre un PID	16
3.2.1	Existència de la descomposició . . . . .	16
3.2.2	Unicitat de la descomposició . . . . .	19
3.3	Teorema d'estructura per a mòduls graduats . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Persistència</b>	<b>25</b>
4.1	Homologia persistent . . . . .	25
4.2	Mòdul de persistència . . . . .	26
4.3	Visualització . . . . .	30
4.4	Algoritmes per al càlcul de l'homologia persistent . . . . .	32
4.4.1	Algoritme estàndard per coeficients en un cos arbitrari . . .	32
4.4.2	Algoritme per coeficients en un domini d'ideals principals . .	37
<b>5</b>	<b>Aplicacions</b>	<b>39</b>
5.1	Construcció de complexos simplicials . . . . .	39
5.1.1	Complex de Čech . . . . .	39
5.1.2	Complex de Vietoris-Rips . . . . .	40
5.1.3	Complex de Delaunay . . . . .	40
5.1.4	Witness complex . . . . .	42
5.2	Exemple d'aplicació en la ciència . . . . .	43

<b>6</b>	<b>Conclusions</b>	<b>47</b>
	<b>Referències</b>	<b>49</b>
	<b>Apèndixs</b>	<b>51</b>
<b>A</b>	<b>Teoria de categories</b>	<b>51</b>
<b>B</b>	<b>Anells commutatius</b>	<b>52</b>
<b>C</b>	<b>R-mòduls</b>	<b>54</b>
<b>D</b>	<b>Anells graduats i mòduls graduats</b>	<b>56</b>
<b>E</b>	<b><i>Macaulay2</i></b>	<b>57</b>
	E.1 <b>Simplicialcomplexos.m2 . . . . .</b>	<b>57</b>

# 1 Introducció

## El projecte

Actualment, gràcies la ciència i l'enginyeria s'estan generant grans conjunts de dades de diferents tipus. Davant aquesta creixent producció de dades, cal donar eines que ens ajudin a analitzar-les per poder-ne extreure conclusions. Sovint, considerar la forma global de les dades pot aportar informació qualitativa important del fenomen que representen les dades. Sembla interessant, doncs, considerar la topologia com a eina per a l'anàlisi de dades, ja que és un camp que dóna informació qualitativa i global dels espais.

En aquest treball mostrem com la topologia s'aplica en aquest àmbit. Considerarem dades presentades com a una mostra discreta de punts (núvol de punts) extreta d'un espai topològic  $X$ . L'objectiu és poder desxifrar les característiques topològiques de l'espai  $X$  a partir del núvol de punts. En aquest treball exposarem una eina, l'homologia persistent, que es basa en la topologia algebraica per entendre l'estructura i distribució de les dades.

L'extracció d'informació topològica d'una mostra discreta de punts d'un espai topològic  $X$  planteja certs problemes; per poder inferir propietats topològiques de l'espai en si, necessitem que la mostra sigui contínua. Una qüestió a resoldre és: com podem unir els punts de manera que l'espai topològic resultant descriu de la manera més fiable l'espai topològic  $X$ ? Una idea seria unir els punts formant simplexes de manera que l'espai topològic resultant sigui un complex simplicial del que se'n pot calcular l'homologia. Tot i així, la informació que puguem extreure d'aquest complex simplicial contindrà soroll, propietats topològiques no pròpies de l'espai  $X$  que emergeixen en el mostreig o en la construcció del complex simplicial. En l'article [20], s'explica diferents maneres de generar complexos simplicials a partir d'un conjunt discret de punts (vegeu també secció 6 d'aquest treball). Els complexos simplicials resultants depenen d'un paràmetre  $\epsilon$ , tal que si  $\epsilon \leq \epsilon'$ , aleshores  $K_\epsilon \subseteq K_{\epsilon'}$ . Però, quin és l' $\epsilon$  adequat que hauríem d'escollir?

L'homologia persistent aborda aquestes qüestions però en lloc de centrar-se en l'elecció d' $\epsilon$ , considera la filtració dels complexos indexada per  $\epsilon$  i estudia l'homologia de tota la filtració. Les propietats topològiques que «persisteixen» en la filtració són considerades com a propietats de l'espai topològic  $X$ , i les que tenen una vida «més curta» són considerades soroll. Així doncs, obtenim una eina que és robusta al soroll que pot contenir el conjunt de dades i, a més, la informació obtinguda no depèn de la construcció del complex simplicial

Els grups d'homologia persistent van ser definits per primer cop per Vanessa Robins (1999, citat en [9] i [11]). L'any 2002, Edelsbrunner, Letscher i Zomorodian [10] van introduir l'homologia persistent equipant-la amb un algoritme efectiu de càlcul així com amb diagrames per a la visualització dels resultats. Davant la gran aplicabilitat observada, s'ha escrit un gran volum de literatura sobre l'homologia persistent en els últims anys. Actualment, es poden trobar excel·lents articles introductoris [3], [9], [11], [14], [25], [24], articles que en discuteixen l'estabilitat [5],

algoritmes de càlcul i softwares que implementen els algoritmes [10], [27], [20] i variants de l'homologia persistent (per una breu introducció a algunes variants vegeu [9]) entre d'altres.

En aquest treball donarem la definició de l'homologia persistent així com una descripció algebraica definida en [27] i mostrarem com construir diagrames que ens serveixin per visualitzar la persistència, finalment, donarem també algoritmes de càlcul i explicarem algunes aplicacions.

## Estructura de la memòria

En la secció 2 d'aquest treball farem una revisió prèvia de conceptes de topologia algebraica necessaris per a la comprensió del treball. Presentarem l'homologia simplicial, n'estudiarem la functorialitat i veurem que és efectivament computable. Donarem també un exemple de càlcul usant el software *Macaulay2*.

En la secció 3 revisarem la teoria de mòduls sobre un domini d'ideals principals. Definirem la forma normal d'Smith d'una matriu amb coeficients en un domini d'ideals principals i l'acompanyarem d'un algoritme de càlcul. Donarem la demostració del teorema d'estructura per a mòduls finitament generats en un domini d'ideals principals tant en el cas graduat amb en el cas no graduat. Requerirem d'aquesta teoria tant per a la descripció algebraica de l'homologia persistent com per a la derivació d'algoritmes.

En la secció 4 parlarem de persistència, donant definició, descripció algebraica, visualització i algoritmes de càlcul.

En la secció 5 explicarem com construir complexos simplicials a partir d'un núvol de punts. Exposarem també algunes aplicacions de l'homologia persistent, explicant més detalladament un exemple aplicat a la neurociència.

Per acabar, en la secció 6 exposarem conclusions i proposarem possibles continuacions per a aquest treball.

## 2 Homologia

L'homologia és una eina que classifica els espais topològics en termes de connexió. Els nombres de *Betti* ens donen informació sobre el nombre de «forats» de diferents dimensions en l'espai estudiat. En aquesta secció parlarem de l'homologia simplicial, ja que és l'eina bàsica per a la definició de l'homologia persistent, i la relacionarem amb l'homologia singular amb un teorema. Explicarem alguns resultats d'àlgebra homològica i finalment en donarem un algorisme de càlcul.

### 2.1 Complex simplicial

L'homologia simplicial està definida per a complexos simplicials. A cada complex li assigna una successió de grups que ens donen informació sobre el nombre de forats en diferents dimensions. A continuació definirem el concepte de complex simplicial i l'acompanyarem d'altres definicions necessàries per a aquest treball.

**Definició 2.1.1.** *Un complex simplicial és un parell  $(V, \Sigma)$ , on  $V$  és un conjunt finit  $v_0, v_1, \dots, v_n$  i  $\Sigma$  és una família de subconjunts no buits de  $V$  tal que si  $\sigma \in \Sigma$  i  $\tau \subseteq \sigma$  aleshores  $\tau \in \Sigma$ .*

Als elements de  $V$  se'ls anomena *vèrtexs* del complex simplicial i als elements de  $\Sigma$  se'ls anomena *símplexs* del complex simplicial.

**Definició 2.1.2.** *Sigui  $K = (V, \Sigma)$  un complex simplicial. Si  $\sigma \in \Sigma$ , es defineix*

$$\dim(\sigma) = \#\sigma - 1$$

*i aleshores*

$$\dim(K) = \max\{\dim(\sigma) \mid \sigma \in \Sigma\}.$$

**Definició 2.1.3.** *Sigui  $K = (V, \Sigma)$  un complex simplicial, un subcomplex simplicial de  $K$  és un parell  $L = (V_L, \Sigma_L)$  tal que  $V_L \subseteq V$  i  $\Sigma_L \subseteq \Sigma$  i si  $\sigma$  és un símplex d' $L$  i  $\tau \subseteq \sigma$  aleshores  $\tau \in \Sigma_L$ .*

**Definició 2.1.4.** *Sigui  $K$  un complex simplicial. Una filtració de  $K$  és una successió de subcomplexos simplicials tal que*

$$\emptyset = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_m = K$$

**Definició 2.1.5.** *Siguin  $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$   $n + 1$  punts afinament independents d' $\mathbb{R}^n$ . La realització geomètrica del símplex  $n$ -dimensional de vèrtexs  $v_0, v_1, \dots, v_n$  és el subconjunt d' $\mathbb{R}^n$*

$$\Delta(v_0, v_1, \dots, v_n) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=0}^n t_i v_i, 0 \leq t_i \leq 1, \sum t_i = 1 \right\}.$$

$\Delta(v_0, v_1, \dots, v_n)$  s'anomena *envoltura* de  $v_0, v_1, \dots, v_n$ .



Si no és necessari precisar els vèrtexs del símplex, la realització geomètrica d'un símplex  $n$ -dimensional ( $n$ -símplex) el denotarem per  $\Delta^n$ .

Usant la bijecció  $\phi : V \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}$ , podem associar a un complex simplicial un espai topològic  $|(V, \Sigma)|$  com a subespai d' $\mathbb{R}^{n+1}$  definit per la unió  $\cup_{\sigma \in \Sigma} c(\sigma)$ . On  $c(\sigma)$  és  $\Delta(\{e_{\phi(s)}\}_{s \in \sigma})$  i  $\{e_i\}_0^n$  denoten  $n+1$  punts d' $\mathbb{R}^{n+1}$  tals que  $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1^{i+1}, 0, \dots, 0)$ . A aquesta assignació l'anomenem *realització geomètrica* del complex simplicial  $K$ .

**Definició 2.1.6.** *Sigui  $X$  un espai topològic, diem que  $X$  és triangulable si existeix un complex simplicial  $(V, \Sigma)$  tal que  $|(V, \Sigma)| \cong X$ . A aquest complex simplicial se l'anomena triangulació d' $X$ .*

**Definició 2.1.7.** *Siguin  $K = (V_K, \Sigma_K)$ ,  $L = (V_L, \Sigma_L)$  dos complexos simplicials. Una aplicació simplicial de  $K$  a  $L$  és una aplicació  $\varphi : V_K \rightarrow V_L$  tal que si  $\{v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\} \in V_K$  aleshores  $\{\varphi(v_{i_0}), \varphi(v_{i_1}), \dots, \varphi(v_{i_k})\} \in V_L$ .*

Així doncs, els complexos simplicials juntament amb les aplicacions simplicials entre ells formen una categoria: la categoria dels complexos simplicials.

## 2.2 Grups d'homologia simplicial

Un cop definit què és un complex simplicial, podem construir el concepte de grup d'homologia d'un complex simplicial.

**Definició 2.2.1.** *Sigui  $K = (V, \Sigma)$  un complex simplicial. S'anomenen cadenes de  $K$  de dimensió  $p$  a les combinacions lineals de símplexs de  $K$  de dimensió  $p$  amb coeficients a  $\mathbb{Z}$ .*

**Definició 2.2.2.** *Sigui  $\sigma$  un símplex. Diem que dues ordenacions dels vèrtexs de  $\sigma$  són equivalents si difereixen per una permutació de signe parell. Aquesta distinció dona lloc a dues classes d'equivalència, cada classe s'anomena orientació de  $\sigma$ .*

**Definició 2.2.3.** *Un símplex juntament amb una orientació és un símplex orientat.*

Per indicar que un símplex  $\sigma = \{v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_p}\}$  el dotem d'una orientació el notarem per  $[\sigma] = [v_0, v_1, \dots, v_n]$ .

**Definició 2.2.4.** *Definim el grup de  $p$ -cadenes d'un complex simplicial orientat  $K$ , que denotarem per  $C_p(K)$ , com el grup abelià lliure generat pels símplexs  $p$ -dimensionals orientats de  $K$ . És a dir:*

$$C_p(K) := \bigoplus_{\dim(\sigma)=p, \sigma \in \Sigma} \mathbb{Z}[\sigma]$$

Si  $p \leq 0$  o  $p \geq \dim(K)$  aleshores definim  $C_p(K)$  com el grup trivial.

**Definició 2.2.5.** *Sigui  $K = (V, \Sigma)$  un complex simplicial. Definim, per tot  $p \in \mathbb{Z}$ , l'operador vora  $\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$  com el morfisme de grups abelians definit per:*

$$\partial_p[v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_p}] = \sum_{j=0}^p (-1)^j [v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, \hat{v}_{i_j}, \dots, v_{i_p}]$$

En dimensions en què  $C_p(K)$  és el grup trivial,  $\partial_p$  és el morfisme trivial.

**Proposició 2.2.6.** *Si  $K$  un complex simplicial orientat, aleshores  $\partial_p \circ \partial_{p+1} \equiv 0$  per tot  $p \geq 1$ .*

*Demostració.* En efecte, es té:

$$\partial_{p-1}\partial_p[v_0, v_1, \dots, v_p] = \sum_{i=0}^p (-1)^i \partial_{p-1}[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p] = \sum_{j < i} (-1)^i (-1)^j [v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p] + \sum_{j > i} (-1)^i (-1)^{j-1} [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_p]$$

I els termes d'aquests dos sumants es cancel·len dos a dos.  $\square$

**Definició 2.2.7.** *Un complex de cadenes és una successió de grups abelians i morfismes de grups abelians*

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots$$

*tals que  $\partial_n \circ \partial_{n+1} \equiv 0 \forall n$ .*

**Definició 2.2.8.** *El conjunt de grups de  $p$ -cadenes d'un complex simplicial  $K$  juntament amb els morfismes vora corresponents formen un complex de cadenes  $(C_\star(K), \partial)$ , anomenat complex de cadenes simplicials.*

A tot complex simplicial  $K$  tenim associat un complex de cadenes  $(C_\star(K), \partial)$ . De  $\partial^2 = 0$  podem deduir que  $\text{Im } \partial_{p+1} \subseteq \text{ker } \partial_p$  per tot  $p \geq 1$ . Aleshores podem definir:

**Definició 2.2.9.** *Si  $K$  un complex simplicial. S'anomena grup  $p$ -èssim d'homologia simplicial de  $K$  a:*

$$H_p(C_\star(K)) := \text{ker } \partial_p / \text{Im } \partial_{p+1}$$

Per simplificar la notació sovint eliminarem la dimensió i escriurem  $H(K) := \bigoplus_p H_p(K)$ .

**Definició 2.2.10.**  *$\text{ker } \partial_p$  s'anomena grup de  $p$ -cicles i es denota per  $Z_p$ .  $\text{Im } \partial_{p+1}$  s'anomena grup de  $p$ -vores i es denota per  $B_p$ .*

**Definició 2.2.11.** *Si  $K$  un complex simplicial. Es defineix el  $p$ -èssim nombre de Betti de  $K$  al rang del grup d'homologia  $p$ -èssim. El notarem per  $\beta_p$ .*

**Definició 2.2.12.** *Dues  $p$ -cadenes  $c$  i  $c'$  es diu que són homòlogues si  $c - c' = \partial_{p+1}d$  per alguna  $p + 1$ -cadena  $d$ .*

L'homologia simplicial i l'homologia singular guarden una forta relació, de fet es té el següent teorema:

**Teorema 2.2.13.** *Si  $K$  és un complex simplicial i  $|K|$  la seva realització geomètrica aleshores*

$$H^{\text{simpl}}(K) \cong H^{\text{sing}}(|K|)$$

*on  $H^{\text{simpl}}(K)$  denota l'homologia simplicial de  $K$  i  $H^{\text{sing}}(|K|)$  denota l'homologia singular de  $|K|$ .*

La demostració d'aquest teorema es basa en la subdivisió baricèntrica, però aquesta demostració queda fora dels objectius d'aquest treball.

### 2.3 Morfismes de complexos de cadenes

A continuació veurem com l'homologia simplicial és functorial. Més endavant, veurem que per la construcció de l'homologia persistent s'aprofita aquesta functorialitat.

**Definició 2.3.1.** *Siguin  $(C_\star, \partial)$  i  $(D_\star, \partial')$  dos complexos de cadenes, un morfisme  $f_\star : C_\star \rightarrow D_\star$  de complexos de cadenes és una successió de morfismes de grups abelians  $f_n : C_n \rightarrow D_n$  per tot  $n$  tals que*

$$f_{n-1} \circ \partial_n = \partial_n \circ f_n \quad \forall n.$$

**Proposició 2.3.2.** *Sigui  $f_\star : C_\star \rightarrow D_\star$  un morfisme de complexos de cadenes. Aleshores  $f_\star$  passa al quocient i indueix un morfisme*

$$H_\star(f_\star) : H_\star(C_\star) \rightarrow H_\star(D_\star)$$

*tal que si  $z \in Z_p(C_\star)$  és un representant de  $[z] \in H_p(C_\star)$  aleshores  $H_\star(f_\star)([z]) = [f(z)]$ .*

*Demostració.* 1. Si  $z \in Z_p(C_\star)$  tenim que  $\partial_p(z) = 0$  i  $f_p(z) \in D_p$ .

Però  $\partial_p(f_p(z)) = f_{p-1}(\partial_p(z)) = 0 \Rightarrow f_p(z) \in Z_p(D_\star)$ .

Tenim doncs que  $f_p(Z_p(C_\star)) \subseteq Z_p(D_\star)$

2. Si  $z \in B_p(C_\star)$  tenim que  $\exists z' \in C_{p+1}$  tal que  $\partial_{p+1}(z') = z$ .

Però  $f_p(z) = f_p(\partial_{p+1}(z')) = \partial_p(f_p(z')) \Rightarrow f_p(z) \in B_p(D_\star)$ .

Tenim doncs que  $f_p(B_p(C_\star)) \subseteq B_p(D_\star)$ .

Per tant,  $f$  passa al quocient. □

**Lema 2.3.3.** 1.  $H_\star(Id_\star) = Id_{H_\star(C_\star)}$

2.  $H_\star(f_\star \circ g_\star) = H_\star(f_\star) \circ H_\star(g_\star)$

*Demostració.* Sigui  $z \in Z_p$  aleshores es té:

1.  $H_\star(Id_\star)([z]) = [Id(z)] = [z] \Rightarrow H_\star(Id_\star) = Id_{H_\star(C_\star)}$

2.  $H_\star(f_\star) \circ H_\star(g_\star)[z] = H_\star(f_\star)[g(z)] = [f(g(z))] = [f \circ g(z)] = H_\star(f_\star \circ g_\star)[z]$

□

### 2.4 Homologia amb coeficients arbitraris

Sigui  $R$  un anell commutatiu i unitari amb unitat  $1_R$ , existeix una generalització de la definició de grup  $p$ -èssim de cadenes d'un complex simplicial  $K$ . S'anomena  $R$ -mòdul  $p$ -èssim de cadenes de  $K$  al  $R$ -mòdul lliure generat pels símplexs ordenats de dimensió  $p$  de  $K$ , i es nota per  $C_p(K; R)$ .

Així podem estendre també l'operador vora  $\partial_p : C_p(K; R) \rightarrow C_{p-1}(K; R)$  a morfismes d' $R$ -mòduls definint-lo de la mateixa manera que a 2.2.5, substituïnt  $(-1)$  per  $(-1_R)$ . Usant la mateixa demostració que a la proposició 2.2.6 es demostra que  $\partial^2 \equiv 0$ . Definim  $Z_p$  com el nucli de  $\partial_p : C_p(K; R) \rightarrow C_{p-1}(K; R)$  i  $B_{p-1}$  com la seva imatge.

Aleshores, obtenim un complex d' $R$ -mòduls  $(C_*(K; R), \partial)$  del que podem definir l' $R$ -mòdul  $p$ -èssim d'homologia com:

$$H_p(C_*(K; R)) := \ker \partial_p / \text{Im } \partial_{p+1}$$

On  $\partial$ , aquí, és l'extensió de l'operador vora a morfisme d' $R$ -mòduls. Es defineix el  $p$ -èssim nombre de Betti amb coeficients a  $R$  com

$$\beta_p(K, R) := \text{rang}(H_p(K; R)).$$

Els resultats i definicions anteriors s'estenen fàcilment a partir d'aquestes definicions.

## 2.5 Computabilitat de l'homologia simplicial

Una de les grans avantatges de l'homologia simplicial és que és efectivament computable. En aquesta secció donarem un algorisme per calcular l'homologia simplicial d'un complex simplicial generalitzant l'algorisme proposat a [18]. En aquesta secció usem resultats de mòduls sobre un domini d'ideals principals que podeu trobar a la secció 3.

El mètode estàndard per calcular l'homologia és el *mètode de reducció*. Aquí explicarem l'algorisme per homologia amb coeficients a dominis d'ideals principals. Considerarem  $R$  un domini d'ideals principals amb element neutre per la suma  $0$  i element oposat d' $m$ ,  $-m$ ; element neutre pel producte  $1$  i element invers d' $m$ ,  $m^{-1}$ .

Sigui  $(C_*(K), \partial)$  un complex de cadenes simplicials amb coeficients a  $R$ .  $C_p$  és un  $R$ -mòdul lliure, aleshores les  $p$ -cetes orientades de  $K$  formen una base de  $C_p$ , anomenada *base estàndard*. Ara, podem definir la matriu de l'operador vora  $\partial_p : C_p \rightarrow C_{p-1}$  respecte la base estàndard. Obtenim una matriu  $M_p$  de dimensió  $m_p \times m_{p-1}$  amb entrades en  $R$ , on  $m_p$  i  $m_{p-1}$  són els rangs de  $C_p$  i  $C_{p-1}$  respectivament.

L'algorisme consisteix a reduir la matriu  $M_p$  a *forma normal d'Smith*, és a dir, obtenir una matriu:

$$\tilde{M}_p = \left( \begin{array}{cc|c} b_1 & 0 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{l_p} \\ \hline & 0 & 0 \end{array} \right)$$

on  $l_p = \text{rang } M_p = \text{rang } \tilde{M}_p$ ,  $b_i \geq 1$  i  $b_1 | b_2 | \dots | b_{l_p}$ , d'on puguem extreure informació sobre els mòduls d'homologia de  $K$ . Per a més detalls vegeu el capítol 3 d'aquest treball.

L'algoritme per reduir la matriu  $M_p$  a la forma normal d'Smith està explicat a la demostració del teorema 3.1.1.

### 2.5.1 Algoritme

És amb la forma normal que podem calcular l'homologia simplicial d'un complex de cadenes. Primer provarem el següent teorema:

**Teorema 2.5.1.** *Sigui  $(C_\star(K), \partial)$  un complex de cadenes simplicials amb coeficients a  $R$ . Aleshores, per cada  $p$  existeixen submòduls  $U_p, V_p, W_p$  de  $C_p$  tals que*

$$C_p = U_p \oplus V_p \oplus W_p,$$

on  $\partial_p(U_p) \subset W_{p-1}$ ,  $\partial_p(V_p) = 0$  i  $\partial_p(W_p) = 0$ . A més, existeixen bases de  $U_p$  i de  $W_{p-1}$  de manera que la matriu de  $\partial_p : U_p \rightarrow W_{p-1}$  relativa a aquestes bases és de la forma

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_l \end{pmatrix}$$

on  $b_i \geq 1$  i  $b_1 | b_2 | \dots | b_l$ .

*Demostració.* Definim, com ja hem fet altres vegades,  $Z_p := \ker \partial_p$  i  $B_p := \text{Im } \partial_{p+1}$ . Definim  $W_p := \{c \in C_p | \exists m \neq 0 : mc \in B_p\}$ , aquest és un submòdul de  $C_p$ . Vegem-ho:

És clar que  $0 \in W_p$ . Veiem que  $c \in W_p$  implica  $-c \in W_p$ ; si  $mc = \partial d$ , obtenim  $\partial(-d) = -\partial(d) = -(mc) = m(-c)$ . Ara, si  $mc = \partial d$  i  $t \in R$  es té  $\partial td = t\partial d = tmc$ , per tant  $tmc \in W_p$ . Finalment, si  $mc \in B_p$  i  $nd \in B_p$ ,  $mn(c+d) = n(mc) + m(nd) \in W_p$ .

Com que  $C_p$  no té torsió, tenim que  $mc = \partial_{p+1}d$  implica que  $0 = \partial_p mc = m\partial_p c$  que implica  $\partial_p c = 0$ . Aleshores,

$$B_p \subset W_p \subset Z_p \subset C_p.$$

Considerem ara la projecció

$$Z_p \rightarrow H_p(C_\star(K)) \rightarrow H_p(C_\star(K))/T_p(C_\star(K)),$$

on  $T_p(C_\star(K))$  és el submòdul de torsió d' $H_p(C_\star(K))$ . El nucli d'aquesta projecció és  $W_p$ , ja que els elements de  $W_p$  són els elements de torsió en  $H_p(C_\star(K))$ . Per tant, pel primer teorema d'isomorfia tenim que  $Z_p/W_p \cong H_p/T_p$ . Sabem que  $H_p/T_p$  no té torsió, llavors és un mòdul lliure. Ara, si  $c_1 + W_p, \dots, c_k + W_p$  és una base de  $Z_p/W_p$  i  $d_1, \dots, d_l$  és una base de  $W_p$  tenim que  $c_1, \dots, c_k, d_1, \dots, d_l$  és una base de  $Z_p$ . És clar, doncs, que  $Z_p = V_p \oplus W_p$ , on  $V_p$  és el mòdul amb base  $c_1, \dots, c_k$ .

Suposem ara que la matriu de  $\partial_p$  relativa a les bases  $e_1, \dots, e_n$  de  $C_p$  i  $e'_1, \dots, e'_m$  de  $C_{p-1}$  té la forma normal d'Smith

$$\left( \begin{array}{cc|c} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_l \\ \hline & & 0 \\ & & 0 \end{array} \right)$$

Aleshores obtenim el següent resultat:

**Lema 2.5.2.** 1.  $e_{l+1}, \dots, e_n$  és una base de  $Z_p$

2.  $e'_1, \dots, e'_l$  és una base de  $W_{p-1}$

3.  $b_1 e'_1, \dots, b_l e'_l$  és una base de  $B_{p-1}$

*Demostració.* Demostrem primer (1). Considerem  $c \in C_p$ . Aleshores  $c$  és de la forma  $c = \sum_{i=1}^n a_i e_i$  i  $\partial_p c = \sum_{i=1}^l a_i b_i e'_i$ .

Notem que  $b_i \neq 0$  per tot  $0 \leq i \leq l$ , per tant  $c \in Z_p$  si, i només si,  $a_i = 0$  per tot  $i = 0, \dots, l$ . És clar que  $e_{l+1}, \dots, e_n$  genera  $Z_p$  i són linealment independents. Hem demostrat (1).

Ara demostrem (2). Veiem que  $e'_1, \dots, e'_l \subseteq W_{p-1}$ , ja que  $\partial_p e_i = b_i e'_i$ . D'altra banda, si  $d = \sum_{i=1}^m d_i e'_i$  és una  $p-1$  cadena tal que  $d \in W_{p-1}$  i satisfà

$$\lambda d = \partial_p c = \sum_{i=1}^l a_i b_i e'_i$$

per algun  $\lambda \neq 0$ . Tenim

$$\sum_{i=1}^m \lambda d_i e'_i = \sum_{i=1}^l a_i b_i e'_i$$

el que implica que  $d_i = 0$  per tot  $i = l+1, \dots, m$ . Per tant  $e'_1, \dots, e'_l$  generen  $W_{p-1}$  i són linealment independents.

Per demostrar (3) notem que  $\{b_1 e'_1, \dots, b_l e'_l\}$  genera  $B_{p-1}$ . En efecte, si  $d \in B_{p-1}$  es compleix  $d = \partial_p c = \sum_{i=1}^l a_i b_i e'_i$  per algun  $c = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ . A més, com que  $b_i \neq 0$ , tenim que  $\{b_1 e'_1, \dots, b_l e'_l\}$  són independents.  $\square$

Per acabar, escollim bases  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $C_p$  i  $\{e'_1, \dots, e'_m\}$  de  $C_{p-1}$  com abans i  $U_p$  el mòdul generat per  $\{e_1, \dots, e_l\}$  aleshores tenim que

$$C_p = U_p \oplus Z_p.$$

A més, si escollim  $V_p$  i  $W_p$  com abans tals que  $Z_p = V_p \oplus W_p$ , obtenim una descomposició de  $C_p$  tal que  $\partial(V_p) = 0$  i  $\partial(W_p) = 0$ . L'existència de les bases desitjades per  $U_p$  i  $W_{p-1}$  se segueixen del lema.  $\square$

Ara hem vist que  $C_p(K) = U_p \oplus V_p \oplus W_p$  amb  $Z_p = V_p \oplus W_p$ . Aleshores

$$H_p(K) = Z_p/B_p \cong V_p \oplus (W_p/B_p) \cong (Z_p/W_p) \oplus (W_p/B_p).$$

Aquí,  $Z_p/W_p$  és lliure i  $W_p/B_p$  és de torsió. Calculant doncs, aquests dos mòduls obtenim  $H_p(K)$ . Considerem la matriu associada a  $\partial_p : C_p \rightarrow C_{p-1}$  respecte la base estàndard. Aplicant l'algoritme de reducció obtenim la forma normal d'Smith, i aplicant el lema anterior concluïm els resultats següents:

1. El rang de  $Z_p$  és igual al nombre de columnes nul·les.
2. El rang de  $W_{p-1}$  és igual al nombre de files no nul·les.
3. Existeix un isomorfisme

$$W_{p-1}/B_{p-1} \cong R/b_1 \oplus R/b_2 \oplus \dots \oplus R/b_l$$

Aleshores, la matriu de  $\partial_p$  ens dona els coeficients de torsió d' $H_{p-1}(K)$  i el rang de  $Z_p$ . Per altra banda, la matriu de  $\partial_{p+1}$  ens dona el rang de  $W_p$  i la diferència del rang de  $Z_p$  i  $W_p$  ens dona el nombre de Betti d' $H_p(K)$ .

## 2.5.2 Exemple de càlcul usant *Macaulay2*

A continuació, donarem un exemple del càlcul de l'homologia d'una triangulació de l'ampolla de Klein amb el software *Macaulay2* (per a una descripció més detallada vegeu la secció E de l'apèndix).

Hem escollit una triangulació de 9 vèrtexs, 27 arestes i 18 cares de l'ampolla de Klein. Agafant aquesta triangulació calculem l'homologia amb coeficients a  $\mathbb{Z}$  i a  $\mathbb{Z}_2$ .

```
i2 : R = ZZ[a00,a10,a20,a01,a11,a21,a02,a12,a22];

i3 : Klein = simplicialComplex {a00*a10*a02, a02*a12*a10, a01*a02*a12, a01*a12*a11, a00*a01*a11, a00*a11*a10, a10*a12*a20, a12*a20*a22, a11*a12*a22, a11*a22*a21, a10*a11*a21, a10*a21*a20, a20*a22*a00, a22*a00*a01, a21*a22*a01, a21*a02*a01, a20*a21*a02, a20*a02*a00};

i4 : C=truncate(chainComplex Klein, 1);

i5 : prune HH C

o5 = -1 : 0

      1
o0 : ZZ

      1 2
o1 : cokernel | 2 |
              | 0 |

      2 : 0

o5 : GradedModule
```

Amb aquestes comandes calculem l'homologia de la triangulació amb coeficients a  $\mathbb{Z}$ . Els grups d'homologia obtinguts són  $H_0 = \mathbb{Z}$ ,  $H_1 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ ,  $H_2 = 0$ . Així els

nombres de Betti corresponents són  $\beta_0 = 1, \beta_1 = 1, \beta_2 = 0$ . El *Macaulay2* presenta l'homologia en dimensió 1 com el cokernel del morfisme de mòduls que té per matriu  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ , que, en efecte, és  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ .

```
i10 : S = ZZ/2[a00,a10,a20,a01,a11,a21,a02,a12,a22];

i11 : Klein = simplicialComplex {a00*a10*a02, a02*a12*a10, a01*a02*a12, a01*a12*a
a11, a00*a01*a11, a00*a11*a10, a10*a12*a20, a12*a20*a22, a11*a12*a22, a11*a22*a21
1, a10*a11*a21, a10*a21*a20, a20*a22*a00, a22*a00*a01, a21*a22*a01, a21*a02*a01,
a20*a21*a02, a20*a02*a00};

i12 : C=truncate(chainComplex Klein, 1);

i13 : prune HH C

o13 = -1 : 0

      ZZ 1
      0 : (--)
          2

      ZZ 2
      1 : (--)
          2

      ZZ 1
      2 : (--)
          2

o13 : GradedModule
```

Aquí es mostra el càlcul de l'homologia de la triangulació amb coeficients a  $\mathbb{Z}_2$ . Els grups d'homologia obtinguts són  $H_0 = \mathbb{Z}_2, H_1 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, H_2 = \mathbb{Z}_2$  i els nombres de Betti corresponents són  $\beta_0 = 1, \beta_1 = 2, \beta_2 = 1$ .

La diferència entre els nombres de Betti és degut al fet que amb coeficients a  $\mathbb{Z}_2$ , l'homologia és incapaç de detectar la part de torsió d' $H_1$  amb coeficients a  $\mathbb{Z}$ , a canvi augmenta la dimensió d'  $H_1$ .

## Notes bibliogràfiques

Per a una descripció més detallada dels conceptes de complex simplicial, grups d'homologia, morfismes de complexos i homologia amb coeficients arbitraris consulteu les referències [19] i [18]. El concepte de realització geomètrica l'he definit seguint l'article [3]. Per al càlcul de l'homologia simplicial he seguit l'algoritme proposat en [18] per al cas  $\mathbb{Z}$  però l'he generalitzat per a mòduls sobre un domini d'ideals principals. Per a la definició i un desenvolupament de la teoria d'homologia singular vegeu [19].



### 3 Mòduls sobre dominis d'ideals principals

En aquesta secció discutirem alguns resultats sobre mòduls amb coeficients en dominis d'ideals principals (PID) i demostrarem també el teorema d'estructura de mòduls sobre un PID. En l'últim subapartat donem una demostració detallada del teorema d'estructura per al cas de mòduls graduats finitament generats sobre un PID. Els resultats per al cas no graduat es poden trobar a [16]. Considerarem  $R$  un anell commutatiu i unitari amb element neutre per la suma 0 i element neutre pel producte 1.

**Definició 3.0.1.** *Un  $R$ -mòdul  $M$  es diu que és finitament generat si existeixen  $n$  elements  $x_1, x_2, \dots, x_n$  tals que tot element  $y$  d' $M$  es pot expressar com*

$$y = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$$

on  $\lambda_i \in R$  per tot  $i$ . També, si  $M$  està generat per un sol element, diem que  $M$  és cíclic.

Aleshores, un  $R$ -mòdul és finitament generat si existeix un morfisme  $\mu : R^n \rightarrow M$  exhaustiu.

**Definició 3.0.2.** *Un  $R$ -mòdul es diu que és finitament presentat si existeix un morfisme  $\mu : R^n \rightarrow M$  tal que el nucli d'aquest morfisme és finitament generat.*

**Definició 3.0.3.** *Sigui  $M$  un  $R$ -mòdul. Un element  $m \in M$  es diu que és un de torsió si existeix  $r \in R$  diferent de zero tal que  $rm = 0$ .*

**Proposició 3.0.4.** *Els elements de torsió d'un mòdul  $M$  formen un submòdul d' $M$  anomenat submòdul de torsió, aquest mòdul el notarem per  $M_{tor}$ .*

*Demostració.* Cal veure que el conjunt  $T$  d'elements de torsió d' $M$  formen un submòdul. És clar que  $T$  és no buit, ja que  $0 \in T$ . Ara, siguin  $r, s \in R$  i  $x, y \in M$  elements no nuls tals que  $rx = 0$  i  $sy = 0$ , aleshores  $rs(x + y) = 0$ , com que  $R$  és un PID,  $rs \neq 0$ , per tant  $x + y \in T$ . Siguin  $r \in R$  i  $m \in M$  no nuls tals que  $rm = 0$ , es té  $m + (-m) = 0$ , per tant  $0 = r(m + (-m)) = rm + r(-m) = 0 + r(-m) = r(-m)$ ; tenim doncs que si  $m \in T$  aleshores també  $-m \in T$ . Finalment, siguin  $r$  i  $m$  com abans i  $t \in R$  tals que  $rm = 0$ , es té  $rtm = trm = 0$ , per tant  $tm \in T$ .  $\square$

És fàcil de comprovar que  $M/M_{tor}$  és un mòdul lliure de torsió.

De la mateixa manera que en grups abelians, podem definir un mòdul lliure:

**Definició 3.0.5.** *Un  $R$ -mòdul  $M$  es diu que és lliure si té una base, és a dir, si existeixen elements  $e_1, e_2, \dots, e_n$  tals que tot element  $m \in M$  diferent nu nul es pot expressar de manera única com la suma dels elements  $e_1, e_2, \dots, e_n$  amb coeficients a  $R$ . A l'enter  $n$  se l'anomena rang d' $M$ .*

De la unicitat exigida resulta que un mòdul lliure és lliure de torsió.

Sigui  $M$   $R$ -mòdul. Considerem el morfisme  $\varphi : R^n \rightarrow M$  definit per  $(r_1, \dots, r_n) \mapsto r_1x_1 + \dots + r_nx_n$  per certs  $x_1, \dots, x_n \in M$  diferents. Diem que  $x_1, \dots, x_n$ :

1. són *linealment independents* si el morfisme  $\varphi$  és injectiu.
2. són un *sistema generador* si el morfisme  $\varphi$  és exhaustiu.

Aleshores una base d' $M$  és un conjunt d'elements linealment independents d' $M$  que generen  $M$ .

**Lema 3.0.6.** *Sigui  $M$  un  $R$ -mòdul lliure de rang  $n$  amb  $R$  un domini d'ideals principals. Qualsevol submòdul  $N$  d' $M$  té un sistema generador de cardinalitat com a molt  $n$ .*

*Demostració.* Demostrem aquest resultat per inducció. Tots els ideals d' $R$  són principals ( $R$  és un PID), és a dir que tot ideal  $I = (d)$  per algun  $d \in R$ . Per tant, si  $M$  té rang  $n = 1$  tenim que  $M \cong R$ , i per tant quan parlem de submòdul d' $R$ , estem parlant d'ideals. Això demostra el cas  $n = 1$ .

Suposem ara que  $M$  té rang  $n > 1$  i que el lema es compleix per tot mòdul lliure de rang inferior. Sigui  $\{m_1, \dots, m_n\}$  una base d' $M$ , i definim  $M'$  com l' $R$ -mòdul lliure generat per  $\{m_1, \dots, m_{n-1}\}$ . Sigui  $N$  un submòdul d' $M$  i sigui  $N' = N \cap M'$ . Per hipòtesi d'inducció,  $N'$  té un sistema generador de no més de  $n - 1$  elements, ja que  $N'$  és un submòdul d'un  $R$ -mòdul lliure de rang  $n - 1$ . Tot element  $x \in M$  s'expressa de manera única com  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x)m_i$ . L'aplicació  $x \mapsto \alpha_n(x)$  és un morfisme d' $R$ -mòduls d' $M$  a  $R$ . Si  $\alpha_n(N) = \{0\}$ , aleshores  $N \subseteq M'$ , el que implica que  $N = N'$ , per tant  $N$  està generat per  $n - 1$  elements. Suposem ara que  $\alpha_n(N)$  és un ideal  $I$  no nul d' $R$ , llavors és de la forma  $I = (d)$  per algun  $d \in R$ . Escollim  $h \in N$  tal que  $\alpha_n(h) = d$ . Si  $x \in N$ , tenim que  $\alpha_n(x) = rd$  per algun  $r \in R$ . Definim  $y = x - rh$ , satisfà  $\alpha_n(y) = 0$ , per tant  $y \in N \cap M' = N'$ . És clar doncs, que  $x = y + rh \in N' + Rh$ . Obtenim que  $N = Rh + N'$ . Com que  $N'$  té un sistema generador de no més de  $n - 1$  elements,  $N$  és generat per no més d' $n$  elements.  $\square$

### 3.1 Forma normal d'Smith

A partir d'ara, en aquesta subsecció,  $R$  serà un domini d'ideals principals.

**Teorema 3.1.1.** *Siguin  $C$  i  $C'$   $R$ -mòduls lliures de rang  $n$  i  $m$  respectivament. Sigui  $f : C \rightarrow C'$  un morfisme d' $R$ -mòduls. Aleshores, existeixen bases de  $C$  i de  $C'$  tals que, respecte aquestes bases, la matriu d' $f$  té forma:*

$$\left( \begin{array}{cc|c} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & d_s \\ \hline 0 & & 0 \\ & 0 & 0 \end{array} \right)$$

On  $d_i \geq 1$  i  $d_1 | d_2 | \dots | d_s$

Una matriu en aquesta forma es diu que està en *forma normal d'Smith*. La demostració d'aquest teorema és constructiva. Consisteix en donar un algoritme de reducció d'una matriu  $A$  (amb coeficients a un domini d'ideals principals) a una matriu  $\tilde{A}$  que és en forma normal d'Smith.

Abans d'explicar l'algoritme de reducció en si, recordarem alguns conceptes necessaris.

**Notació 1.** *Es diu que  $a, b \in R$  són associats i es nota per  $a \sim b$  si  $a = bu$ , on  $u$  denota un element unitat d' $R$ .*

*Es diu que  $b \in R$  és un divisor propi de  $a$  si  $c$  no és unitat i  $c \nmid a$ . Es diu que  $c_1, c_2$  divisors propis de  $a$  són diferents si  $c_1 \not\sim c_2$ .*

*Com que  $R$  és un domini d'ideals principals, en particular és un domini de factorització única, per tant tot element  $a \in R$  no nul i no unitat és producte finit d'elements irreductibles (els únics divisors d'un element irreductible són les unitats i elements associats):  $a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_t^{n_t}$  on els  $p_i$  són divisors propis diferents i  $n_i > 0$  per tot  $i = 1, \dots, t$ . Aleshores, un element no nul i no unitat de  $R$  té un nombre finit de divisors propis.*

Considerem ara una  $A = (a_i^j)$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ . En l'algoritme usarem 4 operacions elementals, són operacions reversibles:

- (i) intercanviar la columna  $j$  per la columna  $k$
- (ii) substituir una columna  $j$  per  $q(\text{columna } j)$ ,  $q$  element unitat d' $R$
- (iii) substituir una columna  $j$  per  $(\text{columna } j) + q(\text{columna } k)$ ,  $q \in R$
- (iv) substituir la columna  $j$  per  $q(\text{columna } j) + p(\text{columna } k)$  i la columna  $k$  per  $s(\text{columna } k) + r(\text{columna } j)$ , per aquesta operació requerim que la matriu

$$\begin{pmatrix} q & r \\ p & s \end{pmatrix}$$

sigui invertible per tal que sigui una operació reversible.

També usarem 4 operacions anàlogues per files. Cal observar que aplicar operacions elementals (i), (ii), (iii), (iv) en les columnes (resp. files) és equivalent a multiplicar per la dreta (resp. esquerra) per matrius invertibles.

En efecte, si volem intercanviar la columna  $j$  per la columna  $k$ , cal multiplicar la matriu  $A$  per la dreta per una matriu  $T$  que coincideix amb la identitat excepte en les entrades  $t_j^k$  i  $t_k^j$  que tenen valor 1 i les entrades  $t_j^j$  i  $t_k^k$  que són 0. Substituir una columna  $j$  per  $q(\text{columna } j)$  equival a multiplicar per la dreta per una matriu  $T'$  que coincideix amb la identitat excepte en l'entrada  $t_j^j$  que té valor  $q$ . Si volem substituir la columna  $j$  per  $(\text{columna } j) + q(\text{columna } k)$  hem de multiplicar per la dreta per una matriu  $T''$  que coincideix amb la identitat excepte en l'entrada  $t_k^j$ , que té valor  $q$ . I finalment, aplicar l'última operació, equival a multiplicar per una

matriu  $T'''$  que coincideix amb la identitat excepte en les entrades  $t_j^j = q$ ,  $t_j^k = r$ ,  $t_k^j = p$  i  $t_k^k = s$ .

Per fer operacions en les files, cal seguir el mateix procediment però multiplicant per l'esquerra per les matrius anteriors transposades.

Procedim ara a explicar l'algoritme de reducció. Considerem una matriu  $A$  de dimensió  $n \times m$ .

*Pas 1.* Ens fixem en l'element  $a_1^1$  de la matriu  $A$ . Si aquest element és no nul, ja hem acabat. Si l'element és nul, busquem una columna  $k$ ,  $2 \leq k \leq m$  tal que  $a_1^k \neq 0$  i intercanviem la columna 1 per la columna  $k$ .

*Pas 2.* Suposem que  $a = a_1^1$  no divideix alguna entrada  $b = a_1^k$  de la seva fila. Aleshores si  $c = MCD(a, b)$  (existeix perquè som en un PID), existeixen  $r, s \in R$  tals que es té la igualtat següent:

$$ar + bs = c.$$

Aquesta igualtat s'anomena *igualtat de Bézout*. Partint d'aquesta igualtat arribem a  $a'r + b's = 1$  si  $a = ca'$  i  $b = cb'$ . Aleshores podem definir la matriu invertible ( $a'r + b's = 1$ ):

$$\begin{pmatrix} r & -b' \\ s & a' \end{pmatrix}$$

Considerem ara la matriu  $T_0$  que coincideix amb la matriu identitat excepte en les entrades  $t_1^1, t_1^k, t_k^1, t_k^k$  que tenen valors  $r, -b_1, s, a$  respectivament. Al multiplicar la nostra matriu, la que volem reduir, per la dreta per  $T_0$ , obtenim una nova matriu  $\tilde{A}$  tal que l'entrada  $a_1^1$  és  $c$  i l'entrada  $a_1^k$  és 0.

Repetim aquest procediment fins que l'entrada en la posició (1,1) divideixi tota la fila 1. És clar que les entrades en la posició (1,1) després d'aplicar el pas divideixen a les entrades anteriors a aplicar-lo.

**Observació 3.1.2.** Notem que arribem a la situació en què l'entrada (1,1) divideix tota la fila en temps finit. En efecte, sigui  $\delta : R \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  definida per  $\delta(x) = \#\{p_1, p_2, \dots, p_r\}$  si  $p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_t^{r_t}$  és la descomposició en producte d'elements irreductibles d' $x$ . Aleshores cada cop que apliquem el pas 2, substituïm l'entrada  $a$  en (1,1) pel valor  $c = MCD(a, b)$ , i obtenim  $\delta(c) \leq \delta(a)$ .

Ara, usant operacions elementals fem zero totes les entrades de la fila. Si  $a_1^k/a_1^1 = q$  substituïm la columna  $k$  per (columna  $k$ ) -  $q$ (columna 1).

*Pas 3.* Seguint un esquema similar al del pas anterior, però usant multiplicació per matrius per l'esquerra, fem que l'entrada  $a_1^1$  de la matriu divideixi tota la columna i fem zero totes les entrades de la columna excepte  $a_1^1$ . Fent aquest pas pot ser que tornem a tenir elements en la fila 1 que no són zero. Aleshores tornem al pas 2.

**Observació 3.1.3.** Les entrades  $a_1^1$  són divisores propis de les anteriors entrades o bé unitats. Per tant, arribem en un nombre finit de passos a la situació en què  $a_1^1$  divideix a tota la seva fila i a tota la seva columna.

Així, finalment fem zero totes les entrades de la fila i la columna de  $a_1^1$ . Un cop arribat a aquesta situació, repetim tot el procés però amb la matriu resultant d'eliminar la primera fila i la primera columna. Ara, l'element  $a_1^1$  de la nova matriu és l'element  $a_2^2$  de l'anterior i les dimensions de la nova matriu són  $(n-1) \times (m-1)$ .

*Pas 4.* Repetint els passos 1, 2 i 3 arribem a la situació en què obtenim una matriu  $\tilde{A}$  on les entrades  $a_1^1, a_2^2, \dots, a_s^s$ ,  $1 \leq s \leq \min\{m, n\}$  són no nul·les i la resta d'entrades són nul·les. Tot i així, pot ser que no se satisfaci la condició de divisibilitat  $a_1^1 | a_2^2 | \dots | a_s^s$ . Suposem que  $a_i := a_i^i \nmid a_{i+1} := a_{i+1}^{i+1}$ . Aleshores sumem la fila  $i+1$  a la fila  $i$ , obtenim un element en la fila de  $a_i$  que no és divisible per  $a_i$ . Aleshores procedim com en el pas 2 per obtenir una nova entrada  $a'_i = MCD(a_i, a_{i+1})$ . Fem el mateix que en el pas 3 per tornar a obtenir una matriu diagonal. Ara, la nova entrada  $a'_{i+1}$  és combinació lineal de  $a_i, a_{i+1}$ , per tant  $a'_i | a'_{i+1}$ . Amb una justificació similar a la dels passos anteriors podem demostrar que després d'un nombre finit de passos arribem a la situació en què  $a_1 | a_2 | \dots | a_s$ .

## 3.2 Teorema d'estructura per a mòduls finitament generats sobre un PID

És a partir de la forma normal d'Smith que podem demostrar el teorema d'estructura per a mòduls finitament generats sobre dominis d'ideals principals.

**Teorema 3.2.1.** *Sigui  $R$  un domini d'ideals principals i sigui  $M$  un  $R$ -mòdul no nul finitament generat.*

1.  $M$  és suma directa de mòduls,

$$M \cong R/(d_1) \oplus R/(d_2) \oplus \dots \oplus R/(d_s) \oplus R^k,$$

on els  $d_i$  són elements no nuls i no unitats d' $R$  i  $d_i | d_j$  per tot  $i \leq j$ .

2.  $k$  i els elements  $d_1, \dots, d_s$  estan unívocament determinats per  $M$ .

Als elements  $d_1, \dots, d_s$  els anomenem *factors invariants*. Dividirem la demostració en dues parts, primer demostrarem existència de la descomposició en suma directa i després demostrarem la unicitat.

### 3.2.1 Existència de la descomposició

**Lema 3.2.2.** *Sigui  $R$  un anell commutatiu i unitari. Sigui  $M$  un  $R$ -mòdul lliure amb base  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Siguin  $\{w_1, \dots, w_n\}$  elements d' $M$  i  $C \in Mat_n(R)$  que satisfà*

$$[v_1, \dots, v_n]C = [w_1, \dots, w_n]. \quad (3.1)$$

*Aleshores  $\{w_1, \dots, w_n\}$  és una base d' $M$  si, i només si,  $C$  és invertible en  $Mat_n(R)$ .*

*Demostració.* Demostrem la primera implicació. Suposem que  $\{w_1, \dots, w_n\}$  és una base d' $M$ . Aleshores podem escriure cada  $v_j$  com a combinació lineal dels  $w_i$ :

$$v_j = \sum_i d_{i,j} w_i.$$

Definim  $D := (d_{i,j})$ . Podem doncs, reunir les  $n$  equacions anteriors en una sola equació:

$$[w_1, \dots, w_n]D = [v_1, \dots, v_n].$$

Ara, de l'equació 3.1 obtenim que

$$[v_1, \dots, v_n]CD = [v_1, \dots, v_n].$$

Per tant,  $0 = [v_1, \dots, v_n](Id - CD)$ . Com que els  $\{v_1, \dots, v_n\}$  són base, en particular són linealment independents, obtenim que  $Id = CD$ . Tenim doncs que  $C$  té una inversa per la dreta, el que implica que  $\det(C)$  és unitat, per tant  $C$  és invertible.

Demostrem ara la segona implicació. Suposem que  $C$  és invertible, aleshores podem reescriure l'equació 3.1 com

$$[v_1, \dots, v_n] = [w_1, \dots, w_n]C^{-1}.$$

Això implica que cada  $v_j$  és combinació lineal dels  $w_i$ 's, per tant  $\{w_1, \dots, w_n\}$  genera  $M$ . Ara, suposem que existeixen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  tals que  $\sum_i \lambda_i w_i = 0$ . Llavors,

$$0 = [w_1, \dots, w_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = [v_1, \dots, v_n]C \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Com abans, la independència lineal de  $\{v_1, \dots, v_n\}$  obliga a  $C \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = 0$ . Però,

$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = C^{-1}C \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = 0$ . Hem demostrat doncs que els  $\{w_1, \dots, w_n\}$  són linealment independents i generen  $M$  i per tant són base.  $\square$

A partir d'ara suposarem  $R$  un domini d'ideals principals.

**Teorema 3.2.3.** *Sigui  $M$  un  $R$ -mòdul lliure de rang  $n$  i sigui  $N$  un submòdul. Aleshores existeix una base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  d' $M$ , un enter  $s \leq n$  i elements  $d_1, d_2, \dots, d_s$  d' $R$  tals que  $d_i | d_j$  si  $i \leq j$  i  $\{d_1 v_1, \dots, d_s v_s\}$  és una base d' $N$ . En particular,  $N$  és un  $R$ -mòdul lliure de rang  $s$ .*

*Demostració.* Sigui  $\{m_1, \dots, m_n\}$  una base d' $M$ . Si  $N = (0)$  el teorema és trivial. Suposem doncs  $N \neq (0)$ . Pel lema 3.0.6, existeix un sistema generador d' $N$  amb

no més d' $n$  elements. Sigui  $\{e_1, \dots, e_s\}$  un sistema generador d' $N$  amb la mínima cardinalitat. Podem escriure els elements  $e_j$  com a combinació lineal dels  $m_i$ 's,

$$e_j = \sum_i a_{i,j} m_i.$$

Tenim doncs

$$[e_1, \dots, e_s] = [m_1, \dots, m_n]A, \quad (3.2)$$

on  $A$  denota la matriu  $n \times s$ ,  $A = (a_{i,j})$ . Pel teorema 3.1.1, existeixen matrius invertibles  $P \in \text{Mat}_n(R)$  i  $Q \in \text{Mat}_s(R)$  tals que  $A' = PAQ$  és una matriu diagonal  $\text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_s)$  tals que  $d_i | d_j$  si  $i \leq j$ . Tenim també que  $P^{-1}A'Q^{-1} = A$ , per tant podem reescriure l'equació 3.2 com

$$[e_1, \dots, e_s]Q = [m_1, \dots, m_n]P^{-1}A'.$$

Definim  $\{v_1, \dots, v_n\}$  per  $[v_1, \dots, v_n] = [m_1, \dots, m_n]P^{-1}$  i  $\{w_1, \dots, w_s\}$  per  $[w_1, \dots, w_s] = [e_1, \dots, e_s]Q$ . Pel lema 3.2.2,  $\{v_1, \dots, v_n\}$  és una base d' $M$ . A més, com que  $Q$  és invertible,  $\{w_1, \dots, w_s\}$  genera  $N$ , ja que obtenim l'equació  $[w_1, \dots, w_s]Q^{-1} = [e_1, \dots, e_s]$ , el que equival a dir que els elements  $e_j$  es poden expressar com a combinació lineal dels  $w_i$ 's. Per la minimalitat d' $s$ , cap subconjunt estrictament inclòs en  $\{w_1, \dots, w_s\}$  genera  $N$ , podem afirmar doncs que cap  $w_i$  és nul. Finalment, per com hem escollit  $\{w_1, \dots, w_s\}$  i  $\{v_1, \dots, v_n\}$  obtenim

$$[w_1, \dots, w_s] = [v_1, \dots, v_n]A' = [d_1 v_1, \dots, d_s v_s].$$

Com que tots els  $w_i$ 's són no nuls,  $d_j$  és no nul per tot  $j$ . De la independència lineal de  $\{v_1, \dots, v_s\}$  podem deduir que  $\{w_1, \dots, w_s\}$  també són linealment independents. És clar doncs que  $\{w_1, \dots, w_s\}$  és una base d' $N$  i, en particular,  $N$  és un mòdul lliure de rang  $s$ .  $\square$

Amb aquests resultats podem ja demostrar l'existència de la descomposició en suma directa de l'enunciat del teorema d'estructura.

*Demostració.* Considerem  $M$  un  $R$ -mòdul finitament generat. Sigui  $\{x_1, \dots, x_n\}$  un sistema de generadors d' $M$  amb mínima cardinalitat. Ara considerem  $F$  un  $R$ -mòdul lliure amb base  $\{f_1, \dots, f_n\}$ . Definim un morfisme d' $R$ -mòduls  $\varphi : F \rightarrow M$  definit per  $\varphi(\sum_i r_i f_i) = \sum_i r_i x_i$ . Sigui  $N$  el nucli de  $\varphi$ . Com que  $N$  és un submòdul d' $F$ , pel teorema 3.2.3,  $N$  és un  $R$ -mòdul lliure de rang  $s \leq n$  i existeix una base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  d' $F$  i elements no nuls  $d_1, \dots, d_s$  d' $R$  tals que  $\{d_1 v_1, \dots, d_s v_s\}$  és una base d' $N$  i  $d_i | d_j$  si  $i \leq j$ .  $\varphi$  és exhaustiva, per tant  $M = \text{Im } \varphi$ , tenim doncs:

$$M \cong F/N = (Rv_1 \oplus \dots \oplus Rv_n)/(Rd_1 v_1 \oplus \dots \oplus Rd_s v_s).$$

**Lema 3.2.4.** *Siguin  $A_1, \dots, A_n$   $R$ -mòduls i  $B_i \subseteq A_i$  submòduls. Llavors,*

$$(A_1 \oplus \dots \oplus A_n)/(B_1 \oplus \dots \oplus B_n) \cong A_1/B_1 \oplus \dots \oplus A_n/B_n.$$

*Demostració.* Considerem el morfisme  $\phi : A_1 \oplus \dots \oplus A_n \rightarrow A_1/B_1 \oplus \dots \oplus A_n/B_n$  definit per  $(a_1, \dots, a_n) \mapsto (a_1 + B_1, \dots, a_n + B_n)$ . El nucli d'aquesta aplicació és  $B_1 \oplus \dots \oplus B_n \subseteq A_1 \oplus \dots \oplus A_n$ , així doncs,

$$(A_1 \oplus \dots \oplus A_n)/(B_1 \oplus \dots \oplus B_n) \cong A_1/B_1 \oplus \dots \oplus A_n/B_n.$$

□

Podem observar que  $Rv_i/Rd_iv_i \cong R/(d_i)$ , ja que l'aplicació  $r \mapsto rv_i + Rd_iv_i$  és exhaustiva amb nucli  $Rd_i = (d_i)$ .

Ara, juntament amb el lema 3.2.4 obtenim que:

$$M \cong Rv_1/Rd_1v_1 \oplus \dots \oplus Rv_s/Rd_s v_s \oplus Rv_{s+1} \oplus \dots \oplus Rv_n \cong R/(d_1) \oplus \dots \oplus R/(d_s) \oplus R^{n-s}.$$

□

### 3.2.2 Unicitat de la descomposició

Abans de demostrar la unicitat del teorema donarem algunes definicions. Aquí també considerem  $R$  un domini d'ideals principals amb element unitat 1.

**Definició 3.2.5.** *Sigui  $M$  un  $R$ -mòdul. Aleshores, definim  $\text{ann}(x) = \{r \in R : rx = 0\}$ . De la mateixa manera, si  $S \subseteq M$  és un subconjunt d' $M$ , podem definir  $\text{ann}(S) = \{r \in R : rx = 0\}$ .*

**Observació 3.2.6.**  *$\text{ann}(x)$  és un ideal d' $R$  i  $\text{ann}(S) = \bigcap_{x \in S} \text{ann}(x)$ , per tant  $\text{ann}(S)$  és també un ideal d' $R$ .*

**Definició 3.2.7.** *Qualsevol generador d' $\text{ann}(x)$  s'anomena període d' $x$ . Qualsevol generador d' $\text{ann}(S)$  s'anomena període d' $S$ .*

Notem que si  $a$  és el període d' $x$ ,  $Rx \cong R/\text{ann}(x) \cong R/(a)$ . Com abans, necessitem alguns lemes previs per poder realitzar la demostració.

**Lema 3.2.8.** *Sigui  $M$  un  $R$ -mòdul finitament generat. Aleshores:*

- (a) *si  $M = A \oplus B$  on  $A$  és un submòdul de torsió i  $B$  és lliure, llavors  $A = M_{\text{tor}}$*
- (b) *si  $M = M_{\text{tor}} \oplus B$  on  $B$  és lliure, el rang de  $B$  està unívocament determinat per  $M$*

*Demostració.* Comencem demostrant (a). És clar que si  $B$  és lliure, és lliure de torsió. Per tant, els elements de torsió són a  $A$ , llavors  $A = M_{\text{tor}}$ . Demostrem (b). Pel teorema d'estructura,  $M = A \oplus B$  on  $A$  és de torsió i  $B$  és lliure. Per l'apartat (a) del lema,  $A = M_{\text{tor}}$ , aleshores  $B \cong M/M_{\text{tor}}$  i per tant el seu rang queda determinat. □



**Lema 3.2.9.** Sigui  $M$  un  $R$ -mòdul,  $x \in M$ ,  $\text{ann}(x) = (a)$  i  $p \in R$  un irreductible.

(a) si  $p|a$  llavors  $Rx/pRx \cong R/(p)$

(b) si  $p \nmid a$  llavors  $pRx = Rx$ .

*Demostració.* Considerem  $\varphi : R \rightarrow Rx$  tal que  $r \mapsto rx$ , que té nucli  $\ker \varphi = (a)$ . Si  $p|a$ ,  $(a) \subseteq (p)$  i  $\text{Im}\varphi_{|(p)}$  és  $pRx$ .

**Observació 3.2.10.** Sigui  $\varphi : M \rightarrow \overline{M}$  un morfisme de mòduls exhaustiu amb nucli  $K$ . Sigui  $N$  un submòdul d' $M$  tal que  $N = \varphi^{-1}(\overline{N})$ . Aleshores existeix un isomorfisme entre  $M/N$  i  $\overline{M}/\overline{N}$ , equivalentment  $M/N \cong (M/K)/(N/K)$ .

Usant aquesta observació obtenim  $R/(p) \cong Rx/pRx$ . Ara, si  $p \nmid a$ , aleshores  $\text{MCD}(a, p) = 1$  ( $p$  és irreductible). Per la identitat de Bézout, existeixen  $s, t \in R$  tals que  $sp+ta = 1$ . Per tot  $r \in R$ ,  $rx = 1rx = (sp+ta)rx = (sprx+tarx) = (sprx)$ , el que implica  $Rx = pRx$ . □

**Lema 3.2.11.** Sigui  $p \in R$  un irreductible i suposem  $pM = 0$ . Aleshores  $M$  és un espai vectorial sobre  $R/(p)$ . A més, si  $\varphi : M \rightarrow \overline{M}$  és un morfisme de mòduls exhaustiu,  $\overline{M}$  és també un  $R/(p)$ -espai vectorial i  $\varphi$  és  $R/(p)$ -lineal.

*Demostració.* Considerem l'aplicació  $\psi : R \rightarrow \text{End}(M)$  tal que  $\psi(r)(m) = rm$ . Com  $pM = \{0\}$ , tenim  $pR \subseteq \ker \psi$ . Aleshores,  $\psi$  factoritza per  $R/(p)$ , és a dir, existeix  $\tilde{\psi} : R/(p) \rightarrow \text{End}(M)$  tal que  $\psi = \tilde{\psi} \circ \pi$ , on  $\pi : R \rightarrow R/(p)$  és l'aplicació quocient. De l'existència de  $\tilde{\psi}$  obtenim que  $M$  és un  $R/(p)$ -mòdul. Com que  $p$  és irreductible,  $R/(p)$  és cos. Així doncs,  $M$  és un  $R/(p)$ -espai vectorial. L'acció d' $R/(p)$  en  $M$  ve donada per

$$(r + (p))x = \tilde{\psi}(r + (p))(x) = \psi(r)(x) = rx.$$

Suposem que  $\varphi : M \rightarrow \overline{M}$  és un morfisme de mòduls exhaustiu. Per  $x \in M$ ,  $p\varphi(x) = \varphi(px) = 0$ . Llavors  $p\overline{M} = p\varphi(M) = \{0\}$ , i per tant  $\overline{M}$  és també un  $R/(p)$ -espai vectorial. Finalment,

$$\varphi((r + (p))x) = \varphi(rx) = r\varphi(x) = (r + (p))(\varphi(x)),$$

tenim doncs que  $\varphi$  és  $R/(p)$ -lineal. □

Seguidament demostrarem la unicitat del teorema 3.2.1.

*Demostració.* Suposem que  $M$  té dues descomposicions en suma directa:  $M \cong A_0 \oplus A_1 \oplus \dots \oplus A_s$ , on

1.  $A_0$  és lliure
2.  $\forall i \geq 1, A_i \cong R/(a_i)$

3.  $a_i \neq 0$ , no són unitats i  $a_i | a_j \forall i \leq j$

i  $M \cong B_0 \oplus B_1 \oplus \dots \oplus B_t$ , on

1.  $B_0$  és lliure
2.  $\forall i \geq 1, B_i \cong R/(b_i)$
3.  $b_i \neq 0$ , no són unitats i  $b_i | b_j \forall i \leq j$

Cal veure que  $\text{rang}(A_0) = \text{rang}(B_0)$ ,  $s = t$  i  $(a_i) = (b_i)$  per tot  $i$ . Pel lema 3.2.8 tenim que

$$M_{\text{tor}} = A_1 \oplus \dots \oplus A_s = B_1 \oplus \dots \oplus B_t.$$

Això implica  $\text{rang}(A_0) = \text{rang}(B_0)$ .

$(a_s) \subseteq (a_i)$  per tot  $i = 1, \dots, s$  i  $(b_t) \subseteq (b_i)$  per tot  $i = 1, \dots, t$ , així doncs  $a_s$  i  $b_t$  són períodes d' $M_{\text{tor}}$ . En un domini d'integritat, dos elements que generen el mateix ideal són associats. Podem assumir doncs que  $a_s = b_t = m$ . Procedirem ara per inducció en el nombre de factors irreductibles en una factorització d' $m$ . Si el nombre és 1, aleshores  $m$  és irreductible i tots els  $a_i$  i  $b_i$  són associats d' $m$ , en aquest cas només cal demostrar  $s = t$ . Tenim que  $mM_{\text{tor}} = \{0\}$ , i pel lema 3.2.11  $M_{\text{tor}}$  és un  $R/(m)$ -espai vectorial de la forma  $(R/(m))^s \cong (R/(m))^t$  i per tant cal  $s = t$ .

Suposem ara que el nombre de factors irreductibles en una descomposició d' $m$  és més gran que 1 i que la unicitat es compleix per tots els mòduls de torsió finitament generats amb un període amb una factorització més curta que la d' $m$ .

Sigui  $p$  un irreductible en  $R$ . Considerem l'endomorfisme d' $M_{\text{tor}}$   $x \mapsto px$ , aquest endomorfisme envia  $A_i$  a  $A_i$  per tot  $i$ . Pel lema 3.2.9 si  $p | a_i$  tenim  $A_i/pA_i \cong R/(p)$ , però si  $p \nmid a_i$  tenim  $A_i/pA_i = \{0\}$ . Aleshores tenim,

$$M_{\text{tor}}/pM_{\text{tor}} \cong (A_1 \oplus \dots \oplus A_s)/(pA_1 \oplus \dots \oplus pA_s) \cong (A_1/pA_1 \oplus \dots \oplus A_s/pA_s) \cong (R/(p))^k$$

on  $k$  és el nombre de  $a_i$ 's tals que  $p | a_i$ . Obtenim que  $p(M_{\text{tor}}/pM_{\text{tor}}) = \{0\}$ , altre cop pel lema 3.2.11  $k = \dim(M_{\text{tor}}/pM_{\text{tor}})$  com a  $R/(p)$ -espai vectorial. Fent el mateix amb l'altra descomposició arribem a que el nombre de  $b_i$ 's tals que  $p | b_i$  és també  $k$ . Si  $p$  és un irreductible que divideix  $a_1$ , aleshores  $p | a_i$  per tot  $1 \leq i \leq s$  i a més  $p$  divideix exactament  $s$   $b_i$ 's, d'aquí obtenim que  $s \leq t$ . Utilitzant el mateix argument però agafant un irreductible  $q$  tal que  $q | b_1$  obtenim  $t \leq s$ , és clar doncs, que  $s = t$ .

Fixem un irreductible  $p$  tal que  $p | a_1$ . Aleshores  $p | a_j$  i  $p | b_j$  per  $1 \leq j \leq s$ . Sigui  $k'$  l'últim índex tal que  $a_{k'}$  és associat de  $p$ . Llavors,  $pA_j = \{0\}$  per tot  $j \leq k'$  i  $pA_j$  és cíclic de període  $a_j/p$  per tot  $j > k'$ . Per tant,  $pM_{\text{tor}} \cong pA_{k'+1} \oplus \dots \oplus pA_s$ .

De la mateixa manera, si  $k''$  és l'últim índex tal que  $b_{k''}$  és associat de  $p$  obtenim  $pB_j = \{0\}$  per tot  $j \leq k''$ ,  $pB_j$  cíclic de període  $b_j/p$  per  $j > k''$  i  $pM_{\text{tor}} \cong pB_{k''+1} \oplus \dots \oplus pB_s$ .

Finalment, aplicant la hipòtesi d'inducció en  $pM$ , que té període  $m/p$ , tenim que  $k' = k''$  i  $(a_i/p) = (b_i/p)$ , és a dir  $(a_i) = (b_i)$ , per tot  $i > k'$ . A més per  $1 \leq i < k'$  tenim  $(a_i) = (p) = (b_i)$ , ja que són associats.  $\square$

D'acord amb aquesta descomposició,  $R/(d_1) \oplus \dots \oplus R/(d_s)$  és el submòdul de torsió d' $M$  i  $R^{n-s}$  és lliure.

### 3.3 Teorema d'estructura per a mòduls graduats

En aquesta secció readaptarem el teorema d'estructura per a mòduls sobre dominis d'ideals principals. Considerem  $\mathbb{K}$  un cos i l'anell graduat  $\mathbb{K}[t]$ , aquest anell és un domini euclidià, això implica que és també un domini d'ideals principals. Aleshores si considerem un  $\mathbb{K}[t]$ -mòdul graduat  $M$  podríem aplicar el teorema d'estructura anterior. Tot i així el teorema d'estructura per a mòduls graduats requereix paratenció en alguns matisos.

**Lema 3.3.1.** *Siguin  $M, N$  dos  $R$ -mòduls graduats i  $f : M \rightarrow N$  un morfisme graduat. Aleshores  $\ker f$  és també un  $R$ -mòdul graduat.*

*Demostració.* Sabem que  $f(M_i) \subseteq N_i$ . Aleshores podem considerar el morfisme  $f$  com  $\oplus_i f_i$ , on  $f_i : M_i \rightarrow N_i$ . Sigui  $m \in M$ ,  $m$  també pot ser descomposat com a suma de components homogènies, és a dir  $m = \sum_i m_i$  on  $m_i \in M_i$ . Llavors tenim  $f(m) = \sum_i f(m_i) = \sum_i f_i(m_i)$ . Si  $m \in \ker f$  vol dir que  $f_i(m_i) = 0$  per tot  $i$ . Tenim que  $\ker f = \oplus_i \ker f_i = \ker f \cap M_i$  i per tant és un submòdul graduat.  $\square$

**Teorema 3.3.2.** *Sigui  $\mathbb{K}$  un cos. Considerem  $M$  un mòdul graduat no nul sobre l'anell graduat  $\mathbb{K}[t]$ . Aleshores  $M$  descomposa de manera única llevat d'isomorfisme com:*

$$(\oplus_i T^{\alpha_i} \mathbb{K}[t]) \oplus (\oplus_i T^{\gamma_i} \mathbb{K}[t]/t^i).$$

On  $T^{\alpha_i}$  denota una translació en el grau d' $\alpha_i$  unitats.

*Demostració.* Considerem  $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$  un sistema generador d'elements homogènies d' $M$  amb mínima cardinalitat.  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  denotaran els graus dels elements  $m_1, m_2, \dots, m_n$  respectivament. Considerem ara el mòdul lliure  $\oplus_{i=1}^n T^{\alpha_i} \mathbb{K}[t]$ . Sigui  $f$  el morfisme graduat  $f : \oplus_{i=1}^n T^{\alpha_i} \mathbb{K}[t] \rightarrow M$  definida per  $f(e_i) = m_i$ , on  $e_1, \dots, e_n$  és una base homogènia de  $\oplus_{i=1}^n T^{\alpha_i} \mathbb{K}[t]$ . Aquesta aplicació és exhaustiva. Sigui  $N$  el nucli d'aquesta aplicació, pel lema anterior, és també un mòdul graduat. Pel teorema 3.2.3 sabem que existeixen una base  $[v_1, \dots, v_n]$  de  $\oplus_{i=1}^n T^{\alpha_i} \mathbb{K}[t]$ , un enter  $r$  i elements  $d_1, \dots, d_r \in \mathbb{K}[t]$  tals que  $d_i | d_{i+1}$  de manera que  $[d_1 v_1, \dots, d_r v_r]$  és base d' $N$ . Aplicant el teorema d'isomorfia obtindriem

$$M \cong (\oplus_{i=1}^r T^{\deg v_i} \mathbb{K}[t]/(d_i)) \oplus (\oplus_{i=r+1}^n T^{\deg v_i})$$

Cal veure que els ideals  $(d_i)$  són de la forma  $(t^i)$ . Seguint la demostració del teorema 3.2.3, els elements  $d_i$  apareixen en la reducció a la forma normal d'Smith de la matriu  $G$  tal que  $[n_1, \dots, n_r] = [e_1, \dots, e_n]G$ , on  $[n_1, \dots, n_r]$  és un sistema generador homogeni de cardinalitat mínima d' $N$ . Com que les dues bases són homogènies, els coeficients de la matriu també ho han de ser.

**Observació 3.3.3.** La matriu  $G$  és la matriu associada al morfisme graduat  $g : N \rightarrow \oplus_{i=1}^n T^{\alpha_i} \mathbb{K}[t]$ , és a dir  $g(N_i) \subseteq T^{\alpha_i} \mathbb{K}[t]$ . És clar doncs que la matriu  $G$  és una matriu  $n \times s$  que compleix  $\deg(n_j) = \deg(g_i^j) + \deg(e_i)$ .

Readaptem la reducció d'una matriu a la forma normal d'Smith amb coeficients a  $\mathbb{K}[t]$ . En aquest cas, com que hem de ser sensibles al grau, ens resultarà més convenient no fer intercanvis de columnes o files. Són necessàries només 2 tipus d'operacions:

- (i) multiplicar una fila per una unitat  $q \in \mathbb{K}[t]$ .
- (ii) substituir una fila  $k$  per la fila  $k + qj$  on  $q \in \mathbb{K}[t]$ .

S'utilitzen també 2 operacions anàlogues per columnes.

1. Escollim una entrada  $g_i^j$  no nul·la amb grau mínim de la columna de més a l'esquerra.
2. Operant amb files i columnes usant l'operació (ii) fins a obtenir zeros a les entrades de la fila  $i$  i la columna de  $g_i^j$ .
3. Tornem al pas 1, considerant ara la matriu obtinguda en eliminar la fila  $i$  i la columna  $j$  de l'anterior.

Cal veure que aquestes operacions no alteren l'homogeneïtat de la matriu. És clar que multiplicar per una unitat no altera l'homogeneïtat, ja que les unitats en  $\mathbb{K}[t]$  són els elements de grau 0.

**Lema 3.3.4.** *Considerem una columna  $j$  i una columna  $k$  d'una matriu associada a un morfisme graduat respecte bases homogènies. Aleshores, la diferència en el grau entre  $g_i^j$  i  $g_i^k$  és igual a la diferència en el grau entre  $g_{i'}^j$  i  $g_{i'}^k$  per tot  $i, i' = 1, \dots, n$ . És a dir, si tenim*

$$G = \begin{pmatrix} \dots & g_1^j & \dots & g_1^k & \dots \\ \dots & g_2^j & \dots & g_2^k & \dots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \dots & g_n^j & \dots & g_n^k & \dots \end{pmatrix}$$

Aleshores  $\deg(g_1^j) - \deg(g_1^k) = \deg(g_2^j) - \deg(g_2^k) = \dots = \deg(g_n^j) - \deg(g_n^k)$ .

*Demostració.* En efecte, la matriu compleix  $\deg(n_j) = \deg(g_i^j) + \deg(e_i)$ . Aleshores  $\deg(g_i^j) - \deg(g_i^k) = (\deg(n_j) - \deg(e_i)) - (\deg(n_k) - \deg(e_i)) = \deg(n_j) - \deg(n_k)$ . Ara,  $\deg(g_{i'}^j) - \deg(g_{i'}^k) = (\deg(n_j) - \deg(e_{i'})) - (\deg(n_k) - \deg(e_{i'})) = \deg(n_j) - \deg(n_k)$ .  $\square$

De la mateixa manera es pot demostrar un resultat anàleg per files. És a dir, si tenim

$$G = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_i^1 & g_i^2 & \dots & g_i^s \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_i^1 & g_i^2 & \vdots & g_i^s \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

Aleshores,  $\text{deg}(g_i^1) - \text{deg}(g_i^1) = \text{deg}(g_i^2) - \text{deg}(g_i^2) = \dots = \text{deg}(g_i^s) - \text{deg}(g_i^s)$ . Aquest lema ens assegura que en el pas 2 de l'algoritme de reducció no generem entrades no homogènies. Així doncs, un cop reduïda la matriu  $G$  a la forma normal d'Smith, obtenim una matriu també homogènia. Els elements homogenis de  $\mathbb{K}[t]$  són de la forma  $at^n$ ,  $a \in \mathbb{K}$ . Però  $\mathbb{K}[t]/(at^n) = \mathbb{K}[t]/(t^n)$ . Així doncs, queda demostrada la descomposició en suma directa. La unicitat del teorema ve donada pel cas no graduat.

□

## Notes bibliogràfiques

Una discussió més completa de mòduls sobre dominis d'ideals principals la podeu trobar a [12], capítol 10 i 11 i [16], capítol 8. L'enunciat del teorema d'estructura per a mòduls graduats finitament generats sobre un PID es pot trobar a [26], capítol 3, teorema 3.19, o bé en [27] teorema 2.1. Tot i així es presenta sense demostració, la demostració que es descriu en aquest treball l'he proposat jo.

## 4 Persistència

En aquest capítol exposarem la teoria matemàtica darrere la persistència. Donarem la definició de l'homologia persistent i mòdul de persistència i acompanyarem aquesta teoria amb diagrames que ens permetin visualitzar la persistència de l'homologia així com algorismes de càlcul.

### 4.1 Homologia persistent

L'homologia persistent intenta captar les propietats topològiques que perduren al llarg d'una filtració. Suposem que tenim una filtració finita d'un complex simplicial  $K$ :

$$\emptyset = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_m = K$$

Per tot  $0 \leq i \leq j \leq m$  es té la inclusió  $K_i \subseteq K_j$ . Aquestes inclusions induïxen un morfisme en l'homologia  $i_p^{i,j} : H_p(K_i) \rightarrow H_p(K_j)$  per a cada dimensió  $p$ . Aquest morfisme envia classes d'homologia d' $H_p(K_i)$  a la classe d'homologia  $H_p(K_j)$  que la conté. Així doncs, a la filtració hi tenim associada una successió de grups d'homologia

$$0 = H_p(K_0) \rightarrow H_p(K_1) \rightarrow \dots \rightarrow H_p(K_m) = H_p(K)$$

per a cada dimensió  $p$ . En cada pas de  $K_i$  a  $K_{i+1}$  pot ser que s'afegeixi un símplex  $\sigma$ . Aquest símplex pot generar un nou cicle  $z$ , i per tant una nova classe en l'homologia, o també pot fer que la classe d'un cicle  $z'$  es fusioni amb una classe ja existent o es converteixi en vora. En el primer cas, apareix una classe en  $H_p(K_{i+1})$  que no existia en  $H_p(K_i)$ . I en el segon cas, tota la classe de  $z'$  d' $H_p(K_i)$  es fusiona a  $H_p(K_{i+1})$  amb una altra classe. Ens interessen les classes que tenen vides llargues, les classes que «persisteixen» al llarg d'un «major» nombre de complexos.

**Definició 4.1.1.** *Definim els  $p$ -èssims grups d'homologia  $(i,j)$ -persistent com les imatges dels morfismes induïts per les inclusions,  $H_p^{i,j} := \text{Im } i_p^{i,j}$ , per  $0 \leq i \leq j \leq m$ . Al rang de  $\text{Im } i_p^{i,j}$  l'anomenem  $p$ -èssim nombre de Betti  $(i,j)$ -persistent.*

Així doncs, els grups d'homologia  $(i,j)$ -persistent consisteixen en les classes de  $K_i$  que segueixen existint com a tals a  $K_j$ . Aleshores, els  $p$ -èssims grups d'homologia  $(i,j)$ -persistents també es podrien veure com  $Z_p(K_i)/(B_p(K_j) \cap Z_p(K_i))$ .

**Proposició 4.1.2.**  $H_p^{i,j} \cong Z_p(K_i)/(B_p(K_j) \cap Z_p(K_i))$

*Demostració.* Considerem el morfisme induït per la inclusió  $K_i \subseteq K_j$   $i_p^{i,j} : H_p(K_i) \rightarrow H_p(K_j)$ . Pel primer teorema d'isomorfia tenim  $\text{Im}(i_p^{i,j}) \cong H_p(K_i)/\text{Ker}(i_p^{i,j})$ . Ara, el nucli d'aquest morfisme  $i_p^{i,j}$  són els cicles de  $Z_p(K_i)$  que són vores a  $B_p(K_j)$ . És a dir,

$$\text{Im}(i_p^{i,j}) \cong H_p(K_i)/\text{Ker}(i_p^{i,j}) \cong H_p(K_i)/(Z_p(K_i) \cap B_p(K_j)) \cong Z_p(K_i)/(Z_p(K_i) \cap B_p(K_j)).$$

□

Sigui  $[z]$  una classe en  $H_p(K_i)$ , diem que *neix* a  $K_i$  si  $[z] \notin H_p^{i-1,i}$ . Si  $[z]$  *neix* a  $K_i$  diem que *mor* a  $K_j$  si  $i_p^{i,j-1}([z]) \notin H_p^{i-1,j-1}$  però  $i_p^{i,j}([z]) \in H_p^{i-1,j}$ .

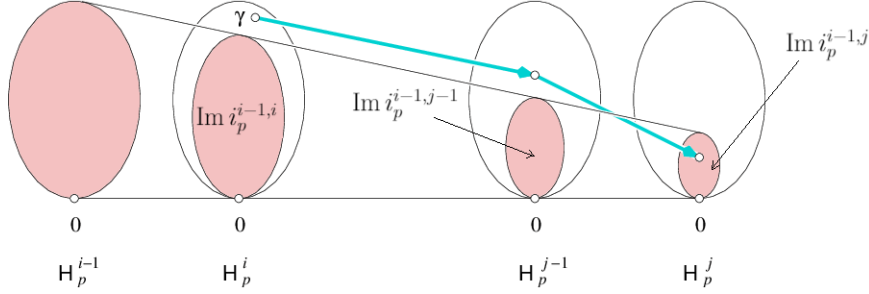


Figura 1: En aquest dibuix es pot veure el seguiment d'una classe d' $H_p(K_i)$  que neix a  $K_i$  i mor a  $K_j$ . La classe  $\gamma$  neix a  $K_i$  ja que no és a la zona ombrejada ( $\text{Im } i_p^{i-1,i}$ ) d' $H_p^i$  i mor a  $K_j$  ja que la seva imatge per  $i_p^{i,j}$  recau a la zona ombrejada ( $\text{Im } i_p^{i-1,j}$ ) d' $H_p^j$ . Adaptat de [8].

**Definició 4.1.3.** Si  $[z]$  és una classe en  $H_p(K_i)$  que neix a  $K_i$  i mor a  $K_j$  diem que la persistència de  $[z]$  és  $j - i$ . Si una classe d'equivalència no mor, la seva persistència és  $\infty$ .

Definim  $\mu_p^{i,j}$  com el nombre de classes de dimensió  $p$  que neixen a  $K_i$  i moren a  $K_j$ . Tenim que  $\beta_p^{i,j-1} - \beta_p^{i,j}$  és el nombre de classes de dimensió  $p$  que neixen a  $i$  o abans i moren a  $j$ , també  $\beta_p^{i-1,j-1} - \beta_p^{i-1,j}$  és el nombre de classes que neixen a  $i - 1$  o abans i moren a  $j$ . Aleshores es té:

$$\mu_p^{i,j} = \beta_p^{i,j-1} - \beta_p^{i,j} - (\beta_p^{i-1,j-1} - \beta_p^{i-1,j}).$$

## 4.2 Mòdul de persistència

En aquesta secció intentarem entendre l'estructura de l'homologia persistent. Ara,  $R$  denotarà un anell commutatiu i unitari. Començarem amb un parell de definicions.

**Definició 4.2.1.** Un complex de persistència és una família de complexos de cadenes  $\{C_\star^i\}_{i \geq 0}$  sobre  $R$  juntament amb morfismes de complexos cadenes  $f_i : C_\star^i \rightarrow C_\star^{i+1}$  per tot  $i \geq 0$ .

Així, els complexos de cadenes d'una filtració finita d'un complex simplicial  $K$  juntament amb les inclusions  $i_j : C_\star^j \rightarrow C_\star^{j+1}$  formen un complex de persistència.

**Definició 4.2.2.** Un  $R$ -mòdul de persistència és una família  $\mathcal{M}$  d' $R$ -mòduls  $\{M^i\}_{i \geq 0}$  juntament amb homomorfismes  $\varphi^i : M^i \rightarrow M^{i+1}$ .

L'homologia  $p$ -dimensional amb coeficients a  $R$  d'un complex de persistència com el d'abans és doncs un mòdul de persistència.

**Definició 4.2.3.** Diem que un complex de persistència  $\{C_\star^i\}_{i \geq 0}$  (respectivament mòdul de persistència  $\{M^i, \varphi^i\}_{i \geq 0}$ ) és de tipus finit si cada component del complex (mòdul) és un  $R$ -mòdul finitament generat i si els morfismes  $f^i$  ( $\varphi^i$ ) són isomorfismes per  $i \geq m$  per algun  $m \in \mathbb{Z}$ .

Aleshores, si partim d'un complex simplicial  $K$  amb una certa filtració (finita), obtenim un complex de persistència de tipus finit i un mòdul de persistència de tipus finit sobre  $\mathbb{Z}$ .

Si  $\mathcal{M} = \{M^i, \varphi^i\}$  i  $\mathcal{N} = \{N^i, \psi^i\}$  són mòduls de persistència, un morfisme de mòduls de persistència  $f_\star : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  és una successió de morfismes d' $R$ -mòduls  $\{f_i\}_{i \geq 0}$ ,  $f_i : M^i \rightarrow N^i$  per tot  $i \geq 0$  tal que el següent diagrama és commutatiu per tot  $i \geq 0$ :

$$\begin{array}{ccc} M^i & \xrightarrow{\varphi^i} & M^{i+1} \\ f_i \downarrow & & \downarrow f_{i+1} \\ N^i & \xrightarrow{\psi^i} & N^{i+1} \end{array}$$

És a dir, tal que  $f_{i+1} \circ \varphi^i = \psi^i \circ f_i$ .

Aleshores, és fàcil de comprovar que els mòduls de persistència juntament amb els morfismes entre ells formen una categoria. La categoria de mòduls de persistència, que notarem per  $MP$ .

Considerem ara el següent functor:

Suposem que tenim un  $R$ -mòdul de persistència  $\mathcal{M} = \{M^i, \varphi^i\}_{i \geq 0}$ . Considerem l'anell graduat  $R[t]$  i definim l' $R[t]$ -mòdul graduat

$$\alpha(\mathcal{M}) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} M^i$$

on l'acció d' $R[t]$  ve donada per  $t(m^0, m^1, m^2, \dots) = (0, \varphi^0(m^0), \varphi^1(m^1), \dots)$ .

Veiem que, efectivament,  $\alpha$  és functorial. En efecte,  $\alpha$  envia mòduls de persistència a mòduls graduats  $R[t]$ . Cal veure ara que tot morfisme  $f_\star \in \text{Hom}_{MP}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  té associat un morfisme  $\alpha(f) \in \text{Hom}(\alpha(\mathcal{M}), \alpha(\mathcal{N}))$  tal que:

1.  $\alpha(\text{Id}_{\mathcal{M}}) = \text{Id}_{\alpha(\mathcal{M})}$  per tot  $\mathcal{M} \in MP$
2. Si  $g_\star : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{L}$  és un morfisme de mòduls de persistència, aleshores  $\alpha(g_\star \circ f_\star) = \alpha(g_\star) \circ \alpha(f_\star)$

Considerem  $f_\star \in \text{Hom}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ . Definim  $\alpha(f_\star) : \alpha(\mathcal{M}) \rightarrow \alpha(\mathcal{N})$  com  $\alpha(f_\star)(m^0, m^1, \dots) = (f_0(m^0), f_1(m^1), \dots) \forall m = (m^0, m^1, \dots) \in \alpha(\mathcal{M})$ . És clar que és un morfisme graduat, en efecte:

$\alpha(f_\star)(t(m^0, m^1, m^2, \dots)) = \alpha(f_\star)(0, \varphi^0(m^0), \varphi^1(m^1), \dots) = (f_0(0), f_1(\varphi^0(m^0)), f_2(\varphi^1(m^1)), \dots) = (0, \psi^0(f_0(m^0)), \psi^1(f_1(m^1)), \dots) = t(f_0(m^0), f_1(m^1), \dots) = t\alpha(f_\star)(m^0, m^1, \dots)$ . També, si  $m = (m^0, m^1, \dots)$  i  $n = (n^0, n^1, \dots)$  es té  $\alpha(f_\star)(m + n) = (f_0(m^0 + n^0), f_1(m^1 + n^1) +$



$n^1), \dots) = (f_0(m^0), f_1(m^1), \dots) + (f_0(n^0), f_1(n^1), \dots) = \alpha(f_\star)(m) + \alpha(f_\star)(n)$ . A més,  $\alpha(f_\star)(M^i) \subseteq (N^i)$ . Hem demostrat doncs que és un morfisme graduat.

Vegeu ara que  $\alpha$  preserva el morfisme identitat i la composició de morfismes.

1. Tenim que  $\alpha(Id_{\mathcal{M}}) : \alpha(\mathcal{M}) \rightarrow \alpha(\mathcal{M})$  i  $Id_{\alpha(\mathcal{M})} : \alpha(\mathcal{M}) \rightarrow \alpha(\mathcal{M})$ . Ara,  $\alpha(Id_{\mathcal{M}})(m^0, m^1, \dots) = (Id^0(m^0), Id^1(m^1), \dots) = (m^0, m^1, \dots) = Id_{\alpha(\mathcal{M})}(m^0, m^1, \dots)$ .
2.  $\alpha(g_\star \circ f_\star)(m^0, m^1, \dots) = (g_0 \circ f_0(m^0), g_1 \circ f_1(m^1), \dots) = \alpha(g_\star)(f_0(m^0), f_1(m^1), \dots) = \alpha(g_\star) \circ \alpha(f_\star)(m^0, m^1, \dots)$ .

**Teorema 4.2.4** (Zomorodian i Carlsson [27], cf. Corbet i Kerber [6]). *Sigui  $R$  un anell commutatiu i noetherià. Aleshores,  $\alpha$  defineix una equivalència de categories entre els mòduls de persistència sobre  $R$  de tipus finit i els mòduls graduats finitament generats sobre  $R[t]$ .*

*Demostració.* Volem veure que existeix un functor  $\beta : PM_{t.f.} \rightarrow Gr - mod_{f.g.}$  tal que  $\alpha\beta \simeq Id_{PM_{t.f.}}$  i  $\beta\alpha \simeq Id_{Gr - mod_{f.g.}}$ . On  $PM_{t.f.}$  denota la categoria de mòduls de persistència de tipus finit sobre  $R$  i  $Gr - mod_{f.g.}$  denota la categoria de  $R[t]$ -mòduls graduats finitament generats.

Veiem primer que si  $\mathcal{M} = \{M_i, \varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  és un mòdul de persistència de tipus finit sobre  $R$  aleshores  $\alpha(\mathcal{M})$  és un  $R[t]$ -mòdul graduat finitament generat.

Sigui  $D \in \mathbb{N}$  tal que per tot  $i \geq D$   $\varphi_i : M_i \rightarrow M_{i+1}$  és un isomorfisme. Sigui  $\mathcal{G}_i$  un sistema generador d' $M_i$ . Volem veure que  $\cup_{i=0}^D \mathcal{G}_i$  és un sistema generador d' $\alpha(\mathcal{M})$ . Cal veure doncs, que cada element homogeni en  $\alpha(\mathcal{M}) = \oplus_{i \in \mathbb{N}} M_i$  està generat per la unió dels  $\mathcal{G}_i$ 's. Així doncs, fixem un  $k \in \mathbb{N}$  i un  $m_k \in \alpha(\mathcal{M})$  homogeni de grau  $k$ . Si  $k \leq D$  aleshores  $m_k$  està generat per  $\mathcal{G}_k$ . Si  $k > D$ , veiem que  $m_k$  està generat per  $\mathcal{G}_D$ . Definim  $\varphi_{D,k} := \varphi_D \circ \varphi_{D+1} \circ \dots \circ \varphi_{k-1}$ . Sigui  $m_D = \varphi_{D,k}^{-1}(m_k)$ , aquest element existeix, ja que  $\varphi_i$  és un isomorfisme per tot  $i \geq D$ .  $m_D$  està generat per  $\mathcal{G}_D$  i per tant  $m_k$  està generat per  $\varphi_{D,k}(\mathcal{G}_D)$ . Ara,  $\varphi_{D,k}(\mathcal{G}_D) = t^{k-D}\mathcal{G}_D$  i  $t^{k-D} \in R[t]$ , obtenim doncs que  $m_k$  està generat per  $\mathcal{G}_D$ .

Sigui  $M = \oplus_{i \in \mathbb{N}} M_i$  un mòdul graduat sobre  $R[t]$ . Definim el functor  $\beta(M) = M_0 \xrightarrow{\varphi_0} M_1 \xrightarrow{\varphi_1} \dots$  on  $\varphi_i(m_i) = t \cdot m_i$ . Seguint el mateix esquema que per  $\alpha$  podem veure fàcilment que efectivament és un functor. Volem veure que  $\beta(M)$  és un mòdul de persistència de tipus finit.

Viem primer que cada  $M_i$  d' $M$  és finitament generat. Com que  $M$  és un  $R$ -mòdul finitament generat i  $R$  és noetherià, tenim que  $M$  és un mòdul noetherià. Per tant, tot submòdul d' $M$  és finitament generat, en particular  $M_{\geq k} := \oplus_{i \geq k} M_i$ . Sigui  $m_1, m_2, \dots, m_s$  un sistema de generadors d' $M$ , i  $m \in M_{\geq k}$ . Aleshores  $m = \sum_{i \in J_m} r_i m_i$ , on  $r_i \in R[t]$  i  $J_m \subseteq \{1, 2, \dots, s\}$ ; ara bé, si resulta que  $m \in M_k$  tenim que  $r_i$  són de grau 0 i  $m_i \in M_k$  per tot  $i \in J_m$ , és clar doncs que  $M_k$  és finitament generat i que per tant tot  $M_i$  per  $i \in \mathbb{N}$  és finitament generat.

Cal veure ara que existeix  $D$  tal que la multiplicació per  $t$  en  $\beta(M)$  és un isomorfisme d' $M_i$  a  $M_{i+1}$  per tot  $i \geq D$ .

**Lema 4.2.5.** *Sigui  $R$  un anell noetherià. Aleshores, tot  $R$ -mòdul finitament generat és finitament presentat.*

Usant el lema 4.2.5 i el teorema B.12, podem definir un morfisme graduat  $\mu : R[t]^n \rightarrow M$  tal que el seu nucli és finitament generat. Per tant podem definir  $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_m\}$  com un sistema generador homogeni de  $\ker \mu$ . Definim també  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  com a un sistema generador homogeni d' $M$  i  $D := \max\{\deg(g_j), \deg(e_k) \mid 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq m\}$ .

Sigui  $y \in M_{i+1}$  amb  $i \geq D$ . Aleshores  $y = \sum_{j=1}^n \lambda_j g_j$  i  $\lambda_j \in R[t]$  homogenis han de ser de grau com a mínim 1. Podem escollir  $y = ty'$  amb  $y' \in M_i$ , el que implica que la multiplicació per  $t$  dóna lloc a un morfisme exhaustiu.

Sigui ara  $y \in M_i$  tal que  $ty = 0$ . Sigui  $x \in R[t]^n$  tal que  $\mu(x) = y$ . Aleshores  $\mu(tx) = ty = 0$ . Podem afirmar doncs que  $tx \in \ker \mu$  i per tant  $tx = \sum_{j=1}^m \tilde{\lambda}_j e_j$ . Cada  $\tilde{\lambda}_j$  és un polinomi homogeni de grau com a mínim 1 (els  $e_j$  tenen grau com a molt  $D$  i  $tx$  té grau com a mínim  $D+1$ ). Tenim que  $tx = \sum_{j=1}^m t\lambda_j e_j = t \sum_{j=1}^m \lambda_j e_j$ , on  $t\lambda_j = \tilde{\lambda}_j$ . Com que  $R[t]^n$  és lliure, obtenim que  $x = \sum_{j=1}^m \lambda_j e_j$ , és a dir  $x \in \ker \mu$  i per tant  $y = 0$ . Això demostra que la multiplicació per  $t$  és injectiva. Llavors, la multiplicació per  $t$  en  $\beta(M)$  és un isomorfisme d' $M_i$  a  $M_{i+1}$  per tot  $i \geq D$ .  $\square$

Amb aquesta correspondència, hem aconseguit captar en una sola estructura l'homologia d'un complex simplicial filtrat. Guardem el moment en el qual una classe neix usant el coeficient de polinomi. Aquest teorema ens diu que no sembla haver-hi un teorema de classificació pels mòduls de persistència, ja que sabem d'àlgebra commutativa que no tenim un teorema de classificació per a mòduls graduats sobre  $\mathbb{Z}[t]$ . Ara bé, si l'anell  $R$  sobre el que definim l' $R$ -mòdul és un cos, sí que tenim classificació. Si  $\mathbb{K}$  és un cos, aleshores  $\mathbb{K}[t]$  és un domini d'ideals principals i pel teorema 3.3.2 tenim que l'estructura del  $\mathbb{K}[t]$ -mòdul ve descrita per:

$$\left( \bigoplus_{i=0}^n T^{\alpha_i} \mathbb{K}[t] \right) \oplus \left( \bigoplus_{j=0}^m T^{\gamma_j} \mathbb{K}[t]/(t^{n_j}) \right).$$

on  $\alpha_i, \gamma_j \in \mathbb{Z}$  i  $T^\alpha$  denota una  $\alpha$ -traslació en el graduat.

A continuació relacionarem de manera bijectiva les classes mòdul isomorfisme de  $\mathbb{K}[t]$ -mòduls amb objectes que s'adaptin bé a la nostra construcció de l'homologia persistent.

**Definició 4.2.6.** *Un  $\mathcal{P}$ -interval és un parell ordenat  $(i, j)$  tal que  $0 \leq i < j \in \overline{\mathbb{Z}}$ .*

Definim  $Q(i, j) = T^i F[t]/(t^{j-i})$  per a tot  $\mathcal{P}$ -interval  $(i, j)$ . Per a un  $\mathcal{P}$ -interval  $(i, \infty)$  es té  $Q(i, \infty) = T^i F[t]$ . Per a un conjunt  $\mathcal{S} = \{(i_0, j_0), (i_1, j_1), \dots, (i_n, j_n)\}$  de  $\mathcal{P}$ -intervals definim

$$Q(\mathcal{S}) = \bigoplus_{k=0}^n Q(i_k, j_k).$$

**Proposició 4.2.7.** *La correspondència  $\mathcal{S} \rightarrow Q(\mathcal{S})$  defineix una bijecció entre els conjunts finits de  $\mathcal{P}$ -intervals i els mòduls graduats finitament generats obre l'anell  $\mathbb{K}[t]$ .*

**Corol·lari 4.2.8.** *Les classes mòdul isomorfisme de mòduls de persistència de tipus finit (amb coeficients a un cos) estan en correspondència bijectiva amb els conjunts finits de  $\mathcal{P}$ -intervals.*

El teorema d'estructura per a mòduls graduats finitament generats sobre un PID ens assegura que existeix una base per aquest mòdul, aquesta base ens proporciona una base compatible per tots els espais vectorials  $H_p(K_i)$  al llarg de la filtració. Cada  $\mathcal{P}$ -interval  $(i, j)$  representa una classe d'homologia (un element de la base) que neix a  $i$  i mor a  $j$ .

### 4.3 Visualització

És convenient representar l'homologia persistent en diagrames per tal de visualitzar la col·lecció de nombres de Betti. És a dir, visualitzar l'evolució de l'homologia al llarg de la filtració. Com abans, seguim considerant una filtració finita d'un complex simplicial  $K$ :

$$\emptyset = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_m = K$$

Considerem un multiconjunt  $Dgm_p(K)$  en  $\overline{\mathbb{Z}}^2$  tal que un punt  $(i, j) \in Dgmp(K)$  si existeix una classe d' $H_p(K_i)$  nascuda a  $K_i$  que mor a  $K_j$ . Un punt  $(i, \infty)$  pertany a  $Dgm_p(K)$  si una classe nascuda a  $K_i$  no mor. Aleshores, els punts  $(i, j) \in Dgmp(K)$  apareixen amb multiplicitat  $\mu_p^{i,j}$ . Si estem treballant amb coeficients en un cos, aquest multiconjunt coincideix amb el conjunt de  $\mathcal{P}$ -intervals en correspondència amb el mòdul de persistència que volem representar. Aquest multiconjunt s'anomena *p-èssim diagrama persistent* de la filtració i es denota per  $Dgm_p(K)$ .

Els diagrames persistents poden ser visualitzats en el pla d'eixos naixement-mort, es dibuixa un punt  $(i, j)$  si aquest pertany al diagrama. La persistència de cada classe és la distància vertical del punt que representa la classe (o les classes) a l'eix diagonal. A més, del diagrama se'n poden llegir els nombres de Betti persistents, el  $p$ -èssim nombre de Betti  $(l, k)$ -persistent és el nombre de punts amb multiplicitat en el quadrant superior esquerra amb cantonada  $(l, k)$ . En efecte, una classe augmentarà en 1 el rang d' $H_p^{k,l}$  si la seva persistència és  $i - j$  amb  $i \leq l$  i  $j > k$ , és a dir, el punt recau en el quadrant definit.

**Lema 4.3.1.** *Sigui  $\emptyset = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_m = K$  una filtració. Per a cada parell d'índexs  $0 \leq k \leq l \leq m$  i cada dimensió  $p$  el  $p$ -èssim nombre de Betti  $(l, k)$ -persistent és  $\beta_p^{k,l} = \sum_{i \leq k} \sum_{j > l} \mu_p^{i,j}$ .*

*Demostració.* En efecte,  $\beta_p^{k,l}$  compta el nombre de classes de  $K_k$  que segueixen vives a  $K_l$ . Per tant, inclou totes les classes que neixen a o abans de  $K_k$ , és a dir, les classes de  $K_i$  on  $i \leq k$  i a més moren després de  $K_l$ , és a dir les classes que també són a  $K_j$  on  $j > l$ .  $\square$

Així doncs, els diagrames de persistència guarden la informació dels grups d'homologia persistent.

També, podem visualitzar la persistència de cada classe com un interval semiovert en l'eix dels índexs. Si una classe  $[z]$  neix a  $K_i$  i mor a  $K_j$ , li podem assignar un interval  $[i, j)$  que l'anomenem *k-interval* de  $[z]$ . Si  $[z]$  no mor, li assignem l'interval  $[i, \infty)$ . Com abans, si estem treballant amb coeficients en un cos, els intervals vénen donats per la bijecció del corol·lari 4.2.8.

Si representem aquests intervals en el pla on l'eix vertical representa una ordenació (arbitrària) de classes d'homologia obtenim un *barcode*. Una representació gràfica de l'homologia de la filtració, on queda reflectida la persistència de cada classe al llarg de la filtració. En la figura 2 tenim el barcode per l'homologia en dimensió 1 d'una filtració.

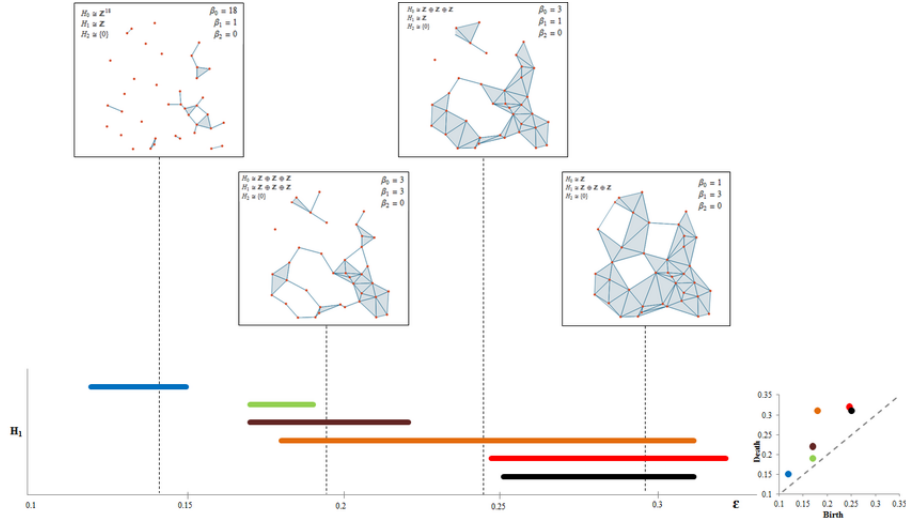


Figura 2: Exemple d'un barcode en dimensió 1 d'una filtració, on  $K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3$  són complexos simplicials d'aquesta. A la dreta podem observar també el 1r diagrama persistent de la filtració. Adaptat de [7].

Un barcode ens dona els nombres de Betti persistents, si volem saber el nombre de Betti  $(i, j)$ -persistent cal traçar una línia vertical en  $x = i$  i  $x = j$ , aleshores el nombre de segments horitzontals que duren tot l'interval  $[i, j)$  correspon al nombre de Betti buscat. També, si dibuixem una línia vertical en  $x = i$ , el nombre d'interseccions d'aquesta línia amb intervals ens dona el nombre de Betti del complex simplicial  $K_i$  de la filtració. La visualització en forma de barcode és la més usual actualment.

De la interpretació dels mòduls de persistència com a mòduls graduats finitament generats sobre un PID podem treure informació de quan un element  $e + B_k^l$  és base d' $H_k^{l, l+p}$  per algun  $l, p \in \mathbb{Z}$ . En efecte, si el cicle  $e$  neix a  $K_i$  i mor a  $K_j$  aleshores es té que  $e \notin B_k^l$  per tot  $l < j$ , i per tant  $e \notin B_k^{l+p}$  per  $l + p < j$ . A més,  $l \geq i$  i  $p \geq 0$ . Llavors, aquestes tres inequacions defineixen un triangle en el pla índex-persistència on el cicle  $e$  i els seus homòlegs defineixen un element de la base d' $H_k^{l, l+p}$ .

Per tal de visualitzar aquests triangles, estenem a triangles en el pla índex-persistència. Per exemple, l'interval  $[i, j)$  es pot estendre al triangle amb vèrtex  $\{(i, 0), (j, 0), (i, j - i)\}$  tal que és tancat pel costat  $\overline{i\bar{j}}$  i pel costat  $\overline{i(j - i)}$  i obert pel costat restant.

Així doncs, es té el següent resultat:

**Proposició 4.3.2.**  $\beta_p^{l, k}$  correspon al nombre de triangles en el pla índex-persistència que contenen el punt  $(l, k)$ .

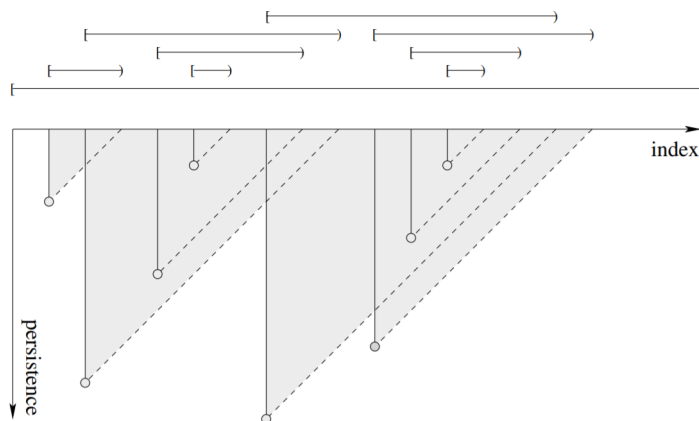


Figura 3: En aquesta imatge es mostra l'extensió a triangles dels  $p$ -interval·s mostrats a dalt. Imatge: [26].

*Demostració.* En efecte, si un punt  $(l, k)$  recau dins un  $p$ -triangle generat per l'interval  $[i, j]$  es té  $i \leq l \leq k \leq j$ , el que vol dir que la classe representada per aquest interval persisteix de  $l$  a  $k$ , augmentant el rang d'  $H_p^{l,k}$  en una unitat.  $\square$

És important destacar que quan treballem amb coeficients en un cos, obtenim un invariant (llevat d'isomorfisme) per a cada mòdul de persistència, els  $\mathcal{P}$ -interval·s. Obtenim doncs automàticament una representació clara i concisa (diagrames o barcodes) de com evoluciona l'homologia al llarg de la filtració.

## 4.4 Algoritmes per al càlcul de l'homologia persistent

Un cop construïda l'homologia persistent és natural preguntar-nos si és possible efectuar-ne el càlcul. En aquesta secció veurem que sí que és possible i donarem alguns algoritmes de càlcul.

### 4.4.1 Algoritme estàndard per coeficients en un cos arbitrari

A continuació explicarem un algoritme per al càlcul dels  $\mathcal{P}$ -interval·s (interval·s de persistència) d'un complex simplicial filtrat quan ens trobem amb coeficients en un cos. Aquest algoritme va ser presentat per A. Zomorodian i G. Carlsson [27]. És una generalització del primer algoritme per al càlcul de l'homologia persistent [10]. Aquest primer algoritme consisteix en aparellar símplex. Suposem que tenim un complex simplicial filtrat  $K$ , és a dir, tenim

$$\emptyset = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_m = K.$$

Sigui  $\sigma_i$  un símplex del complex simplicial  $K_i$  i  $\sigma_j$  un símplex del complex simplicial  $K_j$ ,  $0 < i, j \leq m$ . Aleshores, l'algoritme aparella  $\sigma_i$  i  $\sigma_j$  si al afegir  $\sigma_i$  al complex simplicial, aquest crea un cicle que es converteix en vora amb l'aparició de  $\sigma_j$  a la

filtració. Així doncs, l'algoritme ens dóna un conjunt de parelles de símplex que ens diuen quan ha nascut i mort un cicle, és a dir, és dóna la col·lecció de  $\mathcal{P}$ -interval·ls. Aquest algoritme per això té certes restriccions, s'aplica només amb coeficients a  $\mathbb{Z}_2$  i per a subcomplexos simplicials d' $S_3$ .

L'algoritme que explicarem amb detall a continuació aprofita l'estructura del mòdul de persistència. Com en l'homologia simplicial, l'algoritme consisteix en la reducció de les matrius  $\partial_p$ . Aquest nou algoritme ens permet calcular l'homologia en cossos arbitraris. Gràcies a això, tot i que en l'homologia sobre un cos no obtenim torsió, podem comparar els resultats obtinguts amb diferents cossos i ser sensibles a la torsió. A més no té restriccions en la dimensió.

Usarem un exemple per explicar el procediment i usarem com a cos  $\mathbb{K}$  els nombres reals. Considerem la filtració  $K$  en la figura 4:

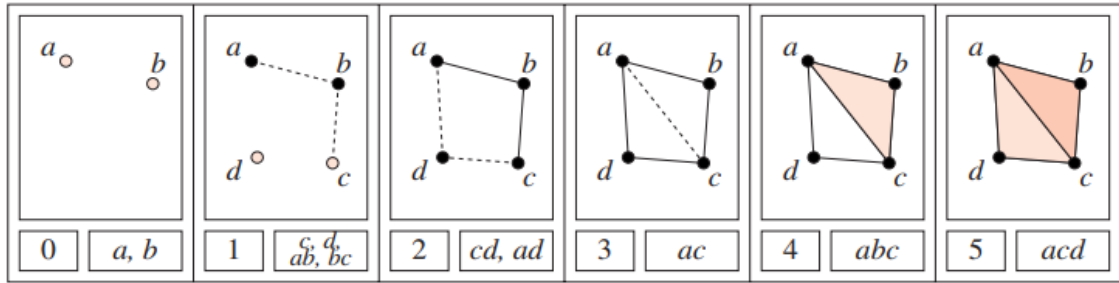


Figura 4: complex simplicial filtrat. Imatge de [27]

Primer de tot, cal dotar els símplexs de la filtració d'un ordre total. L'ordre ha de ser compatible amb la filtració, és a dir:

1. si un símplex  $\sigma$  pertany a  $K_i$ , aleshores  $\sigma \leq \tau$  si  $\tau$  apareix per primer cop en un  $K_j$  tal que  $i \leq j$ .
2. si  $\dim \sigma \leq \dim \tau$  aleshores  $\sigma \leq \tau$ .

En la taula 4.4.1 es pot veure com hem dotat d'un ordre total els símplexs de la filtració de la figura 4.

Considerem el cos  $\mathbb{K}$ , aleshores el mòdul de persistència correspon a un  $\mathbb{K}[t]$ -mòdul. Ara, també ens podem mirar el complex de persistència associat a la nostra filtració, com un  $\mathbb{K}[t]$ -mòdul. És a dir, nosaltres partim del complex de persistència

$$\rightarrow C_*^i \xrightarrow{\varphi^i} C_*^{i+1} \rightarrow$$

i ens el mirem com un  $\mathbb{K}[t]$ -mòdul graduat  $\bigoplus C_*^i$  on l'acció de  $t$  ve donada per  $tx = \varphi^i x$  si  $x \in C^i$ .

En la taula 4.4.1, es mostra el grau dels símplexs de la filtració de  $K$  com a elements homogenis del  $\mathbb{K}[t]$ -mòdul.

La manera d'expressar les cadenes en el  $\mathbb{K}[t]$ -mòdul graduat  $\bigoplus C_p^i$  dependrà del moment de la filtració en què han aparegut per primera vegada els elements de la

base i del moment en què s'estigui considerant la cadena. Per exemple, considerem la cadena  $ad + cd + ac$  del complex  $K_4$  de la filtració de la figura 4. L'expressió d'aquesta cadena en el  $\mathbb{K}[t]$ -mòdul és  $t^2 \cdot ad + t^2 \cdot cd + t \cdot ac$ . La cadena ha de tenir grau 4, ja que ens la mirem com un element de  $C_1^4(K)$ , per això cal portar els elements  $ad, cd, ac$  de la base a aquest moment.  $ad$  té grau 2 (neix a  $K_2$ ), per l'estructura del mòdul graduat, si multipliquem aquest element per  $t^2$ , pertanyerà a  $C_1^4$ .

a	b	c	d	ab	bc	cd	ad	ac	abc	acd
0	0	1	1	1	1	2	2	3	4	5

Taula 1: Graus dels símples de la filtració  $K$ .

Durant tota la secció usarem la notació  $\{e_i\}$  i  $\{\hat{e}_j\}$  per representar bases homogènies de  $C_p$  i  $C_{p-1}$  respectivament. També,  $Z_p$  i  $B_p$  representaran, com fins ara,  $\ker \partial_p$  i  $\text{Im } \partial_{p+1}$  respectivament.

La matriu de  $\partial_1$  relativa a les bases estàndard (que són homogènies) de  $C_1$  i  $C_0$  és:

$$\left( \begin{array}{c|ccccc} & ab & bc & cd & ad & ac \\ \hline d & 0 & 0 & t & t & 0 \\ c & 0 & 1 & -t & 0 & t^2 \\ b & t & -t & 0 & 0 & 0 \\ a & -t & 0 & 0 & -t^2 & -t^3 \end{array} \right)$$

**Observació 4.4.1.** La base de  $C_{p-1}$  està ordenada en ordre descendent en el grau.

Qualsevol matriu  $M_p$  relativa a bases homogènies té la següent propietat:

$$\deg \hat{e}_i + \deg M_p(i, j) = \deg e_j.$$

Resulta que, com que  $\text{Im } \partial_p \subseteq \ker \partial_{p-1}$ , podem representar la matriu de  $\partial_p$  respecte bases homogènies de  $C_p$  i  $Z_{p-1}$ . Sempre podem trobar una base homogènia de  $Z_{p-1}$  ja que al ser el nucli del morfisme  $\partial_{p-1}$  és un submòdul graduat. Aleshores quan reduïm la matriu a la forma normal d'Smith,

1. Cada element  $b_i$  de  $\{b_1, b_2, \dots, b_l\}$  (elements no nuls de la diagonal en la matriu) contribueix a un terme de torsió  $\mathbb{K}[t]/b_i$  amb una translació  $\alpha_i = \deg \hat{e}_i$  d' $H_{p-1}$ . (En l'algoritme del càlcul per l'homologia simplicial ja havíem vist que els elements no nuls de la matriu en la forma normal d'Smith corresponien als coeficients de torsió.)
2. Les files nul·les contribueixen a un terme lliure amb translació  $\gamma_j = \deg \hat{e}_j$ .

L'algoritme es basa, doncs, en calcular inductivament en la dimensió aquestes representacions de les matrius.

A. Zomorodian i G. Carlsson proposen un parell de simplificacions que fan que el temps d'execució de l'algoritme disminueixi:

Suposem que tenim la matriu  $M_p$  de  $\partial_p$  representada relativa a la base estàndard de  $C_p$  i a una base homogènia de  $Z_{p-1}$ , volem calcular una base homogènia de  $Z_p$  per poder representar la matriu de  $\partial_{p+1}$  relativa a la base estàndard de  $C_p$  i la base calculada.

Per això reduïm la matriu  $M_p$  a la forma escalonada per columnes. Una matriu escalonada per columnes és una matriu tal que:

1. Les columnes nul·les de la matriu, si n'hi ha, són a la part dreta d'aquesta.
2. El primer element no nul de cada columna està com a mínim una fila per sota de l'element no nul de la columna de l'esquerra.

Els primers elements no nuls de la matriu escalonada per columnes s'anomenen *pivots*. D'àlgebra lineal, sabem que el nombre de columnes amb pivots en la forma escalonada per columnes és  $\text{rang}M_p = \text{rang}B_{p-1}$ . A més, les columnes nul·les formen la base desitjada per  $Z_p$ .

La nostra matriu  $M_1$  transformada en matriu escalonada per columnes tindria la forma següent:

$$\hat{M}_1 = \left( \begin{array}{c|cccccc} & ab & bc & cd & z_1 & z_2 \\ \hline d & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & t & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & t & t & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & t & 0 & 0 \end{array} \right)$$

on  $z_1 = ad - cd - t \cdot bc - t \cdot ab$ , i  $z_2 = ac - t^2 \cdot bc - t^2 \cdot ab$ . Aquestes cadenes formen una base homogènia per  $Z_1$ .

El procediment per reduir una matriu a la forma escalonada per columnes és eliminació gaussiana en les columnes. Ens fixem en la primera fila, si té més d'un pivot, agafem la columna de més a l'esquerra que tingui el pivot a la primera fila i eliminem els altres pivots de la primera fila. Si no té més d'un pivot, no fem res. Després ens fixem en la següent fila i procedim de la mateixa manera. Així fins a acabar les files. Un cop acabat, tindrem com a màxim un pivot per fila. Després reordenem les columnes per obtenir la matriu escalonada.

**Lema 4.4.2.** *Els pivots d'una matriu en forma escalonada per columnes tenen el mateix grau que en la matriu en forma normal d'Smith. A més, el grau dels elements de les bases de les files és també el mateix.*

*Demostració.* Partim de la nostra matriu en forma escalonada per columnes. Hem ordenat els elements de la base de  $Z_{p-1}$  en ordre decreixent en el grau. Com que per tota  $j$  fixada  $\text{dege}_j$  és constant, tenim que  $\text{deg}M_p(i, j) = c - \text{deg}\hat{e}_i$ . Aleshores,  $\text{deg}M_p(i, j)$  és monòtonament creixent per files. Així doncs, començant per l'esquerra, podem eliminar els elements per sota de les columnes de cada pivot sense alterar el grau del pivot ni el grau dels elements de la base en les files. Reordenant les files i les columnes arribem a la forma normal d'Smith.  $\square$



El lema ens diu el següent:

**Corol·lari 4.4.3.** *Sigui  $\hat{M}_p$  la matriu de  $\partial_p$  en forma normal d'Smith relativa a les bases  $\{e_j\}$  i  $\{\hat{e}_i\}$  de  $C_p$  i  $Z_{p-1}$  respectivament. Si la fila  $i$  té un pivot  $\hat{M}_p(i, j) = t^n$ , aleshores contribueix en  $T^{\deg \hat{e}_i} \mathbb{K}[t]/t^n$  a la descripció d' $H_{p-1}$ . D'altra banda, si una fila  $j$  no té pivot, contribueix en  $T^{\deg \hat{e}_j} \mathbb{K}[t]$  en la descripció d' $H_{p-1}$ . Equivalentment, si la fila  $i$  té un pivot  $\hat{M}_p(i, j) = t^n$ , obtenim un  $\mathcal{P}$ -interval  $(\deg \hat{e}_i, \deg \hat{e}_i + n)$ . Si la fila  $i$  no té pivot, obtenim un  $\mathcal{P}$ -interval  $(\deg \hat{e}_i, \infty)$ .*

Així doncs, en el nostre exemple obtindríem els  $\mathcal{P}$ -intervals en dimensió 0:  $\{(1, 2), (1, 1), (0, 1), (0, \infty)\}$ .

Fins ara, de la representació matricial de  $\partial_p$  relativa a la base estàndard de  $C_p$  i una base homogènia de  $Z_p$  hem pogut extreure la descripció de l'homologia persistent en dimensió  $p - 1$  com a mòdul graduat finitament generat així com els  $\mathcal{P}$ -intervals en dimensió  $p - 1$ . Ara volem representar la matriu  $\partial_{p+1}$  relativa a la base estàndard de  $C_{p+1}$  i la nova base calculada de  $Z_p$  per tal de poder extreure de  $\partial_{p+1}$  els  $\mathcal{P}$ -intervals en dimensió  $p$ .

**Lema 4.4.4.** *Per representar  $\partial_{p+1}$  relativa a la base estàndard de  $C_{p+1}$  i la nova base calculada de  $Z_p$ , simplement eliminem en  $M_{p+1}$  les files que corresponen a columnes pivot en  $\hat{M}_p$ .*

*Demostració.* La demostració d'aquest lema utilitza el fet que  $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$ , podeu trobar la demostració detallada a [27], lema 4.2.  $\square$

Aleshores, en el nostre exemple, la matriu  $M_2$  respecte la base estàndard per  $C_2$  i una base homogènia de  $Z_1$  tindria la forma següent:

$$M'_2 = \left( \begin{array}{c|cc} & abc & acd \\ \hline z_1 & t & t^2 \\ z_2 & 0 & -t^3 \end{array} \right)$$

Hem obtingut aquesta matriu aplicant el lema anterior, és a dir, hem construït la matriu de  $\partial_2$  relativa a les bases estàndard i després n'hem eliminat les files que corresponen a les columnes pivots de  $\hat{M}_1$ .

És clar que aquest algoritme té el mateix temps d'execució que l'eliminació gaussiana, que és com a molt  $O(m^3)$ , on  $m$  és el nombre de símplexs en la filtració. És doncs un algoritme efectiu per al càlcul dels  $\mathcal{P}$ -intervals.

Actualment hi ha un gran nombre de softwares que tenen implementat aquest algoritme. Alguns exemples serien javaPlex, que calcula l'homologia amb coeficients a  $\mathbb{Q}$  i a  $\mathbb{F}_p$  i dóna una visualització de l'output en forma de barcode. Un altre exemple seria Perseus, un software destinat al càlcul ràpid de l'homologia persistent, calcula l'homologia amb coeficients a  $\mathbb{Z}_2$  i dóna una visualització de l'output en forma de diagrama de persistència. jHoles, DIONYSUS i PHAT calculen l'homologia amb coeficients a  $\mathbb{Z}_2$  i no donen visualització de l'output, simplement els  $\mathcal{P}$ -intervals.

#### 4.4.2 Algoritme per coeficients en un domini d'ideals principals

Finalment, explicarem un algoritme per coeficients en un domini d'ideals principals. Si l'homologia la tenim expressada amb coeficients en un domini d'ideals principals  $R$ , el mòdul de persistència del nostre complex filtrat correspon a un mòdul graduat finitament generat sobre  $R[t]$ , si  $R$  no és un cos, no podem aplicar el teorema d'estructura. Tot i així és possible calcular els grups d'homologia  $H_p^{i,j}$  per  $i, j$  determinats. Aquí donarem un algoritme per efectuar aquest càlcul. Aquest algoritme també està proposat per A. Zomorodian i G. Carlsson en [27].

Suposem que tenim una filtració

$$\emptyset = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_m = K.$$

L'algoritme procedeix, també, com l'algoritme de l'homologia simplicial. Usant la forma normal d'Smith. El nostre grup d'homologia ve donat per la definició  $H_p^{i,j} \cong Z_p(K_i)/(Z_p(K_i) \cap B_p(K_j))$ . Aleshores, cal construir una matriu que expressi els elements de  $Z_p(K_i) \cap B_p(K_j)$  com a combinació lineal d'una base de  $Z_p(K_i)$  i reduir-la a la forma normal d'Smith. Per trobar aquesta matriu procedim així:

1. Reduïm la matriu de  $\partial_p^i$  a la forma normal d'Smith i obtenim una base  $\{z^j\}$  per  $Z_p^i := Z_p(K_i)$ .
2. Reduïm la matriu de  $\partial_{p+1}^j$  i obtenim una base  $\{b^l\}$  de  $B_p^j := B_p(K_j)$ .
3. Definim  $N = [\{b^l\}\{z^j\}]$ , aquesta matriu té per columnes els elements de les bases  $\{b^l\}$  i  $\{z^j\}$ .

Reduïm la matriu  $N$  a la forma normal d'Smith. Aleshores podem extreure una base  $\{u^q\}$  del nucli de  $N$ . Cada element  $u^q = \sum_l \lambda_l^q b^l + \sum_j \gamma_j^q z^j$ . És a dir els coeficients de  $u^q$  respecte les bases obtingudes de  $B_p^j$  i  $Z_p^i$  són  $u^q = (\lambda_1^q, \dots, \lambda_r^q, \gamma_1^q, \dots, \gamma_s^q)$ . Aleshores  $0 = Nu^q = B\lambda^q + Z\gamma^q$ , on  $\lambda^q = (\lambda_1^q, \dots, \lambda_r^q)$  i  $\gamma^q = (\gamma_1^q, \dots, \gamma_s^q)$ . Per tant, obtenim la igualtat  $B\lambda^q = -Z\gamma^q$ , el que implica que  $\{B\lambda^q\}_q$  genera el mateix mòdul que  $\{Z\gamma^q\}_q$ . És clar que  $\{B\lambda^q\}_q$  i  $\{Z\gamma^q\}_q$  generen  $B_p^j \cap Z_p^i$ , a més de la independència lineal de  $\{b^l\}$  i  $\{z^j\}$  se segueix que també són linealment independents. Obtenim doncs que tant  $\{B\lambda^q\}_q$  com  $\{Z\gamma^q\}_q$  són una base de  $B_p^j \cap Z_p^i = B_p^{i,j}$ .

Amb una d'aquestes dues bases construïm la matriu  $M_{p+1}^{i,j}$ , ara la reduïm a la forma normal d'Smith i obtenim els coeficients de torsió d' $H_p^{i,j}$ . El  $p$ -èssim nombre de Betti (i,j)-persistent és  $\text{rang} Z_p(K_i) - \text{rang}(B_p^j \cap Z_p^i)$ .

### Notes bibliogràfiques

Els grups d'homologia persistent van ser introduïts per Vanessa Robins (1999, citat en [9] i [11]). Al 2002, Edelsbrunner, Letscher i Zomorodian [10] van definir també l'homologia persistent i van donar el primer algoritme efectiu de càlcul. El concepte de mòdul de persistència va ser definit per Zomorodian i Carlsson en [27], tot i així

recentment Corbet i Kerber [6] han trobat un contraexemple per a l'equivalència de categories proposada en el teorema 3.1 de l'article. Cobert i Kerber revisen i generalitzen aquesta equivalència de categories. En [27] donen l'algoritme de càlcul de generalitzat per a coeficients en un cos i l'algoritme per a coeficients en un PID. Per una discussió més a fons sobre topologia computacional podeu consultar [8], [15] i [26].

## 5 Aplicacions

Un cop desenvolupada la teoria de l'homologia persistent és interessant veure com s'aplica a la pràctica. Per això en aquesta secció explicarem com construir complexos simplicials a partir d'un núvol de punts, el primer pas per al càlcul de l'homologia persistent, i donarem alguns exemples d'aplicacions en la ciència explicant més detalladament un d'ells.

### 5.1 Construcció de complexos simplicials

Hem vist que l'homologia persistent treballa amb complexos simplicials filtrats. En aquesta subsecció mostrarem com construir complexos simplicials a partir de núvols de punts. Considerarem que els núvols de punts són una mostra de punts extreta d'un espai topològic. Perquè ens siguin útils les construccions de complexos simplicials, aquestes han d'aproximar l'homologia de l'espai, per això en aquesta secció donarem alguns resultats que garanteixen aquesta aproximació.

Suposarem  $X$  un espai topològic i  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  un recobriment de  $X$ .

**Definició 5.1.1.** *S'anomena nervi de  $\mathcal{U}$  i es nota per  $NU$  al complex simplicial tal que  $\{i_0, i_1, \dots, i_p\}$  defineix una cara de  $NU$  si, i només si,  $U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_p} \neq \emptyset$*

Aquest complex simplicial no té per què reflectir la topologia de l'espai  $X$  en concret, però resulta una eina molt útil si s'apliquen certes restriccions a  $\mathcal{U}$ .

**Teorema 5.1.2** (Nerve Theorem, Borsuk, 1948). *Si  $\mathcal{U}$  una col·lecció finita de conjunts tancats i convexos en un espai euclidià. Aleshores el nervi de  $\mathcal{U}$ ,  $NU$ , és del mateix tipus d'homotopia que  $X$ .*

Ara que tenim aquesta eina per generar complexos simplicials, és important trobar recobriments adients de l'espai topològic  $X$ .

#### 5.1.1 Complex de Čech

Si  $X$  és un espai mètric, un recobriment molt usual és el recobriment per boles,  $\mathcal{B}_\epsilon(X) = \{B_\epsilon(x)\}_{x \in X}$  per algun  $\epsilon$ .

**Definició 5.1.3.** *Si  $V \subseteq X$ , al nervi de  $\{B_\epsilon(v)\}_{v \in V}$  se l'anomena complex de Čech adjuntat a  $V$  i  $\epsilon$ . El notarem per  $C(X, \epsilon)$ .*

Aquest complex simplicial és útil, ja que si  $X$  és un subespai d'un espai euclidià, el teorema 5.1.2 s'aplica i aleshores  $C(X, \epsilon)$  és homotòpicament equivalent a la unió de les boles  $\{B_\epsilon(x)\}_{x \in X}$ .

Tot i tenir bones propietats topològiques, en termes de computabilitat és poc eficient. Dóna un nombre molt gran de símplex, en el pitjor dels casos, el nombre de símplex que conté el complex és  $2^{o(|X|)}$  i la dimensió dels símplex generats pot ser, en el pitjor dels casos  $|X| - 1$  ([20]). A més, requereix comprovar un gran nombre d'interseccions. Això motiva la següent definició.

### 5.1.2 Complex de Vietoris-Rips

Considerarem ara  $X$  un espai mètric.

**Definició 5.1.4.** *Sigui  $d$  la mètrica d' $X$  i  $\epsilon > 0$ . Definim el complex de Vietoris-Rips,  $VR(X, \epsilon)$  com el complex simplicial tal que els seus vèrtexs són els punts d' $X$  i  $\{x_0, x_1, \dots, x_p\}$  defineix una cara de  $VR(X, \epsilon)$  si, i només si,  $d(x_i, x_j) \leq \epsilon$  per tot  $0 \leq i, j \leq p$ .*

Aquest complex és més senzill de computar, primer es construeix un graf els vèrtexs del qual són els punts d' $X$  i les seves arestes són  $\{(x, y) \in X \times X \mid x \neq y \text{ i } d(x, y) \leq \epsilon\}$ . Un cop construït aquest graf, podem construir el complex de Vietoris-Rips de la següent manera:  $\{x_0, \dots, x_k\}$  és un símplex de  $VR(X, \epsilon)$  si, i només si, tota parella de vèrtexs de  $\{x_0, \dots, x_k\}$  està connectada per una aresta. Així a diferència del complex de Čech, es pot emmegatzemar com un graf i després reconstruir-lo.

Tot i així, el complex de Vietoris-Rips, com el complex de Čech, té, en el pitjor dels casos,  $2^{o(|X|)}$  símplexs i pot produir símplex de dimensió  $|X| - 1$  ([20]).

Un altre problema del complex de Vietoris-Rips és que no sabem quina informació sobre  $X$  ens dona el seu tipus d'homotopia. Tot i així podem trobar una relació entre el complex de Vietoris-Rips i el complex de Čech, per tal de poder aprofitar els beneficis del «nerve theorem».

**Teorema 5.1.5.** *Sigui  $X$  un conjunt de punts en  $\mathbb{R}^d$  i  $C(X, \epsilon)$ . Aleshores es compleix:*

$$C(X, \epsilon) \subseteq VR(X, \epsilon) \subseteq C(X, 2\epsilon).$$

*Demostració.* Es pot veure la demostració d'aquest teorema en [8], capítol III.2.  $\square$

Així doncs, gràcies a aquest teorema, tenim una garantia teòrica que l'homologia del complex de Vietoris-Rips s'assimila a la de l'espai.

### 5.1.3 Complex de Delaunay

Una solució al problema de la computabilitat dels complexos simplicials anteriors és el *complex de Delaunay*. Aquest complex s'utilitza per a subespais d'espais euclidians, així doncs suposarem  $X \in \mathbb{R}^d$ . El complex de Delaunay és un complex molt usat en geometria computacional. El valor d'aquest complex recau en què té un control sobre la dimensió dels símplexs, a diferència dels complexos de Čech i Vietoris-Rips.

La construcció d'aquest complex consisteix en la selecció d'un subconjunt  $\mathcal{L} \subseteq X$ , anomenat el conjunt de *punts de referència*. Aleshores definim la *cel·la de Voronoi* associada a  $\lambda$  per

$$V_\lambda = \{x \in X \mid d(x, \lambda) \leq d(x, \lambda') \forall \lambda' \in \mathcal{L}\}.$$

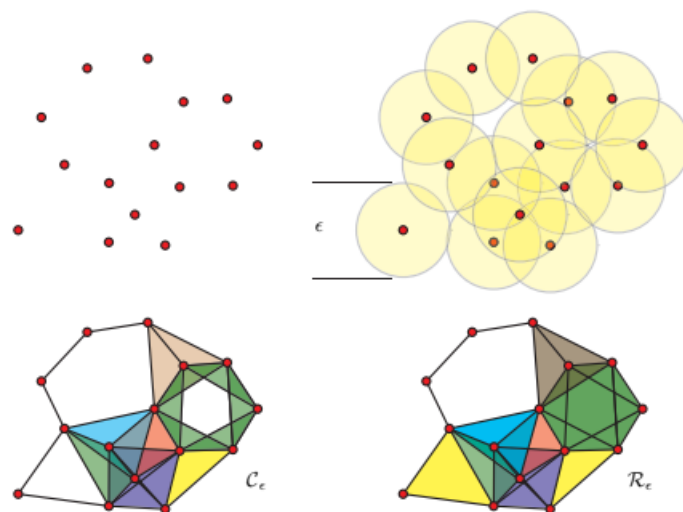


Figura 5: Aquí es pot veure com a partir d'un núvol de punts es construeixen el complex de Čech (abaix a l'esquerra) i el complex de Vietoris-Rips (abaix a la dreta). Imatge de [14]

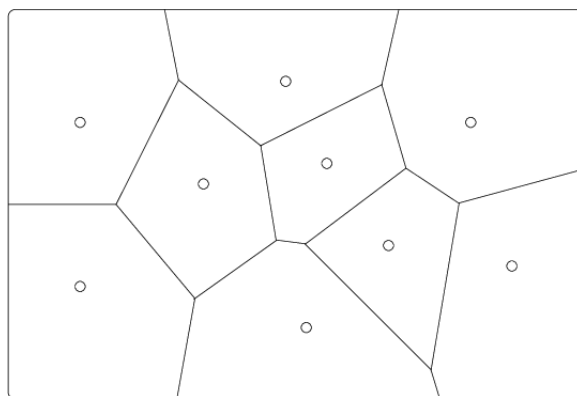


Figura 6: Diagrama de Voronoi de 9 punts en el pla. Imatge de [8].

És clar que les cel·les de Voronoi formen un recobriment d' $X$ . El conjunt de les cel·les s'anomena *diagrama de Voronoi*.

**Definició 5.1.6.** *Definim el complex de Delaunay adjuntat a  $\mathcal{L}$  com el nervi del recobriment format per les cel·les de Voronoi.*

Diem que  $\mathcal{L}$  és en *posició general* si cap subconjunt de  $d+2$  punts en  $\mathcal{L}$  recau en una  $(d-1)$ -esfera. El que implica que cap subconjunt de  $d+2$  cel·les de Voronoi del diagrama de Voronoi pot tenir intersecció no buida. Per tant, si assumim posició general, els símplexs del complex de Delaunay tenen com a màxim  $d+1$  vèrtexs, és a dir dimensió com a molt  $d$ .

Quan  $\mathcal{L}$  és en posició general, el complex de Delaunay dóna una triangulació de l'envoltura (vegeu secció 2.1) d' $\mathcal{L}$ , aquest resultat és molt útil en geometria computacional.

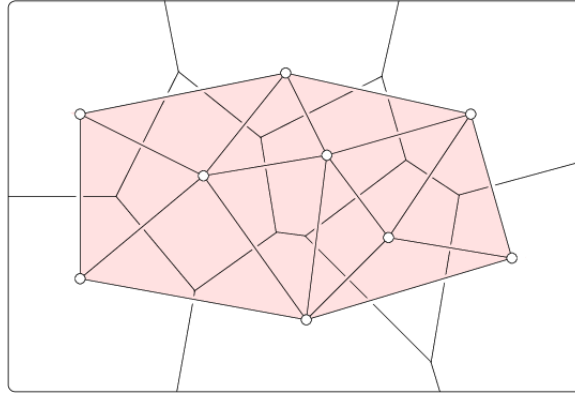


Figura 7: Aquí podem veure la realització geomètrica del complex de Delaunay. El complex està superposat a les cel·les de Voronoi de 9 punts. Imatge de [8].

La complexitat del complex de Delaunay, és a dir el nombre de símplexs que conté, és  $O(|\mathcal{L}|^{d/2})$ , [20]. A diferència dels complexos anteriors, la seva complexitat depèn de la dimensió de l'espai. Així doncs, en dimensions altes, el complex de Delaunay pot seguir sent costós de computar.

#### 5.1.4 Witness complex

Quan l'espai mètric  $X$  és finit, el complex de Delaunay, en general, és discret, ja que perquè dues cel·les de Voronoi tinguin intersecció no buida, cal que hi hagi punts que estiguin a la mateixa distància tant d'un punt del conjunt de punts de referència com d'un altre punt de referència. Això motiva la construcció del següent complex simplicial.

Sigui  $\mathcal{L} \subseteq X$  un subconjunt finit. Definim  $m_x = d(x, \mathcal{L})$ .

**Definició 5.1.7.** *Sigui  $\epsilon > 0$ , definim el witness complex com el complex simplicial  $W(X, \mathcal{L}, \epsilon)$  tal que  $\{l_0, l_1, \dots, l_p\}$  defineix una cara de  $W(X, \mathcal{L}, \epsilon)$  si, i només si, existeix un punt  $x \in X$  tal que  $d(x, l_i) \leq m_x + \epsilon$ .*

Els punts del conjunt de referència, usualment s'escullen de manera aleatòria o bé pel mètode *max-min* quan  $X$  és finit. Aquest darrer mètode consisteix en escollir un punt  $l_1$  de  $X$  de manera aleatòria, aleshores el següent punt  $l_2$  és escollit de manera que  $d(l_1, l_2)$  és màxima, i així reiteradament.

La complexitat del witness complex és  $2^{O(|\mathcal{L}|)}$  ([20]).

Notem que per  $\epsilon \leq \epsilon'$  es donen les inclusions següents

$$\begin{aligned} C(X, \epsilon) &\subseteq C(X, \epsilon') \\ VR(X, \epsilon) &\subseteq VR(X, \epsilon') \\ W(X, \mathcal{L}, \epsilon) &\subseteq W(X, \mathcal{L}, \epsilon'). \end{aligned}$$

De manera que tenim una filtració de complexos simplicials parametritzada per la recta real.

## 5.2 Exemple d'aplicació en la ciència

Com ja hem comentat, l'homologia persistent està donant grans resultats en l'anàlisi de dades provinents d'experiments científics. Alguns exemples destacats serien l'estudi realitzat per Carlsson, Ishkhanov, de Silva i Zomorodian de l'estructura topològica d'imatges naturals [4]. En l'estudi, es proposen analitzar el comportament local de l'espai d'imatges naturals i observen que té la topologia de l'ampolla de Klein. Un altre exemple seria el treball realitzat per de Silva i Ghrist en què utilitzen l'homologia persistent per provar la cobertura de xarxes de sensors [21]. Actualment, s'està usant també en neurociència ([22], [2]). Singh, Memoli, Ishkhanov, Sapiro, Carlsson i Ringach van utilitzar per primer cop en neurociència l'homologia persistent per estudiar el comportament d'una població de neurones, i van comprovar que l'activitat cortical quan està estimulada i quan no ho està és molt similar. També, Bardin, Spreeman i Hess [2] es proposen caracteritzar les propietats globals de l'estructura de les xarxes neuronals.

A continuació, farem una breu explicació de l'experiment realitzat en [22], parant atenció en els mètodes utilitzats per a l'aplicació de l'homologia persistent.

És sabut en neurociència que les connexions entre les neurones guarden molta informació sobre com s'estructura el cervell. És per això que, per estudiar el còrtex visual primari (V1), Singh, Memoli, Ishkhanov, Sapiro, Carlsson i Ringach en [22] es proposen analitzar l'activitat conjunta de les neurones. El còrtex visual és a l'escorça del lòbul occipital i és l'encarregat del processament dels estímuls visuals. Concretament, el còrtex visual primari és la part del cervell que s'encarrega de l'anàlisi de baix nivell de la informació que rep de les cèl·lules retinianes.

Resultats anteriors a aquest estudi, sostenen la hipòtesi que l'entorn, és a dir, els estímuls rebuts, configuren l'activitat del V1, Simoncelli i Olshausen (2001, citat en [22]). El fet que els estímuls configuren l'activitat del V1, va fer pensar a Ben-Yishai, Bar-Or i Sompolinsky (1995, citat en [22]) que si l'activitat cortical és sensible a l'orientació dels objectes i considerant l'orientació com una variable circular, aleshores els patrons d'activitat haurien de tenir la topologia d'un cercle.

S'havia observat també, que el V1 té activitat quan no rep estímuls, el que havia fet pensar que les neurones també s'activen de manera aleatòria. Però Kenet *et al.* (2003, citat en [22]), observà que els patrons d'activitat del còrtex visual primari quan no rep estímuls tendeixen a reproduir els patrons que s'observen quan se l'està estimulant. Així doncs, això contradiria la hipòtesi que les neurones tenen un comportament aleatori quan no reben estímuls.

És clar, doncs, que aquestes qüestions es poden reduir a qüestions topològiques. Singh, Memoli, Ishkhanov, Sapiro, Carlsson i Ringach apliquen l'homologia persistent a l'estudi de poblacions de neurones en el còrtex visual primari.

L'experiment en [22] consisteix en enregistrar l'activitat del V1 en dues condicions: espontània i estimulada. En la primera (condició espontània), el còrtex visual no rep cap estímuls, mentre que en la segona (condició estimulada) sí. Per dur a terme aquest estudi s'implantà electrodes en el còrtex visual primari de 3 macacos (*Macaca fascicularis*). Durant la condició espontània, els ulls dels macacos eren



tancats i durant la condició provocada se'ls ensenyà fragments de pel·lícules. S'enregistrà l'activitat cortical durant 24 minuts en cada situació. El contínuum de les dades obtingudes va ser fraccionat en segments de 10 segons.

Per a cada segment de 10s, escolliren les 5 neurones amb més activitat i es va generar un núvol de punts consistent en punts en  $\mathbb{R}^5$  en el que cada coordenada indica el nombre d'impulsos emesos per una de les neurones durant 50ms d'aquests 10s. Així doncs, per cada segment obtenim un núvol de punts de 200 punts en  $\mathbb{R}^5$ .

Generats ja els núvols de punts, es va seleccionar 35 punts de referència de cada un dels núvols de punts usant el mètode del «max-min» (vegeu subsecció anterior). Per trencar amb la possible dependència dels resultats amb l'elecció del punt inicial del mètode «max-min», es va iniciar el mètode en cada un dels 200 punts. Amb aquests conjunts de punts de referència es computaren els «weak witness complexes» ( $W^w(\epsilon)$ ), una varietat del witness complex (vegeu subsecció anterior). El weak witness complex d'un núvol de punts depèn d'un paràmetre  $\epsilon \in \mathbb{R}$  de manera que si  $\epsilon \leq \epsilon'$  aleshores  $W^w(\epsilon) \subseteq W^w(\epsilon')$ .

Per a  $\epsilon$  molt gran, el weak witness complex pot ser car de computar, per això es va mesurar el radi de cobertura de cada conjunt de punts de referència:  $R_L := \max_{x \in X} \min_{l \in L} d(x, l)$ , on  $X$  denota el núvol de punts i  $L$  un conjunt de punts de referència. Aleshores, van usar aquest radi de cobertura com a cota superior per a  $\epsilon$ .

Un cop obtingudes les filtracions dels complexos, l'homologia persistent de cada una de les filtracions va ser calculada amb coeficients a  $\mathbb{Z}_2$ . Obtinguts els barcodes, van expressar la llargària dels  $\mathcal{P}$ -interval·ls com a fraccions del radi de cobertura. Es va acceptar com a propietat topològica rellevant les propietats que corresponien a  $\mathcal{P}$ -interval·ls de llargària de més de 0.3 el radi de cobertura. Les signatures topològiques (nombres de Betti  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ ) obtingudes van ser:

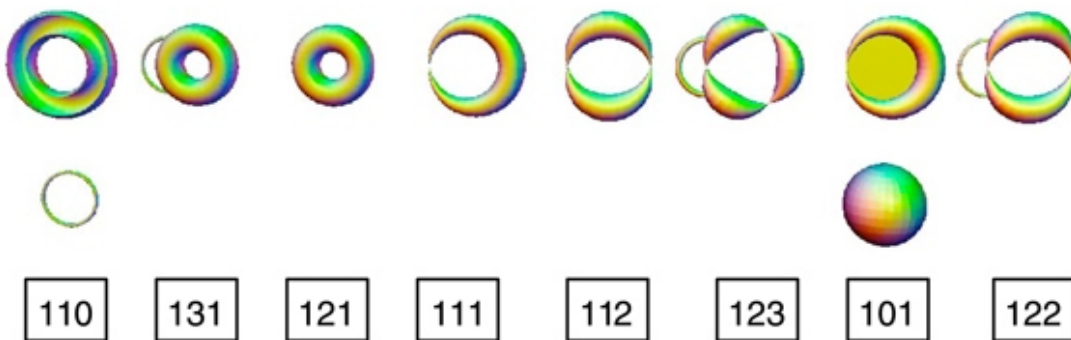


Figura 8: Il·lustracions d'objectes consistentes amb les signatures topològiques observades en el barcodes. Sota cada il·lustració apareix la terna  $(\beta_0, \beta_1, \beta_2)$ . Imatge de [22].

Per efectuar els càlculs es va utilitzar PLEX, un paquet de funcions Matlab destinades a la topologia computacional.

En la figura 9 es mostren els histogrames de les freqüències relatives de cada signatura topològica. L'eix horitzontal representa les signatures obtingudes en els barcodes ordenades de la mateixa manera que en la figura anterior. Els histogrames de la columna de l'esquerra mostren les signatures obtingudes durant la condició espontània i els de la dreta durant la condició provocada. En la primera fila, es mostra la freqüència relativa de les signatures si es considera soroll qualsevol propietat topològica corresponent a un  $\mathcal{P}$ -interval de llargària més petita que 0.5 vegades el radi de cobertura. Així la segona i tercera fila corresponen a les freqüències de les signatures amb una llargària d'interval mínima de 0.3 i 0.4 vegades el radi de cobertura, respectivament.

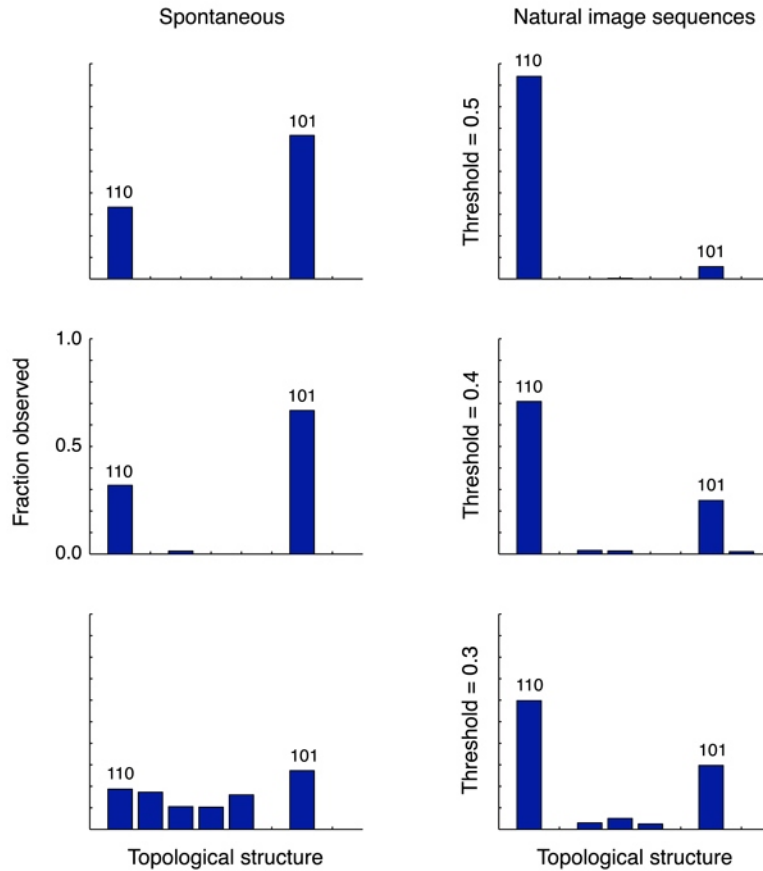


Figura 9: Freqüències relatives de les signatures topològiques en la condició espontània (columna de la dreta) i condició estimulada (columna de l'esquerra). Cada fila representa les signatures amb una llargària mínima d'interval (threshold). Imatge de [22].

Es pot veure clarament com les signatures dominants són la del cercle i la de l'esfera. És interessant observar que tot i que les freqüències relatives són diferents, les signatures topològiques predominants observades tant en la condició espontània com en la condició estimulada són les mateixes.

Per comprovar que els barcodes obtinguts no podien resultar d'una situació en la qual els impulsos neuronals fossin independents, és a dir, no estiguessin dotats

d'una organització conjunta, es va calcular la suma total d'impulsos generats en els segments de 10s. Després es va generar un nou conjunt de dades repartint el total dels impulsos neuronals de manera aleatòria en el temps. D'aquesta manera es destrueix qualsevol possible relació entre els impulsos neuronals. Es va veure que la probabilitat d'obtenir  $\mathcal{P}$ -interval·ls en dimensió 1 i 2 de més 0.3 vegades el radi de cobertura per casualitat era de menys de 0.005.

Es fa patent, doncs, en aquest article que l'homologia persistent és una eina molt útil que resol eficaçment qüestions científiques que emergeixen en l'actualitat. Gràcies a ella, es va poder caracteritzar topològicament els patrons neuronals en el còrtex visual primari. A més, a partir d'aquesta caracterització es va poder reafirmar la hipòtesi que els patrons durant la condició espontània i la condició estimulada guarden una forta relació, ja que les signatures topològiques dominants en ambdues condicions eren les del cercle i l'esfera.

## Notes bibliogràfiques

L'elecció del complex simplicial que es vol construir a partir d'un núvol de punts depèn del cas particular, així com el software a utilitzar. Otter, Porter, Tillmann, et. al. [20] donen una explicació detallada dels complexos simplicials que es poden construir a partir d'un núvol de punts i donen també els softwares actuals destinats al càlcul de l'homologia persistent. En referència a les aplicacions de l'homologia persistent, es pot trobar un gran nombre d'articles en els què s'ha usat aquesta eina a part dels citats en aquest treball.

## 6 Conclusions

L'objectiu d'aquesta memòria ha estat motivar i exposar una eina per a la interpretació de propietats topològiques a partir d'una mostra discreta de punts. La topologia algebraica, fins fa poc una branca de les matemàtiques molt teòrica, ha servit com a base per al desenvolupament de l'homologia persistent. Aquesta ha establert un pont entre la topologia i la matemàtica computacional que actualment està donant molt bons resultats en diversos àmbits aplicats [2], [4], [21], [22].

En aquest treball hem descrit com l'homologia persistent ens permet conèixer l'homologia de l'espai topològic sobre el qual es disposa un núvol de punts. Com hem vist, l'homologia persistent aprofita la functorialitat de l'homologia simplicial per fer el seguiment de propietats topològiques al llarg d'una filtració de complexos simplicials. Les propietats que tinguin una vida més llarga dins la filtració són propietats candidates a ser propietats reals de les dades.

Un cop definida l'homologia persistent la dotem d'una estructura algebraica. Zomorodian i Carlsson [27] proposen una correspondència entre els mòduls de persistència sobre un anell  $R$  i els mòduls graduats finitament generats sobre  $R[t]$ . Tot i així, recentment, el juny del 2018, Corbet i Kerber [6] van trobar un contraexemple per a aquesta correspondència, i van observar que calia demanar que l'anell  $R$  fos un anell noetherià. Aquest treball inclou aquesta nova versió revisada de la correspondència.

Aquesta correspondència permet, quan treballem amb coeficients en un cos, assignar a cada mòdul de persistència un invariant (respecte isomorfismes) anomenat conjunt de  $\mathcal{P}$ -interval·s. A més, aquest invariant pot ser representat de manera clara en diagrames anomenats barcodes. Per poder descriure aquesta estructura ens ha calgut usar teoria de mòduls sobre dominis d'ideals principals. En el capítol 3 hem fet una revisió d'aquesta teoria, especificant la demostració del teorema d'estructura de mòduls graduats finitament generats sobre dominis d'ideals principals, demostració que ha estat proposada per mi.

Dotar l'homologia persistent d'una estructura algebraica permet derivar algorismes generals i efectius. Per això, en aquest treball exposem l'algoritme proposat en [27] per al càlcul dels  $\mathcal{P}$ -interval·s quan treballem amb coeficients en un cos. També hem inclòs un algoritme per al càlcul dels  $p$ -èssims grups d'homologia persistentes quan es treballa amb coeficients en un domini d'ideals principals [27].

Finalment, hem pogut comprovar com l'homologia persistent és una eina satisfactòria donant exemples d'aplicacions en la ciència, [2], [4], [21], [22]. Hem explicat amb més detall un dels exemples [22] ressaltant com s'ha utilitzat l'homologia persistent per a l'anàlisi de patrons neuronals en el còrtex visual primari.

Crec que aquest treball fa palès que l'homologia persistent és un mètode per a l'anàlisi de dades robust i sustentat en una teoria sòlida que el converteix en una eina de gran projecció en el futur.

Com a continuació d'aquest treball es podria considerar relacionar l'homologia persistent amb la teoria de Morse. També seria interessant incloure una discussió

completa sobre successions espectrals, relacionant-la amb la persistència. A més a més, atès que una propietat molt important de l'homologia persistent és la seva estabilitat, una discussió sobre el teorema d'estabilitat [5] i les seves conseqüències seria, també, una bona continuació d'aquest treball.

Ja per acabar, mencionar que els coneixements adquirits a les assignatures de topologia algebraica, estructures algebraiques i topologia i geometria global de corbes i superfícies ens han donat els fonaments per a la realització d'aquest treball. Aquesta base ens ha permès assimilar els conceptes nous exposats en aquest treball. Quant a les competències adquirides durant el grau, aquestes m'han permès fer una cerca bibliogràfica eficient i exhaustiva tant en recursos virtuals com en paper. A més m'han permès construir demostracions rigoroses així com avaluar les demostracions elaborades per altres autores.

## Referències

- [1] Atiyah, M. F.; Macdonald, I. G.: *Introducción al Algebra conmutativa*, Reverté, Barcelona, 1980.
- [2] Bardin, J.; Spreemann, G.; Hess, K.: Topological exploration of artificial neuronal network dynamics, [arXiv:1810.01747 \[q-bio.NC\]](#), octubre 2018.
- [3] Carlsson, G.: Topology and data, *Bull. AMS*, 46(2):255-308, 2009.
- [4] Carlsson, G.; Ishkhanov, T.; de Silva, V.; Zomorodian, A.: On the local behavior of spaces of natural images, *Internat. J. Comput. Vision*, 76:1-12, 2008.
- [5] Cohen-Steiner, D.; Edelsbrunner, H.; Harer, J.: Stability of persistence diagrams, *Discrete & Computational Geometry*, 37.1: 103-120, 2007.
- [6] Corbet, R.; Kerber, M.: The Representation Theorem of Persistence Revisited and Generalized, [arXiv:1707.08864v3 \[math.AT\]](#), juny de 2018.
- [7] Cuenca, J. F.; Iske, A.: Persistent homology for defect detection in non-destructive evaluation of materials, 2015.
- [8] Edelsbrunner, H.; Harer, J.: *Computational Topology: An Introduction*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
- [9] Edelsbrunner, H., Harer, J.: Persistent homology—a survey, *Surveys on Discrete and Computational Geometry, Contemporary Mathematics*, 453:257–282, 2008.
- [10] Edelsbrunner, H.; Letscher, D.; Zomorodian, A.: Topological Persistence and Simplification, *Discrete Comput. Geom.*, 28:511-533, 2002.
- [11] Edelsbrunner, H.; Morozov, D.: Persistent homology: theory and practice, *Proceedings of the European congress of mathematics*, 31-50, 2012.
- [12] Garrett, P. B.: *Abstract algebra*, CRC Press, 2007.
- [13] Ghrist, R.: Three examples of applied and computational homology, *Nieuw Arch. Wiskd.*, 9(2):122–125, 2008.
- [14] Ghrist, R.: Barcodes: the persistent topology of data, *Bull., New Ser., Am. Math. Soc.*, 45(1):61–75, 2008.
- [15] Ghrist, R.: *Elementary Applied Topology*, ed. 1.0, Createspace, Seattle, 2014.
- [16] Goodman, F. M.: *Algebra: Abstract and Concrete*, SemiSimple Press Iowa City, IA, edition 2.6, 1 May 2015.
- [17] Hazewinkel, M.; Gubareni, N.; Kirichenko, V. V.: *Algebras, Rings and Modules*, Springer, Dordrecht, 2015.

- [18] Munkres, J. R.: *Elements of algebraic topology*, Addison Wesley, Redwood City, California, 2018.
- [19] Navarro, V.; Pascual, P: *Topologia Algebraica*, Edicions Universitat de Barcelona, Barcelona, 1999.
- [20] Otter, N.; Porter, M.A.; Tillmann, U; et al.: A roadmap for computing persistent homology, *EPJ Data Sci.*, 6: 17, 2017.
- [21] De Silva, V.; Ghrist, R.: Homological sensor networks, *Notic. Amer. Math. Soc.*, 54(1):10–17, 2007.
- [22] Singh, G.; Memoli, F.; Ishkhanov, T.; Sapiro, G.; Carlsson, G.; Ringach, D. L.: Topological analysis of population activity in visual cortex, *J. Vis.*, 8:1-18, 2008.
- [23] Skraba, P.; Vejdemo-Johansson, M.: Persistence modules: algebra and algorithms. *arXiv preprint arXiv:1302.2015 [cs.CG]*, 2013.
- [24] Wang, K. G.: The Basic Theory of Persistent Homology, 2012. Recuperat de <http://math.uchicago.edu/~may/REU2012/REUPapers/WangK.pdf>
- [25] Weinberger, S.: What is Persistent Homology?, *Notice of the AMS*, 58(1):36-39, 2011.
- [26] Zomorodian, A: *Topology for Computing*, Cambridge Univ. Press, England, 2005.
- [27] Zomorodian, A.; Carlsson, G.: Computing persistent homology, *Discrete and Computational Geometry* 33(2):249–274, 2005.

# Apèndixs

## A Teoria de categories

**Definició A.1.** Una *categoria*  $C$  consisteix en:

1. Una col·lecció  $\mathcal{O}$ , els elements de la qual s'anomenen objectes.
2. Una col·lecció  $Hom(a, b)$  de morfismes de  $a$  a  $b$  per cada parell ordenat  $a, b \in \mathcal{O}$ .
3. Una operació de composició  $\circ : Hom(a, b) \times Hom(b, c) \rightarrow Hom(a, c)$  per a cada terna ordenada  $a, b, c \in \mathcal{O}$ .  $\circ(f, g)$  és un morfisme de  $a$  a  $c$  i es nota  $f \circ g$ .

A més, es compleix que

1.  $(h \circ f) \circ g = h \circ (f \circ g)$  per a cada morfisme  $g : a \rightarrow b, f : b \rightarrow c, h : c \rightarrow d$ .
2. per tot  $a \in \mathcal{O}$ , existeix un morfisme identitat  $Id \in Hom(a, a)$  tal que  $f \circ Id = f$  per tot  $f \in Hom(a, b)$  i  $Id \circ g = g$  per tot  $g \in Hom(b, a)$ .

**Definició A.2.** Un *functor* d'una categoria  $C$  a una altra categoria  $D$  ( $\mathcal{F} : C \rightarrow D$ ) consisteix en:

1. Una aplicació  $\mathcal{O}(C) \rightarrow \mathcal{O}(D)$
2. Una aplicació  $Hom(C) \rightarrow Hom(D)$  tal que si  $f \in Hom_C(a, b)$  aleshores  $\mathcal{F}(f) \in Hom_D(\mathcal{F}(a), \mathcal{F}(b))$

A més,

1.  $\mathcal{F}(Id_a) = Id_{\mathcal{F}(a)}$  per tot objecte  $a$  de  $C$ .
2.  $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$  per tots els morfismes  $f : a \rightarrow b$  i  $g : b \rightarrow c$  de  $C$ .

**Definició A.3.** Sigui  $\mathcal{F} : C \rightarrow D$  un functor. Es diu que  $\mathcal{F}$  és:

1. *ple* si el morfisme  $Hom(C) \xrightarrow{\mathcal{F}} Hom(D)$  és exhaustiu.
2. *fidel* si el morfisme  $Hom(C) \xrightarrow{\mathcal{F}} Hom(D)$  és injectiu.
3. *plenament fidel* si és ple i fidel.
4. *essencialment exhaustiu* si per tot  $Y \in D$  existeix un  $X \in C$  tal que  $Y \cong \mathcal{F}(X)$ .

Podem definir també morfismes entre functors, així, podem definir la categoria de functors.



**Definició A.4.** Siguin  $\mathcal{F}, \mathcal{G} : C \rightarrow D$  dos functors. Definim *transformació natural*  $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  donant una família  $\{\phi(A) : \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{G}(A), A \in \mathcal{O}(C)\}$  de morfismes tals que per  $A \in C$  i  $f : A \rightarrow B$  tenim  $\phi(B) \circ \mathcal{F}(f) = \mathcal{G}(f) \circ \phi(A)$ .  $\phi$  és un *isomorfisme natural* si per tot  $A \in C$   $\phi(A)$  és un isomorfisme, si existeix un isomorfisme natural entre  $\mathcal{F}$  i  $\mathcal{G}$  escrivim  $\mathcal{F} \simeq \mathcal{G}$ .

Transformacions naturals  $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ,  $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  poden ser compostades donant lloc a  $\psi \circ \phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}$  posant  $(\psi \circ \phi)(A) = \psi(A) \circ \phi(A)$  per tot  $A \in C$ .

Definim la transformació natural identitat  $1_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  agafant  $1_{\mathcal{F}}(A) = 1_{\mathcal{F}(A)}$  per tot  $A \in C$ .

**Definició A.5.** Un functor  $\mathcal{F} : C \rightarrow D$  és una equivalència de functors si existeix un altre functor  $\mathcal{G} : D \rightarrow C$  tal que  $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} \simeq 1_C$  i  $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} \simeq 1_D$ .

Es té un teorema que dóna una caracterització les equivalències de categories per tal de no haver de construir un functor  $\mathcal{G}$  de manera que es compleixi la propietat anterior. El teorema és el següent:

**Teorema A.6.** Un functor  $\mathcal{F} : C \rightarrow D$  és una equivalència de categories si, i només si, es compleix:

1.  $\mathcal{F}$  és plenament fidel.
2.  $\mathcal{F}$  és essencialment exhaustiu.

## Notes bibliogràfiques

Per una descripció més detallada de teoria de categories enfocada a l'homologia podeu consultar [18].

## B Anells commutatius

En aquest apèndix exposarem alguns resultats i definicions que hem requerit al llarg del treball. Al llarg d'aquesta secció  $R$  denotarà un anell commutatiu i unitari. L'element unitat el notarem per 1 i l'element neutre per la suma el notarem per 0. Quan vulguem indicar els generadors d'un ideal usarem la notació  $I = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

Diem que  $a \in R$  no nul és un *divisor de zero* si existeix un element  $b \in R$  no nul tal que  $ab = 0$ . Diem que  $c \in R$  és unitat si existeix  $d \in R$  tal que  $cd = 1$ .

**Definició B.1.** Un anell  $R$  es diu que és un domini d'integritat si no té divisors de zero.

Un element  $p \in R$  es diu que és *irreductible* si no és unitat i per cada  $b, c \in R$  tals que  $p = bc$  es té que o bé  $b$  és unitat, o bé  $c$  és unitat. Es diu que  $a, b \in R$  són *associats* i es nota per  $a \sim b$  si  $a = bu$ , on  $u$  denota un element unitat de  $R$ .

**Proposició B.2.** Sigui  $R$  un domini d'integritat. Aleshores  $a|b$  si, i només si,  $(b) \subseteq (a)$ . A més,  $a$  i  $b$  són associats si, i només si, es té  $(a) = (b)$ .

**Definició B.3.** Diem que un ideal  $I \subseteq R$  és un ideal principal si està generat per un únic element, és a dir  $I = (a)$ .

**Definició B.4.** Un domini d'integritat  $R$  es diu que és un domini d'ideals principals si tots els ideals d' $R$  són principals.

Un element  $d \in R$  és diu que és el *màxim comú divisor* (MCD) d' $a$  i  $b$  si  $d|a$  i  $d|b$  i si  $c$  és un divisor comú d' $a$  i de  $b$  aleshores  $c|d$ . Es pot definir de la mateixa manera un màxim comú divisor d' $n$  elements.

**Proposició B.5.** Sigui  $R$  un domini d'ideals principals. Per qualssevol elements no nuls  $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$  existeix el seu màxim comú divisor.

Si  $d = MCD(a, b)$  aleshores  $(d) = (a, b)$ .

**Definició B.6.** Diem que un element no nul d'un anell  $R$  té una factorització única en irreductibles si  $a = p_1 p_2 \dots p_r$  amb  $p_i$  irreductible per tot  $i = 1, \dots, r$  i la factorització és única llevat de reordenació i associats.

**Definició B.7.** Un domini d'integritat  $R$  es diu que és un domini de factorització única (UFD) si tot element no nul i no unitat d' $R$  té una factorització única en irreductibles.

**Proposició B.8.** Tot domini d'ideals principals  $R$  és un domini de factorització única.

**Definició B.9.** Un domini d'integritat  $R$  és diu que és un domini euclidià si existeix una aplicació  $\pi : A \rightarrow N \cup \{0\}$  que satisfà:

1.  $\pi(0) = 0$ ,
2. Donat  $a \in R$  no nul i  $b \in R$  existeixen  $q, r \in R$  tals que  $b = qa + r$  i  $\pi(r) < \pi(a)$ .

**Proposició B.10.** Tot domini euclidià  $R$  és un domini d'ideals principals.

Així doncs obtenim les inclusions següents:

*Dominis euclidiàns*  $\subset$  *Dominis d'ideals principals*  $\subset$  *Dominis de factorització única*

**Definició B.11.** Un anell  $R$  es diu que és noetherià si es compleixen les següents condicions equivalents:

1. Tot conjunt no buit d'ideals d' $R$  té un element maximal.
2. Tota cadena ascendent d'ideals d' $R$  és estacionària.
3. Tot ideal d' $R$  és finitament generat.

La condició 2 la podem reescriure com: Donada una cadena d'ideals  $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq I_{n+1} \subseteq \dots$  existeix  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $I_k = I_{k+1} = \dots$

És clar de la definició que si  $R$  és un domini d'ideals principals, aleshores  $R$  és noetherià.

**Teorema B.12** (Teorema de la base de Hilbert). Sigui  $R$  un anell noetherià. Aleshores l'anell de polinomis amb una variable  $t$  amb coeficients a  $R$ ,  $R[t]$ , és també un anell noetherià.

## Notes bibliogràfiques

Per un aprofundiment en la matèria d'anells commutatius podeu consultar [1], [16] o [17].

## C R-mòduls

En aquest apèndix, si  $M$  és un grup, definirem  $+$  com l'operació interna,  $0$  com l'element neutre del grup i  $-m$  com l'element oposat d' $m \in M$ .  $R$  denotarà un anell commutatiu i unitari amb element neutre pel producte  $1$ .

**Definició C.1.** Sigui  $R$  un anell commutatiu unitari, amb element unitat  $1$ . Un  $R$ -mòdul  $M$  consisteix en un grup abelià  $(M, +)$  i una operació  $\cdot : R \times M \rightarrow M$  tal que  $\forall r, s \in R$  i  $\forall x, y \in M$ :

1.  $(rs)x = r(sx)$
2.  $(r + s)x = rx + sx$
3.  $r(x + y) = rx + ry$
4.  $1x = x$

**Definició C.2.** Una acció d'un anell  $R$  a un grup abelià és un morfisme  $\varphi : R \rightarrow \text{End}(M)$ .

Donada una acció d' $R$  a  $M$  podem definir l'aplicació

$$R \times M \rightarrow M$$

definida per  $(r, m) \mapsto \varphi(r)(m) = rm$ .

Del fet que  $\varphi$  sigui un morfisme i  $\varphi(r)$  sigui un endomorfisme obtenim les 4 propietats d'un  $R$ -mòdul. D'altra banda, si es té un producte  $R \times M \rightarrow M$  que compleix les 4 propietats dels  $R$ -mòduls, definint  $\varphi(r) : M \rightarrow M$  per  $\varphi(r)(m) = rm$ , obtenim que  $\varphi(r) : M \rightarrow M$  és un endomorfisme i que  $\varphi : R \rightarrow \text{End}(M)$  és un morfisme d'anells.

**Definició C.3.** Sigui  $M$  un mòdul i  $N$  un subgrup d' $M$ , aleshores diem que  $N$  és un *submòdul* si per tot  $r \in R$  i  $n \in N$  es compleix  $rn \in N$ .

**Observació C.4.** Així, un grup abelià lliure es pot definir com un  $\mathbb{Z}$ -mòdul. A més, si  $\mathbb{K}$  és un cos, aleshores el  $\mathbb{K}$ -mòdul és un  $\mathbb{K}$ -espai vectorial.

**Definició C.5.** Siguin  $M$  i  $N$  dos  $R$ -mòduls. Una aplicació  $f : M \rightarrow N$  es diu que és un *morfisme d' $R$ -mòduls* si  $\forall r, s \in R$  i  $\forall x, y \in M$  es compleix

$$f(rx + sy) = rf(x) + sf(y)$$

.

Els  $R$ -mòduls juntament amb els morfismes d' $R$ -mòduls defineix la categoria d' $R$ -mòduls, que denotarem per  $R - mod$ .

**Definició C.6.** La *suma directa* d' $R$ -mòduls  $M_1, M_2, \dots, M_n$  és el producte cartesià juntament amb les operacions

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \dots, x_n + x'_n)$$

i

$$r(x_1, x_2, \dots, x_n) = (rx_1, rx_2, \dots, rx_n).$$

La suma directa d' $M_1, M_2, \dots, M_n$  es nota per  $M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$ .

**Definició C.7.** Sigui  $M$  un  $R$ -mòdul i  $N$  un submòdul. Aleshores podem definir el quocient  $M/N$  de la mateixa manera que en grups,  $M/N = \{x + N : x \in M\}$ , aquí com que  $M$  és un grup abelià  $N$  és subgrup normal. Definim l'operació interna  $x + N + y + N = (x + y) + N$ . L'aplicació quocient ve definida per  $\pi : M \rightarrow M/N$   $\pi(m) = m + N$ . És clar que  $M/N$  és un  $R$ -mòdul i  $\pi$  és un morfisme d' $R$ -mòduls.

**Teorema C.8.** Sigui  $\varphi : M \rightarrow N$  un morfisme d' $R$ -mòduls exhaustiu i  $K$  el seu nucli. Sigui  $\pi : M \rightarrow M/K$  el morfisme quocient. Existeix un isomorfisme d' $R$ -mòduls  $\tilde{\varphi} : M/K \rightarrow N$  que satisfà  $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \pi$ . És a dir, es té el següent diagrama:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & N \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{\varphi} & \\ M/K & & \end{array}$$

*Demostració.* De teoria de grups sabem que existeix un isomorfisme de grups abelians  $\tilde{\varphi} : M/K \rightarrow N$  que satisfà  $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \pi$ . Només cal comprovar que és un morfisme d' $R$ -mòduls, és a dir, que respecte l'acció d' $R$ . En efecte,

$$\tilde{\varphi}(r(m + N)) = \tilde{\varphi}(rm + N) = \varphi(rm) = r\varphi(m) = r\tilde{\varphi}(m + N)$$

□

**Definició C.9.** Sigui  $M$  un  $R$ -mòdul. Diem que és un mòdul noetherià si la família de tots els submòduls d' $M$  satisfà la condició de cadenes ascendents, és a dir si per qualsevol cadena ascendent de submòduls d' $M$

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots$$

existeix un enter  $n$  tal que  $M_n = M_{n+1} = M_{n+2} = \dots$

**Proposició C.10.** Un  $R$ -mòdul és noetherià si, i només si, tot submòdul d' $M$  és finitament generat.

Si  $R$  és un anell noetherià, un  $R$ -mòdul finitament generat  $M$  és noetherià.

**Lema C.11.** Sigui  $R$  un anell noetherià. Aleshores un  $R$ -mòdul finitament generat és finitament presentat.

## Notes bibliogràfiques

Per un aprofundiment en la matèria podeu consultar [12], [16] o [17].

## D Anells graduats i mòduls graduats

En aquest apèndix quan ens referim a anell voldrem dir un anell commutatiu i unitari.

**Definició D.1.** Un anell  $R$  es diu que és *graduat* si existeix una família  $\{R_i | i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$  de subgrups additius d' $R$  tal que  $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}} R_i$  i  $R_i R_j \subseteq R_{i+j}$

Als elements del conjunt  $\bigcup_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}} R_i$  se'ls anomena *elements homogenis*. A un element  $x \in R_i$  es diu que és un *element homogeni de grau  $i$*  i escrivim  $\deg(x) = i$ .

**Definició D.2.** Sigui  $R$  un anell graduat, un  $R$ -mòdul *graduat* és un  $R$ -mòdul  $M$  tal que  $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}} M_i$  on cada  $M_i$  és un subgrup additiu d' $M$  i per cada  $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$   $R_i M_j \subseteq M_{i+j}$ .

Aquí, també, als elements del conjunt  $\bigcup_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}} M_i$  se'ls anomena *elements homogenis*. Un element  $x \in M_j$  es diu que és un *element homogeni de grau  $j$*  i escrivim  $\deg(x) = j$ .

**Definició D.3.** Sigui  $M$  un mòdul graduat. Un mòdul graduat  $N$  es diu que és un submòdul graduat d' $M$  si és un submòdul d' $M$  que a més satisfà  $N_i = N \cap M_i$ .

**Definició D.4.** Un morfisme de mòduls graduats  $f : M \rightarrow N$  és un morfisme de mòduls tal que  $f(M_i) \subseteq N_i \forall i$ .

Els mòduls graduats juntament amb els morfismes graduats formen una categoria, que denotarem per  $GR - mod$ .

La suma directa i el quocient i el nucli d'un morfisme graduat es construeixen de la mateixa manera que en el cas no graduat. Un mòdul graduat es diu que és *finitament generat* si el mòdul en si ho és.

**Lema D.5.** Sigui  $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}} M_i$  un mòdul graduat finitament generat. Aleshores, sempre podem escollir un sistema de generadors homogeni.

*Demostració.* Suposem  $m_1, m_2, \dots, m_s$  un sistema generador no homogeni. Aleshores podem escriure cada  $m_i$  com  $m_i = \sum_{k \geq 0} m_{i_k}$  on cada  $m_{i_k} \in M_k$ , d'aquesta manera els  $m_{i_k}$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$  i  $k \geq 0$  formen un sistema generador. Cal observar que és un sistema generador finit:  $m_i = \sum_{k \geq 0} m_{i_k}$  és una suma finita ja que  $M$  és finitament generat.  $\square$

## Notes bibliogràfiques

Per una discussió de mòduls graduats enfocada a l'homologia persistent podeu consultar [24] i [23].

## E *Macaulay2*

Existeix una gran quantitat de softwares de codi obert dirigits a la investigació matemàtica, com per exemple el *Macaulay2*, un software obert dedicat a la geometria algebraica i a l'àlgebra commutativa. Aquest software té implementades operacions aritmètiques bàsiques, operacions amb funcions, i funcions per a treballar amb matrius, anells i ideals. A més a més, conté paquets per al càlcul de l'homologia simplicial. En aquesta secció de l'apèndix farem un breu resum de com utilitzar el *Macaulay2* per calcular l'homologia d'un complex simplicial.

Quan s'inicia el *Macaulay2*, apareix un text com aquest:

```
Macaulay2, version 1.12
with packages: ConwayPolynomials, Elimination, IntegralClosure, InverseSystems, LLLBases,
               PrimaryDecomposition, ReesAlgebra, TangentCone
```

```
i1 :
```

Si volem carregar algun paquet cal, introduir les comandes `load "nomdelpaquet.m2"`; Explicarem com usar algun d'aquests paquets amb exemples.

### E.1 *Simplicialcomplexos.m2*

El primer paquet que usarem serà *Simplicialcomplexos*. És un paquet que serveix per manipular amb complex simplicials. Inclou diverses funcions, a continuació exposarem les funcions més relacionades amb aquest treball:

- `boundary`: dóna el subcomplex simplicial consistent en totes les cares no maximals del complex posat com a input.
- `chainComplex`: dóna el complex de cadenes associat a un símplex.
- `coefficientRing`: dóna l'anell sobre el qual esta definit el complex simplicial.

- `dim`: dóna la dimensió del complex simplicial.
- `faces`: dóna les cares de la dimensió demanada d'un símplex.
- `facets`: dóna les cares maximals del símplex.
- `HH SimplicialComplex`: calcula l'homologia del complex simplicial.
- `simplicialComplex`: serveix per crear un complex simplicial.

Els vèrtexs en aquest paquet són variables en un anell de polinomis, i cada símplex és representat com el producte de les variables corresponents.

Per començar a treballar amb el paquet, cal que el carreguem com hem explicat abans. Si volem definir un complex simplicial, cal primer que definim un anell de polinomis amb els vèrtexs que necessitem per definir el complex i després definir-lo donant les seves cares maximals. Per exemple suposem que necessitem 4 vèrtexs, podríem fer una cosa com aquesta:

```
i1 : load "SimplicialComplexes.m2"
i2 : R=ZZ[a,b,c,d]
o2 = R
o2 : PolynomialRing
i3 : K1=simplicialComplex{a*b*c,d*c};
i4 : K2=simplicialComplex{a*b*c,b*d,d*c};
```

Aquí hem escollit com a anell de polinomis  $R = \mathbb{Z}$ . Ara que hem vist com funciona la funció `simplicialComplex`, farem una petita demostració de com s'apliquen les altres funcions.

```

i6 : dim K2
o6 = 2

i7 : faces (1,K1)
o7 = | ab ac bc cd |

          1      4
o7 : Matrix R <--- R

i9 : facets K2
o9 = | cd bd abc |

          1      3
o9 : Matrix R <--- R

i10 : coefficientRing K2
o10 = ZZ

o10 : Ring

i11 : boundary K2
o11 = | d bc ac ab |

o11 : SimplicialComplex

```

Amb aquestes comandes calculem la dimensió de  $K2$  i demanem les cares de dimensió 1 de  $K1$ , per això usem la funció `faces`, que demana com a input un enter que simbolitza la dimensió de les cares i un complex simplicial. Trobem després les cares de maximals de  $K2$  usant `facets`. Seguidament, demanem l'anell de coeficients sobre el que s'ha definit  $K2$ . Finalment, obtenim el subcomplex format per les cares no maximals de  $K2$ .

A continuació explicarem com calcular el complex de candenes i l'homologia d'un complex simplicial.



```

i32 : chainComplex K1
o32 = ZZ <--- ZZ <--- ZZ <--- ZZ
      -1      0      1      2
o32 : ChainComplex
i33 : chainComplex K2
o33 = ZZ <--- ZZ <--- ZZ <--- ZZ
      -1      0      1      2
o33 : ChainComplex
i34 : boundary (1,K1)
o34 = | -1 -1 0 0 |
      | 1 0 -1 0 |
      | 0 1 1 -1 |
      | 0 0 0 1 |
o34 : Matrix ZZ <--- ZZ
i35 : boundary (0,K1)
o35 = | 1 1 1 1 |
o35 : Matrix ZZ <--- ZZ

```

Amb aquesta seqüència de comandes hem obtingut el complex de cadenes associat a  $K1$  i  $K2$ . Observeu que en el *Macaulay2* es consideren els símplexs de dimensió -1, és a dir, el símplex buit. Després calculem algunes matrius d'operadors vora. Fixeu-vos que l'operador vora  $\partial_0$  no és l'aplicació 0 com nosaltres havíem definit, això ve donat per la consideració del (-1)-símplex. Per evitar això podem carregar el paquet "SpectralSequences.m2" i usar  $C = \text{truncate}(\text{chainComplex } K1, 1)$ , d'aquesta manera eliminem el mòdul de dimensió -1 del complex de cadenes.

```

i4 : load "SpectralSequences.m2"

i5 : C2=truncate(chainComplex K2,1)

o5 = image 0 <-- ZZ 4 <-- ZZ 5 <-- ZZ 1
      -1      0      1      2

o5 : ChainComplex

i6 : HH C2

o6 = -1 : image 0

      0 : cokernel | 1 1 0 0 0 |
                  | -1 0 1 1 0 |
                  | 0 -1 -1 0 1 |
                  | 0 0 0 -1 -1 |

      1 : subquotient (| 1 1 |, | -1 |)
                    | -1 -1 | | 1 |
                    | 1 0 | | -1 |
                    | 0 1 | | 0 |
                    | 0 -1 | | 0 |

      2 : image 0

o6 : GradedModule

i7 : prune HH C2

o7 = -1 : 0

      1
      0 : ZZ

      1
      1 : ZZ

      2 : 0

o7 : GradedModule

```

Finalment hem calculat l'homologia de  $K2$ . La funció `prune` ens diu a què és isomorf el mòdul demanat, així podem extreure els nombres de Betti. Si volguéssim, podríem calcular només un grup d'homologia determinat, per calcular el primer grup d'homologia usaríem la comanda `HH_1 C2`.