UNIVERSITAT DE BARCELONA

Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

Jocs cooperatius i problemes de bancarrota

Autor: Marc Ventura Olivella

Director:	Dr. Pedro Calleja Cortes
Co-Director:	Dr. Josep Vives Santa Eulalia
Realitzat a:	Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial
Barcelona,	18 de gener de 2019

Abstract

Cooperative game theory is the study of mathematical models of cooperation, in transferable utility games the players face the challenge to split up some good among them using cooperation. This essay is an introduction to the existing link between cooperative game theory and the so called rationing problems or bankruptcy problems. This problem is based in using division rules to allocate a quantity of good among some creditors taking into account that the sum of the claims exceeds the quantity available to allocate. We will prove that the Shapley value (*Shapley* 1953) and the Nucleous (*Schmeidler* 1969) of the cooperative game associated to the bankruptcy problem corresponds to the random arrival rule (*O'Neill* 1982) and the Talmud rule (*Aumann* and *Maschler* 1985) of the bankruptcy problem respectively .

Resum

La teoria de jocs cooperatius és l'estudi de models matemàtics de cooperació, en joc d'utilitat transferible els jugadors s'enfronten al repte de repartir-se allò que poden obtenir de la cooperació. Aquest projecte és una introducció al lligam entre la teoria de jocs cooperatius i els problemes de bancarrota. Aquests problemes es basen en repartir una quantitat d'un bé entre entre un conjunt de creditors quan la suma de les seves demandes és superior a la quantitat a repartir. Demostrarem que el valor de Shapley (*Shapley* 1953) i el Nucleous (*Schmeidler* 1969) del joc cooperatiu associat a un problema de bancarrota corresponen a la *random arrival rule* (*O'Neill* 1982) i la regla del Talmud (*Aumann* i *Maschler* 1985) d'un problema de bancarrota respectivament.

Agraïments

M'agradaria agrair, en primer lloc, al meu tutor el Dr. Pere Calleja Cortes per tot el suport, l'ajuda i les idees que hem aplicat en aquest treball. També m'agradaria agrair al Dr. Josep Vives Santa Eulalia pels seus consells i el seguiment del treball. Finalment agrair a la meva família i amics per tot el suport i l'escalf no només durant l'elaboració d'aquest projecte, sinó que també durant tots els cursos del grau, especialment a la Sara, a qui li dedico aquest treball i l'animo a no deixar d'aprendre mai.

Índex

1 Teoria de Jocs Cooperatius

1.1 Introducció i conceptes

Sigui $\mathcal{N} = \{N \subseteq \mathbb{N} \mid |N| < \infty\}$ el conjunt de tots els subconjunts finits dels nombres naturals. Els subconjunts de $N \in \mathcal{N}$ els anomenarem coalicions, és a dir, una coalició de jugadors és S tal que $S \in \mathcal{P}(N) := 2^N$. La cardinalitat de les coalicions l'anomenarem amb la lletra minúscula de la coalició, així S comptarà amb $|S| = s$ jugadors. Finalment la coalició sense jugadors s'anomena coalició buida i la designem amb $\emptyset$.

Definició 1.1. Un **joc cooperatiu en forma característica** [22] és un parell ordenat (N, v) on $N \in \mathcal{N}$ és el nombre de jugadors (per comoditat considerarem que $N = \{1, \ldots, n\}$), i $v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$ s'anomena funció característica que assigna a cada coalició S el valor de la seva coalició, i assigna $v(\emptyset) = 0$. Anomenem Γ al conjunt de tots els jocs cooperatius i Γ^N al conjunt de tots els jocs cooperatius amb $|N|$ jugadors.

Els jocs cooperatius d'utilitat transferible (TU) s'utilitzen per modelitzar situacions de cooperació, els agents o jugadors s'enfronten al repte de repartir-se allò que poden obtenir de la cooperació, per exemple, diners. Per un joc amb $|N| = n$ jugadors, un vector $x \in \mathbb{R}^n$ representa la distribució dels recursos a repartir entre els agents. Anomenarem **vector de pagaments** a aquest vector x i en aquest cas x_i és la quantitat assignada al jugador i. Per a cada coalició $S \subseteq N$ utilitzarem la notació $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$, per definició $x(\emptyset) = 0$.

Definició 1.2. Sigui $N \in \mathcal{N}$, donats dos jocs $(N, v), (N, w) \in \Gamma^N$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ definim els jocs $(N, \lambda \cdot v)$ i $(N, v + w)$ per $(\lambda v)(S) = \lambda v(S)$ i $(v + w)(S) = v(S) + w(S)$ per a tot $S \subseteq N$ respectivament.

Definició 1.3. Sigui $N \in \mathcal{N}$, un joc cooperatiu (N, v) és **superadditiu** si per qualsevol $S, T \in 2^N$ disjunts es compleix que $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$. El joc és **monòton** si per qualsevol $S, T \in 2^N$ tals que $S \subseteq T$ es compleix que $v(S) \leq v(T)$.

En teoria de jocs cooperatius existeix un procediment anomenat 0-normalització per tal de transformar el joc en un altre joc on els valors individuals siguin zero. Sigui (N, v) un joc cooperatiu, la seva 0-normalització serà un joc cooperatiu (N, v_0) definit per:

$$v_0(S) = v(S) - \sum_{i \in S} v(i).^1$$

Definició 1.4. Un joc cooperatiu (N, v) és **0-monòton** si (N, v_0) és monòton. Es pot demostrar que un joc és 0-monòton si i només si la seva funció característica satisfà:

$$v(S) + \sum_{i \in T \setminus S} v(i) \leq v(T).$$

[1] En tot el treball usarem $v(i)$ enlloc de $v(\{i\})$, $v(ij)$ enlloc de $v(\{i, j\})$, etc. per comoditat.

És fàcil veure-ho ja que per $S \subseteq T \subseteq N$:

$$v(S) - \sum_{i \in S} v(i) \leq v(T) - \sum_{i \in T} v(i) \Leftrightarrow v(S) + \sum_{i \in T \setminus S} v(i) \leq v(T).$$

Proposició 1.5. *Sigui $N \in \mathcal{N}$ i (N, v) un joc cooperatiu. Si (N, v) és superadditiu aleshores també és 0-monòton.*

Demostració. Sigui (N, v) un joc tal que per a totes $S, T \subseteq N$ coalicions disjuntes es compleix que $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$. En particular es compleix que per a tota coalició $S \subseteq N \setminus \{i\}$:

$$v(S) + v(i) \leq v(S \cup \{i\}).$$

Volem provar que per a totes $S \subseteq T \subseteq N$ es compleix que:

$$v(S) + \sum_{i \in T \setminus S} v(i) \leq v(T).$$

Sigui $S \subseteq T$ i $T \setminus S = \{i_1, \ldots, i_k\}$. Aplicant la superadditivitat:

$$v(S) + v(i_1) \leq v(S \cup \{i_1\}).$$

$$v(S \cup \{i_1\}) + v(i_2) \leq v(S \cup \{i_1\} \cup \{i_2\}).$$

Aplicant la superadditivitat $k - 2$ vegades obtindrem que:

$$v(S \cup \{i_1, \ldots, i_{k-1}\}) + v(i_k) \leq v(T).$$

Sumant totes les desigualtats trobarem que:

$$v(S) + \sum_{j=1}^{k} v(i_j) \leq v(T).$$

Això demostra el resultat. □

En el nostre treball demanarem que el vector de pagaments sigui factible, és a dir, en el cas que es formi la gran coalició N demanarem que $x(N) \leq v(N)$. Amb aquesta condició sorgeix la següent definició.

Definició 1.6. Sigui $N \in \mathcal{N}$, el conjunt de **preimputacions** d'un joc (N, v) escull totes les distribucions o vectors de pagaments eficients o Pareto òptimes.

$$PI(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x(N) = v(N)\}.$$

Definició 1.7. Sigui $N \in \mathcal{N}$, el conjunt d'**imputacions** del joc (N, v) és aquell que compleix el principi d'eficiència i de racionalitat individual ja que ningú acceptaria menys del que obtindria si no fes coalició amb ningú $v(i)$.

$$I(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^N | \ x(N) = v(N), \ x_i \geq v(i) \ \forall i \in N\}.$$

El conjunt de preeimputacions és sempre no buit, ja que geomètricament és un hiperplà de $\mathbb{R}^n$, tot i així el conjunt d'imputacions si que podria ser-ho, així que veurem una condició necessària i suficient perquè no ho sigui.

Definició 1.8. Sigui $N \in \mathcal{N}$, direm que un joc cooperatiu (N, v) és **essencial** si $I(N, v) \neq \emptyset$. Anomenarem E^N al conjunt de tots els jocs cooperatius essencials de n jugadors.

Proposició 1.9. *Sigui $N \in \mathcal{N}$ i (N, v) un joc cooperatiu, aleshores (N, v) és essencial si i només si $\sum_{i \in N} v(i) \leq v(N)$.*

Demostració. Si el conjunt d'imputacions és no buit aleshores existeix $x \in I(N, v)$ complint $x(N) = v(N)$ i $v(i) \leq x_i$ per tots els jugadors. Aleshores:

$$\sum_{i \in N} v(i) \leq \sum_{i \in N} x_i = v(N).$$

D'altra banda, si la desigualtat es compleix aleshores considerant el vector de pagaments: $x = (x_1, ..., x_n)$ tal que $x_i = v(i)$ per a tot $i \in N \setminus \{n\}$ i $x_n = v(N) - \sum_{i \in N \setminus \{n\}} v(i)$, tindrem que:

$$v(n) \leq x_n = v(N) - \sum_{i \in N \setminus \{n\}} v(i) \Rightarrow x(N) = \sum_{i \in N} x_i = \sum_{i \in N \setminus \{n\}} x_i + x_n = v(N).$$

□

Definició 1.10. Sigui $N \in \mathcal{N}$, (N, v) un joc cooperatiu i $S \subseteq N$ una coalició no buida. Sigui $x \in \mathbb{R}^n$ un vector de pagaments. Definim el **joc reduït** $(S, v_{S,x})$ del joc (N, v) relatiu a la distribució x per:

$$v_{S,x}(T) = \begin{cases} x(T) & \text{si} \quad T = \emptyset, T = S \\ \max\{v(Q \cup T) - x(Q) \mid Q \subseteq N \setminus S\} & \text{si} \quad \emptyset \subsetneq T \subsetneq S \end{cases}$$

El joc reduït revalua tots els valors de les coalicions quan els jugadors de $N \setminus S$ abandonen el joc amb el seu pagament d'acord amb el vector de pagaments x. En particular entenem que quan una coalició de jugadors que no marxen $T \subseteq S$ es forma poden triar els millors companys possibles d'entre els que marxen sempre i quan els hi assegurin el pagament proposat per x.

1.2 El Core

El Core d'un joc es defineix per primera vegada al 1953 per *Gillies* [8] i és aquell conjunt de vectors de pagament eficients i amb racionalitat de coalicions, sent aleshores un conjunt de vectors de pagament altament estable. L'objectiu d'aquesta secció és presentar el Core i veure en quines condicions aquest és un conjunt no buit (Teorema de Bondareva-Shapley).

Definició 1.11. Sigui $N \in \mathcal{N}$ i (N, v) un joc cooperatiu en forma característica, el **Core** de (N, v) és el conjunt:

$$\mathcal{C}(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^N | \ x(N) = v(N), \ x(S) \geq v(S) \ \forall S \subseteq N\}.$$

De fet, de la pròpia definició es pot veure que si el core és no buit aleshores és un conjunt polièdric ja que està en el pla d'eficiència i restringit per les desigualtats de racionalitat de coalicions. Tot seguit en veurem un exemple.

Exemple 1.12. Considerem el cas amb només tres jugadors ja que podrem fer-ne una representació geomètrica més acurada. Sigui el joc amb $|N| = 3$ definit per $v(1) = 0, \ v(2) = 0, \ v(3) = 0$, amb valor de les coalicions $v(12) = 2, \ v(13) = 1, \ v(23) = 2, \ v(123) = 3$. El Core d'aquest joc serà:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^3 | \ & x_1 + x_2 + x_3 = 3, x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0, \\ & x_1 + x_2 \geq 2, \ x_1 + x_3 \geq 1, \ x_2 + x_3 \geq 2\}. \end{aligned}$$

Farem la representació gràfica sobre l'hiperplà de les preeimputacions $x(N) = 3$, en la següent figura es veu representat el conjunt de les imputacions (el triangle) i el Core del joc:

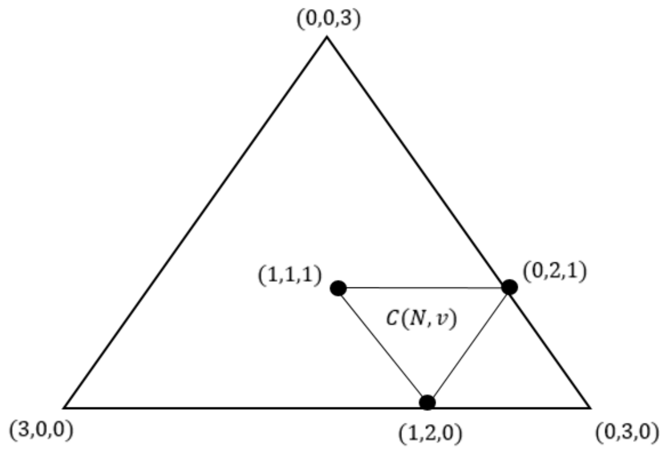

Figura 1: Core de l'exemple 1.12

És interessant notar que el Core d'un joc cooperatiu si no és buit, o és un punt o és un conjunt infinit de punts.

Proposició 1.13. *Sigui $N \in \mathcal{N}$ i (N, v) un joc cooperatiu. El Core de (N, v) és un conjunt compacte i convex.*

Demostració. Donada la definició del Core, els vectors de pagament del Core estan al hiperplà de les preeimputacions i en un conjunt de semiespais tancats, de manera que al ser una intersecció finita d'espais tancats és tancat. Veiem que està afitat: Si $x \in \mathcal{C}(N, v)$, per a tot jugador i es compleix que:

$$v(i) \leq x_i = \sum_{i \in N} x_i - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j \leq v(N) - v(N \setminus \{i\}),$$

demostrant que el Core és acotat. Al ser un subconjunt de $\mathbb{R}^n$ tancat i acotat pel teorema de Heine-Borel també és compacte. Veiem ara que és convex, prenem $x, y \in \mathcal{C}(N, v)$ i $\lambda \in [0, 1]$, tenim:

$$(\lambda x + (1-\lambda)y)(N) = \sum_{i \in N} (\lambda x_i + (1-\lambda)y_i) = \lambda v(N) + (1-\lambda)v(N) = v(N)$$

i per cada coalició $S \subseteq N$:

$$(\lambda x + (1-\lambda)y)(S) = \sum_{i \in S} (\lambda x_i + (1-\lambda)y_i) = \lambda \sum_{i \in S} x_i + (1-\lambda) \sum_{i \in S} y_i \geq$$
$$\lambda v(S) + (1-\lambda)v(S) = v(S).$$

Per tant $\lambda x + (1-\lambda)y \in \mathcal{C}(N, v)$ provant que és convex i per tant provant la proposició. □

També es pot veure que si el Core és no buit existiran $x_1, \ldots, x_k \in \mathcal{C}(N, v)$ extrems del Core tals que tot punt del Core serà una combinació lineal d'aquests punts, és a dir:

$$\mathcal{C}(N, v) = convex\{x_1, \ldots, x_k\} = \{\sum_{l=1}^{k} \alpha_l x_l \mid \alpha_l \geq 0, \sum_{l=1}^{k} \alpha_l = 1\}.$$

Ara ens interessa saber en quines condicions el Core és un conjunt no buit, per aquest motiu hem d'introduir el concepte de col·leccions equilibrades.

1.2.1 Col·leccions equilibrades

Definició 1.14. Sigui $N \in \mathcal{N}$, el **vector característic** d'una coalició $S \subseteq N$ és el vector $\chi_S \in \mathbb{R}^n$ definit per:

$$\chi_{S_i} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i \in S \\ 0 & \text{si} \quad i \in N \setminus S \end{cases}$$

Definició 1.15. Sigui $N \in \mathcal{N}$, una col·lecció de subconjunts no buits de N: $\mathcal{B} = \{S_1, ..., S_m\}$ s'anomena **equilibrada** en N si existeixen reals $(\alpha_S)_{S \in \mathcal{B}}$ anomenats pesos, $\alpha_{S_j} \geq 0$, tals que per a tot jugador $i \in N$:

$$\sum_{S \in \mathcal{B}} \alpha_S \cdot \chi_S = \chi_N.$$

O el que és equivalent:

$$\sum_{\{j \ \mid \ i \in S_j\}} \alpha_{S_j} = 1.$$

Notem que si la col·lecció és una partició aleshores sempre serà equilibrada prenent tots els pesos iguals a 1.

Definició 1.16. Sigui $N \in \mathcal{N}$, un joc (N, v) és **equilibrat** si per a tota col·lecció $\mathcal{B} = \{S_1, ..., S_m\}$ equilibrada en N amb els seus corresponents pesos es compleix que:

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_{S_j} \cdot v(S_j) \leq v(N).$$

1.2.2 Teorema de Bondareva-Shapley

Veurem que el Core d'un joc cooperatiu en forma característica és no buit sempre i quan el joc sigui equilibrat. Aquesta és la versió feble del teorema de Bondareva-Shapley, una versió més forta diu que perquè un joc sigui equilibrat n'hi ha prou en que la desigualtat de la definició 1.16 es compleixi per tota col·lecció equilibrada minimal (aquella que no conté cap col·lecció equilibrada pròpia). Nosaltres veurem la versió feble del teorema.

Teorema 1.17. *(Bondareva - Shapley) Sigui $N \in \mathcal{N}$, un joc (N, v) té $\mathcal{C}(N, v) \neq \emptyset$ si i només si es equilibrat.*

Demostració. $\Longrightarrow$) Sigui $\mathcal{C}(N, v) \neq \emptyset$, aleshores per tota coalició $S \subseteq N$:

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i \geq v(S).$$

Sigui $\mathcal{B} = \{S_1, ..., S_m\}$ una col·lecció equilibrada qualsevol en N amb els seus corresponents pesos $\alpha_{S_1}, \ldots, \alpha_{S_m}$. Donat que $x \in \mathcal{C}(N, v)$:

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_{S_j} \cdot v(S_j) \leq \sum_{j=1}^{m} \alpha_{S_j} \cdot x(S_j) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{S_j} \cdot \left(\sum_{i \in S_j} x_i \right) = \sum_{i \in N} x_i \left(\sum_{\{j \ \mid \ i \in S_j\}} \alpha_{S_j} \right) =$$

$$\sum_{i \in N} x_i = x(N) = v(N).$$

Per tant el joc és equilibrat.
$\Longleftarrow$) Suposem ara que per tota col·lecció equilibrada en N es compleix que $\sum_{j=1}^{m} \alpha_{S_j} \cdot v(S_j) \leq v(N)$. Demostrarem que el Core es no buit per reducció a l'absurd. Sigui (N, v) un joc amb $\mathcal{C}(N, v) = \emptyset$. Considerem els següents conjunts:

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in N} x_i = v(N)\}.$$

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in S} x_i \geq v(S), \forall S \subsetneq N\}.$$

És clar que $\mathcal{C}(N, v) = A \cap B = \emptyset$ i per tant, per a tot $y \in B$ es compleix que $y(N) > v(N)$. A es un hiperplà de $\mathbb{R}^n$ i B es un subconjunt tancat, acotat inferiorment i convex de $\mathbb{R}^n$. Pel teorema de l'hiperplà separador [14] existirà h tal que per a tot $x \in A$ i per a tot $y \in B$:

$$x \cdot h < y \cdot h \Rightarrow \sum_{i \in N} x_i < \sum_{i \in N} y_i.$$

En el nostre cas $h = (1, \ldots, 1)$ ja que l'hiperplà separador d'A i B serà paral·lel a A i per tant es compleix la implicació anterior, en particular l'última desigualtat ha de ser satisfeta pel vector $y^* \in B$ que resol el problema $\min\{\sum_{i \in N} y_i, \ \mid y \in B\}$. B és tancat, acotat inferiorment i convex per tant per Weiestrass el problema té una solució òptima global que caracteritzarem per les condicions de Lagrange. El Lagrangià és:

$$\mathcal{L}(y,\lambda) = \sum_{i\in N} y_i + \sum_{S\in 2^N\setminus\{N\}} \lambda_S \left(v(S) - \sum_{i\in S} y_i \right)$$

El gradient de la solució òptima (y^*,λ^*) ha de satisfer:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_S} \right)_{(y^*,\lambda^*)} = 0.$$

Per tant per a tot $i \in N$ i per a tota coalició $S \in 2^N \setminus \{N\}$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(y^*,\lambda^*)}{\partial y_i} = 1 - \sum_{\{S\in 2^N\setminus\{N\} \mid i\in S\}} \lambda^*_S = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(y^*,\lambda^*)}{\partial \lambda_S} = v(S) - \sum_{i\in S} y^*_i = 0$$

Triant $\lambda^*_N = 0$ veiem que la família $\{S \in 2^N \mid S \neq \emptyset\}$ amb pesos λ^*_S és una col·lecció equilibrada de coalicions. Aleshores:

$$\sum_{S\in 2^N} \lambda^*_S v(S) = \sum_{S\in 2^N} \lambda^*_S \left(\sum_{i\in S} y^*_i \right) = \sum_{i\in N} y^*_i \left(\sum_{\{S\in 2^N \mid i\in S\}} \lambda^*_S \right) = \sum_{i\in N} y^*_i > v(N)$$

Per tant el joc (N,v) no és equilibrat, trobant la contradicció i demostrant el teorema. $\square$

Cal remarcar que aquesta no és la demostració que Olga Bondareva [5] va proposar originalment. En la seva demostració ella utilitza programació lineal i el teorema de la dualitat de la programació lineal. En aquest treball tot i així hem preferit donar una demostració alternativa. Com a curiositat, el teorema porta el nom de Shapley tot i que fou demostrat per Olga Bondareva en rus i va passar desapercebut durant anys fins que Shapley el 1963 va arribar a la mateixa conclusió independentment i ho va publicar en anglès.

1.3 Jocs Convexos

Els jocs convexos són una classe important dels jocs cooperatius amb interessants propietats, més endavant demostrarem que els jocs cooperatius associats a un problema de bancarrota són convexos. En aquest capítol veurem quines són les propietats que adquireixen els jocs cooperatius sota convexitat.

En un joc convex les contribucions dels agents a les coalicions incrementen amb la mida de la coalició, de vegades a aquesta propietat se l'anomena efecte de "bola de neu". En els jocs convexos el Core es pot descriure fàcilment ja que es poden calcular els seus extrems de forma intuïtiva perquè aquests coincideixen amb el conjunt de Weber.

Definició 1.18. Sigui $N \in \mathcal{N}$, un joc cooperatiu (N, v) és **convex** si per a tot jugador $i \in N$ i per totes les coalicions $S \subseteq T \subseteq N \setminus \{i\}$ se satisfà que

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T).$$

Aquesta propietat és equivalent a dir que per a qualssevol coalicions $S, T \subseteq N$ aleshores:

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T).$$

Anomenem Γ^N_{con} al conjunt de jocs cooperatius convexos amb n jugadors.

Lema 1.19. *Sigui $N \in \mathcal{N}$, (N, v) un joc cooperatiu convex i $x \in \mathcal{C}(N, v)$. Sigui $S \subseteq N$ una coalició no buida. El joc reduït $(S, v_{S,x})$ és convex.*

1.3.1 El conjunt de Weber

Com hem vist en apartats anteriors, el Core és un conjunt important però malauradament no sempre és no buit. La introducció del concepte del conjunt de Weber és important degut a que és un conjunt no buit i que sempre conté al Core. Abans de definir-lo formalment necessitem alguns conceptes previs.

Definició 1.20. Sigui $N \in \mathcal{N}$ i (N, v) un joc cooperatiu, donada una coalició $S \subsetneq N$, la **contribució marginal** d'un jugador $i \notin S$ a la coalició S és $v(S \cup \{i\}) - v(S)$.

És a dir, el jugador $i \notin S$ raona que la seva aportació a la coalició és $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ de manera que les exigències d'aquest jugador amb la coalició tindran a veure amb aquest valor. Tot i així aquest concepte no té en compte com i quan es fa formar la coalició, quins jugadors van entrar primers i quins els últims.
Definirem una ordenació del conjunt de jugadors per $\psi = (i_1, \ldots, i_n)$ on i_j representa el jugador que ha entrat en el lloc j-èssim. Notarem per $\mathcal{S}_N$ el conjunt de tots els ordres possibles de n jugadors.

Observació 1.21. Si (N, v) és un joc 0-monòton aleshores les contribucions marginals d'un jugador i arbitrari superen el seu valor individual, és a dir, per a tota $S \subseteq N \setminus \{i\}$ es compleix que:

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \geq v(i).$$

Definició 1.22. Sigui $N \in \mathcal{N}$, donat (N, v) un joc cooperatiu i una ordenació $\psi \in \mathcal{S}_N$, el **vector de contribucions marginals** del joc associat a l'ordenació ψ és $m^\psi(v) \in \mathbb{R}^n$ definit per $m^\psi_{i_k}(v) = v(\{i_1, \ldots, i_k\}) - v(\{i_1, \ldots, i_{k-1}\})$ per a tot $i_k \in N$. Component a component:

$$\begin{aligned}
m^\psi_{i_1}(v) &= v(i_1) \\
m^\psi_{i_2}(v) &= v(i_1 i_2) - v(i_1) \\
&\vdots \\
m^\psi_{i_n}(v) &= v(i_1 \ldots i_n) - v(i_1 \ldots i_{n-1})
\end{aligned}$$

Per exemple per $N = \{1,2,3,4,5\}$ i l'ordenació $\psi = (5,1,4,3,2)$, el vector de contribucions marginals és:

$$m^{\psi}(v) = (v(15) - v(5), v(12345) - v(1345), v(1345) - v(145), v(145) - v(15), v(5))$$

Observació 1.23. Per a tota ordenació $\psi \in \mathcal{S}_N$, el vector de contribucions marginals és eficient ja que $m^{\psi}(v)(N) = \sum_{j=1}^{n} m^{\psi}_{i_j}(v) = v(N)$

Observació 1.24. Donat que el nombre d'ordenacions possibles d'n elements és $n!$ tindrem $n!$ vectors de contribucions marginals. En jocs additius on $v(S) = \sum_{i\in S} v(i)$ tots els vectors de contribució marginals seran iguals.

Proposició 1.25. *Sigui $N \in \mathcal{N}$, (N,v) un joc cooperatiu i $\psi \in \mathcal{S}_N$. Si $m^{\psi}(v) \in \mathcal{C}(N,v)$, aleshores $m^{\psi}(v)$ és un extrem de $\mathcal{C}(N,v)$.*

Demostració. Sigui $\psi \in \mathcal{S}_N$ una ordenació de jugadors i (N,v) un joc cooperatiu tal que $m^{\psi}(v) \in \mathcal{C}(N,v)$. Notem que podem escriure les sumes parcials de les seves components com $\sum_{j=1}^{k} m^{\psi}_{i_j}(v) = v(\{i_1,\ldots,i_k\})$ per a tot $k = 1,\ldots,n$, d'on es dedueix directament que estarà sobre un dels extrems del Core. $\square$

Definició 1.26. Sigui $N \in \mathcal{N}$ i (N,v) un joc cooperatiu, anomenarem **conjunt de Weber** a totes les combinacions convexes dels vectors de contribució marginals:

$$\mathcal{W}(N,v) = convex\{m^{\psi}(v) \mid \psi \in \mathcal{S}_N\} = \{\sum_{j=1}^{n!} \alpha_j \cdot m^{\psi_j}(v) |\ \alpha_j \geq 0\ \forall j\ ,\ \sum_{j=1}^{n!} \alpha_j = 1\}$$

És un conjunt no buit per construcció, tancat i afitat. De fet donat que tots els vectors de contribucions marginals són eficients tindrem que $\mathcal{W}(N,v) \subseteq PI(N,v)$. De fet es pot veure que si el joc és 0-monòton aleshores $\mathcal{W}(N,v) \subseteq I(N,v)$.

Exemple 1.27. Considerem el joc següent per a tres jugadors: $v(1) = v(2) = v(3) = 0$, $v(12) = 2$, $v(13) = 1$, $v(23) = 2$ i $v(123) = 3$. Per poder representar el conjunt de Weber necessitem els vectors de contribucions marginals per a les sis ordenacions diferents:

$$\begin{array}{ll} \psi_1 = (1,2,3) \longrightarrow m^{\psi_1}(v) = (0,2,1); & \psi_2 = (1,3,2) \longrightarrow m^{\psi_2}(v) = (0,2,1) \\ \psi_3 = (2,1,3) \longrightarrow m^{\psi_3}(v) = (2,0,1); & \psi_4 = (2,3,1) \longrightarrow m^{\psi_1}(v) = (1,0,2) \\ \psi_5 = (3,1,2) \longrightarrow m^{\psi_5}(v) = (1,2,0); & \psi_6 = (3,2,1) \longrightarrow m^{\psi_1}(v) = (1,2,0) \end{array}$$

Per tant $\mathcal{C}(N,v) = convex\{(0,2,1),(1,2,0),(1,1,1)\}$ i que:

$$\mathcal{W}(N,v) = convex\{(0,2,1),(1,2,0),(2,0,1),(1,0,2)\}.$$

En la figura 2 podem veure que el Weber conté el Core, tot seguit veurem que aquesta propietat es compleix sempre.

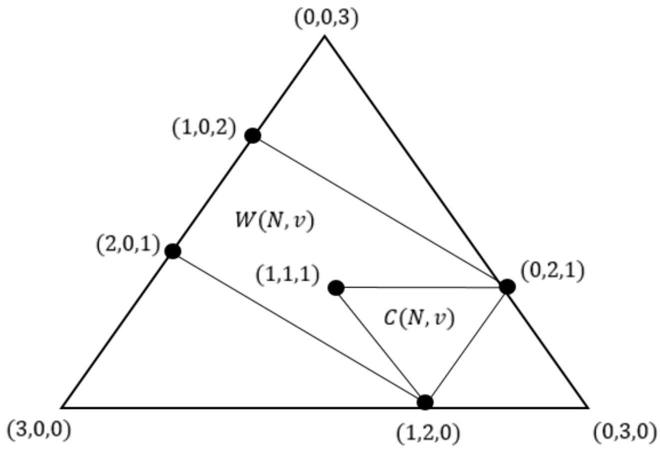

Figura 2: Core i conjunt de Weber per l'exemple 1.27

Teorema 1.28. *(Derks i Gilles, 1995): Sigui $N \in \mathcal{N}$, per a tot joc cooperatiu en forma característica (N, v) es compleix que $\mathcal{C}(N, v) \subseteq \mathcal{W}(N, v)$* [12].

Demostració. Si $\mathcal{C}(N, v) = \emptyset$ aleshores $\mathcal{C}(N, v) \subseteq \mathcal{W}(N, v)$.
D'altra banda si el Core és no buit fem-la per reducció a l'absurd. Suposem que existeix un $x \in \mathcal{C}(N, v)$ tal que $x \notin \mathcal{W}(N, v)$. Al ser el conjunt de Weber tancat, afitat i convex de $\mathbb{R}^n$ i x un punt que no hi pertany, pel teorema de l'hiperplà separador [14] ha d'existir un hiperpla que els separi de forma estricta. Formalment existirà $h \in \mathbb{R}^n$ tal que per a tota ordenació $\psi \in \mathcal{S}_N$ dels jugadors:

$$x \cdot h < m^{\psi}(v) \cdot h.$$

Sigui $\psi^* = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathcal{S}_N$ l'ordre dels jugadors tal que $h_{i_1} \geq \cdots \geq h_{i_n}$.

$$\begin{aligned} m_{i_1}^{\psi^*}(v) &= v(i_1) \\ m_{i_2}^{\psi^*}(v) &= v(i_1 i_2) - v(i_1) \\ &\vdots \\ m_{i_n}^{\psi^*}(v) &= v(N) - v(i_1 \ldots i_{n-1}) \end{aligned}$$

De manera que el producte escalar $m^{\psi^*} \cdot h$ quedarà com:

$$m^{\psi^*}(v) \cdot h = h_{i_1} v(i_1) + h_{i_2} \left(v(i_1 i_2) - v(i_1) \right) + \cdots + h_{i_n} \left(v(N) - v(i_1 \ldots i_{n-1}) \right) =$$

$$(h_{i_1} - h_{i_2}) v(i_1) + \cdots + (h_{i_{n-1}} - h_{i_n}) v(i_1 \ldots i_{n-1}) + h_{i_n} v(N)$$

Donat que $x \in \mathcal{C}(N, v)$ es compleixen les desigualtats següents per a tot $k = 1, 2, \ldots, n-1$:

$$\sum_{j=1}^{k} x_{i_j} \geq v(i_1 \ldots i_k)$$

I per a $k = n$ tenim la condició $\sum_{j=1}^{n} x_{i_j} = x(N) = v(N)$.
Substituint aquestes desigualtats en el producte escalar anterior, i tenint en compte que $h_{i_k} - h_{i_{k+1}} \geq 0$ trobem que:

$$m^{\psi^*}(v) \cdot h \leq (h_{i_1} - h_{i_2}) x_{i_1} + \cdots + (h_{i_{n-1}} - h_{i_n})(x_{i_1} + \cdots + x_{i_{n-1}}) + h_{i_n} x(N) =$$

$$\sum_{j=1}^{n} h_{i_j} x_{i_j} = h \cdot x.$$

Aquesta desigualtat entra en contradicció amb la desigualat $x \cdot h < m^{\psi}(v) \cdot h$. Això demostra el resultat. $\square$

Tot seguit veurem una propietat interessant dels jocs convexos. En aquesta classe de jocs el Core i el conjunt de Weber coincideixen tal i com demostrarem a continuació.

Teorema 1.29. *(Derks i Gilles, 1995): Sigui $N \in \mathcal{N}$ i (N, v) un joc cooperatiu en forma característica. (N, v) és convex si i només si $\mathcal{C}(N, v) = \mathcal{W}(N, v)$* [12].

Demostració. Ja hem vist que el Core és sempre un subconjunt del Weber de manera que veurem que per un joc convex l'altre inclusió també es compleix. Serà suficient veure que per a tota ordenació $\psi \in \mathcal{S}_N$ el vector de contribucions marginals $m^{\psi}(v) \in \mathcal{C}(N, v)$.
Prenem una ordenació $\psi = (i_1, \dots, i_n)$ qualsevol i una coalició arbitrària $S \subseteq N$. Aquesta coalició sempre la podem representar per $S = \{j_1, \dots, j_s\}$. On j_1 és el primer jugador de la coalició respecte l'ordenació ψ, seguint així fins al jugador j_s és el darrer de la coalició segons l'ordenació donada. Per convexitat tindrem que les contribucions marginals de cada jugador són creixents i per tant:

$$\begin{aligned}
& m^{\psi}_{j_1}(v) \geq v(j_1) \\
& m^{\psi}_{j_2}(v) \geq v(j_1 j_2) - v(j_1) \\
& \qquad \vdots \\
& m^{\psi}_{j_s}(v) \geq v(S) - v(i_1 \dots i_s)
\end{aligned}$$

Sumant tot:

$$m^{\psi}_{j_1}(v) + \dots + m^{\psi}_{j_s}(v) = m^{\psi}(S) \geq v(S).$$

De manera que $m^{\psi}(v) \in \mathcal{C}(N, v)$ tal i com volíem veure.
D'altra banda veiem que si el Core i el conjunt de Weber coincideixen aleshores el joc és convex. Veurem que les contribucions marginals de cada jugador són creixents. Prenem $i \in N$, $S = \{i_1, \dots, i_s\} \subseteq T = \{i_1, \dots, i_s, i_{s+1}, \dots, i_t\} \subseteq N \setminus \{i\}$. Prenem l'ordenació:

$$\psi = (i_1, \dots, i_s, i_{s+1}, \dots, i_t, i, \dots).$$

On hem posat primer els jugadors de S, després els que completen T, després i i finalment tots els jugadors restants. Aleshores per hipòtesis el vector de contribucions marginals $m^{\psi}(v)$ és del Core per tant es compleix que:

$$m^{\psi}(v)(S \cup \{i\}) = \sum_{j=1}^{s} m^{\psi}_{i_j}(v) + m^{\psi}_{i}(v) \geq v(S \cup \{i\}).$$

On $m_i^\psi(v) = v(i_1 \dots i_t i) - v(i_1 \dots i_t) = v(T \cup \{i\}) - v(T)$. A més tenint en compte que:

$$\sum_{j=1}^{s} m_{i_j}^\psi(v) \geq v(S),$$

i substituint a la desigualtat anterior obtindrem que:

$$v(T \cup \{i\}) - v(T) \geq v(S \cup \{i\}) - v(S)$$

Per tant el joc és convex i hem provat el Teorema. $\square$

Una conseqüència immediata del Teorema 1.29 és que el Core d'un joc convex és molt fàcil de descriure ja que si $(N, v) \in \Gamma^N_{con}$ aleshores:

$$\mathcal{C}(N, v) = convex\{m^\psi(v) \mid \psi \in \mathcal{S}_N\}.$$

1.4 Solucions puntuals: El valor de Shapley i el Nucleous

En la recerca de solucions de jocs cooperatius han estat importants dos tipus de metodologia, la primera, ja estudiada en seccions anteriors, té un caire reduccionista ja que es basa en l'eliminació de distribucions o de vectors de pagament dins un conjunt ampli segons certs criteris. Aquest seria el cas del Core, que partint del conjunt de preeimputacions l'anem reduint basant-nos en propietats de racionalitat fins a trobar el Core. Altres solucions d'aquest tipus serien solucions de *Von-Neumann* i *Morgenstern* (1944), els anomenats *bargaining sets* (*Aumann* i *Maschler* (1964)) i els *stable sets* de *Von-Neumann* .
Un altre tipus de solució fa servir una metodologia constructivista, en aquest cas definim un seguit de criteris o propietats que desitgem per una solució (axiomes) i definim un repartiment únic que compleixi aquestes propietats. En aquest apartat definirem dues d'aquestes solucions, el valor de Shapley i el Nucleous ja que estaran estretament relacionades amb regles de repartiment en problemes de Bancarrota, la *Random Arrival Rule* i la *Talmud rule* respectivament.

Definició 1.30. Sigui $N \in \mathcal{N}$ i (N, v) un joc cooperatiu. Anomenem $\mathcal{F}(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x(N) \leq v(N)\}$ el conjunt de vectors de pagament factibles. Una **solució** definida en una classe $\mathcal{A} \subset \Gamma$ és una correspondència σ que assigna a cada joc $(N, v) \in \mathcal{A}$ un subconjunt de $\mathcal{F}(N, v)$.
Una solució és **puntual** si per a qualssevol joc $(N, v) \in \mathcal{A}$, $|\sigma(N, v)| = 1$. És a dir, una solució és puntual si per a tot joc $(N, v) \in \mathcal{A}$, $\sigma(N, v) = (\sigma_1(N, v), \dots, \sigma_n(N, v))$.

1.4.1 Valor de Shapley

D'entre les solucions puntuals, potser la més ben coneguda és el valor de Shapley (1953) [19]. La idea central del valor de Shapley és que els agents han de ser recompensats segons les seves contribucions marginals.

Definició 1.31. Sigui $N \in \mathcal{N}$ i (N, v) un joc cooperatiu en forma característica. El **valor de Shapley** del joc és la solució puntual $\phi(v) = (\phi_1(v), \ldots, \phi_n(v))$ definida com:

$$\phi(N, v) := \frac{1}{n!} \sum_{\psi \in \mathcal{S}_N} m^{\psi}(v).$$

D'altra banda, component a component:

$$\phi_i(N, v) := \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \left(v(S \cup \{i\}) - v(S) \right).$$

On el factor $s!(n-s-1)!$ és el nombre de vegades que el jugador i s'ajunta a una coalició S que no el conté quan tenim en compte els $n!$ possibles ordres dels jugadors.

Exemple 1.32. Recordem que en l'Exemple 1.27 els vectors marginals eren:

$$\begin{array}{ll} m^{\psi_1}(v) = (0, 2, 1); & m^{\psi_2}(v) = (0, 2, 1) \\ m^{\psi_3}(v) = (2, 0, 1); & m^{\psi_1}(v) = (1, 0, 2) \\ m^{\psi_5}(v) = (1, 2, 0); & m^{\psi_1}(v) = (1, 2, 0) \end{array}$$

Aleshores per aquest joc el valor de Shapley serà:

$$\phi(N, v) = \frac{1}{n!} \sum_{\psi \in \mathcal{S}_N} m^{\psi}(v) = \frac{1}{3!}(5, 8, 5)$$

La justificació axiomàtica del valor de Shapley pot ser efectuada amb un conjunt de diferents axiomes o propietats. Aquí mostrarem la justificació que va donar el propi Shapley quan va introduir aquesta solució puntual. Sigui σ una solució puntual definida en una classe $\mathcal{A} \subseteq \Gamma$. Direm que σ compleix:

Axioma 1. Eficiència: Si per a tot joc $(N, v) \in \mathcal{A}$:

$$\sum_{i \in N} \sigma_i(N, v) = v(N).$$

Axioma 2. Simetria: Si per a tot joc $(N, v) \in \mathcal{A}$, si per tota parella $i, j \in N$ de jugadors (diferents) substituts, és a dir: per a tot $S \subseteq N \setminus \{i, j\}$, $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$, el seu pagament és el mateix:

$$\sigma_i(N, v) = \sigma_j(N, v).$$

És a dir, els jugadors substituts han d'obtenir el mateix pagament.

Axioma 3. Tractament del jugador fals: Direm que $i \in N$ és un jugador fals en el joc $(N, v) \in \mathcal{A}$ si $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ per a tota coalició $S \subseteq N \setminus \{i\}$, és a dir, és un jugador que no aporta rés a cap coalició. Aleshores σ compleix l'axioma del tractament del jugador fals si per a tot jugador fals $i \in N$:

$$\sigma_i(N, v) = 0.$$

És a dir, els jugadors falsos no han d'obtenir res.

Axioma 4. Additivitat: Si per a qualssevol $(N, v_1), (N, v_2) \in \mathcal{A}$, i per a tot $\lambda \in \mathbb{R}$, σ és invariant a qualsevol descomposició arbitrària del joc. Formalment, si $(N, v_1 + v_2) \in \mathcal{A}$:

$$\sigma(N, v_1 + v_2) = \sigma(N, v_1) + \sigma(N, v_2).$$

Si $(N, \lambda v) \in \mathcal{A}$:

$$\sigma(N, \lambda v) = \lambda\sigma(N, \lambda v).$$

És a dir, si un projecte es pot obtenir de l'addició de dos projectes més petits ha de ser invariant aplicar la solució al projecte gran o sumar les solucions dels projectes petits.

A continuació demostrarem que el valor de Shapley és la única solució puntual que compleix els quatre axiomes anteriors a la vegada.

Teorema 1.33. *(Shapley 1953): El valor de Shapley és l'única solució que verifica els axiomes d'eficiència, simetria, tractament del jugador fals i additivitat.*

Per poder donar una demostració d'aquest teorema necessitem definir què són els jocs d'unanimitat. Els definirem com aquells jocs simples (els valors de les coalicions prenen valors 0 o 1, sent 1 el valor de la gran coalició) i monòtons que posseeixen una única coalició guanyadora minimal. Formalment donat $N = \{1, \ldots, n\}$ i una coalició $T \subseteq N$ no buida, el **joc d'unanimitat** associat a T és:

$$u_T(S) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad T \subseteq S \\ 0 & \text{si} \quad T \subseteq S \end{cases}$$

A continuació enunciarem un teorema que no demostrarem ja que no forma part del nostre objectiu però és necessari per la demostració del Teorema 1.33. Tot i així la demostració del següent teorema es pot trobar a [12].

Teorema 1.34. *Es compleixen els quatre punts següents:*

- $(\Gamma^N, +, \cdot, \mathbb{R})$ *és un espai vectorial de dimensió* $2^n - 1$.
- *Els jocs d'unanimitat* $\{u_T\}_{\emptyset \neq T \subseteq N}$ *en formen una base.*
- *Donat un joc* (N, v)*, les coordenades de* v *en la base dels jocs d'unanimitat vénen determinades per:*

$$\lambda_T = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} (-1)^{t-s} v(S), \ \emptyset \neq T \subseteq N$$

- *Donades les coordenades d'un joc cooperatiu, podem recuperar el valor d'una coalició* $S \subseteq N$ *com:*

$$v(S) = \sum_{T \subseteq N} \lambda_T$$

Demostració. Demostrem el Teorema 1.33 (*Shapley 1953*).

Comencem veient que el valor de Shapley compleix els quatre axiomes i posteriorment veurem que aquesta és la única solució que els compleix:

- Eficiència: El valor de Shapley compleix l'eficiència perquè és la mitjana dels vectors de contribucions marginals que són eficients.
- Tractament del jugador fals: El valor de Shapley compleix el tractament del jugador fals perquè les contribucions marginals d'un jugador fals són zero.
- Simetria: El valor de Shapley també compleix la simetria ja que les contribucions marginals de jugadors substituts són iguals.
- Additivitat: Sigui $(N, v) = (N, v_1 + v_2)$ aleshores per a tot $i \in N$ i $S \subseteq N \setminus \{i\}$:

  $$v(S \cup \{i\}) - v(S) = (v_1(S \cup \{i\}) - v_1(S)) + (v_2(S \cup \{i\}) - v_2(S))$$

  Per tant de la definició del valor de Shapley:

  $$\phi_i(N, v) := \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S)) = \phi_i(N, v_1) + \phi_i(N, v_2).$$

  Per tant el valor de Shapley també compleix l'additivitat.

Veurem ara que el valor de Shapley és la única solució puntual que compleix els quatre axiomes. Sigui σ una solució que satisfaci els quatre axiomes d'eficiència, simetria, tractament del jugador fals i additivitat.
Sigui $(N, v) \in \Gamma$, pel Teorema 1.34 sabem que tot joc cooperatiu es descompon de forma única com a combinació lineal de jocs d'unanimitat:

$$v = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} \lambda_T u_T.$$

Per additivitat:

$$\sigma(N, v) = \sigma\left(N, \sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} \lambda_T u_T\right) = \sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} \sigma\left(N, \lambda_T u_T\right).$$

Per tant la solució $\sigma(N, v)$ quedarà totalment determinada si coneixem $\sigma\left(N, \lambda_T u_T\right)$. Analitzant aquests jocs veiem que qualsevol parella de jugadors dins la coalició T són jugadors substituts, és a dir, que per a tota $S \subseteq N \setminus \{i, j\}$:

$$(\lambda_T u_T)(S \cup \{i\}) = (\lambda_T u_T)(S \cup \{j\})$$

Per tant, l'axioma de simetria ens diu que tota parella de jugadors diferents $i, j \in T$ rebran el mateix pagament, $\sigma_i\left(N, \lambda_T u_T\right) = \sigma_j\left(N, \lambda_T u_T\right)$, a més per la definició de jocs d'unanimitat tots els jugadors que no són de T són jugadors falsos del joc $(N, \lambda_T u_T)$, és a dir si $i \notin T$ i $S \subseteq N \setminus \{i\}$ aleshores:

$$(\lambda_T u_T)(S \cup \{i\}) = (\lambda_T u_T)(S).$$

Per l'axioma del tractament del jugador fals, $\sigma_i(N, \lambda_T u_T) = 0, \ \forall i \notin T$.
De moment hem vist que σ reparteix el mateix per tots els jugadors de la coalició T i zero als que no hi pertanyen. L'eficiència $(\lambda_T u_T)(N) = \lambda_T$ determina la solució única pels jocs d'unanimitat:

$$\sigma_i(N, \lambda_T u_T) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_T}{t} & \text{si} \quad i \in T \\ 0 & \text{si} \quad i \notin T \end{cases}$$

Finalment l'axioma de l'additivitat ens acabarà donant la forma única de la solució $\sigma(N, v)$ per a qualsevol joc cooperatiu que compleix els quatre axiomes:

$$\sigma(N, v) = \sigma\left(N, \sum_{\emptyset \neq T \subseteq N} \lambda_T u_T\right).$$

Que component a component és:

$$\sigma_i(N, v) = \sum_{T \subseteq N \ | \ i \in T} \frac{\lambda_T}{t}.$$

Com que el valor de Shapley compleix els quatre axiomes i hem vist que una solució que els compleixi està únicament determinada, queda demostrat que el valor de Shapley és la única solució puntual que els compleix.

□

Si ens restringim a la classe de jocs convexos , Γ_{con}, la caracterització axiomàtica també és manté. Per això és crucial adonar-nos que els jocs d'unanimitat són convexos. A continuació provem que els únics jocs simples i convexos són els jocs d'unanimitat. Nosaltres veurem la part de convexitat.

Proposició 1.35. *Sigui $N \in \mathcal{N}$. Els jocs d'unanimitat, $\{u_T\}_{\emptyset \neq T \subseteq N}$ són jocs convexos.*

Demostració. Sigui $N \in \mathcal{N}$ i $T \subseteq N$. Donat $i \in N$ i $S_1 \subseteq S_2 \subseteq N \setminus \{i\}$ volem veure que:

$$u_T(S_1 \cup \{i\}) - u_T(S_1) \leq u_T(S_2 \cup \{i\}) - u_T(S_2).$$

De la mateixa definició de joc d'unanimitat és pot veure que aquests jocs són monòtons, per tant pels jocs d'unanimitat les contribucions marginals dels jugadors són o zero ó u.
Si $u_T(S_1 \cup \{i\}) - u_T(S_1) = 0$ ja hem acabat, d'altra banda, si $u_T(S_1 \cup \{i\}) - u_T(S_1) = 1$ aleshores $u_t(S_1 \cup \{i\}) = 1$ i $u_T(S_1) = 0$, implicant que $T \subseteq S_1 \cup \{i\}$ i $T \nsubseteq S_1$, forçant $i \in T$. En aquesta situació com que $S_2 \subseteq N \setminus \{i\}$ s'ha de complir que $T \nsubseteq S_2$. Com que $S_1 \subset S_2$ s'ha de complir que $u_T(S_2 \cup \{i\}) = 1$ i $u_T(S_2) = 1$. Així demostrem la proposició. □

Podem demostrar a continuació que el valor de Shapley en jocs convexos és una solució puntual altament estable, és a dir, pertany al Core del joc.

Proposició 1.36. *Sigui $N \in \mathcal{N}$ i (N, v) un joc cooperatiu en forma característica. Si (N, v) és convex aleshores $\phi(N, v) \in \mathcal{C}(N, v)$.*

Demostració. Com que $(N, v) \in \Gamma^N_{con}$, pel Teorema 1.29 es satisfarà que $\mathcal{C}(N, v) = \mathcal{W}(N, v)$. Com que:

$$\mathcal{W}(N, v) = convex\{m^{\psi}(v) \mid \psi \in \mathcal{S}_N\},$$

i

$$\phi(N, v) := \frac{1}{n!} \sum_{\psi \in \mathcal{S}_N} m^{\psi}(v),$$

concloem que $\phi(N, v) \in \mathcal{C}(N, v)$. □

Aquest resultat és de gran interès ja que com hem comentat el Core és un conjunt altament estable on els jugadors no tenen motivacions per trencar la cooperació. Que el valor de Shapley caigui al Core en aquesta classe de jocs ens proporciona una molt bona solució.

Observació 1.37. Recordem que en el cas de jocs convexos, cada vector de contribucions marginals és un extrem del Core, de manera que al ser el valor de Shapley la seva mitjana aquest ocuparà una posició central en el Core sempre i quan els vectors de contribucions marginals siguin tots diferents.

Exemple 1.38. Sigui (N, v) amb $N = \{1, 2, 3\}$ un joc cooperatiu tal que $v(1) = v(2) = v(3) = v(23) = 0$, $v(12) = v(13) = v(123) = 1$. Clarament aquest joc no és convex i $\mathcal{C}(N, v) = \{(1, 0, 0)\}$. en aquest cas el valor de Shapley del joc val:

$$\phi(N, v) = \frac{1}{6}(4, 1, 1).$$

El Core ens diu que l'únic jugador que ha de rebre alguna cosa és el l'agent 1, ja que sense ella cap coalició té valor. En canvi el valor de Shapley recull la idea que, tot i que l'agent 1 és més important, també són necessaris els agents 2 i 3 per poder obtenir algun valor positiu.

1.4.2 El Nucleous

Com hem vist al apartat anterior, si el joc és convex el valor de Shapley és dins del Core. Si el joc no és convex podria ser que aquest valor no fos ni una imputació. Ara ens centrarem en la descripció del *Nucleous* d'un joc cooperatiu, introduït per *Schmeidler* al 1969 [18], que té la idea de seleccionar la imputació que dóna lloc a les menors queixes per part de les coalicions. Aquest no és fàcil de calcular en general, com ho és el valor de Shapley, i generalment es calcula utilitzant programació lineal o pel criteri de Kohlberg. En contraposició al valor de Shapley, el Nucleous sempre seleccionarà un punt del Core del joc.

Definició 1.39. Sigui $N \in \mathcal{N}$, (N, v) un joc cooperatiu i una distribució de pagaments eficient i individualment racional $x \in I(N, v)$. El **excés** o queixa d'una coalició $S \subseteq N$ respecte la distribuició x és $e(S, x) := v(S) - x(S)$. Anomenarem **vector d'excessos** ordenats al vector de 2^n components definit per $\Theta(x) = (e(S, x))_{S \in 2^N}$ ordenat de forma decreixent $\Theta_k(x) \geq \Theta_{k+1}$ per a tota $k = 1, \ldots, 2^n$.

Observem que aquest vector és fa increïblement gran a mesura que el nombre de jugadors augmenta ja que hem de tenir en compte totes les possibles coalicions que es poden formar.

Observació 1.40. Sigui $N \in \mathcal{N}$ i (N, v) un joc cooperatiu, si $x \in \mathcal{C}(N, v)$, aleshores $e(S, x) \leq 0$.

Notació 1. L'ordre lexicogràfic $\geq_{lex}$ de $\mathbb{R}^n$: Donats $x, y \in \mathbb{R}^n$ aleshores: $x \geq_{lex} y$ si $x = y$ o existeix $1 \leq t \leq n$ tal que $x_j = y_j$ per $1 \leq j < t$ i $x_t > y_t$.

Definició 1.41. Sigui $N \in \mathcal{N}$ i (N, v) un joc cooperatiu, aleshores es defineix el **Nucleous** del joc com el conjunt:

$$\mathcal{N}(N, v) = \{x \in I(N, v) |\ \Theta(x) \leq_{lex} \Theta(y),\ \forall y \in I(N, v)\}$$

Si prenem com a referència el conjunt de les preeimputacions enlloc de les imputacions el conjunt s'anomena *prenucleous*.

Per tant el Nucleous selecciona aquelles imputacions que minimitzen el major grau d'insatisfacció. Volem veure ara que aquest conjunt que hem definit existeix, i de fet veurem també que és únic.

Teorema 1.42. *(Schmeidler 1969): Sigui (N, v) un joc cooperatiu essencial. Aleshores $\mathcal{N}(N, v)$ existeix i és únic.*

Demostració. Recordem la definició de Nucleous:

$$\mathcal{N}(N, v) = \{x \in I(N, v) |\ \Theta(x) \leq_{lex} \Theta(y),\ \forall y \in I(N, v)\}$$

Per a cada coalició $S_i \subseteq N$ i per a $x \in I(N, v)$ definim la funció sobre $I(N, v)$:

$$l_i(x) := e(S_i, x).$$

Aquestes funcions són clarament lineals en les coordenades de x. Ara considerem:

$$\theta_1(x) := \max\{l_1(x), l_2(x), \ldots, l_{2^n}(x)\}.$$

Com que (N, v) és essencial, per definició el conjunt de les imputacions és no buit, a més a més aquest és un conjunt compacte i convex en $\mathbb{R}^n$. La funció $\theta_1(x)$ és un màxim de funcions contínua, per tant també és contínua; pel teorema de Weierstrass existirà un mínim de $\theta_1(x)$. Donat que $I(N, v)$ és convex i compacte, pel teorema Local-Global de les funcions convexes [14], aquest mínim s'assolirà en un conjunt Z^1 no buit, convex i compacte.

A més el valor que pren $\theta_1(x)$ sobre Z^1 és constant, i hi ha d'haver com a mínim una funció $l_i(x)$ que sigui constant sobre Z^1. Al contrari, si suposem ara que k de les 2^n funcions $l_i(x)$ assoleixen el mínim $\theta_1(x)$ i cap d'elles és constant arribarem a una contradicció. Suposem que són les k primeres i si no ho són les reordenem. Aleshores per a tota $i = 1, \ldots, k$ existeix $z_i \in Z^1$ tal que $l_i(z_i) > \min_{x \in I(N,v)} \theta_1(x)$. A més a més si $i \neq j$ aleshores $l_i(z_j) \geq \min_{x \in I(N,v)} \theta_1(x)$. Prenent el punt $z = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} z_i \in Z^1$ (ja que Z^1 és convex), donat que les funcions són lineals tindríem $l_i(z) > \min_{x \in I(N,v)} \theta_1(x)$ per a tot i, entrant amb contradicció amb $z \in Z^1$.

En tot cas, existeix alguna funció $l_i(x)$ que assoleix el mínim de θ_1 i que és constant en Z^1. Anomenem aquesta funció $l_{i_1}(x)$ i construïm $\theta_2(x)$ igual que abans però suprimint $l_{i_1}(x)$. Seguint el mateix raonament, si ara minimitzem la funció $\theta_2(x)$ sobre Z^1, obtindrem que el conjunt d'òptims és $Z^2 \subseteq Z^1$ no buit, compacte i convex, i que hi ha com a mínim una funció $l_{i_2}(x)$ constant sobre Z^2. Aplicant aquest procediment $2^n - 1$ cops obtindrem un conjunt Z^* no buit, convex i compacte tal que:

$$Z^* \subseteq \cdots \subseteq Z^1 \subseteq I(N, v).$$

Veurem que $Z* = \mathcal{N}(N, v)$. Primer de tot és prou clar que aquest conjunt compta d'un únic element, ja que per com hem definit les funcions $\theta_i(x)$), si existissin dos elements en aquest conjunt coincidirien tots els excessos (també els de les coalicions individuals) i per tant serien el mateix punt.

Per acabar, per a tot $z \in Z^*$ i tot k es verifica que $\theta_k(z) < \theta_k(y)$ per a tot $y \in Z^k \setminus Z^{k+1}$ ($Z^0 := I(N, v)$). Per tant $\Theta(z) \leq_{lex} \Theta(y)$ per a tot $y \in Z^0 = I(N, v)$. Aleshores $\mathcal{N}(N, v) = Z^*$ tal i com volíem veure. □

Corol·lari 1.43. *Una condició necessària i suficient perquè el Nucleous existeixi i sigui únic és que* $\sum_{i \in N} v(i) \leq v(N)$.

Demostració. Veure proposició 1.9. □

Proposició 1.44. *Sigui* $N \in \mathcal{N}$ *i* (N, v) *un joc cooperatiu, si* $\mathcal{C}(N, v) \neq \emptyset$ *aleshores el Nucleous és dins del Core. En particular, si el Core és unitari aleshores el Core i el Nucleous coincideixen.*

Demostració. Suposem que:

$$\mathcal{C}(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^N |\ x(N) = v(N),\ x(S) \geq v(S)\ \forall S \subseteq N\} \neq \emptyset$$

Per l'observació 1.40 si $x \in \mathcal{C}(N, v)$ aleshores $e(S, x) \leq 0$ per a tota coalició. Aquest fet implica que $\Theta(x)$ té totes les components menors o iguals a zero, en concret $\Theta_1(x) = 0$. Sigui $y \in I(N, v) \setminus \mathcal{C}(N, v)$, existirà com a mínim $S' \in 2^N$ tal que $x(S') < v(S')$. Aleshores $e(S', y) > 0$ de manera que en particular $\Theta_1(y) > 0$. Per tant hem vist que per a tota $x \in \mathcal{C}(N, v)$ i per a tota $y \in I(N, v) \setminus \mathcal{C}(N, v)$, $\Theta(x) \leq_{lex} \Theta(y)$ i per tant que $\mathcal{N}(N, v) \subseteq \mathcal{C}(N, v)$.

Ara, si el Core és un conjunt amb un únic element, com ja hem vist que el Nucleous és únic, és evident que coincidiran. □

1.4.3 El Kernel i el Prekernel

En aquest últim apartat sobre teoria de jocs cooperatius volem introduir dos conceptes ja que els necessitarem més endavant per demostrar resultats importants, el Kernel i el Prekernel. Veurem que per un joc convex el Prekernel d'un joc és un únic punt i que aquest és el Nucleous.

Definició 1.45. Sigui $N \in \mathcal{N}$ i siguin $k, l \in N$ jugadors diferents i $x \in \mathbb{R}^n$ un vector de pagaments d'un joc cooperatiu (N, v). Definim l'**excés màxim** de k sobre l com:

$$s_{kl}(x) = \max\{e(S, x) \mid k \in S,\ l \notin S\} = \max\{v(S) - x(S) \mid k \in S,\ l \notin S\}.$$

Definició 1.46. Sigui $N \in \mathcal{N}$, el **Prekernel** d'un joc cooperatiu (N, v) es defineix com el conjunt de vectors de pagament eficients o Pareto-òptims que compleixen $s_{kl}(x) = s_{lk}(x)$ per a tota parella de jugadors $k, l \in N$ diferents.

$$\mathcal{PK}(N, v) = \{x \in PI(N, v) \mid s_{kl}(x) = s_{lk}(x),\ \forall k, l \in N,\ k \neq l\}.$$

Definició 1.47. Sigui $N \in \mathcal{N}$, el **Kernel** d'un joc cooperatiu (N, v) es defineix com:

$$\mathcal{K}(N, v) = \{x \in I(N, v) \mid s_{kl}(x) \geq s_{lk}(x)\ \vee\ x_k = v(k)\}$$

Per a tots $k, l \in N$ diferents. Observem que aquesta definició és equivalent a dir que una imputació és del Kernel si per a tot parell de jugadors $k, l \in N$ diferents tals que $s_{kl}(x) > s_{lk}(x)$, aleshores $x_l = v(l)$.

A continuació donarem un seguit de resultats els quals no demostrarem ja que són resultats coneguts que no formen part del bloc temàtic del treball. Aquests propers resultats els haurem d'utilitzar per poder demostrar relacions entre el Nucleous dels jocs cooperatius associats als problemes de bancarrota i les pròpies solucions d'aquests problemes fora de la teoria de jocs.

Teorema 1.48. *Sigui $N \in \mathcal{N}$ i sigui (N, v) un joc cooperatiu 0-monòton, aleshores:*

$$\mathcal{PK}(N, v) = \mathcal{K}(N, v)$$

Demostració. Teorema demostrat per *Maschler*, *Peleg* i *Shapley* el 1979 [16]. □

A continuació presentem dos teoremes que ens relacionen el concepte de Kernel i Prekernel amb el concepte ja explicat de Nucleous d'un joc cooperatiu.

Teorema 1.49. *El Prekernel i el Kernel d'un joc cooperatiu convex consisteixen en un únic punt.*

Demostració. Teorema demostrat per *Maschler*, *Peleg* i *Shapley* el 1979 [16]. □

Teorema 1.50. *El Kernel d'un joc convex coincideix amb el Nucleous del joc.*

Demostració. Schmeidler el 1969 prova que el Nucleous d'un joc sempre està dins del Kernel del joc [18]. □

2 Jocs de Bancarrota o Claims problems

"Two hold a garment... if one of them says: It is all mine, and the other says: half of it is mine,... the former receives three quarters and the latter receives one quarter"
Contested Garment problem: Talmud de Babilònia, Vol. 23, Capítol 1, I.Epstein, ed.,1935.

"Jacob died and his son Reuben produced a deed duly witnessed that Jacob willed to him his entire estate on his death, son Simeon also produced a deed that his father willed to him half of the estate, son Levi produced a deed giving him one third and son Judah brought forth a deed giving one quarter. All of them bear the same date."
Rabí Abraham Ibn Ezra 1140 A.D.

El Talmud jueu forma la base de de la llei civil, criminal i religiosa jueva, i entre els seus escrits es troben problemes d'herència o similars com els anteriors, que han servit d'inspiració en l'estudi dels problemes sobre els que ens basarem en aquesta segona part del treball: els problemes de bancarrota o els *claims problems*.

En aquest primer apartat en farem un anàlisi fora de la teoria de jocs, presentarem un seguit de regles o formes de repartir un bé homogeni (com ara diners) en aquesta classe de problemes, on la suma total de totes les peticions és superior a la quantitat que hi ha per repartir. Basarem l'explicació en el treball realizat per *William Thomson* i publicat al *Mathematical Social Sciences* l'any 2003 i en les aportacions anterior de *Barry O'Neill* (1982), *Robert J. Aumann* i *Michael Maschler* (1985).

2.1 Definició i Regles de repartiment

Sigui $\mathcal{N} = \{N \subseteq \mathbb{N} \mid |N| < \infty\}$ el conjunt de tots els subconjunts finits dels nombres naturals, en els nostre cas, els elements d'$\mathcal{N}$ seran conjunts de demandants. Sigui $N = \{1, \ldots, n\} \in \mathcal{N}$ un conjunt de demandants que tenen demandes $c_i \geq 0$ sobre una quantitat $E \geq 0$. Anomenem $c = (c_i)_{i \in N}$ el vector de demandes. En general utilitzarem la notació $c(S) = \sum_{i \in S} c_i$ per a $S \subseteq N$. Per a tot vector $x \in \mathbb{R}^n$, el vector $x_S \in \mathbb{R}^s$ és el vector que manté les components del vector x només pels demandants d'S, i.e., si $N = \{1, 2, 3\}$ i $x = (1, 0, 5)$, si $S = \{1, 3\}$, aleshores $x_S = (1, 5)$.

Definició 2.1. Un ***claims problem*** o un problema de bancarrota és una terna ordenada $(N, c, E) \in \mathcal{N} \times \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}_+$ tal que $\sum_{i \in N} c_i \geq E$. Denominem per $\mathcal{C}$ el conjunt de tots els problemes de bancarrota i $\mathcal{C}^N$ el conjunt de tots el problemes d'aquesta classe amb conjunt de jugadors N. [2]

[2] A partir d'ara no distingirem entre (N, c, E) i (c, E) per comoditat, a no ser que s'indiqui el contrari.

Notació 2. Usarem desigualtats en vectors: siguin $x, y \in \mathbb{R}^n$ un parell de vectors, $x \geqq y$ significa $x_i \geq y_i \; \forall i \in \{1, \ldots, n\}$; $x \geq y$ significa $x \geqq y$ i $x \neq y$; $x > y$ significa $x_i > y_i \; \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

L'objectiu és fer una proposta o recomanació de divisió de la quantitat E disponible entre tots els demandants per a qualsevol $(c, E) \in \mathcal{C}$. D'aquesta manera sorgeixen les anomenades regles de repartiment, que per a cada problema ens proposa una divisió o repartiment de la quantitat E.

Definició 2.2. Sigui $(c, E) \in \mathcal{C}$ un problema de bancarrota, una **regla de repartiment** és una funció:

$$\mathcal{R} : \mathcal{C} \longrightarrow \bigcup_{N \in \mathcal{N}} \mathbb{R}^{|N|}$$

que assigna a cada problema de bancarrota $(c, E) \in \mathbb{R}^{|N|}_+ \times \mathbb{R}_+$ un repartiment $\mathcal{R}(c, E) \in \mathbb{R}^{|N|}_+$ tal que ningú rep més que la seva demanda ni menys de zero: $0 \leqq \mathcal{R}(c, E) \leqq c$ i que exhaureix la quantitat a repartir $\sum_{i \in N} \mathcal{R}(c, E)_i = E$. A vegades anomenarem el vector que ens assigna una regla com un vector de pagaments.

Tot seguit veurem un seguit de regles de repartiment, en concret en veurem sis: la *Contested Garment rule* o "concedir i dividir", la regla proporcional, la *constrained equal awards*, la *constrained equal losses*, la regla del Talmud i finalment la *random arrival*.

La primera no és pròpiament una regla ja que només proposa un repartiment per al cas de dos jugadors però és de suma importància i deu el seu nom del problema del Talmud de Babilònia, Vol. 23, Capítol 1, I.Epstein, ed.,1935. citat al principi d'aquest capítol.

Definició 2.3. Per $|N| = 2$, la ***Contested Garment rule (CG)*** o concedir i dividir assigna a cada demandant la quantitat que l'altre demandant li concedeix (o zero si aquesta és negativa) i després es divideixen a parts iguals el que ha sobrat. Així, sense perdre generalitat per a tot problema de bancarrota $(c, E) \in \mathcal{C}^2$ i per $N = \{1, 2\}$, per a tot $i \in N$ definim:

$$CG_i(c, E) = (E - c_j)_+ + \frac{E - (E - c_1)_+ - (E - c_2)_+}{2}$$

On recordem que per $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta_+ \equiv \max\{\theta, 0\}$.

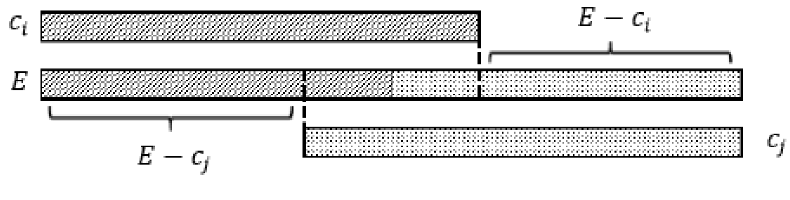

Figura 3: *Contested Garment rule*

Veient la Figura 3 la idea darrera aquesta regla de repartiment queda molt clara. Si entenem que les demandes dels dos agents tenen un mínim “solapament”sembla raonable que cada agent s’emporti la part que només demana ell i la part demanada pels dos es divideixi a parts iguals.

Veiem ara una altra interpretació gràfica d’aquesta regla. Suposem sense pèrdua de generalitat que les demandes estan ordenades en ordre creixent $c_1 \leq c_2$, òbviament quan $c_1 = c_2 > E$ aleshores ambdós demandants reben $\frac{E}{2}$. Veurem varis casos segons la quantitat a repartir va augmentant.

- Per $E \leq c_1 \leq c_2$: en aquest cas ambdós agents no cedeixen res a l’altre per tant E es divideix a parts iguals entre els dos agents. En el cas que $E = \frac{c_1}{2}$ ambdós agents acaben rebent $\frac{c_1}{2}$. Per tant a mesura que augmentem E (blau) ens movem sobre la recta $x_1 = x_2$.

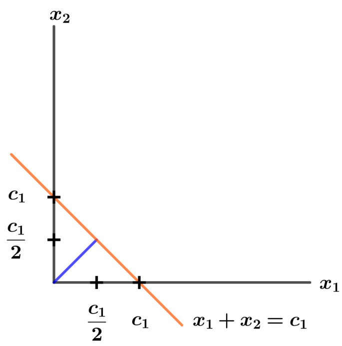

Figura 4: $E \leq c_1 \leq c_2$

- Per $c_1 \leq E \leq c_2$: En aquest cas l’agent 1 cedeix $E - c_1$ a l’agent 2 mentre que l’agent 2 no cedeix res al primer agent. De manera que ambdós agents es reparteixen $E - (E - c_1) = c_1$ a parts iguals. És a dir, qualssevol unitat addicional d’E (a partir d’$E = c_1$) és assignada al segon demandant.

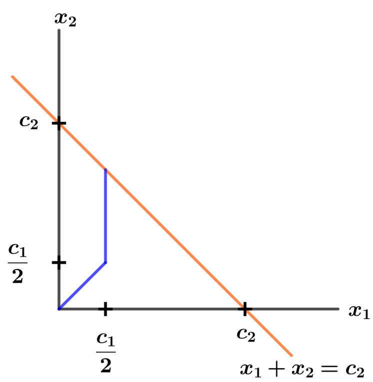

Figura 5: $c_1 \leq E \leq c_2$

- $c_2 \leq E \leq c_1 + c_2$: En aquest cas ambdós agents es cedeixen part de E. Per tant cada un rep el que l'altre li cedeix i es reparteixen $E-(E-c_1)-(E-c_2)$ a parts iguals. És a dir, qualssevol unitat addicional d'E (a partir d'$E = c_2$) és assignada a parts iguals. Evidentment, quan $E = c_1 + c_2$ aleshores $x_1 = c_1$ i $x_2 = c_2$.

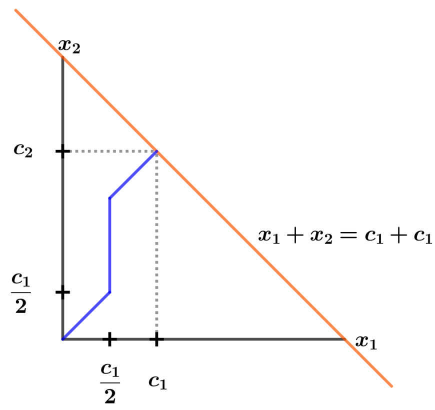

Figura 6: $c_1 \leq E \leq c_2$

Aquesta forma de veure la *contested garment rule* ens serà útil més endavant quan introduim el concepte de consistència en regles i repartiments.

A continuació presentem el que probablement és la regla més coneguda i acceptada, així com la realment utilitzada en problemes reals.

Definició 2.4. Sigui $N \in \mathcal{N}$, per cada $(c, E) \in \mathcal{C}^N$ la ***regla proporcional (P)*** selecciona:

$$P(c, E) = \lambda c.$$

On λ es tria tal que $\sum_{i \in N} \lambda c_i = E$.

Amb l'objectiu final de presentar la regla del Talmud presentem a continuació dues regles que es basen en la idea d'"igualitarisme". La primera d'elles proposa que els agents han de rebre la mateixa quantitat de E sempre i quan no superin les seves demandes. Així com la proporcionalitat és pròpia d'Aristòtil, aquesta s'atribueix a Maimònides (s. XII). Per a una discussió més acurada, recomanem *Equity* de *Peyton Young* [23].

Definició 2.5. Sigui $N \in \mathcal{N}$, per cada $(c, E) \in \mathcal{C}^N$ la ***constrained equal awards rule (CEA)*** selecciona per cada $i \in N$ el vector de pagaments:

$$CEA_i(c, E) = \min\{c_i, \lambda\}.$$

On λ es tria tal que $\sum_{i \in N} \min\{c_i, \lambda\} = E$.

La següent regla és dual [3] a la CEA, en el sentit que reparteix de forma igualitària les pèrdues o més ben dit, el que deixen de guanyar els agents.

[3]La regla dual de $\mathcal{R}$ és la regla $\mathcal{R}'$ tal que $\mathcal{R}'(c, E) = c - \mathcal{R}(c, \sum_{i \in N} c_i - E)$.

Definició 2.6. Per cada $(c, E) \in \mathcal{C}^N$ la ***constrained equal losses rule (CEL)*** selecciona per cada $i \in N$ el vector de pagaments:

$$CEL_i(c, E) = \max\{0, c_i - \lambda\}.$$

On λ es tria tal que $\sum_{i \in N} \max\{0, c_i - \lambda\} = E$.

Finalment, la regla del Talmud [20] és una combinació entre la CEA i la CEL. Si per a $(c, E) \in \mathcal{C}^N$ prenem per repartir $\frac{1}{2}\sum_{i \in N} c_i$, tothom rebria la meitat de les seves demandes. Si aquesta quantitat és més petita aplicarem la CEA i si és més gran aplicarem la CEL, en tots dos casos les demandes dels agents es divideixen per dos.

Definició 2.7. Per cada $(c, E) \in \mathcal{C}^N$ la ***regla del Talmud (T)*** selecciona per cada $i \in N$ el vector de pagaments:

$$T(c, E) = \begin{cases} CEA(\frac{c}{2}, E) & \text{si} \quad E \leq \dfrac{\sum_{i \in N} c_i}{2} \\ \frac{c}{2} + CEL(\frac{c}{2}, E - \dfrac{\sum_{i \in N} c_i}{2}) & \text{si} \quad E \geq \dfrac{\sum_{i \in N} c_i}{2} \end{cases}$$

També la podem reescriure com, per a tot $i \in N$:

$$T_i(c, E) = \begin{cases} \min\{\frac{c_i}{2}, \lambda\} & \text{si} \quad E \leq \dfrac{\sum_{i \in N} c_i}{2} \\ c_i - \min\{\frac{c_i}{2}, \lambda\} & \text{si} \quad E \geq \dfrac{\sum_{i \in N} c_i}{2} \end{cases}$$

La Figura 7 il·lustra per a dos jugadors el comportament de les quatre regles anteriors expressant el vector de pagaments en funció de les dues demandes. Com podem veure la regla del Talmud se'ns presenta com una combinació entre la CEA i la CEL. Aquesta rep el seu nom degut a que és la única regla que en el cas de dos jugadors coincideix amb la *contested garment rule* del Talmud jueu, tal i com es pot veure a les Figures 4 - 6 comparant-les amb la Figura 7, i és la utilitzada en diversos problemes del mateix.

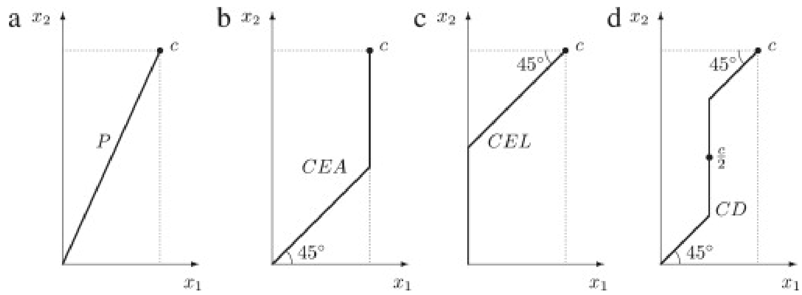

Figura 7: Regla proporcional, CEA, CEL i Talmud per a dos jugadors

Proposició 2.8. *La regla del Talmud coincideix amb la contested garment rule en el cas de problemes amb dos jugadors.*

Demostració. Queda demostrat a les pàgines 23 i 24. □

Per definir l'última regla d'aquesta secció imaginem els demandants arribant un per un a rebre la seva demanda, se'ls va compensant la demanda completa fins que s'esgota la quantitat a repartir.

Sigui $N \in \mathcal{N}$ i $(c, E) \in \mathcal{C}^N$ un problema de bancarrota, sigui $\psi = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathcal{S}_N$ l'ordre en que arriben els demandants. Aleshores la *arrival rule* respecte ψ proposa la següent distribució:

$$
\begin{aligned}
&A^{\psi}_{i_1}(c, E) = \min\{c_{i_1}, E\} \\
&A^{\psi}_{i_2}(c, E) = \min\{c_{i_2}, (E - A^{\psi}_{i_1}(c, E))_+\} \\
&A^{\psi}_{i_3}(c, E) = \min\{c_{i_3}, (E - A^{\psi}_{i_1}(c, E) - A^{\psi}_{i_2}(c, E))_+\} \\
&\qquad\vdots \\
&A^{\psi}_{i_n}(c, E) = \min\{c_{i_n}, (E - \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} A^{\psi}_{i_k}(c, E)_+\}
\end{aligned}
$$

El vector de pagaments resultat depèn de l'ordre en que arriben els demandants, per remoure aquesta injustícia pensarem que l'ordre d'arribada és aleatori, definint així la següent regla.

Definició 2.9. La ***random arrival rule (RA)*** selecciona per a cada $(c, E) \in \mathcal{C}^N$ el vector de pagaments definit per:

$$RA(c, E) = \frac{1}{n!} \sum_{\psi \in \mathcal{S}_N} A^{\psi}(c, E).$$

Desenvolupant aquesta expressió i per a cada $i \in N$ obtenim:

$$RA_i(c, E) = \frac{1}{n!} \sum_{\psi \in \mathcal{S}_N} \min\left\{ c_i, \max\left\{ 0, E - \sum_{\{j \in N |\ \psi(j) < \psi(i)\}} c_j \right\}\right\}.$$

On ψ és una possible ordenació dels demandants i per tant $\psi(j) < \psi(i)$ indica que el demandant j ha "arribat abans"que el demandant i.

2.2 Problemes de Bancarrota en jocs cooperatius

Una vegada definits els problemes de bancarrota els podem interpretar des del punt de vista de la teoria de jocs com a jocs cooperatius. O'Neill [15] el 1982 proposa una forma de transformar un problema de bancarrota de N demandants en un joc cooperatiu de N jugadors. Per a cada coalició busquem aquella quantitat que es pot assegurar amb total seguretat per a si mateixa, per tant, el valor d'una coalició de jugadors $S \subseteq N$ serà el valor que resta de la quantitat a repartir E quan les demandes de tots els jugadors $i \notin S$ s'han satisfet.

Definició 2.10. Sigui $N \in \mathcal{N}$, donat un problema de bancarrota $(c, E) \in \mathcal{C}^N$ el seu joc cooperatiu associat és el joc $(N, v_{(c,E)})$ definit per a cada coalició $S \subseteq N$ no buida per:

$$v_{(c,E)}(S) := \max\{0, E - \sum_{j \in N \setminus S} c_j\} \equiv (E - \sum_{j \in N \setminus S} c_j)_+ \equiv (E - c(N \setminus S))_+.$$

O'Neill al proposar aquesta definició nota que $v_{(c,E)}$ ignora parts rellevants del problema original ja que $v_{(c,E)}(S)$ no és la quantitat que S realment reclama, tot i així ell proposa aquesta definició ja que, com veurem més endavant, d'aquesta manera la *random arrival rule* coincideix de forma natural amb el valor de Shapley del joc.

Com veurem a continuació, els jocs cooperatius associats als problemes de bancarrota sota aquesta definició són convexos. Com ja hem comentat amb anterioritat aquesta és una propietat interessant ja que com a conseqüència el valor de Shapley està dins del Core.

Proposició 2.11. *El joc cooperatiu associat a un problema de bancarrota* (c, E) *és convex.*

Demostració. Recordem que un joc cooperatiu és convex si per a tot jugador $i \in N$ i per $S \subseteq T \subseteq N \setminus \{i\}$ es compleix que:

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T).$$

Sigui $\gamma := E - \sum_{i \in N} c_i \leq 0$, aleshores obtenim que $v_{(c,E)}(S) = (\gamma + c(S))_+$ per a tota coalició $S \subseteq N$. Sigui $i \in N$ i $S \subseteq T \subseteq N \setminus \{i\}$. Aleshores:

$$v_{(c,E)}(S \cup \{i\}) + v_{(c,E)}(T) = (\gamma + c(S) + c_i)_+ + (\gamma + c(T))_+$$

$$= \max\{0, \gamma + c(S) + c_i, \gamma + c(T), 2\gamma + c(S) + c(T) + c_i)\}.$$

D'altra banda:

$$v_{(c,E)}(T \cup \{i\}) + v_{(c,E)}(S) = (\gamma + c(T) + c_i)_+ + (\gamma + c(S))_+$$

$$= \max\{0, \gamma + c(T) + c_i, \gamma + c(S), 2\gamma + c(S) + c(T) + c_i\}$$

$$= \max\{0, \gamma + c(T) + c_i, 2\gamma + c(S) + c(T) + c_i\}.$$

On l'última igualat és deguda a que $S \subseteq T$ i $c_i \geq 0$ per a tot $i \in N$.

Com que se satisfà que $\gamma + c(T) + c_i \geq \gamma + c(S) + c_i$ i $\gamma + c(T) + c_i \geq \gamma + c(T)$ obtenim que:

$$v_{(c,E)}(S \cup \{i\}) + v_{(c,E)}(T) \leq v_{(c,E)}(T \cup \{i\}) + v_{(c,E)}(S) \Leftrightarrow$$

$$v_{(c,E)}(S \cup \{i\}) - v_{(c,E)}(S) \leq v_{(c,E)}(T \cup \{i\}) - v_{(c,E)}(T).$$

Provant que el joc és convex. □

Lema 2.12. *El joc cooperatiu associat a un problema de bancarrota (c, E) és superadditiu i 0-monòton.*

Demostració. Donades dues coalicions $S, T \in 2^N$ disjuntes tindrem que:

$$v_{(c,E)}(S)+v_{(c,E)}(T) = (E-\sum_{N\setminus S} c_j)_+ + (E-\sum_{N\setminus T} c_j)_+ \leq (E-\sum_{N\setminus(S\cup T)} c_j)_+ = v_{(c,E)}(S\cup T)$$

Per la proposició 1.5 tenim que el joc és també 0-monòton. □

A continuació introduïm la solució estàndard d'un joc cooperatiu, que només s'aplica a jocs de dos jugadors.

Definició 2.13. Sigui $N \in \mathcal{N}$ i (N, v) un joc cooperatiu de dos jugadors, suposem sense perdre generalitat que $N = \{1, 2\}$. La **solució estàndard** del joc (N, v) és:

$$ES(N, v)_i = \frac{v(12) - v(1) - v(2)}{2} + v(i)$$

Observació 2.14. Sigui $x_i = ES(N, v)_i$, notem que aquesta definició és equivalent a que es compleixi que $x_1 + x_2 = v(12)$ i que $x_1 - x_2 = v(1) - v(2)$.

La proposta de la solució estàndard per a jocs de dos agents és molt natural i és fàcil veure que la solució estàndard del joc cooperatiu associat a un problema de bancarrota assigna la mateixa distribució que la *contested garment rule*.

Proposició 2.15. *Sigui $(c, E) \in \mathcal{C}^N$ un problema de bancarrota de dos jugadors $N = \{1, 2\}$ i sigui $(N, v_{(c,E)})$ el seu joc cooperatiu associat, aleshores:*

$$ES(N, v_{(c,E)}) = CG(c, E)$$

Demostració. Sigui $v \equiv v_{(c,E)}$, per a tot $i = 1, 2$:

$$ES(N, v)_i = \frac{v(12) - v(1) - v(2)}{2} + v(i) = CG_i(c, E)$$

□

De fet, el Nucleous, el Kernel, el Prekernel i el valor de Shapley en jocs de dos jugadors coincideixen amb la solució estàndard. Notem que en el cas del Nucleous i del Kernel, necessitarem que el joc cooperatiu sigui essencial.

2.3 El valor de Shapley i la *Random arrival rule*

En aquest apartat demostrarem el primer gran objectiu d'aquest treball: el valor de Shapley del joc cooperatiu associat a un problema de bancarrota coincideix amb la solució proposada per la *random arrival rule*.

Per poder entendre com O'Neill arriba a aquest resultat començarem estudiant el problema proposat pel Rabí Abraham Ibn Ezra enunciat a la pàgina 21. Suposem que la quantitat total a repartir (l'herència) és $E = 120$ i les quantitats demandades pels quatre fills Reuben, Simeon, Levi i Judah formen el vector de demandes $c = (120, 60, 40, 30)$. El rabí Ezra proposa el repartiment $x = 120 \cdot (\frac{97}{144}, \frac{25}{144}, \frac{13}{144}, \frac{9}{144})$. Aquest resultat surt de l'aplicació de tres premisses:

- Premissa 1: Cada hereu demanda una part específica de l'herència total.
- Premissa 2: Cada demanda conté completament les demandes més petites. És a dir, en el cas del problema del rabí Ezra, Judah reclama 30, però en el repartiment es té en compte que tots els altres hereus reclamen per igual aquests 30.
- Premissa 3: Si més d'un hereu reclama una certa part del total aquesta es reparteix de manera igualitària entre tots ells.

El punt feble d'aquesta forma d'entendre el problema és evidentment la segona premissa ja que ens porta a situacions inacceptables, per exemple quan la suma de totes les demandes és igual a la quantitat total a repartir. Per exemple si $N = \{1, 2\}$, $E = 100$, $c_1 = 80$ i $c_2 = 20$, està clar que podríem donar a cada demandant la quantitat que reclamen. Però el mètode del rabí Ezra distribuiria $(70, 10)$ i aquest és un mètode no eficient ja que $70 + 10 < 100$.

O'Neill es planteja alternatives a la premissa 2 i arriba a un mètode que enlloc de centrar-se en les reclamacions dels demandants, es centra en "la part"que no reclamen.

2.3.1 La *Random arrival rule*

En aquest apartat veurem com O'Neill defineix la *Random arrival rule* i com l'inspira per poder definir els jocs cooperatius associats als problemes de bancarrota.

Sigui $N \in \mathcal{N}$ i un problema de bancarrota $(c, E) \in \mathcal{C}^N$, construïm la matriu $A(c, E)$, $|N| \times |N|$ on per a tot $i \in N$ l'element de la matriu $a_{i,i} = c_i$.

$$A(c,E) = \begin{pmatrix} c_1 & & & \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_n \end{pmatrix}$$

Volem completar els espais en blanc de la matriu. La idea de O'Neill és que els elements $a_{i,j}$, $i \neq j$ són la quantitat que assigna una regla de repartiment $\mathcal{R}$ al jugador j quan el jugador i ha marxat del joc amb la seva demanda c_i. Després la solució del problema assigna a cada jugador $j \in N$ la mitjana dels elements a la columna j. Fem un exemple per veure-ho clarament.

Sigui $N = \{1, 2, 3\}$, $E = 18$ i $c = (12, 6, 6)$. Suposem que usarem la regla proporcional per resoldre el problema, si apliquem la regla directament ens dona un repartiment $P(c,E) = (9, 4\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$. La matriu associada és:

$$\begin{pmatrix} 12 & & \\ & 6 & \\ & & 6 \end{pmatrix}$$

Suposem ara que l'agent 3 marxa del problema després d'haver rebut la seva demanda $c_3 = 6$. Ens queda un problema de bancarrota amb dos jugadors $N' = \{1,2\}$ on $E' = 18 - 6 = 12$ i $c' = (12, 6)$. Aplicant la regla proporcional a aquest problema obtenim una distribució de pagaments $P(E', c') = (8, 4)$. Per tant l'última fila de la matriu del exemple és (8 4 6). Seguint la mateixa metodologia per a les files 1 i 2, on els demandants 1 i 2 marxen del joc amb la seva demanda, obtenim que la matriu complerta és:

$$\begin{pmatrix} 12 & 3 & 3 \\ 8 & 6 & 4 \\ 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Si ara fem la mitjana de cada columna (cada jugador rep la mitjana dels n problemes que es generen al suposar en cada problema que un jugador diferent rep tot el que demana) trobem la distribució $(9\frac{1}{3}, 4\frac{1}{3}, 4\frac{1}{3})$, que no coincideix amb la regla proporcional aplicada al problema inicial $(9, 4\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2})$. A O'Neill no li agrada aquesta desigualtat i això el porta a definir un mètode per "omplir els buits"de la matriu que genera de forma natural la *random arrival rule*.

Sigui $(c, E) \in \mathcal{C}^N$ un problema de bancarrota, el **mètode de completació recursiva**, que es basa en dues etapes, està construït per tal de satisfer aquesta mena de "consistència". La regla aplicada al problema inicial ha de coincidir amb la mitjana dels pagaments que obtenim quan apliquem la regla a cada un dels $|N|$ problemes generats quan cada un dels $|N|$ demandants abandona el problema amb la seva demanda.

1. **Primera etapa:** Per a cada jugador $i \in N$ (fila de la matriu) generem un nou problema de bancarrota (E', c') amb jugadors $N' = N \setminus \{i\}$ suposant que el demandant i marxa amb la seva demanda c_i. Aleshores $E' = (E - c_i)_+$ i el vector de demandes $c' = c_{N\setminus\{i\}}$. Si existeix alguna component c_j, $j \in N \setminus \{i\}$ tal que $c_j > E'$, aleshores truquem aquesta demanda fent $c'_j = E'$. Repetim aquest procés per cada un dels problemes de bancarrota generats fins que eventualment arribem a un conjunt de problemes de bancarrota d'un únic jugador $k \in N$ tal que la quantitat a repartir restant serà $(E - \sum_{i\in N\setminus\{k\}} c_i)_+$.

2. **Segona etapa:** La segona etapa es basa en assignar al únic jugador de cada un dels problemes individuals la quantitat que resta i utilitzar-la per completar els buits del problema de dos jugadors que el precedeix. A partir d'aquí anem resolent cada problema fent la mitjana dels valors de cada columna i utilitzem els resultats per completar els buits de les matrius dels problemes que els precedeixen. Eventualment arribem al problema original i el podrem resoldre fent la mitjana per a cada columna.

Tot seguit presentem un exemple del procediment descrit.

Exemple 2.16. Veiem l'aplicació d'aquest mètode en el problema proposat pel rabí Ezra sobre herències. Abans de cada matriu posarem la quantitat que resta per repartir i sobre les fletxes posarem a quin jugador compensem totalment en aquell pas. Quan un jugador és compensat s'elimina la fila i la columna corresponent a aquell jugador.

$$
(120)\begin{pmatrix} 120 & - & - & - \\ - & 60 & - & - \\ - & - & 40 & - \\ - & - & - & 30 \end{pmatrix}
\begin{cases}
\xrightarrow{1} (0)\begin{pmatrix} 0 & - & - \\ - & 0 & - \\ - & - & 0 \end{pmatrix}
\begin{cases}
\xrightarrow{2} (0)\begin{pmatrix} 0 & - \\ - & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} \xrightarrow{3} (0)(0) \\ \xrightarrow{4} (0)(0) \end{cases} \\
\xrightarrow{3} (0)\begin{pmatrix} 0 & - \\ - & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} \xrightarrow{2} (0)(0) \\ \xrightarrow{4} (0)(0) \end{cases} \\
\xrightarrow{4} (0)\begin{pmatrix} 0 & - \\ - & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} \xrightarrow{2} (0)(0) \\ \xrightarrow{3} (0)(0) \end{cases}
\end{cases} \\
\xrightarrow{2} (60)\begin{pmatrix} 60 & - & - \\ - & 40 & - \\ - & - & 30 \end{pmatrix}
\begin{cases}
\xrightarrow{1} (0)\begin{pmatrix} 0 & - \\ - & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} \xrightarrow{3} (0)(0) \\ \xrightarrow{4} (0)(0) \end{cases} \\
\xrightarrow{3} (20)\begin{pmatrix} 20 & - \\ - & 20 \end{pmatrix} \begin{cases} \xrightarrow{1} (0)(0) \\ \xrightarrow{4} (0)(0) \end{cases} \\
\xrightarrow{4} (30)\begin{pmatrix} 30 & - \\ - & 30 \end{pmatrix} \begin{cases} \xrightarrow{1} (0)(0) \\ \xrightarrow{3} (0)(0) \end{cases}
\end{cases} \\
\xrightarrow{3} (80)\begin{pmatrix} 80 & - & - \\ - & 60 & - \\ - & - & 30 \end{pmatrix}
\begin{cases}
\xrightarrow{1} (0)\begin{pmatrix} 0 & - \\ - & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} \xrightarrow{2} (0)(0) \\ \xrightarrow{4} (0)(0) \end{cases} \\
\xrightarrow{2} (20)\begin{pmatrix} 20 & - \\ - & 20 \end{pmatrix} \begin{cases} \xrightarrow{1} (0)(0) \\ \xrightarrow{4} (0)(0) \end{cases} \\
\xrightarrow{4} (50)\begin{pmatrix} 50 & - \\ - & 50 \end{pmatrix} \begin{cases} \xrightarrow{1} (0)(0) \\ \xrightarrow{2} (0)(0) \end{cases}
\end{cases} \\
\xrightarrow{4} (90)\begin{pmatrix} 90 & - & - \\ - & 60 & - \\ - & - & 40 \end{pmatrix}
\begin{cases}
\xrightarrow{1} (0)\begin{pmatrix} 0 & - \\ - & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} \xrightarrow{2} (0)(0) \\ \xrightarrow{3} (0)(0) \end{cases} \\
\xrightarrow{2} (30)\begin{pmatrix} 30 & - \\ - & 30 \end{pmatrix} \begin{cases} \xrightarrow{1} (0)(0) \\ \xrightarrow{3} (0)(0) \end{cases} \\
\xrightarrow{3} (50)\begin{pmatrix} 50 & - \\ - & 50 \end{pmatrix} \begin{cases} \xrightarrow{1} (0)(0) \\ \xrightarrow{2} (0)(0) \end{cases}
\end{cases}
\end{cases}
$$

Ara, en la segona etapa anirem completant les matrius, de les més petites a la més gran, amb les solucions trobades fent les mitjanes de les columnes de cada problema petit. Els vectors de pagaments a sota cada matriu donen el resultat d'aquestes mitjanes. Les matrius per a dos jugadors ja les hem omplert amb els zeros que ens quedaven a tots els casos individuals.

$$
\begin{array}{c}
\begin{pmatrix} 120 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{85/3} & 60 & \mathbf{55/3} & \mathbf{40/3} \\ \mathbf{115/3} & \mathbf{85/3} & 40 & \mathbf{40/3} \\ \mathbf{130/3} & \mathbf{85/3} & \mathbf{55/3} & 30 \end{pmatrix} \\ \hline \overline{x} = (57\tfrac{1}{2}, 29\tfrac{1}{6}, 19\tfrac{1}{6}, 14\tfrac{1}{6})
\end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
\xleftarrow{1} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \overline{x}=(0,0,0) \end{array}
\left\{ \begin{array}{l}
\xleftarrow{2} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \\
\xleftarrow{3} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \\
\xleftarrow{4} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}
\end{array} \right. \\[2em]
\xleftarrow{2} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 60 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{10} & 40 & \mathbf{10} \\ \mathbf{15} & \mathbf{15} & 30 \end{pmatrix} \\ \hline \overline{x}=(85/3,55/3,40/3) \end{array}
\left\{ \begin{array}{l}
\xleftarrow{1} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \\
\xleftarrow{3} \begin{pmatrix} 20 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 20 \end{pmatrix} \\
\xleftarrow{4} \begin{pmatrix} 30 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 30 \end{pmatrix}
\end{array} \right. \\[2em]
\xleftarrow{3} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 80 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{10} & 60 & \mathbf{10} \\ \mathbf{25} & \mathbf{25} & 30 \end{pmatrix} \\ \hline \overline{x}=(115/3,85/3,40/3) \end{array}
\left\{ \begin{array}{l}
\xleftarrow{1} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \\
\xleftarrow{2} \begin{pmatrix} 20 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 20 \end{pmatrix} \\
\xleftarrow{4} \begin{pmatrix} 50 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 50 \end{pmatrix}
\end{array} \right. \\[2em]
\xleftarrow{4} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 90 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{15} & 60 & \mathbf{15} \\ \mathbf{25} & \mathbf{25} & 40 \end{pmatrix} \\ \hline \overline{x}=(130/3,85/3,55/3) \end{array}
\left\{ \begin{array}{l}
\xleftarrow{1} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \\
\xleftarrow{2} \begin{pmatrix} 30 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 30 \end{pmatrix} \\
\xleftarrow{3} \begin{pmatrix} 50 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 50 \end{pmatrix}
\end{array} \right.
\end{array}
\right.
$$

Segons aquest mètode els hereus del problema del rabí Ezra haurien de rebre els pagaments $(57\frac{1}{2}, 29\frac{1}{6}, 19\frac{1}{6}, 14\frac{1}{6})$. El mètode de la completació recursiva té una interpretació dinàmica: suposem que els hereus participen a una carrera, el primer que arriba s'emporta tot el que demana, el segon igual i així seguir fins que no queda patrimoni a repartir. Aquest mètode assigna a cada jugador la quantitat que li correspon tenint en compte que l'ordre d'arribada és aleatori i igual de probable. Aquesta és la primera definició de la *random arrival rule* i és palesa la seva similitud amb el valor de Shapley on els jugadors reben les contribucions marginals tenint en compte totes les possibles ordenacions d'ells mateixos, és a dir, tots els "possibles ordres d'arribada".

Ens disposem doncs a demostrar-ho formalment.

Teorema 2.17. *Sigui $N \in \mathcal{N}$, donat un problema de bancarrota $(c, E) \in \mathcal{C}^N$. Sigui $(N, v_{(c,E)})$ el seu joc cooperatiu associat, aleshores:*

$$\phi(N, v_{(c,E)}) = RA(c, E).$$

Demostració. Sigui $N \in \mathcal{N}$ i sigui $(c, E) \in \mathcal{C}^N$ un problema de bancarrota. Sigui $(N, v_{(c,E)})$ el seu joc cooperatiu associat. Definim $v \equiv v_{(c,E)}$. Recordem que:

$$\phi(N, v_{(c,E)}) = \phi(N, v) = \frac{1}{n!} \sum_{\psi \in \mathcal{S}_N} m^{\psi}(v),$$

$$RA(c, E) = \frac{1}{n!} \sum_{\psi \in \mathcal{S}_N} A^{\psi}(c, E).$$

Per tant és suficient veure que $m^{\psi}(v) = A^{\psi^{-1}}(c, E)$ per a tot $\psi \in \mathcal{S}_N$. Prenem una ordenació dels jugadors qualsevol $\psi = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$, aleshores $\psi^{-1} = (i_n, i_{n-1}, \ldots, i_1)$. En la demostració veurem primerament el càlcul per les components i_n i i_{n-1} d'aquests vectors per entendre com procedir en el cas general.

- Per la component i_n:

$$A_{i_n}^{\psi^{-1}}(c, E) = \min\{c_{i_n}, E\}$$

  D'altra banda:

$$m_{i_n}^{\psi}(v) = v(i_1 \ldots i_n) - v(i_1 \ldots i_{n-1}) = (E - c(N \setminus N))_+ - (E - c_{i_n})_+ =$$

$$E - (E - c_{i_n})_+ = \min\{c_{i_n}, E\} = A_{i_n}^{\psi^{-1}}(c, E).$$

- Per la component i_{n-1}:

$$\begin{aligned} m_{i_{n-1}}^{\psi}(v) &= v(i_1 \ldots i_{n-1}) - v(i_1 \ldots i_{n-2}) = (E - c_{i_n})_+ - (E - c_{i_{n-1}} - c_{i_n})_+ \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad E \leq c_{i_n} \\ c_{i_{n-1}} & \text{si} \quad E \geq c_{i_n} \quad \text{i} \quad E \geq c_{i_n} + c_{i_{n-1}} \\ E - c_{i_n} & \text{si} \quad E \geq c_{i_n} \quad \text{i} \quad E \leq c_{i_n} + c_{i_{n-1}} \end{cases} \end{aligned}$$

  D'altra banda:

$$\begin{aligned} A_{i_{n-1}}^{\psi^{-1}}(c, E) &= \min\{c_{i_{n-1}}, (E - A_{i_n}^{\psi^{-1}}(c, E))_+\} = \min\{c_{i_{n-1}}, (E - \min\{c_{i_n}, E\})_+\} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad E \leq c_{i_n} \\ c_{i_{n-1}} & \text{si} \quad E \geq c_{i_n} \quad \text{i} \quad c_{i_{n-1}} \leq E - c_{i_n} \Rightarrow E \geq c_{i_n} + c_{i_{n-1}} \\ E - c_{i_n} & \text{si} \quad E \geq c_{i_n} \quad \text{i} \quad E - c_{i_n} \leq c_{i_{n-1}} \Rightarrow E \leq c_{i_n} + c_{i_{n-1}} \end{cases} \end{aligned}$$

  Per tant $A_{i_{n-1}}^{\psi^{-1}}(c, E) = m_{i_{n-1}}^{\psi}(v)$.

- Per a la component i_k per a tota $k = 2, \ldots, n$ tindrem que:

$$\begin{aligned} m_{i_k}^{\psi}(v) &= v(i_1 \ldots i_k) - v(i_1 \ldots i_{k-1}) \\ &= (E - c_{i_{k+1}} - \cdots - c_{i_n})_+ - (E - c_{i_k} - c_{i_{k+1}} - \cdots - c_{i_n})_+ \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad E \leq \sum_{l=k+1}^{n} c_{i_l} \\ c_{i_k} & \text{si} \quad E \geq \sum_{l=k+1}^{n} c_{i_l} \quad \text{i} \quad E \geq \sum_{l=k}^{n} c_{i_l} \\ E - \sum_{l=k+1}^{n} c_{i_l} & \text{si} \quad E \geq \sum_{l=k+1}^{n} c_{i_l} \quad \text{i} \quad E \leq \sum_{l=k}^{n} c_{i_l} \end{cases} \end{aligned}$$

D'altra banda tindrem que:

$$\begin{aligned} A_{i_k}^{\psi^{-1}}(c, E) &= \min\left\{ c_{i_k}, \left(E - \sum_{l=k+1}^{n} A_{i_l}^{\psi^{-1}}(c, E) \right)_+ \right\} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad E \leq \sum_{l=k+1}^{n} A_{i_l}^{\psi^{-1}}(c, E) \\ c_{i_k} & \text{si} \quad E \geq \sum_{l=k+1}^{n} c_{i_l} \quad \text{i} \quad E \geq \sum_{l=k}^{n} c_{i_l} \\ E - \sum_{l=k+1}^{n} c_{i_l} & \text{si} \quad E \geq \sum_{l=k+1}^{n} c_{i_l} \quad \text{i} \quad E \leq \sum_{l=k}^{n} c_{i_l} \end{cases} \end{aligned}$$

La condició $E \leq \sum_{l=k+1}^{n} A_{i_l}^{\psi^{-1}}(c, E)$ és equivalent a $E \leq \sum_{l=k+1}^{n} c_{i_l}$ ja que per a tot $l = 1, \ldots, n$, la quantitat $A_{i_l}^{\psi^{-1}}(c, E)$ és com a màxim c_{i_l}. Les altres condicions es veuen de forma similar.

És a dir, tenim sempre tres possibles resultats; 0 si la suma de les demandes de tots els demandants que han arribat abans que el jugador i_k és superior a la quantitat a repartir E; c_{i_k} si després de compensar tots els demandants que han arribat abans encara es pot cobrir la demanda completa, i $E - \sum_{l=k+1}^{n} c_{i_l}$ si no s'ha esgotat la quantitat a repartir però no en queda prou com per compensar la demanda completament. Per a la component i_1 el resultat és trivial.

Per tant hem provat que el valor de Shapley del joc cooperatiu associat a un problema de bancarrota coincideix amb la *Random arrival rule* del problema. □

Per veure demostracions diferents del teorema recomanem la demostració original proposada per O'Neill [15], o la proposada a [10].

Concloem que com que el joc cooperatiu associats a un problema de bancarrota és convex, sabem que el valor de Shapley pertany al Core del joc i per tant la *random arrival rule* ens dona una distribució de pagaments altament estable.

2.4 El Nucleous en un problema de bancarrota

En aquest apartat demostrarem el segon dels grans objectius d'aquest treball: el Nucleous del joc cooperatiu associat a un problema de bancarrota coincideix amb la solució proporcionada per la regla del Talmud. Aquest també és un resultat de gran interès ja que com hem vist a la Proposició 1.44, el Nucleous sempre pertany al Core del joc, sent aquest un conjunt d'alta estabilitat pels jugadors.

Aquest resultat fou trobat per *Aumann* i *Maschler* el 1985 [2] i basen la seva demostració en el Kernel i el pre-Kernel de joc cooperatiu associat al problema, definit de la manera que ho fa O'Neill el 1982. S'han fet altres demostracions del resultat com la proposada per Benoît el 1997 [3] i la proposada per *Fleiner* i *Sziklai* el 2014 [7] basada en la teoria hidràulica de repartiments o *hydraulic rationing* de *Kaminski* [13].

Primerament exposarem en què consisteix el *hydraulic rationing* ja que basarem algunes demostracions posteriors en els seus conceptes.

2.4.1 Hydraulic rationing

Utilitzar l'hidràulica com a mètode d'estudi de problemes de bancarrota fou proposat primerament per *Kaminsky* el 2000. Trobem interessant explicar aquest mètode per la facilitat d'entendre els conceptes de repartiment i algunes regles al visualitzar-les com simples sistemes hidràulics.

En el **sistema hidràulic** $\mathcal{H}(c, E)$ associat a un problema de bancarrota cada demanda c_i correspon a un recipient cilíndric, el volum del qual és exactament la demanda del jugador i. La quantitat total a repartir E és la quantitat d'aigua a repartir entre tots els recipients. En total tindrem n recipients en $\mathcal{H}(c, E)$ per a cada problema $(c, E) \in \mathcal{C}^N$.

El sistema hidràulic està connectat, és a dir, tots els recipients estan connectats amb tubs per les seves respectives bases. A més a més, cada recipient ha de tenir una petita obertura a la part superior perquè l'aire es pugui escapar quan s'omplen els recipients. Quan comença el repartiment, la comporta del recipient que conté el volum d'aigua E s'obra i l'aigua es reparteix per tots els recipients a la vegada seguint les lleis de la física, això implica que al final del repartiment existirà un nivell d'aigua z comú en tots els recipients. Cada jugador obté el volum d'aigua que hi ha al seu recipient al finalitzar el repartiment.

Qualsevol sistema hidràulic $\mathcal{H}$ defineix implícitament alguna regla de repartiment, la natura d'aquesta regla depèn de la forma dels recipients. D'altra banda, és natural preguntar-se si tota regla de repartiment correspon a algun sistema hidràulic.

Kaminski demostra que un sistema hidràulic és talmúdic, és a dir, cada jugador obté un volum d'aigua igual al que estipula la regla del Talmud quan és compleixen les següents característiques:

- Cada recipient consisteix de dos tancs d'aigua del mateix volum, un situat a la part superior i l'altre a la part inferior, aquets dos tancs d'aigua estan conectats mitjançant un tub molt fi. El recipient té forma de rellotge de sorra.
- Els tubs que connecten els tancs tenen volum negligible.

- Els cilindres tenen base circular d'àrea igual a la unitat. D'aquesta manera el volum del cilindre serà exactament la seva altura.
- Tots els recipients tenen la mateixa altura h que coincideix amb la demanda més alta $h = \max_{i \in N} c_i$.

Fixem-nos que les característiques anteriors impliquen que el recipient amb major volum (el de la demanda més alta) no té tub connectant els tancs superior i inferior, sinó que consisteix d'un sol cilindre.

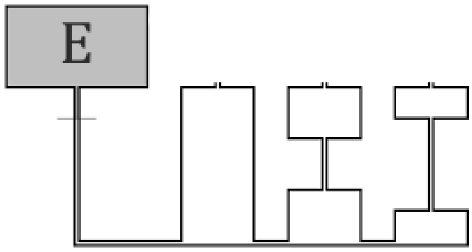

Figura 8: Exemple d'un sistema hidràulic talmudic connectat

De les regles que hem definit amb anterioritat podem mostrar els sistemes hidràulics associats a la regla proporcional, CEA, CEL i Talmud. Es pot veure clarament la relació que té la regla del Talmud amb la CEA i la CEL.

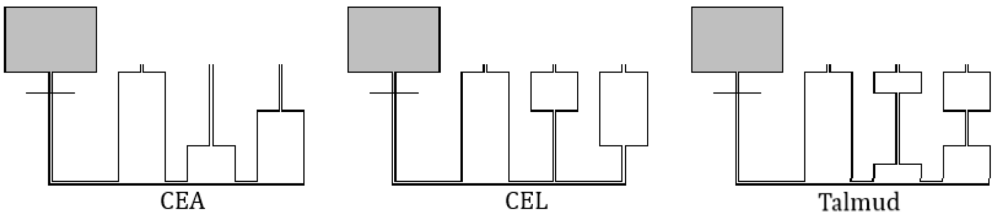

Figura 9: Sistemes hidràulics per a CEA, CEL i Talmud

En contrast, la regla proporcional no es pot expressar en forma d'un sistema hidràulic amb recipients d'igual àrea de base. El seu sistema hidràulic associat connectat té recipients amb bases de diferent àrea segons cada demanda i els recipients es formen d'un únic tanc d'aigua enlloc dels dos que formen un sistema hidràulic talmúdic, tal i com es pot veure a la Figura 10.

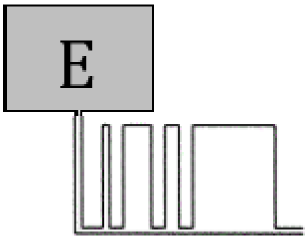

Figura 10: Sistema hidràulic associat a la regla proporcional

2.4.2 Consistència

La consistència és un requeriment que expressa una certa independència de les regles a les variacions de la població. Imaginem que en un problema hi apliquem una norma de repartiment concreta, un grup de demandants marxen amb els seus pagaments, el requeriment consisteix en que quan revaluem el problema des del punt de vista dels demandants que queden la regla hauria d'assignar-los el mateix vector de pagaments que se'ls havia assignat inicialment.

Definició 2.18. Una regla de repartiment d'un problema de bancarrota és **consistent** si per a qualsevol $N \in \mathcal{N}$, per a tot $(N, c, E) \in \mathcal{C}^N$ i per a tot $S \subset N$, si $x = \mathcal{R}(N, c, E)$ aleshores $x_S = \mathcal{R}(S, c_S, \sum_{i \in S} x_i)$. On $(S, c_S, \sum_{i \in S} x_i)$ és el problema de bancarrota que afronten els jugadors de S quan els jugadors de $N \backslash S$ marxen amb el pagament proposat per la regla $\mathcal{R}$ en el problema (N, c, E). Si només s'imposa aquesta condició, per a $|S| = 2$ aquesta propietat s'anomena consistència bilateral.

Aumann i Maschler s'interessen en aquelles regles tals que quan les apliquem al problema de bancarrota (N, c, E), obtenint $x = \mathcal{R}(N, c, E)$, al reduir el problema a dos jugadors $(\{i, j\}, (c_i, c_j), x_i + x_j)$ i aplicar-hi la regla obtenim el repartiment proposat per la *contested garment rule*. Aquesta propietat l'anomenem CG-Consistència.

Definició 2.19. Una regla de repartiment $\mathcal{R}$ és **CG-Consistent** si per a qualsevol $N \in \mathcal{N}$ i per a qualsevol problema $(N, c, E) \in \mathcal{C}^N$, per a tot $S \subset N$ amb $S = \{i, j\}$, si $x = \mathcal{R}(N, c, E)$, aleshores:

$$x_S = (x_i, x_j) = CG(\{i, j\}, (c_i, c_j), x_i + x_j).$$

A continuació veurem que aquesta regla CG-Consistent és única. Farem una demostració proposada per Kaminski, basada en la hidràulica.

Proposició 2.20. *(Aumann i Maschler 1985): Per a cada problema $(N, c, E) \in \mathcal{C}^N$ existeix un únic repartiment CG-Consistent. Aquest és el proposat per la regla del Talmud.*

Demostració. Provem primerament que aquest repartiment és la regla del Talmud. Sigui (N, c, E) un problema de bancarrota. Per *Kaminski* sabem que el sistema hidràulic talmúdic corresponent una representació semblant a la Figura 8 però amb n recipients.

Agafem un volum E arbitrari, aleshores el que obtindran els agents és el volum d'aigua que queda a cada un dels n recipients, ombrejat a la següent figura:

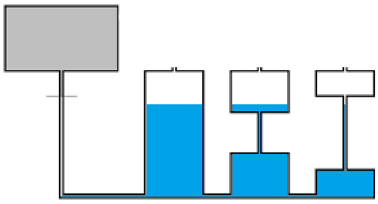

Figura 11: Repartiment per una quantitat arbitrària E

Evidentment la quantitat d'aigua a cada recipient dependrà d'E, però l'argumentació que fem a continuació és vàlida per a qualsevol $E \leq \sum_{i \in N} c_i$. Reduïm el problema a un altre (N', c', E') de només dos jugadors amb $N' = \{i, j\}$ amb $c'_i = c_i$, $c'_j = c_j$ i $E' = x_i + x_j$. El sistema hidràulic relacionat tindrà només dos recipients, el corresponent al jugador i i el corresponent al jugador j.

Si un dels dos jugadors és d'entre aquells amb la demanda més gran els recipients, els recipients d'aquest nou sistema hidràulic seran idèntics als originals i l'aigua que hi vessarem serà exactament $x_i + x_j$, per tant gràficament és evident que en aquest cas els dos jugadors tornen a rebre la mateixa quantitat d'aigua.

Si per el contrari, ni i ni j pertanyen al grup d'agents amb la demanda més gran aleshores és fàcil veure que el sistema hidràulic on els recipients són idèntics als originals:

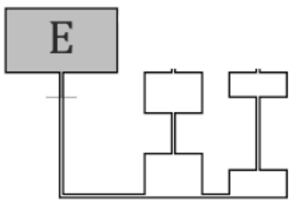

Figura 12: Sistema hidràulic que resta de reduir el problema a dos jugadors, cap dels quals d'entre el grup d'agents amb demanda més gran.

és equivalent al sistema hidràulic on s'han aixafat els recipients pel conducte que uneix els tancs superior i inferior exactament en la distància entre els dos tancs (superior i inferior) corresponent al jugador amb la demanda més gran, obtenint així un sistema talmúdic:

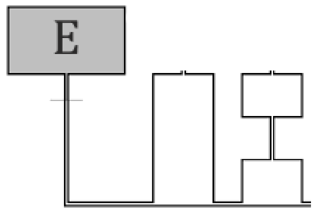

Figura 13: Sistema hidràulic que resta de reduir el problema a dos jugadors, cap dels quals d'entre el grup d'agents amb demanda més gran.

Així mateix, si $E = x_i + x_j$, es evident comprovar que la quantitat que obtenen en el sistema hidràulic amb recipients modificats és la mateixa que obtenien en els recipients originals. Per el que és evident que els dos jugadors rebran la mateixa quantitat d'aigua que rebien inicialment.

Per tant hem provat que si $x = T(N, c, E)$, aleshores $x_{\{i,j\}} = T(\{i, j\}, (c_i, c_j), x_i + x_j)$. Finalment per la Proposició 2.8, demostrem que la regla del Talmud és CG-Consistent.

Demostrem ara que és la única regla CG-Consistent. Si per a un problema n'hi hagués més d'una, podriem trobar un parell de regles CG-Consistents $\mathcal{R}(N, c, E) = x$ i $\mathcal{R}'(N, c, E) = y$ tals per demandants $i, j \in N$, $x_i < y_i$, $x_j > y_j$ i $x_i + x_j \leq y_i + y_j$. La CG-Consistència implica que si i i j són els únics demandants involucrats, assignem y_j a j quan $E = y_i + y_j$ i x_j quan $E = x_i + x_j$. Donat que $x_i + x_j \leq y_i + y_j$ i que la *contested garment rule* és monòtona[4], implica que $y_i \geq x_i$ contradint $y_j < x_j$. $\square$

2.4.3 La regla del Talmud i el Nucleous

El nostre objectiu és poder demostrar la relació entre el Nucleous del joc cooperatiu associat a un problema de bancarrota i la regla del Talmud. Abans per això, necessitem alguns resultats previs.

Lema 2.21. *Sigui (N, c, E) un problema de bancarrota i sigui $\mathcal{R}(N, c, E) = x$ el repartiment proposat per la regla $\mathcal{R}$. Aleshores per tota coalició $S \subsetneq N$ es compleix que el joc reduït del joc associat al problema de bancarrota coincideix amb el "problema reduït de bancarrota"$(S, c_S, x(S))$. Sigui $v \equiv v_{(c,E)}$, aleshores:*

$$v_{S,x} = v_{(c_S, x(S))}$$

Demostració. Sigui $v_S \equiv v_{S,x}$. Prenem una coalició no buida $T \subsetneq S$. Recordem la definició del joc reduït:

$$v_S(T) = \begin{cases} x(T) & \text{si} \quad T = \emptyset, T = S \\ \max\{v(Q \cup T) - x(Q) \mid Q \subseteq N \setminus S\} & \text{si} \quad \emptyset \subsetneq T \subsetneq S \end{cases}$$

[4]Una regla és monòtona si al augmentar la quantitat a repartir E mantenint les demandes igual aleshores el pagament de cada demandant també augmenta.

Suposem que el màxim de la defició de $v_S(T)$ s'assoleix a Q. Com que $\mathcal{R}(N,c,E) = x$, es compleix que $x_i \geq 0$ per a tot $i \in N$ i donat que per $a, b \in \mathbb{R}$ es compleix que $(a)_+ - (b)_+ \leq (a-b)_+$ tindrem que:

$$v_S(T) = v(Q \cup T) - x(Q) = (E - c(N \setminus (Q \cup T))_+ - (x(Q))_+$$
$$\leq (x(N) - c(N \setminus (Q \cup T)) - x(Q))_+ = (x(S) - c(S \setminus T) - (c-x)(N \setminus (S \cup Q)))_+$$
$$\leq (x(S) - c(S \setminus T))_+$$

D'altra banda prenent $Q = N \setminus S$ tindrem que:

$$v_S(T) \geq v(T \cup (N \setminus S)) - x(N \setminus S) = (E - c(N \setminus (T \cup (N \setminus S))))_+ - (x(N) - x(S))$$
$$\geq (E - c(S \setminus T)) - (E - x(S)) = x(S) - c(S \setminus T)$$

Prenent $Q = \emptyset$ obtindrem que:

$$v_S(T) \geq v(T) = (E - c(N \setminus T)_+ \geq 0$$

Aquest resultat juntament amb la desigualtat anterior condueix a:

$$v_S(T) \geq (x(S) - c(S \setminus T))_+$$

Per tant, juntament amb la primera desigualtat que hem trobat ens porta a comprovar que:

$$v_S(T) = (x(S) - c(S \setminus T))_+ = v_{c_S, x(S)}(T)$$

Que era el nostre objectiu. Cal remarcar que per $T = \emptyset$ o $T = S$ el resultat és immediat. $\square$

Lema 2.22. *Sigui x un vector de pagaments del joc (N,v) i sigui S una coalició tal que $|S| = 2$. Si $x \in \mathcal{PK}(N,v)$ aleshores x_S és la solució estàndard del joc reduït $v_{S,x}$.*

Demostració. Sigui $x \in \mathcal{PK}(N,v)$ i sigui S una coalició amb dos jugadors $S = \{l,k\}$. Aleshores l'excés màxim de k sobre l és:

$$s_{kl}(x) = \max\{e(T,x) \mid k \in T,\ l \notin T\} = \max_{T \subseteq N \setminus S}(v(T \cup \{k\}) - x(T \cup \{k\})) = v_{S.x}(k) - x_k$$

De la mateixa manera també es veu que:

$$s_{lk}(x) = v_{S,x}(l) - x_l$$

Com que x pertany al Prekernel, $s_{kl} = s_{lk}$. Aleshores es compleixen les següents equacions:

$$x_k - x_l = v_{S,x}(k) - v_{S,x}(l).$$
$$x_k + x_l = v_{S,x}(S).$$

Per l'observació 2.14 queda demostrat que x_S és la solució estàndard del joc reduït $v_{S,x}$. $\square$

Proposició 2.23. *Sigui* $N \in \mathcal{N}$*, sigui* $(c,E) \in \mathcal{C}^N$ *un problema de bancarrota i sigui* $(N, v_{(c,E)})$ *el seu joc cooperatiu associat. Si una regla* $\mathcal{R}(c,E)$ *és tal que* $\mathcal{R}(c,E) = x \in \mathcal{PK}(N, v_{(c,E)})$*, aleshores* $\mathcal{R}(c,E) = T(c,E)$*.*

Demostració. Definim $v \equiv v_{(c,E)}$. Sigui $x \in \mathcal{PK}(N,v)$ Aleshores pel lema 2.22, per a tot $S = \{i,j\}$ tenim que:

$$x_S = ES(S, v_{S,x}).$$

Ara pel lema 2.21 tenim que:

$$(S, v_{S,x}) = (S, v_{((c_i,c_j),x_i+x_j)})$$

Per la proposició 2.15:

$$x_S = ES(S, v_{((c_i,c_j),x_i+x_j)}) = CG((c_i,c_j), x_i + x_j).$$

Ara per la proposició 2.20 concloem que $x = T(c,E)$, és a dir, que $\mathcal{R}(c,E) = T(c,E)$.

$\square$

Teorema 2.24. *Sigui* $N \in \mathcal{N}$ *i sigui* $(c,E) \in \mathcal{C}^N$ *un problema de bancarrota. Sigui* $(N, v_{(c,E)})$ *el seu joc cooperatiu associat. Aleshores:*

$$T(c,E) = \mathcal{N}(N, v_{(c,E)}).$$

Demostració. Sigui $N \in \mathcal{N}$ i sigui $(c,E) \in \mathcal{C}^N$ un problema de bancarrota. Sigui $(N, v_{(c,E)})$ el seu joc cooperatiu associat. Pel lemma 2.12 el joc $(N, v_{(c,E)})$ és 0-monòton i superadditiu. Per tant pel teorema 1.48 es complirà que:

$$\mathcal{PK}(N, v_{(c,E)}) = \mathcal{K}(N, v_{(c,E)}).$$

Ara per la proposició 2.11 el joc $(N, v_{(c,E)})$ és convex i pel teorema 1.49 el Kernel i el Prekernel del joc consistirà d'un únic punt:

$$\mathcal{PK}(N, v_{(c,E)}) = \mathcal{K}(N, v_{(c,E)}) = \{x\}.$$

Finalment pel teorema 1.50, el Kernel i el Nucleous del joc coincideixen per tant:

$$\{x\} = \mathcal{N}(N, v_{(c,E)}).$$

Per tant és suficient veure que si $x \in \mathcal{PK}(N, v_{(c,E)})$, aleshores $x = T(c,E)$ que és exactament el que hem provat a la proposició 2.23. Per tant concloem que:

$$\mathcal{N}(N, v_{(c,E)}) = T(c,E).$$

$\square$

3 Conclusions

En aquest treball hem fet un estudi sobre els jocs cooperatius i com aquests estan definits en problemes de bancarrota. En la primera part del projecte hem analitzat la teoria de jocs cooperatius. Com hem vist, hem donat solucions de caire reduccionista (com seria el cas del Core), i solucions de caire constructivista (com seria el cas del Nucleous i el valor de Shapley). Hem definit la classe de jocs cooperatius convexos i hem demostrat que per aquesta classe de jocs el Core d'un joc cooperatiu sempre existeix. A més a més, en els jocs convexos el valor de Shapley és un punt del Core, sent aquest un conjunt de vectors de pagaments altament estable ja que cap coalició te incentius per trencar la cooperació. Pel cas del Nucleous hem vist que, en els jocs essencials, aquest existeix i és únic, a part, aquest sempre és un punt del Core sempre i quan el Core existeixi.

En la segona part del projecte hem definit els problemes de bancarrota com aquells problemes on un grup de demandants té unes demandes sobre una quantitat de diners insuficient per cobrir-les totes. Aquesta classe de problemes vol estudiar com repartir aquesta quantitat entre els demandants, per tant hem definit regles de repartiment que proporcionen diferents solucions a aquest problema.

D'altra banda, hem donat una manera d'associar un joc cooperatiu a un problema de bancarrota per tal de donar-li a aquesta classe de problemes un enfocament des del punt de vista de jocs, així podent aplicar els resultats i conceptes treballats a la primera part del projecte. Finalment, demostrem que la regla del Talmud (regla derivada del Talmud jueu, que forma la base de la llei civil, criminal i religiosa jueva) d'un problema de bancarrota proposa el mateix pagament que el Nucleous del joc cooperatiu associat i que la *random arrival rule* proposa el mateix pagament que el valor de Shapley del joc associat. Tenint en compte que demostrem que el joc cooperatiu d'un problema de bancarrota és convex, concloem que tant la regla de la Talmud com la *random arrival rule* proposen solucions altament estables sempre i quan la formació de coalicions estigui permesa, ja que ambdues regles proposen un repartiment que pertany al Core del joc associat.

Referències

[1] Aumann, Robert J. Game theory in the Talmud. Bar-Ilan University, Department of economics, Research center on Jewish law and economics, 2002.

[2] Aumann, Robert J., and Michael Maschler. “Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud.”Journal of economic theory 36.2 (1985): 195-213.

[3] Benoit, Jean-Pierre. “The nucleolus is contested-garment-consistent: a direct proof.”journal of economic theory 77.1 (1997): 192-196.

[4] Besalel Peleg, Peter Sudhölter. Introduction to the theory of cooperative games. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003.

[5] Bondareva, Olga. “The theory of the core in an n-person game.”Vestnik Leningrad. Univ 13 (1962): 141-142.

[6] Caulier, Jean-François. “A note on the monotonicity and superadditivity of TU cooperative games.”(2009).

[7] Fleiner, Tamás, and Balázs Sziklai. “The nucleolus of the bankruptcy problem by hydraulic rationing.Ïnternational Game Theory Review 14.01 (2012): 1250007.

[8] Gillies, Donald. “Some theorems on n-person games.”Ph. D. Dissertation, Princeton University, Department of Mathematics (1953).

[9] Herrero, Carmen, and Antonio Villar. “The three musketeers: four classical solutions to bankruptcy problems.”Mathematical Social Sciences 42.3 (2001): 307-328.

[10] Hwang, Yan-An. “Two characterizations of the random arrival rule.”Economic Theory Bulletin 3.1 (2015): 43-52.

[11] Joaquín Pérez, José Luis Jimeno, Emilio Cerdá. Teoría de juegos. Madrid: Garceta, 2013.

[12] Jose Maria Izquierdo y Aznar, Jesús Marín Solano, Francisco Javier Martínez de Albéniz Salas, Marina Núñez Oliva, Neus Ybern Carballo. Jocs cooperatius i aplicacions econòmiques. Barcelona: Publicacions de la Universitat de Barcelona, 1999.

[13] Kaminski, Marek M. “Hydraulic rationing.”Mathematical Social Sciences 40.2 (2000): 131-155.

[14] Knut Sydsæter, Peter Hammond, Atle Seierstad, Arne Strøm. Further Mathematics for Economic Analysis. Harlow: Prentice Hall, 2005.

[15] O’Neill, Barry. “A problem of rights arbitration from the Talmud.”Mathematical Social Sciences 2.4 (1982): 345-371.

[16] Maschler, Michael, Bezalel Peleg, and Lloyd S. Shapley. "Geometric properties of the kernel, nucleolus, and related solution concepts."Mathematics of operations research 4.4 (1979): 303-338.

[17] Schecter, Stephen. "How the Talmud divides an estate among creditors."Bridging Mathematics, Statistics, Engineering and Technology. Springer, New York, NY, 2012. 29-42.

[18] Schmeidler, David. "The nucleolus of a characteristic function game."SIAM Journal on applied mathematics 17.6 (1969): 1163-1170.

[19] Shapley, Lloyd S. "A value for n-person games.Çontributions to the Theory of Games 2.28 (1953): 307-317.

[20] Thomson, William. "Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: a survey."Mathematical social sciences 45.3 (2003): 249-297.

[21] Thomson, William. "Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: an update."Mathematical Social Sciences 74 (2015): 41-59.

[22] Von Neumann, J., Morgenstern, O. Theory of games and economic behavior. Princeton, NJ, US: Princeton University Press, 1944.

[23] Young, H. Peyton. Equity: in theory and practice. Princeton University Press, 1995.