UNIVERSITAT DE BARCELONA

Algunes qüestions de renormalització a la cromodinàmica quàntica

Domènec Espriu Climent

U N I V E R S I T A T   D E   B A R C E L O N A

Facultat de Física

ALGUNES QÜESTIONS DE RENORMALITZACIÓ A LA CROMODINÀMICA QUÀNTICA

Memòria presentada per
Domènec Espriu Climent
per tal d'optar al Grau de Doctor

B A R C E L O N A
1982

Departamento de Física Teórica
Facultad de Ciencias
Universidad de Barcelona

ROLF TARRACH SIEGEL, Professor Agregat Interí de la Facultat de Física, Universitat de Barcelona

CERTIFICA:

Que la present Memòria

"ALGUNES QÜESTIONS DE RENORMALITZACIÓ
A LA CROMODINÀMICA QUÀNTICA"

ha estat realitzada sota la meva direcció per En Domènec Espriu Climent i constitueix la seva Tesi per tal d'optar al Grau de Doctor en Física.

A fi de deixar constància, en compliment de la legislació vigent, presento davant la Facultat de Física d'aquesta Universitat l'esmentada Tesi.

Lliurant el present certificat a Barcelona el dia 30 de maig del 1982.

Rolf Tarrach

En aquestes circumstàncies és costum el dedicar unes paraules d'agraïment. M'agradaria, però, que les línies que segueixen expressessin prou fidelment, per sobre de tot formalisme, la meva gratitud a totes les persones que han fet possible el portar a terme la tasca que recull aquesta Memòria, al llarg d'aquests dos anys i escaig de treball il.lusionat.

En primer lloc, al Director de la Tesi, Rolf Tarrach, agrair-li les moltes hores esmerçades en la conducció efectiva del treball, així com l'ajuda i consell que he trobat sempre que li ho he demanat. També, com no, per la paciència demostrada a les discussions.

A Pere Pascual per les ajudes de tot tipus i en tot moment que en el decurs d'aquest temps m'ha ofert i per l'interès que continuament m'ha demostrat -i, per què no, per tot el que m'ha fet treballar.

A tots la meva sincera amistat. Ha estat un privilegi treballar amb ells en aquest camp excitant i si alguna cosa positiva hi ha a la Tesi seu és el crèdit.

El meu agraïment, també, als demés membres del departament, companys i amics. Molt especialment a Enric Camí i August Palanques.

ALGUNES QÜESTIONS DE RENORMALITZACIÓ A LA CROMODINÀMICA QUÀNTICA

Sembla obligat començar fent referència a les raons teò_
riques i experimentals que ens fan creure en la Cromodinàmi_
ca Quàntica com en la Teoria de Camps adient a la descripció
del món hadrònic.

Per a creure en una teoria necessitem, seguint Wightman,
dos requisists. Ha d'estar lliure de contradiccions i ha de
satisfer un rang més o menys ampli d'observacions experimen_
tals. És en aquests sentit que hom creu en les equacions de
Maxwell, però no ho fa en l'antiga teoria quàntica anterior
a la Mecànica Ondulatòria.

En els dos aspectes la resposta ha d'ésser matisada. -
Hom no ha estat capaç de solucionar d'una manera satisfatò_
ria QCD. Per això és possible que l'absència de contradic_
cions reflecteixi la nostra ignorància únicament. Pel que
coneixem fins aquest moment QCD és una teoria lliure d'incon_
sistències internes, al menys a un nivell molt fonamental.
És una teoria de gauge -i creiem en les teories de gauge per
a l'explicació de totes les interaccions- convenientment de_
finida -en un sentit ampli del terme, renormalitzable i uni_
tària. A grans trets, el problema que ens impedeix donar
una resposta conclusiva és la probable inexistència de la ma_
triu S al menys en un sentit pertorbatiu. Qualsevol ele_
ment de matriu que calculem sobre la capa màssica per les -
tècniques pertorbatives tradicionals-per un procediment en
tot semblant al que faríem a l'Electrodinàmica Quàntica-
resulta ser infinit fins i tot quan hom renormalitza acura_
dament les divergències ultra-violetes. Bé, això en princi_
pi no és preocupant. A QED també es presenten divergències
infra-roges. Així a l'Electrodinàmica hom pot exponenciar
les singularitats infra-roges dominants, obtenint-hi un fac_

tor que anul.la les amplituds de col.lisió elàstica. A QED, però, hom obté un segon factor que contra-resta el primer (ordre a ordre) si permetem un nombre arbitrari de fotons suaus a l'estat final (expressió d'un teorema més general degut a Kinoshita, Lee i Nauenberg). El resultat és una secció eficaç finita. A QCD les singularitats infra-roges són molt més severes. El resultat d'isolar les divergències dominants indica que les singularitats infra-roges poden exponenciar-se tot suprimint els processos en els que l'estat final no és singlet de color. Ara bé, quin és aqui el paper dels gluons suaus? Si el factor que és a QED està absent o la cancel.lació és incompleta hom podria generar el confinament per aquests mecanismes purament pertorbatius. No existeix cap resultat general, però fins l'ordre calculat sembla aplicar-se també el teorema de Kinoshita, Lee i Nauenberg i, per tant, el confinament no es veurà mai per resultats pertorbatius. Altrament, no apareix clara la connexió entre aquesta aproximació i la idea més tradicional d'un acoblament creixent a llargues distàncies.

Així doncs, si ningú ha aconseguit explicar un sol estat lligat amb els únics elements de QCD, d'on prové la nostra confiança? La cromodinàmica té com a camp de gauge els camps que porten un nou nombre quàntic: el color. La necessitat teòrica de l'existència del color es posa a la llum primerament en el problema de l'existència d'una estadística anòmala per als quarks . Experimentalment, $\pi^{\circ} \rightarrow 2\gamma$ o $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})/\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$ compten els graus de llibertat i, per tant, reflecteixen la necessitat del color. D'altra banda, les interaccions fortes requereixen d'una manera natural un nombre quàntic específic. Si la interacció es realitzés mitjançant unes partícules vectorials acoblades al sabor, les interaccions febles serien també fortes. Finalment, el lagrangià de QCD respecta totes les simetries ben conegudes de les interaccions fortes sense afegir-ne de noves.

Potser, però, el fet més frapant del lagrangià de QCD sigui l'existència de llibertat asimptòtica. Era ja conegut que més enllà de la zona de ressonàncies hadròniques les interaccions adopten un comportament més i més suau. Aparentment, les interaccions fortes decreixen amb l'energia . L'antic model de partons (l'evidència més definitiva en favor del quarks) donava compte de l'observat escalament en el límit de Bjorken. QCD recupera aquest comportament; va més enllà, però, pronosticant desviacions logarítmiques -compatibles amb les dades experimentals- respecte el comportament d'escalament. L'evidència de llibertat asimptòtica en les col.lisions profundament inelàstiques és certament una bona prova que les interaccions fortes són descrites per una teoria no abeliana de gauge. Una qüestió oberta a QCD és a quin moment comença el règim de llibertat asimptòtica.

Pot QCD explicar les ressonàncies a baixa energia? Deixant de banda models fenomenològics, dos són els camins oberts per a un enteniment de l'espectre a baixa energia, induït pel lagrangià de QCD (un espectre que avui entenem més bé i veiem molt més variat que no pensavem). Les teories de gauge en una xarxa són, sens dubte, l'única forma coneguda d'efectuar qualsevol càlcul més enllà de teoria de pertorbacions. Les dificultats, tant teòriques com materials trobades són considerables, però, avui en dia, hom ha aconseguit d'explicar magnitud típicament hadròniques amb uns errors acceptables. La qüestió és, però, lluny d'estar totalment explicada; tant d'un punt de vista pràctic per les limitacions de les xarxes actualment accessibles com per la interpretació del pas al continu.

L'altre mecanisme, pres de la física dels 60, és la utilització de les regles de suma (tècnica introduïda pel grup de l'ITEP). A diferència del càlcul en una xarxa, el mètode no és autosuficient. Si hom vol retenir contribucions (essencials) no pertorbatives, aquestes venen parametritzades per una sèrie de valors esperats en el buit només a trobar que per comparació amb l'experiment (o bé a obtenir a partir d'un càlcul en una xarxa).

El lagrangià de QCD ha demostrat una extraordinària riquesa de solucions a nivell semi-clàssic. Monopols, instantons, merons, vòrtexs,... són els elements de la fauna d'aquest món. El coneixement d'aquestes estructures teòriques extraordinàriament interessants va aixecar gran expectació. Potser l'explicació del confinament podia raure, després de tot, just a l'extrem oposat de teoria de pertorbacions. Passat un temps, la impressió general és molt diferent; cap d'aquestes estructures sembla proveir un mecanisme per a l'explicació de la fase de PCAC, encara que hom ha trobat resultats interessants, com p. ex. la solució de 't Hooft al problema $U_A(1)$. Altres intents han estat dirigits a solucionar QCD en menys dimensions. 't Hooft ha provat l'exitència de confinament en 1+1 dimensions, però, com diu Zichichi, "només poden haver spaghetti en quatre dimensions". L'estructura, no cal dir-ho, pot ser totalment diferent. En 1+1 dimensions també QED confina.

Si, malgrat les actuals deficiències, és innegable la quantitat d'evidència en favor de QCD; d'altra banda, la Cromodinàmica ha suposat, juntament amb la teoria electro-dèbil, un formidable repte teòric dirigit vers un millor enteniment de les subtilitats de les teories de camps. En particular, els mecanismes de la renormalització. En el nostre llenguatge renormalitzar una teoria suposa trobar un mecanisme adient per a subtreure sistemàticament les divergències ultra-violetes que apareixen en el càlcul de qualsevol quantitat. Però renormalitzar és, també, fer el contacte amb el món físic; donar significat als paràmetres de la teoria.

Retornant un xic a l'inici, val la pena assenyalar el fet que els creadors de l'Electrodinàmica Quàntica no creien en ella, car pensaven que era internament inconsistent. QED presenta les mateixes dificultats que les ben conegudes de l'electro-magnetisme clàssic tractant electrons puntuals. Ambdues teories tenen auto-energies divergents. La diferència -la millora si voleu- és que a on l'electrodinàmica clàssica presenta una divergència que va com una potència, QED només hi té una singularitat logarítmica en el regulador de la integral.

Altres sorpreses més agradables foren que els processos calculats en l'aproximació de Born (efecte Compton, Bremsstrahlung,...) presentaven un excel.lent acord amb l'experiència si hom negligia les correccions (divergents) radiatives. Seguint aquest camí, els èxits persistiren amb la introducció de la teoria de Fermi de la radioactivitat beta i la teoria de Yukawa de les forces nuclears. Encara que en el moment de ser formulada la teoria de Fermi, degut a imperfeccions experimentals, l'acord només era parcial, la teoria descriu perfectament les experiències de desintegració beta.

Tot i així, en la primitiva teoria de camps la presència de divergències era entesa fins a principi dels anys 40 com evidència palpable d'inconsistència interna. Com a resposta, hi havia certament latent un ànim de canvi dels fonaments físics de les TQC, o, al menys, d'algun d'ells. Així, p. ex. quan es tingueren les indicacions primeres de l'enorme poder de penetració dels raigs còsmics hom va pensar en un esfondrament de QED a energies iguals o menors de les dels raigs. Més tard Heisenberg assenyalà la diferència entre teories com l'Electrodinàmica i la teoria de Fermi de les interaccions febles en la que la constant d'acoblament té dimensions d'una potència positiva de longitud, tot i esmentant la possibilitat de la necessitat d'introduir una "longitud fonamental" que, d'alguna forma, hauria de proveir un cut-off a les teories de camps. Clarament quan Heisenberg va escriure els papers sobre la matriu S tenia in mente un formalisme alternatiu a les teories lagrangianes permetent-li d'introduir la dita longitud fonamental típica de cada teoria (una idea que certament en un context diferent és, curiosament, certa).

La renormalització pertorbativa, ordre a ordre, que té les seves arrels en els treballs de Dirac sobre la renormalització de la càrrega en els anys 30 i, més modernament, en els treballs de Kramers en els 40, fou desenvolupada sis_ temàticament en el període 1945-52. Hom va veure dos tipus de teories. Només en aquelles que avui coneixem per renormalitzables o super-renormalitzables totes les divergències poden expressar-se en un nombre finit de quantitats. El procés d'isolar aquestes divergències i afegir els contra-termes necessaris per a mantenir el significat físic dels paràmetres és renormalitzar.

És possible que la nostra exigència de renormalitzabilitat en el criteri que li venim donant sigui massa exigent, però, tot i que hom ha fet intents de resumar sèries de diagrames divergents, etc., avui per avui és una demanda a fer a qualsevol teoria aspirant a contenir un mínim de significat físic. En la pràctica això vol dir que estan prohibides les constants d'acoblament amb dimensions de potències positives d'una longitud i tots els propagadors per a p^2 gran s'han de comportar com $(p^2)^{-1}$ per bosons i $(p^2)^{-1/2}$ per a fermions. QED satisfà tots aquests requisists i és la prova més palpable que, a despit de les inicials suspicàcies, està lliure de contradiccions internes. L'espectre de dades a les que QED dóna satisfacció amb exactitud impressionant és -- extraordinari (efecte Lamb, estructura fina del positronium, estructura hiperfina de l'hidrògen,...).

La demostració de la renormalitzabilitat i unitarietat de les teories no abelianes de gauge fou donada en 1971. -- Un ajut important fou la introducció dels fantasmes de Faddeev i Popov per a remoure els graus de llibertat no físics. En totes aquestes qüestions ha estat decisiu l'ús dels mètodes funcionals primerament emprats per Schwinger i posteriorment desenvolupats per Feynman.

El programa de renormalització d'una teoria quàntica de camps rau en l'observació que re-definint camps i paràmetres ordre per ordre hom absorbeix totes les divergències en un nombre determinat de quantitats. Si bé hom està forçat en aquesta re-definició per l'eliminació de les divergències, hom reté, certament, una arbitrarietat en les parts finites. El conjunt (infinit) de les diferents re-definicions finites constitueix el grup de renormalització.

L'ús primer d'aquest grup de renormalització va ser -- fet per Gell-Mann i Low i també Peterman i Stückelberg. Al calcular la renormalització de la càrrega en QED varen veure que un canvi en l'escala d'energies era compensat per un canvi en la càrrega renormalitzada. Això porta a una equació diferencial per al propagador del fotó, vàlida a qualsevol ordre en teoria de pertorbacions. El comportament d'aquest propagador (en general, de qualsevol funció de - Green) a altes energies era conegut si hom coneixia els zeros d'una certa funció (la funció de Gell-Mann i Low). Més tard Bogolubov, Shirkov i Osviannikov varen estendre el formalisme.

En la seva forma original l'equació del grup de renormalització a la Gell-Mann i Low conservava un significat més aviat fosc. La raó fonamental era que a l'única teoria de camps que hom disposava aleshores, QED, hi ha una prescripció clara de renormalització; la renormalització a la capa màssica. Per a més complicació, si hom introduïa un terme de massa en el lagrangià, trencant,per tant, la invariància d'escala que s'exhibeix clàssicament, era precís afegir un terme contenint una inserció de massa. Aquesta inserció d'acord amb el teorema de Weinberg no és relevant a altes energies. QED, a més, presenta un acoblament fort a molt altes energies.

En el món hadrònic, la realització d'experiències a -- energies creixents, singularment processos semi-leptònics i electroproducció, portaren a un primer pla l'interès per l'estructura i comportament de les teories de camps en col·lisions profundament inelàstiques. A finals dels anys 60 quedà ben establert l'escalament de Bjorken en experiències d'electroproducció. Eventualment, qualsevulla teoria que intentés explicar les interaccions fortes havia de donar compte del decreixement de la interacció a molt curtes distàncies.

El quasi-oblidat grup de renormalització semblava aleshores una eina apropiada per a l'atac al problema. Una teoria de camps renormalitzable mitjançant subtraccions en un punt arbitrari no pot ser invariants sota canvis d'escala. La raó és ben sabuda; hom ha d'introduir alguna magnitud dimensional, fins i tot en regularització dimensional. D'aquesta manera Callan i Symanzik varen donar una formulació correcta a la dependència en l'escala d'energies. Aquesta formulació s'expressa en equacions diferencials que governen el comportament asimptòtic de la teoria. Aquesta és l'aproximació més estesa al grup de renormalització.

Des d'un punt de vista més general, la filosofia que - està al darrera del grup de renormalització és d'extraordinari contingut físic i la transcendència va més enllà de les TQC. Quantitat de sistemes físics com p. ex. un aliatge -- binari o un sistema d'spins prop d'una transició de fase de segon ordre són invariants sota un canvi d'escala si hom fa les coses "apropiadament", re-escalant també la interacció. Són sistemes físics, en definitiva, independents del comportament a curtes distàncies de la teoria que els descriu. A les teories de camps l'exigència de renormalitzabilitat implica la independència en les quantitats observables del domini ultra-violeta, és a dir, de les curtes distàncies. L'introductor principal en molts camps de les tècniques del grup de renormalització ha estat Wilson. A l'estudi de les teories de gauge en una xarxa té lloc una curiosa inter-relació entre conceptes fins fa poc tan separats com la física d'altes energies i la mecànica estadística.

Les tècniques del grup de renormalització són completament generals per a qualsevol teoria de camps. Quan hom intentà, a la llum de les equacions de Callan-Symanzik, si l'observat escalament s'obtenia de les teories de camps, hom trobà (1973) que totes les teories, tret de la notable excepció de les teories no abelianes de gauge sense trencament espontani de simetria, presentaven una zona d'altes energies no accessible pertorbativament. Les excepcions, com QCD, tenen llibertat asimptòtica. El comportament a altes energies ve governat per una zona d'acoblament feble i ara el grup de renor_ malització permet efectivament de trobar el tan observat - escalament i les les desviacions logarítmiques provinents, en última instància, del trencament de la invariància d'es_ cala.

- - - - - - - - - - -

Malgrat l'increment qualitatiu i quantitatiu dels nos_ tres coneixements sobre l'estructura i propietats de QCD, no cal dir que resten nombroses qüestions obertes. L'objectiu de tots els esforços és, en últim terme, obtenir informació a baixes energies del lagrangià de QCD. Tots els problemes que hem fet esment persisteixen tenaçment. A energies per sota d'uns pocs GeV la llibertat asimptòtica desapareix. -- Com trobar aleshores resultats de la teoria? Al créixer la constant d'acoblament al baixar del domini de col.lisions a alta energia, com obtenir prediccions en una sèrie pertor_ bativa amb una constant d'acoblament gran que, a més, depèn de l'esquema de renormalització?

Hi han moltes altres dificultats dins el marc de la QCD pertorbativa; elecció de l'esquema de renormalització, càrregues efectives, operadors no locals i operadors com_ postos, funcions del grup de renormalització a ordres su_ periors, parametrització de divergències infra-roges, llur equació tipus grup de renormalització, sumabilitat de la -- sèrie, ... per dir-ne només unes quantes de les llacunes -- existents. La major part d'aquests punts són d'interès ge_ neral en teories de camps.

Aquesta Tesi pretén estudiar alguns dels dits punts. En un camp tan estès i en ràpid desenvolupament com ho és el de les teories de gauge, un treball d'aquestes caracte_ rístiques no pot sinó consistir, creiem, en una sèrie d'ar_ ticles més o menys compaginats. Aquesta és, en efecte, l'es_ tructura d'aquesta Memòria. Segurament l'exposició i ordenació s'en resenteix d'aquest origen, raó per la que hom demana la indulgència del lector. El curt temps passat també ha deixat sentir la seva petxada. Així, la part II en la que hom estudia la definició d'una constant efectiva d'acoblament invariant gauge -una qüestió intensament discutida a la literatura en el moment de la seva publicació- ha perdut part del seu interès, amb prou feines uns mesos després. Una servitud inevitable.

La part original de la present Tesi ha estat recollida en els articles següents:

"A Unique Coupling Constant in QCD", D. Espriu i R. Tarrach, Physics Letters 102B, 163 (1981)
"Effective Coupling Constant in Quantum Chromodynamics", D. Espriu, P. Pascual i R. Tarrach, Journal of Physics G 7, 1591 (1981)
"On Prescription Dependence of Renormalization-group Functions", D. Espriu i R. Tarrach, The Physical Review D 25, 1073 (1982)
"Renormalization of the Axial Anomaly Operators", D. Espriu i R. Tarrach, Zeitschrift für Physik C-Particles and Fields (acceptat)

L'apartat I vol servir de recull de resultats necessaris i de recordatori de notació. A més de la part II, ja dita, hom estudia a la secció III la dependència en la prescripció de les funcions del grup de renormalització. A l'última part, IV, la més estesa, hom ha volgut estudiar la renormalització dels operadors de l'anomalia axial.

- - - - - - - - - - -

So, what happened to the old theory that I fell in love with as a youth? Well, I would say it's become an old lady, that has very little attractive left in her and the young today will not have their hearts pound when they look at her anymore. But, we can say the best we can for any old woman, that she has been a very good mother and she has given birth to some very good children.

R.P. Feynman

I.1 El lagrangià de QCD

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{QCD} = & -\frac{1}{4} F^{(a)}_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}_{(a)}(x) + i \sum_{j=1}^{N_f} \bar{\Psi}^{\alpha}_j(x) \gamma^{\mu} (D_\mu)_{\alpha\beta} \Psi^{\beta}_j(x) \\
& - \sum m_j \bar{\Psi}^{\alpha}_j(x) \Psi_{\alpha j}(x) \\
& - \frac{1}{2a} (\partial_\mu W^{\mu}_{(a)})^2 \qquad \text{(gauge fixing term)} \qquad (1) \\
& - (\partial_\mu \bar{\varphi}^{(a)}(x))(D^{\mu}_{ab} \varphi^{(b)}(x)) \qquad \text{(fantasmes de Faddeev-Popov)}
\end{aligned}
$$

amb $F^{(a)}_{\mu\nu} = \partial_\mu W^{(a)}_\nu - \partial_\nu W^{(a)}_\mu + g f_{abc} W^{(b)}_\mu W^{(c)}_\nu$ (2)

i

$$
\begin{aligned}
(D_\mu)_{\alpha\beta} &= \delta_{\alpha\beta} \partial_\mu - ig \sum_a \frac{\lambda^{(a)}_{\alpha\beta}}{2} W^{(a)}_\mu \qquad (3) \\
(D_\mu)_{ab} &= \delta_{ab} \partial_\mu - g f_{abc} W^{(c)}_\mu
\end{aligned}
$$

$\mathcal{L}_{QCD}$ és invariant sota les transformacions infinite_ simals uniparamètriques[1]

$$
\begin{aligned}
W^{(a)}_\mu &\longrightarrow W^{(a)}_\mu + \omega (D_\mu \varphi)^{(a)} \\
\psi &\longrightarrow \exp(-ig\omega \vec{T} \vec{\varphi}) \psi \\
\bar{\varphi}^{(a)} &\longrightarrow \bar{\varphi}^{(a)} + \frac{\omega}{a} \partial^\mu W^{(a)}_\mu \qquad (4) \\
\varphi^{(a)} &\longrightarrow \varphi^{(a)} - \frac{1}{2} g \omega \varphi^{(b)} f_{abc} \varphi^{(c)}
\end{aligned}
$$

les matrius $T^{(a)}$ són els generadors de l'algebra de $SU_c(3)$

$$[T^{(a)}, T^{(b)}] = i f_{abc} T^{(c)} \qquad (5)$$

$$(T^{(a)})_{bc} = -i f_{abc} \qquad \text{(rep. adjunta)} \qquad (6)$$

$$(T^a)_{\alpha\beta} = \frac{\lambda^{(a)}_{\alpha\beta}}{2} \qquad \text{(rep. fonamental)} \tag{1}$$

$\lambda^{(a)}_{\alpha\beta}$: matrius de Gell-Mann

Els casimirs associats són

$$(T^a)_{\alpha\beta}(T^a)_{\beta\gamma} = C_2(R)\delta_{\alpha\gamma} = \frac{N^2-1}{2N}\,\delta_{\alpha\gamma}$$
$$(T^a)_{bc}(T^a)_{cd} = C_2(G)\,\delta_{bd} = N\,\delta_{bd} \tag{2}$$

(per a SU(N)).

I.2 Simetries globals

El lagrangià de QCD és invariant sota les transforma_-cions uniparamètriques

$$\psi(x) \longrightarrow \exp(-i\theta I)\,\psi(x) \qquad \theta : ct. \qquad \psi = \begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_d \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{3}$$

I és la matriu identitat N_f-dimensional. El corresponent -- corrent de Noether és:

$$J_\mu(x) = \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{i=1}^{N_f} \bar{\psi}_i^\alpha(x)\,\gamma_\mu\,\psi_i^\alpha(x) \tag{4}$$

amb una càrrega associada, el nombre bariònic, que és, per tant, conservat.

$$B = \int d^3x\; J_0(\vec{x},t) \tag{5}$$

A més, (1.1) és invariant sota transformacions inde_--pendents per a cada un dels sabors

$$\psi_j(x) \longrightarrow \exp(-i\theta_j)\,\psi_j(x) \qquad j = 1,\ldots,N_f \tag{6}$$

Per a cada j existeix un grup associat $U_j(1)$, grup que és una simetria global del lagrangià. $\mathcal{L}_{QCD}$ és, com a conseqüèn_ cia, invariant sota $U_{up}(1) \times U_{down}(1) \times \ldots$ El significat físic d'aquesta simetria global és clar: les interaccions -- fortes conserven separadament els sabors.

D'existir a més degeneració en dues masses (p. ex. $m_u = m_d$), hi ha una simetria global sota $SU_{u,d}(2)$. Si la degeneració s'estén a totes les masses, la simetria és $SU(N_f)$

$$\psi \longrightarrow \exp\left(-i\,\theta^{(A)} T^{(A)}\right)\psi \qquad A=1,\ldots N_f^2-1 \tag{1}$$

(índex A no sumat)

juntament amb la simetria global (2.3).

En el límit $m_j = 0$ apareix una nova simetria

$$\begin{aligned} \psi &\longrightarrow \exp\left(-i\,\theta^{(A)}\gamma_5\, T^{(A)}\right)\psi \\ \psi &\longrightarrow \exp\left(-i\,\theta^{(A)}\gamma_5\, I\right)\psi \end{aligned} \tag{2}$$

Els corresponents corrents de Noether són (suprimint-hi -- l'índex de color)

$$\begin{aligned} V_\mu^{(A)} &= \bar{\psi}^i \gamma_\mu T_{ij}^{(A)} \psi^j \\ A_\mu^{(A)} &= \bar{\psi}^i \gamma_\mu \gamma_5 T_{ij}^{(A)} \psi^j \\ J_\mu^5 &= \bar{\psi}^i \gamma_\mu \gamma_5 \psi_i \qquad \text{(corrent axial bariònic)} \end{aligned} \tag{3}$$

Les càrregues associades

$$\begin{aligned} Q^{(A)} &= \int d^3x \;\; V_0^{(A)}(\bar{x},t) \\ Q_5^{(A)} &= \int d^3x \;\; A_0^{(A)}(\bar{x},t) \\ Q_5 &= \int d^3x \;\; J_0^5(\bar{x},t) \end{aligned}$$

satisfan l'algebra quiral

$$[Q^{(A)}, Q^{(B)}] = i f^{ABC} Q^{(C)} \qquad [Q^{(A)}, Q_5^{(B)}] = i f^{ABC} Q_5^{(C)}$$
$$[Q_5^{(A)}, Q_5^{(B)}] = i f^{ABC} Q^{(C)} \tag{1}$$

$$Q_L^{(A)} \equiv \frac{1}{2}(Q^{(A)} - Q_5^{(A)}) \qquad Q_R^{(A)} \equiv \frac{1}{2}(Q^{(A)} + Q_5^{(A)}) \tag{2}$$

La simetria global de QCD en el límit sense masses és:

$$SU_L(N_f) \times SU_R(N_f) \times U_B(1) \times U_A(1) \tag{3}$$

Com es tradueixen a l'espectre de partícules observades aquestes simetries ? Qualsevol simetria pot relitzar-se a la natura de dues formes diferents.

1) A la Wigner-Weyl. El buit és annihilat pels generadors del grup de simetria ($Q|0\rangle = 0$). El teorema de Coleman[2] garanteix aleshores que els estats físics s'ordenen seguint les representacions irreduibles del grup. Si fos aquesta la realització que la natura ha escollit hi haurien multiplets doblats amb totes les mateixes característiques (dins dels límits del trencament de (3)).

2) A la Goldstone-Nambú. El teorema de Goldstone[3] és ara el que estableix que per a cada generador sota el qual el buit no s'annihila apareix un mesó de massa nula i spin zero.

Capritxosament (?) la natura no ha triat cap de les dues possibilitats. D'una banda no veiem doblets de paritat amb les mateixes característiques ($(0^-,0^+)$, $(1^+,1^-)$, $(1/2^+,1/2^-)$ ...). Altrament, si bé podem assignar l'octet 0^- als mesons de Goldstone provinents de $Q_5^{(A)}$ no hi han candidats per a $Q^{(A)}$. La realització escollida és:

$$Q^{(A)}|0\rangle = 0 \qquad Q_5^{(A)}|0\rangle \neq 0 \tag{1}$$

Existeix un multiplet de mesons de Goldstone pseudo-escalars i un conjunt de multiplets massius, amb masses degenerades. Per suposat, la simetria quiral no és una simetria exacta; els mesons de Goldstone adquireixen una massa i es trenca la degeneració dins de cada multiplet. Com $m_u \sim m_d \sim 0$, el grup d'isospin sí és bona simetria.

El problema, com és sabut, es presenta amb $U_A(1)$. No coneixem cap nova simetria de la natura, cap nou nombre quàntic. Si la simetria s'implementa a la Nambú-Goldstone apareixerà una nova partícula lleugera, pseudo-escalar,... pot ser la η ? No. Weinberg ha demostrat que $m_\eta \leq \sqrt{N}\, m_\pi$, per a SU(N).

J_μ^5 no pot ésser un corrent conservat. En realitat hom sap (Cfr. secc. IV) que aquest corrent presenta una divergència anòmala

$$\partial_\mu J_5^\mu = -\frac{g^2}{32\pi^2} N_f\, \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu}^{(a)} F_{\alpha\beta}^{(a)} \tag{2}$$

(en absència de masses)

Pot definir-se a partir de (2) un corrent que satisfaci $\partial_\mu \bar{J}_5^\mu = 0$,

$$\bar{J}_5^\mu = J_5^\mu + \frac{2g^2}{32\pi^2} N_f\, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} W_\nu^{(a)} \Big\{ \partial_\rho W_\sigma^{(a)} + \frac{1}{3} g f_{abc} W_\rho^{(b)} W_\sigma^{(c)} \Big\} \tag{3}$$

però $\bar{J}_5^\mu$ és dependent del gauge i per tant no és observable. Tot i així la càrrega associada

$$\bar{Q}_5 = \int d^3x\, \bar{J}_5^0(x) \tag{4}$$

no depèn del gauge[4]. Aquest resultat ja era conegut per a les teories no abelianes[5]. A més

$$\dot{Q}^5 = 0 \tag{1}$$

$\overline{Q}^5$ és, doncs, una càrrega conservada invariant gauge; això vol dir observable.

A la QCD existeix un invariant topològic, l'índex de Pontryaguin

$$q = \frac{g^2}{32\pi^2}\int d^4x \ \epsilon_{\mu\nu\kappa\beta} \ F^{\mu\nu}_{(a)} F^{\alpha\beta}_{(a)} \tag{2}$$

que pot recòrrer tots els valors enters[6]. Si $q \neq 0$ el buit de QCD té una estructura (Θ vac.), apareixent instantons. En aquest cas ja no és certa la independència del gauge de $\overline{Q}^5$. El trencament de $U_A(1)$ està, en definitiva, íntimament lligat a la presència d'instantons.

I.3 Tensor Energia-Impuls

En absència de masses hi ha encara una nova simetria a (1.1). Per pures raons dimensionals, si $\Gamma^{(n)}(p_1 \ldots p_n)$ és una funció de Green D-dimensional; a nivell clàssic

$$\left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} - D \right) \Gamma^{(n)}(\xi p_1, \ldots, \xi p_n) = 0 \tag{3}$$

o bé, a l'espai de posicions

$$\left(D + \sum_{i=1}^{n} x_i^{\mu} \frac{\partial}{\partial x_i^{\mu}} \right) \dot{\Gamma}^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = 0 \tag{4}$$

A nivell del lagrangià la invariància sota canvi d'escala es tradueix en la simetria sota (Φ_i son genèricament els camps)

$$\Phi_i \longrightarrow \xi^{d_i} \Phi_i(\xi x) \quad , \quad d_i = \dim \Phi_i \tag{5}$$

o, infinitesimalment ,

$$\delta \Phi_i = d_i \Phi_i + x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Phi_i \tag{1}$$

$$\Rightarrow \quad \delta \mathcal{L} = 4\mathcal{L} + x^\mu \partial_\mu \mathcal{L} = \partial_\mu (x^\mu \mathcal{L}) \tag{2}$$

El corrent de Noether associat és el corrent de dilatacions

$$\begin{aligned} D^\mu &= \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_i)} \Phi_i d_i + x_\lambda T^{\mu\lambda} \\ &= \sum_i \Pi_i^{\ \mu} d_i \Phi_i + x_\lambda T^{\mu\lambda} \end{aligned} \tag{3}$$

$T^{\mu\lambda}$ és el tensor energia-impuls canònic

$$\begin{aligned} T^{\mu\lambda} &= \sum_i \Pi_i^{\ \mu} \partial^\lambda \Phi_i - g^{\mu\lambda} \mathcal{L} \\ \partial_\mu T^{\mu\lambda} &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Noteu que si el lagrangià no satisfà (2), sinó que, degut a la presencia d'un terme màssic,

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu (x^\mu \mathcal{L}) + \Delta \tag{5}$$

aleshores

$$\partial^\mu D_\mu = \Delta \tag{6}$$

La càrrega associada, $D = \int d^3x \; D_0(\bar{x},t)$, actua com el generador de les transformacions d'escala

$$\left[D(x_0), \Phi_i(x) \right] = -i \left(d_i + x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \Phi_i(x) \tag{7}$$

El tensor energia-impuls (4) no és, però, invariant --gauge, ni tampoc simètric en els seus índexs. Malgrat tot això hi ha una certa arbitrarietat en la seva definició[8-11]. És possible definir, sempre a nivell clàssic, un nou tensor $\tilde{\theta}_{\mu\nu}$ que verifiqui les propietats:

i) Sigui invariant gauge.

ii) Sigui simètric. El tensor de moment angular (orbital)ve donat per

$$M^{\lambda\mu\nu} = x^{\mu}\tilde{\theta}^{\lambda\nu} - x^{\nu}\tilde{\theta}^{\lambda\mu} \tag{1}$$

i les càrregues corresponents son conservades.

iii) Sigui conservat, $\partial_{\mu}\tilde{\theta}^{\mu\nu} = 0$, i sense traça en absència de masses, $\tilde{\theta}^{\mu}{}_{\mu} = 0$.

iv) Es verifiqui, igual que per a $T^{\mu\nu}$,

$$P^{\mu} = \int d^3x \ \tilde{\theta}^{0\mu}(\bar{x},t) \tag{2}$$

És encara possible una redefinició[11], $\theta_{\mu\nu}$, tal que

$$D^{\mu} = x_{\nu}\,\theta^{\mu\nu} \tag{3}$$

i continui satisfent i)-iv). Per tant,

$$\partial^{\mu} D_{\mu} = \Delta = \theta^{\mu}{}_{\mu} \tag{4}$$

Deixem de costat qüestions com la finitud d'equest tensor o, fins i tot, la seva expressió explícita. En el procés de renormalització la invariància sota canvis d'escala es perd. Fins i tot en una teoria sense masses apareix una escala d'energies que li és pròpia (transmutació dimensional). La divergència del corrent de dilatacions -la traça del tensor energia-impuls- és aleshores distinta de zero.

I.4 Renormalització de funcions de Green

Per a una ulterior renormalització és necessari regularitzar les integrals divergents que apareixen en qualsevol càlcul a partir d'un cert ordre. El mètode universalment acceptat com a més adient per a teories no abelianes de --

gauge és la regularització dimensional[12,13].

En $D = 4+2\epsilon$ dimensions els camps i paràmetres de -- (1.1) adquireixen una dimensionalitat

$$
\begin{aligned}
[W_\mu] &= M^{\frac{D}{2}-1} & [g] &= M^{-\frac{D}{2}+2} \\
[\Psi] &= M^{\frac{D-1}{2}} & [m] &= M \\
[\varphi] &= M^{\frac{D}{2}-1} & [a] &= M^{0}
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Una vegada regularitzada amb ϵ la teoria ha de renormalitzar-se. El procediment de renormalització implica realitzar totes les subtraccions independents dels moments necessàries per a fer finita qualsevol funció de Green. Que això és possible a tots els ordres no és un fet trivial. -- QCD és, però, una teoria de camps renormalitzable i és possible trobar sempre la dita subtracció.

En teoria de pertorbacions el programa de renormalització passa per subtreure les divergències dels diagrames - que apareixen en el càlcul d'una quantitat donada; de manera que es satisfaci ordre per ordre una certa condició de renormalització (sempre compatible amb l'ordre més baix)

En general tot diagrama conté subdiagrames divergents. g és un subdiagrama de G si és un subconjunt de vèrtexs de G amb totes les línies que els uneixen directament. A cada diagrama propi G associem una familia $\mathcal{F}$ de tots els subdiagrames propis i connexes. Si el grau superficial de divergència, $\omega(g)$, $\omega(g) < 0 \;\; \forall g \in \mathcal{F}$, el diagrama és convergent. Si $\omega(g) < 0 \;\; \forall g \in \mathcal{F}$, $g \neq G$ i $\omega(G) \geq 0$ totes les divergències es troben en un polinomi de grau $\omega(G)$ en els moments externs i les masses.

Considerem una funció pròpia $\Gamma^{(n)}$, representada per un diagrama G. Direm $\bar{R}_\Gamma$ a aquell integrand al qual -

hom ha fet les addicions de tots els contra-termes de tots els subdiagrames divergents. Tanmateix, R_Γ serà l'integrand que fa finita la integral. Si Γ no té divergència primitiva $R_\Gamma = \bar{R}_\Gamma$. Finalment I_Γ és l'integrand obtingut a partir de les regles de Feynman.

En el cas que $\omega(G) \geqslant 0$, la diferència entre R_Γ i $\bar{R}_\Gamma$ ha d'eliminar-se amb l'ajut de la pertinent subtracció. En el formalisme BPHZ[14] la renormalització es fa mitjançant tantes subtraccions en la funció, primera derivada,... com sigui necessari per a satisfer les condicions de renormalització. Genèricament T_G serà la sèrie Taylor en el punt (euclidià per a una teoria sense masses) que fem la substracció fins l'ordre necessari.

Per tant

$$R_\Gamma = (1 - T_G)\bar{R}_\Gamma \tag{1}$$

D'haver-hi subdiagrames divergents, parts de renormalització, hom ha de subtreure les noves divergències. El procediment general queda explicitat en la fórmula de recurrència de Bogoliubov

$$\bar{R}_\Gamma = I_\Gamma + \sum_{\substack{\{\gamma_1,\dots,\gamma_s\} \\ \gamma_a \cap \gamma_b = \phi}} I_{\Gamma/\{\gamma_1\dots\gamma_s\}} \prod_{a=1}^{s} (-T_{\gamma_a}\bar{R}_{\gamma_a}) \tag{2}$$

γ : parts de renormalització

Hom agrupa les parts de renormalització en boscos. Un bosc de tipus U de parts de renormalització d'un diagrama G és una familia de parts de renormalització de G els membres de la qual satisfan

$$\gamma_i \cap \gamma_j = \phi \quad o \quad \gamma_i \subset \gamma_j \quad o \quad \gamma_j \subset \gamma_i \tag{3}$$

Un bosc tipus V satisfà els mateixos requisists que els de tipus U, però, a més, no conté el diagrama total G.

La solució de la fórmula de recurrència de Bogoliubov s'expressa, en termes de boscos U i V

$$\bar{R}_\Gamma = \sum_{V(G)} \prod_{\gamma \in V} (-T_\gamma) I_\Gamma \qquad (1.a)$$

$$T_\gamma I_\Gamma \equiv I_{G/\gamma} T_\gamma I_\gamma$$

$$R_\Gamma = \sum_{U(G)} \prod_{\gamma \in U} (-T_\gamma) I_\Gamma \qquad (1.b)$$

S'entén que actua primerament la substracció en el -- diagrama interior. És clar que si G no és superficialment divergent els boscos U i V coincideixen.

Encara que en el programa BPHZ no hi ha necessitat de regular les integrals i és extremadament útil per a demostrar certes propietats generals, a l'hora de la pràctica, per a qualsevol càlcul és imprescindible la regularització de les divergències i la renormalització multiplicativa ordinària. En definitiva

$$R_\Gamma = (1 - \Delta_\Gamma) I_\Gamma \qquad (2)$$

Δ_Γ, independent dels moments.

En particular, els camps i paràmetres de la teoria vindran afectats d'una renormalització. Donat que la teoria és renormalitzable no hi hauran més divergències primitives que paràmetres i camps a renormalitzar en el lagrangià. És possible, aleshores, afegint els contra-termes escaients, incloure en el lagrangià la renormalització de la teoria.

$$\mathcal{L}_{QCD} \longrightarrow \mathcal{L}_{QCD} + \Delta \mathcal{L}_{QCD} \qquad (3)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{QCD} \rightarrow \mathcal{L}_{QCD} &+ \Delta_3 \frac{1}{4}(\partial_\mu \vec{W}_\nu - \partial_\nu \vec{W}_\mu)(\partial^\mu \vec{W}^\nu - \partial^\nu \vec{W}^\mu) \\ &+ \Delta_1 \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{W}_\nu - \partial_\nu \vec{W}_\mu) g\, \vec{W}^\mu \wedge \vec{W}^\nu \\ &+ \Delta_5 \frac{1}{4} g^2 \vec{W}_\mu \wedge \vec{W}_\nu \cdot \vec{W}^\mu \wedge \vec{W}^\nu \\ &- \Delta_2\, i \sum_j \bar{\psi}_j \gamma^\mu \partial_\mu \psi_j + \Delta_4 \sum_j m_j \bar{\psi}_j \psi_j \\ &- \Delta_{1F}\, g\, \bar{\psi} \frac{\vec{\lambda}}{2} \gamma^\mu \psi \vec{W}_\mu + \Delta_6 \frac{1}{2a}(\partial_\mu \vec{W}^\mu)^2 \\ &+ \tilde{\Delta}_3\, \partial_\mu \vec{\bar{\varphi}}\, \partial^\mu \vec{\varphi} + \tilde{\Delta}_1\, g\, \partial_\mu \vec{\bar{\varphi}} \cdot \vec{W}^\mu \wedge \vec{\varphi}\,. \end{aligned} \qquad (1)$$

Les corresponents constants de renormalització són:

$$\begin{aligned} Z_{2F} &= 1 - \Delta_2 & \tilde{Z}_3 &= 1 - \tilde{\Delta}_3 \\ Z_{1F} &= 1 - \Delta_{1F} & \tilde{Z}_1 &= 1 - \tilde{\Delta}_1 \\ Z_{3YM} &= 1 - \Delta_3 & Z_4 &= 1 - \Delta_4 \\ Z_{1YM} &= 1 - \Delta_1 & Z_5 &= 1 - \Delta_5 \\ & & Z_6 &= 1 - \Delta_6 \end{aligned} \qquad (2)$$

Camps i paràmetres despullats de la teoria:

$$\begin{aligned} W_\mu^{(a)\,0} &= Z_{3YM}^{1/2}\, W_\mu^{(a)} & g_{0\,YM} &= Z_{1YM}\, Z_{3YM}^{-3/2}\, g \\ \varphi^{(a)\,0} &= \tilde{Z}_3^{1/2}\, \varphi^{(a)} & \tilde{g}_0 &= \tilde{Z}_1 \tilde{Z}_3^{-1} Z_{3YM}^{-1/2}\, g \\ \psi^0 &= Z_{2F}^{1/2}\, \psi & g_{0F} &= Z_{1F}\, Z_{3YM}^{-1/2}\, Z_{2F}^{-1}\, g \\ m_j^0 &= Z_4 Z_{2F}^{-1} m_j & g_{0\,5}^2 &= Z_5 Z_{3YM}^{-2}\, g^2 \\ \frac{1}{a_0} &= Z_6 Z_{3YM}^{-1} \frac{1}{a} \end{aligned} \qquad (3)$$

El mecanisme de renormalització ha de satisfer la identitat d'Slavnov-Taylor[15]

$$\frac{Z_{1YM}}{Z_{3YM}} = \frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3} = \frac{Z_{1F}}{Z_{2F}} = \frac{Z_5}{Z_{1YM}} \tag{1}$$

Els camps i paràmetres despullats formen un lagrangià formalment idèntic al primitiu (en particular, les mateixes regles de Feynman). En termes de les constants de renormalització una funció de Green renormalitzada s'obtindrà com

$$\Gamma(p_1 \ldots p_N, g, a, m_j, \mu) = \lim_{\epsilon \to 0} (Z_{3YM}^{-1/2})^G (\tilde{Z}_3^{-1/2})^{\phi\pi} (Z_{2F}^{-1/2})^Q \cdot \Gamma(p_1 \cdots p_N, g_0, a_0, m_j^0, \epsilon) \tag{2}$$

G , $\phi\pi$, i Q són el nombre de gluons, fantasmes de -- Faddeev-Popov i quarks externs, respectivament. La funció renormalitzada contindrà uns dependència en la condició de renormalització escollida, simbolitzada per μ . Una revisió dels esquemes de renormalització pot veure's a ref.16.

I.5 Grup de Renormalització

Renormalitzant en diferents esquemes, R i R'

$$\begin{aligned} \Gamma_R(p_1 \cdots p_N) &= Z(R)\, \Gamma_0(p_1 \cdots p_N) \\ \Gamma_{R'}(p_1 \cdots p_N) &= Z(R')\, \Gamma_0(p_1 \cdots p_N) \end{aligned} \tag{3}$$

Si $$\Gamma_{R'}(p_1 \cdots p_N) = Z(R',R)\, \Gamma_R(p_1 \cdots p_N) \tag{4}$$

$$Z(R',R) = \frac{Z(R')}{Z(R)} \tag{5}$$

En general les $Z(R)$, $Z(R')$ són divergents, però --- $Z(R',R)$, relacionant dos termes finits és convergent. - Obviament les $Z's$ han de satisfer les propietats de - grupoide:

$$Z(R'',R) = Z(R'',R')\,Z(R',R)$$
$$Z^{-1}(R',R) = Z(R,R') \qquad (1)$$
$$Z(R,R) = 1$$

En esquemes com el de Weinberg[17], W ; el de 't Hooft[18], MS; o el de Bardeen[19], $\overline{\text{MS}}$; l'estructura és més amplia, de -- grup. En aquests esquemes el producte de dues $Z's$ també és una Z .

Considerem ara (13.2). En una forma general

$$\Gamma(p_1 \cdots p_N, \alpha, a, m_i, \mu) = Z_\Gamma\, \Gamma_0(p_1 \cdots p_N, \alpha_0, a_0, m_i^0, \epsilon) \qquad (2)$$

Donat que Γ_0 és independent de μ

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu \frac{d\alpha}{d\mu}\frac{\partial}{\partial \alpha} + \sum_i \frac{\mu}{m_i}\frac{dm_i}{d\mu} m_i \frac{\partial}{\partial m_i} + \mu \frac{da}{d\mu}\frac{\partial}{\partial a}\right] \cdot$$
$$\Gamma(p_1 \cdots p_N, \alpha, a, m_i, \mu) = \frac{1}{Z_\Gamma}\mu \frac{dZ_\Gamma}{d\mu}\Gamma(p_1 \cdots p_N, \alpha, a, m_i, \mu) \qquad (3)$$

A (3) apareixen unes funcions universals -independents de la funció de Green que es considera. Concretament

$$\mu \frac{d\alpha}{d\mu} \equiv \alpha\, \beta(\alpha, x_i, a) \qquad (4.a)$$
$$\frac{\mu}{m_i}\frac{dm_i}{d\mu} \equiv -\gamma_i(\alpha, x_i, a) \qquad (4.b)$$
$$\mu \frac{da}{d\mu} \equiv \delta(\alpha, x_i, a) \qquad (4.c)$$

amb $x_i = m_i/\mu$. La funció β és la funció de Callan-Symanzik[8]. Després, 't Hooft[18] i Weinberg[17] varen extendre el formalisme a la forma present. Els origens del grup de renormalització són, però, molt més antics[20,21].

A (14.3) apareixeran també

$$\frac{1}{Z_{3YM}}\,\mu\,\frac{dZ_{3YM}}{d\mu} \equiv \gamma_{YM}(\alpha, x_i, a) \tag{1.a}$$

$$\frac{1}{Z_{2F}}\,\mu\,\frac{dZ_{2F}}{d\mu} \equiv \gamma_{F}(\alpha, x_i, a) \tag{1.b}$$

$$\frac{1}{\tilde{Z}_3}\,\mu\,\frac{d\tilde{Z}_3}{d\mu} \equiv \tilde{\gamma}(\alpha, x_i, a) \tag{1.c}$$

De la renormalitzabilitat de la teoria se segueix -- que les funcions (14.4) i (15.1) són finites. A més, en els esquemes W, MS, $\overline{\text{MS}}$ són independents de les masses (referent a la dependència del paràmetre de gauge Cfr. secc. III). Per descontat a l'esquema μ hi ha una dependència no trivial en x_i i a .

Un anàlisi dimensional condueix a la següent equació per a Γ :

$$\left[\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda} + \sum_i m_i\frac{\partial}{\partial m_i} + \mu\frac{\partial}{\partial\mu} - D\right]\Gamma(\lambda p_1 \ldots \lambda p_N, \alpha, a, m_i, \mu) = 0 \tag{2}$$

De (2) i (14.3), amb

$$t = \log \lambda$$

$$\left[-\frac{\partial}{\partial t} + \beta\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} + \delta\frac{\partial}{\partial a} - \sum_i [1+\gamma_i]\, x_i\frac{\partial}{\partial x_i} + D - \gamma_\Gamma\right]\Gamma(e^t p_1 \ldots e^t p_N, \alpha, a, m_i, \mu) = 0 \tag{3}$$

a on, per a funcions de Green completes

$$-2\gamma_\Gamma = G\gamma_{YM} + Q\,\gamma_F + \Phi\Pi\,\tilde{\gamma} \tag{4}$$

La solució general de (3) és:

$$\Gamma(e^t p_1 \ldots e^t p_N, \alpha, a, x_i, \mu) = \exp\left\{tD - \int_0^t dt'\,\gamma_\Gamma(\bar{\alpha}(t', \alpha))\right\}\cdot \Gamma(p_1 \cdots p_N, \bar{\alpha}, \bar{a}, \bar{x}_i, \mu) \tag{5}$$

on $\bar{\alpha}$, $\bar{x}_i$, $\bar{a}$ son les solucions de les equacions diferencials:

$$\frac{d\bar{\alpha}}{dt}(t,\alpha) = \bar{\alpha}\ \beta(\bar{\alpha}) \qquad , \ \bar{\alpha}(0,\alpha) = \alpha \tag{1.a}$$

$$\frac{d\bar{x}_i}{dt}(t,\alpha) = -\left[1+\gamma_i(\bar{\alpha})\right]\bar{x}_i \quad , \ \bar{x}_i(0,\alpha) = x_i \tag{1.b}$$

$$\frac{d\bar{a}}{dt}(t,\alpha) = \delta(\bar{\alpha}) \qquad , \ \bar{a}(0,\alpha) = a \tag{1.c}$$

Les solucions de (1) sốn les constants d'acoblament, masses i paràmetre de gauge running.

El comportament d'una funció de Green quan tots els moments s'escalen ve governat pels paràmetres running de la teoria, així com un canvi en el factor global d'escala (dimensió anòmala).

Les equacions (1) poden intregar-se ordre per ordre. És convenient escriure

$$\beta = \beta_0 + \frac{\alpha}{\pi}\beta_1 + \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2\beta_2 + \cdots \tag{2.a}$$

$$\gamma_i = \frac{\alpha}{\pi}\gamma_1 + \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2\gamma_2 + \cdots \tag{2.b}$$

$$\delta = \frac{\alpha}{\pi}\delta_1 + \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2\delta_2 + \cdots \tag{2.c}$$

amb $\beta_0 = 2\epsilon$ en el MS o $\overline{\text{MS}}$, però no apareix en els altres esquemes.

La integració pot fer-se separadament i sense problemes en aquells esquemes independents de les masses i en els que β i γ no depenen del paràmetre de gauge (Cfr. secc. III). Si aquest és el cas, a primer ordre

$$\bar{\alpha}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{Q^2}{\mu^2}, \alpha(\mu)\right) = \frac{\pi}{-\beta_1\frac{1}{2}\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}} \tag{3}$$

Λ és la constant d'integració -independent del punt de renormalització, però depenent de l'esquema.

A l'ordre següent

$$\bar{\alpha}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{Q^2}{\mu^2},\alpha(\mu)\right)=\frac{\pi}{-\beta_1\frac{1}{2}\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}}-\left(\frac{1}{-\beta_1\frac{1}{2}\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}}\right)^2\frac{\pi\beta_2}{\beta_1}\ln\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2} \quad (1)$$

És útil també la relació a dos bucles

$$\frac{1}{2}\ln\mu^2+\frac{\pi}{\beta_1\alpha(\mu)}-\frac{\beta_2}{\beta_1^2}\ln\left(1+\frac{\beta_1\pi}{\beta_2\alpha(\mu)}\right)=\frac{1}{2}\ln\Lambda^2 \quad (2)$$

La integració de (16.1.b) condueix (tenint en compte (16.3)) a l'ordre més baix a:

$$\bar{x}_i=\frac{\hat{m}_i}{\sqrt{Q^2}}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)^{\gamma_1/2\beta_1} \quad ; \quad \bar{m}_i=\bar{x}_i\sqrt{Q^2} \quad (3)$$

Les constants d'integració $\hat{m}_i$ (sovint relacionades amb les masses corrents) satisfan

$$\frac{\hat{m}_i}{\hat{m}_j}=\lim_{Q^2\to\infty}\frac{\bar{m}_i(Q^2)}{\bar{m}_j(Q^2)} \quad (5)$$

Un procediment semblant per al paràmetre de gauge running porta a

$$\bar{a}=\frac{\hat{a}}{\frac{3\hat{a}}{13-\frac{4}{3}N_f}+\left(\frac{1}{2}\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)\frac{1}{\beta_1}\left(\frac{13}{4}-\frac{N_f}{3}\right)} \quad (6)$$

A l'esquema MS

$$\beta_1 = -\frac{11}{6} C_2(G) + \frac{N_f}{3} \qquad (1.a)$$

$$\gamma_1 = \frac{3}{2} C_2(R) \qquad (1.b)$$

$$\delta_1 = a\left[C_2(G)\left(\frac{13}{12} - \frac{a}{4}\right) - \frac{N_f}{3}\right] \qquad (1.c)$$

$$\beta_2 = -\frac{17}{12} C_2^2(G) + \frac{5}{12} C_2(G) N_f + \frac{1}{4} C_2(R) N_f \qquad \text{ref. 22} \quad (2.a)$$

$$\gamma_2 = \frac{3}{16} C_2^2(R) + \frac{97}{48} C_2(R) C_2(G) - \frac{5}{24} C_2(R) N_f \qquad \text{ref. 23} \quad (2.b)$$

$$\delta_2 = -\frac{a}{8}\left[\frac{1}{8} C_2^2(G)(2a^2+11a-59) + 2 N_f C_2(R) + \frac{5}{2} N_f C_2(G)\right] \qquad \text{ref. 24} \quad (2.c)$$

Una relació completa de les constants de renormalització a dos bucles pot trobar-se, p. ex., a ref. 24.

REFERÈNCIES DE LA SECCIÓ I

1 Becchi,C., Rouet,A., Stora,R. Phys. Lett. 52B,344(1974)
Comm. Math. Phys. 42,127(1975)

2 Coleman,S. J. Math. Phys. 7,787(1966)

3 Goldstone,J. Nuovo Cim. 19,154(1961)
Goldstone,J., Salam,A. , Weinberg,S. Phys. Rev 127(1962)

4 Bardeen,W.A. Nucl. Phys. B75,246(1974)

5 Adler,S. Phys. Rev. 177,2426(1969)

6 Belavin,A.A., Polyakov,A.M., Schwartz,A.S., Tyupkin,Yu. Phys. Lett. 59B,85(1975)

7 't Hooft,G. Phys. Rev. Lett. 37,8(1976)
Phys. Rev. D14,3432(1976)

8 Symanzik,K. Comm. Math. Phys. 18,227(1970)

10 Nielsen,N.K. Nucl. Phys. B120,212(1977)

11 Callan,C.G., Coleman,S., Jackiw,R. Ann. of Phys. 59, 42(1970)

12 't Hooft,G., Veltman,M. Nucl. Phys. B44,89(1972)

13 Bellini,C.G., Giambiagi,J.J. Nuovo Cim. 12B,20(1972)

14 Hepp,K. Renormalization Theory in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory. Les Houches 1970. Eds. C. de Witt, R. Stora. Gordon and Breach, New York, 1971.

15 Slavnov,A.A. Sov. J. Particles Nucl. 5,303(1975)
Taylor,J.C. Nucl. Phys. B33,436(1971)

16 Coquereaux,R. Thèse. Université d'Aix-Marseille II

17 Weinberg,S. Phys. Rev. D8,3497(1973)

18 't Hooft,G. Nucl. Phys. B61,455(1973)

19 Bardeen,W.A., Buras,A.J., Duke,D.W., Muta, T. Phys. Rev. D18,3998(1978)

20 Stückelberg, E.C.G., Peterman,A. Helv. Phys. Acta 26,499(1953)

21 Gell-Mann,M., Low,F.E. Phys. Rev. 95,1300(1954)

22 Jones,D.R.T. Nucl. Phys. B75,531(1974)

Caswell,N. Phys. Rev. Lett. 33,244(1974)

23 Nanopoulos, D.V., Ross,D.A. Nucl. Phys. B157,273 (1979)

Tarrach, R. Nucl. Phys. B183,384(1981)

24 Egoryan, E.Sh., Tarasov,O.V. Teor. Mat. Fiz. 41,26 (1979).

¿ Era necesario todo esto ?
Goya

Quan pretenem calcular una quantitat observable més enllà del nivell arbre, ens trobem en qualsevol Teoria de Camps més o menys realista amb divergències. Aquestes divergències han de renormalitzar-se amb l'ajut d'una certa prescripció. L'objectiu últim del procés de renormalització és establir el contacte entre la predicció teòrica i la realitat. Aquest objectiu pot assolir-se sense cap dificultat especial quan el fenòmen en la qual descripció estem interessats pot relacionar-se directament amb les prediccions de la teoria. Aquest és el cas en QED, a l'electrodinàmica quàntica. Existeixen dins d'aquesta teoria unes masses ben definides per l'experiència; sembla, per tant, raonable renormalitzar damunt la capa màssica. Aquesta és efectivament una elecció assenyada, puix que la teoria es troba lliure de singularitats infra-roges essencials en aquest limit.

A l'electrodinàmica quàntica tota quantitat física predita per la teoria pot expressar-se en termes de la massa de l'electró i de la constant d'acoblament electromagnètica (constant d'estructura fina) que, a més, és el paràmetre de l'expansió. Per suposat que no es tracta d'una coincidència en el cas de QED. La teoria sortida dels treballs de Pauli,Dirac,Heisenberg,Schwinger,Dyson,Feynman y Tomonaga, entre d'altres, ha estat construida tot al llarg de vint anys, sobre els fonaments d'una teoria clàssica. Els refinaments que s'han introduit han mantingut el paràmetre "natural" de la teoria.

A la Cromodinàmica hi manca un equivalent clàssic. La constant d'acoblament no és directament observable; no hi ha raó per a privilegiar cap esquema de renormalització. El resultat d'aquesta llibertat absoluta és que tota quantitat física -calculable en el model com una sèrie de potències en la constant d'acoblament i masses dels quarks fins a un ordre donat- serà diferent segons l'esquema de -renormalització triat. Masses i constant d'acoblament podrien evidentment substituir-se en termes de quantitats --observables; el poder predictiu de la teoria seria el mateix, però tot i així, el càlcul hauria d'efectuar-se a tots els ordres i sumar-se la sèrie pertorbativa, en el supòsit que això fos p ssible.

Per a més gran senzillesa suposem que estem interessats en calcular una certa amplitud que ve descrita per una sèrie de diagrames sense divergència primitiva. Tot i així aquesta quantitat depèn de l'esquema de renormalització mitjançant les masses, la constant d'acoblament i, eventual --ment, del paràmetre de gauge. Depenent de la nostra capacitat de càlcul, hom podrà avaluar aquesta quantitat fins a ordre α^n . Per a extreure una predicció s'ha d'introduir un valor per a la constant d'acoblament que s'haurà obtingut d'algun altre càlcul pertorbatiu comparat amb l'expe --riència ¿ en quin esquema ? En principi semblaria raonable donar més confiança a aquell càlcul que condueix a una constant renormalizada més petita; però, donat que els coefi --cients també depenen de l'esquema, l'arbitrarietat en l'elecció de l'esquema comporta necessàriament una incertesa en el valor de la nostra amplitud. No es tracta tant d'esco -llir un paràmetre apropiat per a l'expansió pertorbativa --com d'intentar minimitzar globalment la contribució d'ordres superiors.

Lamentablement no hi ha manera d'estar segurs respecte si un esquema donat minimitza o no l'error comès al deturar els nostres càlculs a ordre n sense conèixer el valor exacte. En principi, ens agradaria que al calcular una quantitat fins a ordre α^n l'error comès fos d'ordre α^{n+1}. Malgrat això, el pes real dels coeficients pot destruir aquesta esperança.

Considerem, p. ex., les correccions de QCD al quocient:

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \longrightarrow hadrons)}{\sigma(e^+e^- \longrightarrow \mu^+\mu^-)} \tag{1}$$

R ve donada per

$$R(s) = 3\sum_i Q_i^2 \left[1 + \frac{\alpha_s(s)}{\pi} + R_2\left(\frac{\alpha_s(s)}{\pi}\right)^2 + \cdots\right] \tag{2}$$

R_2 s'ha calculat en diferents esquemes[1-3]. En el MS y $\overline{MS}$

$$(R_2)_{MS} = 7.35 - 0.442\, N_f \tag{3}$$

$$(R_2)_{\overline{MS}} = 1.98 - 0.115\, N_f \tag{4}$$

mentre que a l'esquema de Weinberg, triant el vèrtex de tres gluons, amb a=0 per a definir la constant d'acoblament renormalitzada

$$(R_2)_W = 0.7389\, N_f - 4.6374 \tag{5}$$

Com típicament $\alpha_s(s) \sim 0.1$ per a s de l'ordre d'alguns GeV, la incertesa teòrica provinent dels diferents coefi_ cients per als diferents esquemes supera ampliament l'error pertorbatiu.

La situació és força més incòmoda en el càlcul de les desintegracions de quarkonium

$$\frac{\Gamma(Q\bar{Q} \to 2g)}{\Gamma(Q\bar{Q} \to 2\gamma)} = \frac{2}{9Q^4}\left(\frac{\alpha_s(4m_Q^2)}{\alpha}\right)^2\left(1 + B_1\frac{\alpha_s(4m_Q^2)}{\pi} + \cdots\right) \tag{6}$$

on distingim entre la constant forta, α_s, i la d'estructura fina, α. Q és la càrrega del quark; m_Q la seva massa. En diferents esquemes obtenim[4]

$$(B_1)_{MS} = 22.14 \qquad (B_1)_{\overline{MS}} \simeq 16$$
$$(B_1)_W = 5.68 \tag{7}$$

La magnitud dels coeficients pot fer-nos dubtar de la validesa del càlcul pertorbatiu; malgrat això, en absència d'una solució de QCD, pot reflectir simplement una elecció dolenta del paràmetre de l'expansió. Hem de renunciar a càlculs més enllà de l'ordre més baix ? En realitat ningú dubta que QCD és escaient per a la descripció del món hadrònic. Les prediccions a l'ordre més baix es comparen molt favorablement amb l'experiment en col.lisions profundament inelàstiques. Hi hauria raó per a confiar en aquestes prediccions amb una sèrie divergent o asimptòtica ja a partir del segon terme ? Quin sentit tindria aleshores exigir la renormalizabilitat de la teoria? A més, la sèrie pertorbativa de QED presenta una gran semblança amb la de la Cromodinàmica i la seva coincidència amb l'experiència és espectacular. Naturalment $\alpha_s \gg \alpha$, però al ser determinant el paper dels coeficients fóra sorprenent un comportament --com a sèrie- molt diferent.

No hi ha cap resultat general respecte a l'aplicabilitat de les sèries pertorbatives a les teories de camps. En general, la confiança en elles rau en els bons resultats --que proporciona en QED. L'espectre de partícules a explicar és, però, molt diferent i tal vegada fóra excessivament optimista explicar-lo en termes de quarks i gluons com a -camps locals. La sèrie pertorbativa de QCD podria ser perfectament inútil. En qualsevol cas sembla lògic suposar que, a més de la contribució pertorbativa, el càlcul de --qualsevulla quantitat contindrà termes relevants a baixes energies, no obtenibles pertorbativament.

Si aquesta separació pot fer-se d'una forma consistent o no, està més enllà d'aquesta discussió, però en qualsevol cas sembla necessari determinar algun mètode per a minimitzar la contribució d'ordres superiors.

S'han donat diferents arguments assenyalant que, pot ser, la subtracció en un punt euclidià fóra el mètode més apropiat[5]. La idea és incloure tantes correccions radiatives com sigui possible a l'ordre més baix. En general aquest procediment sembla conduir a menors coeficients (Cfr. 3.3-7) però tampoc sembla una diferència decissiva. D'aquest tipus d'arguments es deduiria que el caràcter de la sèrie dependria de l'esquema de renormalització emprat. En efecte, es tracta d'incloure tants subdiagrames comuns a les contribucions d'ordre superior, p. ex. el propagador del gluo, com sigui possible a l'ordre més baix.

Sigui

$$\Pi_D(q^2) = \Pi_B(q^2) + \Delta\Pi \qquad (1)$$

el valor del propagador renormalitzar en una prescripció "dolenta". La diferència entre aquest valor i la "bona" prescripció és $\Delta\Pi$. Com el nombre de diagrames creix factorialment, també ho farà el nombre de propagadors inserits en una funció de Green. Si suposem que no hi ha correlació entre els diagrames, el valor de la funció en la prescripció dolenta creixerà com $\Delta\Pi n!$. Això pot convertir una sèrie convergent en asimptòtica o divergent.

Aquesta és certament una situació incòmoda. Aquest tipus de raonaments poden, però, no ser vàlids. El punt dèbil és suposar que els diagrames no es troben correlacionats. De fet existeixen raonaments en contra del creixement exponencial de la sèrie pertorbativa. Cvitanović[6] ha conjecturat en el cas del moment magnètic anòmal a QED que els coeficients creixen solament com n . Recentment s'han avançat resultats envers la convergència de l'expansió 1/N[7] que proporciona resultats millors que el que és esperable del paràmetre de l'expansió. Juga un paper en aquests arguments la simetria de gauge.[‡]

Un punt fins ara no discutit és el de la dependència

[‡] Encara que no és probablement significatiu en aquest context, puix que només intervé un diagrama a cada ordre, s'ha vist la convergència de la sèrie que defineix la funció γ en l'expansió $1/N_F$ [8] . En aquesta mateixa expansió la funció β de Callan-Symanzik en QED sembla tenir un desenvolupament asimptòtic [9].

en el gauge. Si pensem, p. ex., en la renormalització a la Weinberg, clarament la constant d'acoblament renormalitzada depèn del gauge. És clar que això no implica que el resultat final sigui dependent de a. Com, per mor de les divergències infra-roges, la renormalització s'efectua fora de la capa màssica; a més del paràmetre Λ , les funcions de Green renormalitzades dependran d'un altre paràmetre, $\hat{a}$; malgrat que per al resultat físic on-shell només romandrà Λ . L'aparició de la dependència en el gauge introduirà una nova ambigüitat[10]. A quin gauge serà més ràpida la convergència de la sèrie ?

Seguint un raonament semblant al que ja hem fet esment, sembla raonable utilitzar la invariància gauge per a reduir els graus de llibertat. La renormalització on-shell elimina per descontat els graus no físics de llibertat, però -- en una teoria farcida de divergències infra-roges no ens serveix. L'utilitzar el gauge de Landau elimina un grau de llibertat del propagador del gluo. Per la mateixa raó esperariem que una elecció millor fóra el gauge axial, del qual estan absents els graus de llibertat del ghost. En - aquest gauge

$$\Pi^{\mu\nu(0)}_{ab}(p) = -i\,\frac{\delta_{ab}}{p^2}\left[g^{\mu\nu} - \frac{n^\mu p^\nu + n^\nu p^\mu}{n\cdot p} + \frac{n^2\, p^\mu p^\nu}{(n\cdot p)^2} \right] \qquad (1)$$

Si a més apareixen les masses dels quarks en el nostre càlcul, la situació es complica encara més. Aquestes masses depenen de l'esquema de renormalització, apareixent tot el problema de llur definició. En qualsevol cas apareixen a ordre n termes típicament com $\ln^n \mu^2/m_Q^2$. El grup de renormalització ressuma els termes logarítmics, però a partir del segon ordre la funció β depèn de l'esquema. En el de 't Hooft o en el de Bardeen tots els quarks contribueixen de la mateixa forma, independentment de llur massa. Clarament això contradiu explicitament el teorema de Symanzik-Applequist-Carrazone[11]. Encara que qualsevol càlcul no pot dependre de l'esquema i, per tant, ha de manifestarse el desacoblament dels quarks pesats de la fenomenologia a baixes energies, sembla més que raonable, cara a la convergència de la sèrie pertorbativa, exhibir explicitament el desacoblament. Sembla natural que en teories amb diferents escales de masses (GUT's) aquesta peculiaritat ha de jugar un paper important.

II.1 PMS i FAC

De la discussió que precedeix és clar que no és possible donar una prescripció com a la més apropiada per a qualsevol tipus de processos. Com extreure aleshores el màxim d'informació de la sèrie pertorbativa ? En essencia aquesta questió es redueix a donar resposta a dos problemes[12]

1. Donat un experiment, com determinar a partir d'ell el valor de Λ ?

2. Suposat que hom ha determinat Λ , podem aleshores fer prediccions raonablement concretes ?

Tant la resposta a 1 com a 2 exigeix confiança en el nostre desenvolupament pertorbatiu[≠]. Una possible solució és cercar diferents criteris raonables i assegurar-nos que condueixen a resultats similars.

Stevenson[15] ha proposat el principi de mínima sensitivitat (PMS). Si la sèrie és efectivament independent de

---

≠ La determinació de Λ a partir d'una experiència de deep inelastic scattering pot veure's p. ex. en refs. 13-14. Els ingredients bàsics son l'operator product expansion (Cfr. secc. IV) i el grup de renormalització. La predicció teòrica que compararem amb l'experiència ve donada per una certa funció de correlació que es desenvolupa en termes — d'operadors compostos amb els mateixos nombres quàntics i dimensió creixent (higher twist). En el límit de Bjorken únicament és relevant la contribució sobre el con de llum. La renormalització d'aquests operadors junt amb el grup de renormalització dóna la funcionalitat en Q^2/Λ^2 dels coeficients que acompanyen els operadors compostos.

El resultat purament pertorbatiu prové del lowest twist: la identitat. Si es retenen més operadors, apareixen els seus valors esperats en el buit; contribucions típicament no pertorbatives, però encara importants a energies d'uns pocs GeV.

l'esquema de renormalització, sembla raonable suposar que la sèrie truncada ha d'ésser mínimament dependent. L'altre criteri, FAC (Fastest Apparent Convergence), menys elegant, però segurament més intuitiu suggereix que un bon esquema ha de presentar petits coeficients a ordres superiors. La prescripció ideal és, en aquest esquema, la que minimitza el coeficient a segon ordre.

Tornant de bell nou a la annihilació e^+e^-(ec. 3.2), podem escriure

$$R(s) = 3\sum_i Q_i^2 \left[1 + \tilde{R}(s) \right] \tag{1}$$

amb

$$\tilde{R}(s) = \frac{\alpha(\mu)}{\pi} + \left(\frac{\alpha(\mu)}{\pi}\right)^2 \left[R_2 - \frac{\beta_1}{2} \ln \frac{\mu^2}{s} \right] \tag{2}$$

$\alpha(\mu)$ és la constant d'acoblament renormalitzada en un cert esquema descrit per μ . El criteri de renormalització que satisfaci el FAC serà aquell en el que

$$R_2 - \frac{\beta_1}{2} \ln \frac{\mu^2}{s} = 0 \tag{3}$$

Aleshores,

$$\tilde{R}(s) = \frac{\alpha(\mu)}{\pi} \tag{4}$$

i recordant que

$$\frac{1}{2} \ln \frac{\mu^2}{\Lambda^2} = \frac{\beta_2}{\beta_1^2} \ln \frac{\beta_1 \pi}{\beta_2 \alpha} - \frac{\pi}{\beta_1 \alpha} + O(\alpha) \tag{5}$$

es verifica[12,16]

$$\frac{\beta_2}{\beta_1} \ln \frac{\beta_1 \pi}{\beta_2 \alpha} - \frac{\pi}{\alpha} = R_2 + \frac{\beta_1}{2} \ln \frac{s}{\Lambda^2} \tag{6}$$

a l'esquema de renormalització que satisfà (3). El membre de la dreta de (6) no depèn de l'esquema de renormalització (ho veiem de (4) i (3)); la dependència de R_2 en l'esquema cancel·la el canvi en Λ. Per a cada s trobarem un α amb el que el verifica (8.3). Podem evidentment fer servir l'esquema més convenient per a calcular (8.6) (p. ex. l'esquema -- mínim). Numèricament aquesta prescripció porta en aquest - cas a uns resultats[12] semblants als de l'esquema de Weinberg -cosa no gens sorprenent, car el coeficient és en aquest - cas més petit.

		FAC	W	$\overline{MS}$
$\sqrt{s} = 10\Lambda_{\overline{MS}}$	$\tilde{R}$ =	.10411	.10427	.10067
$\sqrt{s} = 20\Lambda_{\overline{MS}}$	$\tilde{R}$ =	.07953	.07967	.07796
$\sqrt{s} = 30\Lambda_{\overline{MS}}$	$\tilde{R}$ =	.06103	.06108	.06027

(1)

Apliquem ara el PMS. Exigim que

$$\frac{\partial}{\partial\Lambda}\tilde{R}(s) = 0 \tag{2}$$

per a imposar aquesta condició cal conèixer $\frac{\partial\alpha(\mu)}{\partial\Lambda}$. Derivant a (I.17.2)

$$\frac{\partial}{\partial\Lambda}\alpha(\mu) = -\frac{\pi}{\Lambda}\left(\frac{\alpha(\mu)}{\pi}\right)^2\left(\beta_2\frac{\alpha(\mu)}{\pi}+\beta_1\right) \tag{3}$$

i tenint en compte que $\frac{\partial R_2}{\partial\Lambda} = \frac{\beta_1}{\Lambda}$ s'arriba a

$$\beta_2 + 2\left[\beta_2\frac{\alpha}{\pi}+\beta_1\right]\left(R_2 - \frac{\beta_1}{2}\ln\frac{\mu^2}{s}\right) = 0 \tag{4}$$

En lloc de (8.4) prenem ara

$$\tilde{R}(s) = \frac{\alpha}{\pi} - \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2\frac{1}{2\left[\beta_1/\beta_2 + \alpha/\pi\right]} \tag{5}$$

mentre que (8.6) és

$$\frac{\beta_2}{\beta_1}\ln\frac{\beta_1\pi}{\beta_2\alpha} - \frac{\pi}{\alpha} + \frac{1}{2\left[\beta_1/\beta_2+\alpha/\pi\right]} = R_2 + \frac{\beta_1}{2}\ln\frac{s}{\Lambda^2} \tag{6}$$

De nou (6) no depèn de l'esquema de renormalització i podem calcular quins resultats proporcionen (5) i (6) en qualsevol esquema.

$$\sqrt{s} = 10\,\Lambda_{\overline{MS}} \qquad \tilde{R} = .10453$$
$$\sqrt{s} = 20\,\Lambda_{\overline{MS}} \qquad \tilde{R} = .07977 \qquad (1)$$
$$\sqrt{s} = 30\,\Lambda_{\overline{MS}} \qquad \tilde{R} = .06112$$

II.2 Constant d'acoblament efectiva

Una manera apropiada de relacionar les expansions pertorbatives corresponents a diferents processos fóra arribar a expressar les sèries en termes d'un paràmetre independent del procediment de renormalització.

Examinem una vegada més quina és la situació en QED. Sia $\Pi_0(q^2)$ l'autoenergia del fotó, sense renormalitzar, i considerem ara la quantitat

$$d(q^2,0) \equiv \frac{1}{1+[\Pi_0(q^2)-\Pi_0(0)]} = \frac{1}{1+\Pi(q^2,0)} \qquad (2)$$

Per trobar-se escrita en termes de quantitats renormalitzades on-shell és finita. Per construcció $d(0,0)=1$. -- En general, res no ens impedeix treballar en un altre esquema de renormalització; p. ex. l'esquema μ . Definint

$$d(q^2,\mu^2) = \frac{1}{1+\Pi(q^2,\mu^2)} \qquad (3)$$

que verifica $d(\mu^2,\mu^2)=1$, quan[≠] $q^2 \to 0$

$$\alpha\,\frac{d(q^2,0)}{q^2} \longrightarrow \frac{\alpha}{q^2} \qquad (4)$$

és a dir, recuperem la llei de Coulomb. En qualsevol cas $\alpha\, d(q^2,0)$ fa el paper d'una càrrega efectiva. A l'es_

≠ α és la constant d'estructura fina $\alpha = \frac{1}{137}$.

quema μ , però,

$$\alpha \frac{d(0,\mu^2)}{q^2} \not\longrightarrow \frac{\alpha}{q^2} \tag{1}$$

En conseqüència, si volem retrobar la llei de Coulomb cal que prenguem un paràmetre de desénvolupament

$$\alpha(\mu) = \alpha \; d(\mu^2, 0) \tag{2}$$

amb el qual farem tots els càlculs. Definim aleshores

$$d(q^2, \mu^2, \alpha(\mu)) \equiv \frac{1}{1 + \Pi(q^2, \mu^2, \alpha(\mu))} \tag{3}$$

amb

$$\Pi(q^2, \mu^2, \alpha(\mu)) = \Pi_0(q^2, \alpha(\mu)) - \Pi_0(\mu^2, \alpha(\mu)) \tag{4}$$

Es verifica

$$\alpha(\mu) \frac{d(q^2, \mu^2, \alpha(\mu))}{q^2} \xrightarrow[q^2 \to 0]{} \frac{\alpha}{q^2} \tag{5}$$

puix que en QED $Z_\alpha = Z_3^{-1}$ [17]. Per aquesta mateixa raó la càrrega efectiva[18,19]

$$\alpha_{EFF}(q^2) = \alpha \; d(q^2, 0) = \alpha(\mu) \; d(q^2, \mu^2, \alpha(\mu)) \tag{6}$$

s'expressarà en termes de quantitats sense renormalitzar de la mateixa forma

$$\alpha_{EFF}(q^2) = \alpha_0 \frac{1}{1 + \Pi_0(q^2)} = \alpha(\mu) \frac{1}{1 + \Pi(q^2, \mu^2, \alpha(\mu))} \tag{7}$$

Aquesta igualtat constitueix el punt de partença per a obtenir la formulació del grup de renormalització a la Peterman i Stueckelberg i arribar a l'equació de Gell-Mann i Low[18,19,22]

A l'electrodinàmica disposem, doncs, d'una constant -d'acoblament -que té, a més, un evident sentit físic- inde pendent de l'esquema de renormalització. A més, aquesta - constant és independent del gauge donat que Π_0 no depèn de a .

Quina és la relació entre $\alpha_{EFF}(q^2)$ i $\bar{\alpha}(q^2)$, la constant running ? Recordant que $\bar{\alpha}(q^2=|\mu^2|)=\alpha(\mu)$,

$$\alpha_{EFF}(q^2)=\bar{\alpha}(q^2)\,\frac{1}{1+\Pi(q^2,q^2)} \tag{7}$$

Clarament $\Pi(q^2,q^2)$ a l'esquema dimensional; per tant

$$\bar{\alpha}_{MS}(q^2)\neq\alpha_{EFF}(q^2) \tag{8}$$

Tot i així, $\alpha_{EFF}(q^2=|\mu^2|)=\bar{\alpha}_\mu(\mu)$; la constant running a l'esquema μ coincideix amb α_{EFF} . Noteu que per a l'esquema de Weinberg tampoc es verifica. α_{EFF} permet relacionar fàcilment les constants d'acoblament renormalitzades en diferents esquemes.

La constant d'estructura fina ve donada simplement per

$$\begin{aligned}\alpha &= \lim_{q^2\to 0}\alpha_{EFF}(q^2)\\ &= \lim\ \bar{\alpha}(q^2)\,d(q_1^2,-q^2)\end{aligned} \tag{9}$$

Adonem-nos que

$$\lim_{q^2\to 0}\bar{\alpha}(q^2)=0 \tag{10}$$

A altes energies

$$\alpha_{EFF}(q^2)\underset{-q^2\to\infty}{\sim}\bar{\alpha}(q^2) \tag{11}$$

Suposem ara que la teoria presentés dos tipus de fermions, un molt lleuger i un altre de molt pesat (masses - m i M respectivament). La intuició suggereix que M ha d'ésser irrelevant en el límit Thompson. A l'esquema μ això és clar. Dissortadament a la renormalització dimensional això ja no s'exhibeix explicitament$^{\not{}}$; a primer ordre només depèn de β_1 és a dir del nombre total de fermions. Malgrat això $\alpha_{EFF} \neq \bar{\alpha}_{MS}$ i la quantitat relevant

$$\alpha_{EFF}(q^2) = \bar{\alpha}_{MS}\; d_{MS}(q_1^2, -q^2) \qquad (1)$$

sí té el comportament esperat

$\not{}$ S'han proposat modificacions al MS que incorporen el desacoplament dels fermions pesats. Així hom substreu

$$\frac{1}{\epsilon} \quad \mu \geqslant M \qquad ; \qquad \frac{1}{\epsilon} - \ln\frac{M}{\mu} \quad \mu \leqslant M$$

com s'ha proposat a ref.20.

Mitjançant l'utilització de α_{EFF} s'ha demostrat[21] que al nivell de dos bucles a QED es presenta, fins i tot emprant el MS, el desacoblament a baixes energies.

D'una forma semblant és possible definir en QED una massa efectiva; això és, una massa independent de l'esquema de renormalització, finita i que també podem expressar en termes de quantitats sense renormalitzar.

El propagador fermiònic no renormalitzat és

$$S_0(\not{p}) = \frac{1}{\not{p} - m_0 - \Sigma_0(\not{p})}$$

amb $\Sigma_0(\not{p}) = \Sigma_{1_0}(p^2) + (\not{p} - m_0)\Sigma_{2_0}(p^2)$

Definint $A_0 = 1 - \Sigma_{2_0} \qquad B_0 = 1 + \Sigma_{1_0}/m_0 - \Sigma_{2_0}$,

$$S_0(\not{p}) = \frac{1}{A_0(\not{p}) - m_0 B_0}$$

i recordant que[17]

$$A = Z_2 A_0 \qquad\qquad B = Z_2 Z_m B_0 ,$$

la quantitat

$$m_{EFF}(q^2) = m_0\frac{B_0(q^2)}{A_0(q^2)} = m(\mu)\frac{B(q^2,\mu^2)}{A(q^2,\mu^2)}$$

proporciona una relació entre els diferents esquemes. Noteu que amb aquesta definició el propagador és

$$S(\not{p}) = \frac{1}{A(\not{p} - m_{EFF}(p^2))}$$

II.3 Constant d'acoblament efectiva a QCD

És la pregunta més natural a fer-se si una definició similar d'una constant efectiva d'acoblament existeix o no en QCD. En altres paraules, si hi ha una definició d'una constant, dependent de p^2 , independent de l'esquema de renormalització, finita i independent del paràmetre de gauge. La primera diferència és que a QCD sempre hi ha necessitat d'un vèrtex. Això és així perquè a QCD la constant de renormalització que intervé dins de la definició de la constant d'acoblament renormalitzada no és igual a cap constant de renormalització de cap camp.

L'elecció més simple s'obté del vèrtex de tres gluons i és

$$\alpha_{EFF}(p^2) = \alpha_0 \left[1 + \Pi^{0}_{3gl}(p^2, p^2, p^2)\right]^2 \left[1 + \Pi_0(p^2)\right]^{-3} \qquad (1)$$

a on $\Pi_0(p^2)$ és l'autoenergia despullada i el vèrtex propi, sense renormalitzar, de tres gluons ve donat al punt simètric per

$$T_{0\,\lambda\mu\nu}^{abc}(p^2, p^2, p^2) = T_{\lambda\mu\nu}^{abc\,(0)}\left(1 + \Pi^{0}_{3gl}(p^2, p^2, p^2)\right) \qquad (2)$$

+ trilineals en els moments

$T_{\lambda\mu\nu}^{abc\,(0)}$ és el vèrtex a l'ordre més baix. És un simple exercici comprovar que (1) és independent del RS, i, per tant, pot escriure's en termes de quantitats renormalitzades en la mateixa manera funcional. Dissortadament no és difícil comprovar que (1) és dependent del paràmetre de gauge ja al nivell d'un bucle; car $\Pi^{0}_{3gl}(p^2, p^2, p^2)$ conté termes proporcionals a a_0 amb coeficients irracionals, mentre que són racionals a Π_0 . La cancel.lació és aleshores impossible. No és difícil convèncer-nos que el escollir un altre vèrtex per a definir la constant d'acoblament efectiva no elimina la dependència en el paràmetre de gauge.-- Així, p. ex., el vèrtex de quatre gluons té un terme en a_0^3 [10] que no és possible cancel.lar per auto-energies a un bucle. Prendre un punt no simètric, $p_1^2 \neq p_2^2 \neq p_3^2$, no solluciona el problema i fa la constant d'acoblament efectiva una funció de més d'una variable.

Intentem seguir més d'aprop QED. Noteu que si $\Pi^0_{3g\ell}(p^2,p^2,p^2)$ fos igual a $\Pi_0(p^2)$ l'equació (14.1) seria igual a la seva equivalent en QED. La intenció és,per -- tant, triar una configuració per a la qual la funció pròpia del vèrtex de tres gluons s'assembli més a l'autoenergia-- del gluo. Això és talment així quan un dels moments es pren igual a zero, de forma que només resta un moment. Aleshores escrivim el vèrtex d'acord amb la nova base tensorial com

$$T^{abc}_{0\,\lambda\mu\nu}(p^2,p^2,0) = 2g\, f_{abc}\, g_{\lambda\mu}\, p_\nu \left(1 + \Pi^0_{3g\ell}(p^2,p^2,0)\right) \tag{1}$$

+ termes proporcionals a $g_{\mu\nu} p_\lambda + g_{\lambda\nu} p_\mu$
i a $p_\lambda p_\mu p_\nu$,

essent l'índex ν el corresponent al moment nul. Per què hem triat el tensor $g_{\lambda\mu} p_\nu$? La raó és que és l'únic tensor que apareix tant a l'ordre més baix del vèrtex

$$2g_{\lambda\mu} p_\nu - g_{\mu\nu} p_\lambda - g_{\lambda\nu} p_\mu \tag{2}$$

i a la part transversa al moment p en els dos índexs que corresponen a aquest moment

$$\left(g_{\lambda\mu} - \frac{p_\lambda p_\mu}{p^2}\right) p_\nu \tag{3}$$

la qual cosa es vol per analogia amb el tensor (transvers) de l'auto-energia del gluo.

El preu possiblement a pagar per a tenir un moment nul són les singularitats infra-roges. Malgrat això, s'ha cal_ culat $\Pi^{0}_{3gl}(p^2,p^2,0)$ tal i com ve donat a (15.1) i resulta ser finit infra-roig. Això es veu fàcilment comparant la seva expressió amb la de $\Pi^{0}_{3gl}(p^2,p^2,p^2)$ i comprovant que les parts divergents son exactament les mateixes. En efecte, amb les masses dels quarks posades igual a zero tenim

$$\Pi^{0(2)}_{3gl}(p^2,p^2,0) = \frac{\alpha_0}{32\pi}\Big\{ C_2(G)\Big[\frac{16}{3}\frac{1}{\hat\epsilon} - \frac{92}{9} + (1-a_0)\Big(\frac{6}{\hat\epsilon}+12\Big) - 3(1-a_0)^2\Big] - \frac{16}{3}N_f\Big[\frac{1}{\hat\epsilon}-\frac{2}{3}\Big]\Big\} \qquad (1)$$

i $$\Pi^{0(2)}_{3gl}(p^2,p^2,p^2) = \frac{\alpha_0}{32\pi}\Big\{ C_2(G)\Big[\frac{16}{3}\frac{1}{\hat\epsilon} - \frac{32}{3} + \frac{2}{9}R + (1-a_0)\Big(\frac{6}{\hat\epsilon}+12+\frac{5}{3}R\Big) + (1-a_0)^2\Big(-4+\frac{2}{3}R\Big) - \frac{1}{3}(1-a_0)^3\Big] - \frac{8}{3}N_f\Big[\frac{2}{\hat\epsilon} - 3 + \frac{4}{3}R\Big] \qquad (2)$$

(el nombre de dimensions és $D = 4+2\epsilon$) a (1) i (2)

$$\frac{1}{\hat\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} + \gamma + \ln\frac{-p^2}{4\pi\nu^2} \qquad (3)$$

γ és la constant d'Euler. R és

$$R = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \; \frac{1}{x(1-x)+y(1-y)-xy} = 2.3439\ldots \qquad (4)$$

De la discussió anterior és clar que l'anàleg més - - proper a la càrrega efectiva de QED en QCD és

$$\alpha_{EFF}(p^2) = \alpha_0\Big[1+\Pi^{0}_{3gl}(p^2,p^2,0)\Big]^2\Big[1+\Pi_0(p^2)\Big]^{-3} \qquad (5)$$

on $\Pi^{0}_{3g\ell}(p^2,p^2,0)$ ve donat per (15.1). Com a (14.1), (16.5) és independent del RS. A més -i aquest és el resultat possiblement més significant- no presenta divergències infra-roges ni dependència del paràmetre de gauge, al menys al nivell d'un bucle. Efectivament, donat que $\Pi^{(2)}_0(p^2)$ ve donat per

$$\Pi^{(2)}_0(p^2) = \frac{\alpha_0}{8\pi}\left\{ C_2(G)\left[\frac{10}{3}\,\frac{1}{\hat\epsilon} - \frac{62}{9} + (1-a_0)\left(\frac{1}{\hat\epsilon}+2\right) - \frac{1}{2}(1-a_0)^2\right] - \frac{4}{3}N_f\left[\frac{1}{\hat\epsilon} - \frac{5}{3}\right]\right\} \tag{1}$$

és trivial comprovar d'aquí i de (16.1) que tota la dependència en a_0 es cancel.la a (16.5). Donat que (16.5) és independent de l'esquema de renormalització, hom pot escriure-ho en qualsevol RS com

$$\alpha_{EFF}(p^2) = \alpha(\nu)\left[1+\Pi_{3g\ell}(p^2,p^2,0,\nu^2)\right]^2\left[1+\Pi(p^2,\nu^2)\right]^{-3} \tag{2}$$

Escollint, p. ex., l'esquema MS, en el qual la constant d'acoblament renormalitzada és independent del paràmetre de gauge; tenim a aquest ordre

$$\alpha^{(2)}_{EFF}(q^2) = \alpha_{MS}(\nu)\left[1+\frac{\alpha_{MS}(\nu)}{36\pi}\left\{C_2(G)\left[70-33\left(\gamma+\ln\frac{-p^2}{4\pi\nu^2}\right)\right] - N_f\left[22-6\left(\gamma+\ln\frac{-p^2}{4\pi\nu^2}\right)\right]\right\}\right] \tag{3}$$

que és certament independent de $a(\nu)$; $a(\nu)$ essent el paràmetre de gauge renormalitzat. Noteu que definicions similars basades en els altres tres vèrtexs de QCD no condueixen a una definició independent del gauge d'una constant d'acoblament efectiva a QCD. Tot això fa la definició de (16.5) essencialment única.

Hom pot millorar pel grup de renormalització aquesta darrera expressió

$$\alpha^{(2)}_{EFF}(-|p^2|) = \bar{\alpha}_{MS}(|p^2|)\Big[1 + \frac{\bar{\alpha}_{MS}(|p^2|)}{36\pi}\Big\{C_2(G)\big[70 - 33(\gamma - \ln 4\pi)\big] - N_f\big[22 - 6(\gamma - \ln 4\pi)\big]\Big\}\Big] \quad (1)$$

tenint en compte que per a masses distintes de zero també dependria de $\bar{m}$.

L'equació (16.5) és aleshores, al menys al nivell calculat, l'equivalent a QCD de la carrega de Gell-Mann i Low. Com QCD és asimptòticament lliure, coneixem el límit $-p^2 \to \infty$. Recordant l'expressió a dos bucles per a la constant d'acoblament running en un esquema de renormalització determinat (independent del sabor)

$$\frac{\bar{\alpha}_R(|p^2|)}{\pi} = \frac{1}{-\beta_1 \frac{1}{2}\ln\frac{|p^2|}{\Lambda_R^2}} - \left(\frac{1}{-\beta_1\frac{1}{2}\ln\frac{|p^2|}{\Lambda_R^2}}\right)^2 \frac{\beta_2}{\beta_1}\ln\ln\frac{|p^2|}{\Lambda_R^2} \quad (2)$$

inmediatament trobem els primers termes asimptòtics

$$\frac{\alpha_{EFF}(p^2)}{\pi} \xrightarrow[-p^2\to\infty]{} \frac{1}{-\frac{\beta_1}{2}\ln|p^2|} - \left(\frac{1}{-\frac{\beta_1}{2}\ln|p^2|}\right)^2\frac{\beta_2}{\beta_1}\ln\ln|p^2| +$$

$$\left(\frac{1}{-\frac{\beta_1}{2}\ln|p^2|}\right)^2\left(\frac{C_2(G)}{36}\big[70-33(\gamma-\ln 4\pi)\big] - \frac{N_f}{36}\big[22-6(\gamma-\ln 4\pi)\big] - \frac{\beta_1}{2}\ln\Lambda^2_{MS}\right) \quad (3)$$

Com α_{EFF} és independent del RS, (3) ens diu que β_1 i β_2 i

$$\ln\Lambda^2 = \ln\Lambda^2_{MS} + \frac{C_2(G)(70-33(\gamma-\ln 4\pi)) - N_f\,(22-6(\gamma-\ln 4\pi))}{33\,C_2(G) - 6\,N_f} \quad (4)$$

són també independents del RS. Noteu que aquest resultat és cert fins i tot retenint les masses running, puix que aquestes son zero en el límit $-p^2 \to \infty$.

En canvi, no coneixem el límit de (16.5) a baixes energies.

Hem arribat a una definició essencialment única i independent de l'esquema de renormalització d'una constant Λ que es llegueix en termes de Λ_{MS}

$$\Lambda^2 = \exp\left[\ln 4\pi - \gamma + \frac{70\, C_2(G) - 22\, N_f}{33\, C_2(G) - 6 N_f} \right] \Lambda^2_{MS} \qquad (1)$$

o en termes del esquema $\overline{MS}$

$$\Lambda^2 = \exp\left[\frac{70\, C_2(G) - 22 N_f}{33\, C_2(G) - 6 N_f} \right] \Lambda^2_{\overline{MS}} \qquad (2)$$

No es dôna la relació amb l'esquema de Weinberg en raô que las seves ambigüitats (elecció del vèrtex, elecció del paràmetre de gauge, elecció de la base tensorial). Per descontát Λ serveix per a relacionar diferents $\Lambda's$ de diferents esquemes.

Als ordres dominant i sub-dominant hom pot escriure

$$\frac{\alpha_{EFF}(p^2)}{\pi} = \frac{1}{-\beta_1 \frac{1}{2} \ln \frac{|p^2|}{\Lambda^2}} - \left(\frac{1}{-\beta_1 \frac{1}{2} \ln \frac{|p^2|}{\Lambda^2}} \right)^2 \frac{\beta_2}{\beta_1} \ln \ln \frac{|p^2|}{\Lambda^2} \qquad (3)$$

amb Λ^2 donat per (1) o (2). Aquesta equació defineix Λ unicament, en una forma independent del RS. Del valor $\Lambda_{\overline{MS}} \simeq 0.20 \begin{smallmatrix} +0.20 \\ -0.15 \end{smallmatrix}$ per $N_f = 4$ hom troba

$$\Lambda \simeq 0.45 \begin{smallmatrix} +0.45 \\ -0.30 \end{smallmatrix} \ GeV \qquad (4)$$

Hem donat una definició finita infra-roig, única, independent del RS i independent del paràmetre de gauge d'una constant d'acoblament efectiva; d'ella hom extreu una definició independent de l'esquema de Λ . Està relacionada amb les normals $\Lambda_R's$ depenents de l'esquema i és l'escala d'energies de QCD.

II.4 Càlcul a dos bucles

La pregunta que ens fem és si les propietats que disfruta α_{EFF} (finitud infra-roja, independència del paràmetre de gauge) són generals o només certes al nivell d'un bucle.

Tot i que és conegut del treball de Weinberg[24] i de Symanzik[25] que un moment extern nul porta, en general, a divergències logarítmiques$^{\not{f}}$ hom esperaria que aquestes singularitats es fessin paleses en la contribució a la funció pròpia de Green del vèrtexs de tres gluons que va amb el -

---

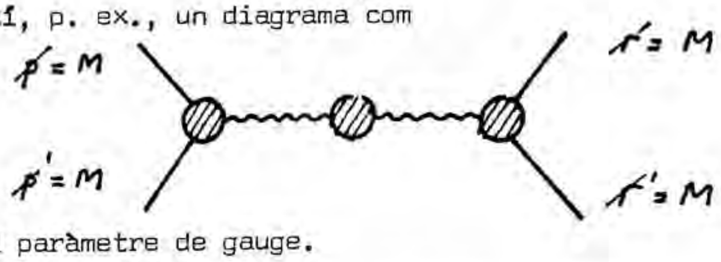
$\not{f}$ Si en una funció de Green $\Gamma^{(n)}(q_1,..,q_n)$ ens mantenim dins de la zona de moments no excepcionals (moments euclidians i qualsevol suma parcial de moments distinta de zero), aquesta funció de Green no presenta divergències infra-roges (la funció pot, però, no presentar singularitats de massa en el límit $m \to 0$ fins i tot en la zona no euclidiana. Sterman i Weinberg han proposat que tot observable que en el límit $m \to 0$ és finit és calculable pertorbativament)

Si en $\Gamma^{(n)}$ fem $q_i = 0$, $q_j = -|\mu^2|$, $j \neq i$ es presenta una divergència logarítmica. Si ara fem $q_i = q_j = 0$, $q_k = -|\mu^2|$ la divergència és, aleshores, quadràtica.

Si una de les partícules es troba on-shell apareix en la funció de Green una divergència logarítmica. Si son dues les particules a la capa màssica, la divergència és encara logarítmica; però si, a més, els moments corresponents son paral.lels, la divergència és aleshores quadràtica.

L'aparició de divergències infra-roges dins d'una funció de Green pot fer presentar una dependència en el gauge no esperada per algun tipus d'argument físic. En efecte, la invariància gauge de qualsevol amplitud està garantida únicament en la absència de singularitats infra-roges.

Així, p. ex., un diagrama com



depèn del paràmetre de gauge.

Amb un moment extern nul, si la singularitat logarítmica apareix en una estructura tensorial proporcional a aquest moment, no contribuirà. Amb dos moments nuls és més perillós; un càlcul de $\Gamma^4(p_1, p_2, p_3, p_4)$, la funció de Green pròpia de quatre gluons amb $p_1 = p_2 = 0$ condueix efectivament a divergències.[26]

tensor de dimensió més alta, $p^\mu p^\nu p^\lambda$, i no $g^{\mu\lambda} p^\nu$, com ho per definició $\Pi_{3gp}(p^2,p^2,0)$. La funció β de Callan-Symanzik és també calculada amb un moment igual a zero, puix que hom coneix que no apareixen divergències infra-roges en aquest límit[27,28]. Naturalment les singularitats infra-roges no depenen de l'elecció per al càlcul del punt simètric o qualsevol altre configuració. Hom ha d'ésser solament vigilant -si es tria una configuració excepcional- que no apareguin singularitats infra-roges, car en la regularització dimensional es mesclen amb les ultra-violetes. Aquest problema no es presenta en els càlculs de la funció β i, per la mateixa raó tampoc aquí. En qualsevol cas, d'haver-hi les dites singularitats s'haurien presentat com a pols suplementaris a (16.1).

Sabem que en QED la definició d'una constant d'acoblament independent de l'esquema de renormalització i del paràmetre de gauge

$$\alpha_{EFF(QED)}(p^2) = \alpha_0 \left[1 + \Pi_0(p^2) \right]^{-1} \tag{1}$$

està garantida, car aquesta constant d'acoblament és observable en mesures de la polarització del buit. Res d'això passa per a (16.5), en QCD; ni hom ha trobat cap modificació de (16.5) que pugui pensar-se per algun argument físic que és independent del gauge a tots ordres en teoria de pertorbacions. El comportament infra-roig de les amplituds on-shell a QCD invalida qualsevol possibilitat en aquest sentit. Per tant, hom ha de calcular a l'ordre següent per a comprovar si es manté la desitjada independència.

Especifiquem quines son les contribucions provinents de les diferents estructures al nivell de dos bucles per al vèrtex propi de tres gluons i la corresponent auto-energia.

$$\Pi^{o\,(4)}_{3gl}(p^2,p^2,0) = \left(\frac{\alpha_0}{4\pi}\right)^2 \Big[C_2^2(G)\,\Pi_{31} + C_2(R)\,N_f\,\Pi_{32} +$$

$$\left(\frac{C_2(G)}{2} - C_2(R)\right) N_f\,\Pi_{33} + C_2(G)\,N_f\,\Pi_{34}\Big]$$

$$\Pi_0^{(4)}(p^2) = \left(\frac{\alpha_0}{4\pi}\right)^2 \Big[C_2^2(G)\,\Pi_1 + C_2(R)\,N_f\,\Pi_2 \qquad (1)$$

$$+ \left(\frac{C_2(G)}{2} - C_2(R)\right) N_f\,\Pi_3 + C_2(G)\,N_f\,\Pi_4\Big]$$

amb $\alpha_0 = g_0^2/4\pi$, $C_2(R) = (N^2-1)/2N$ per a SU(N) i totes les funcions Π ho sôn de p^2 i a_0, el paràmetre de gauge sense renormalitzar. Les masses dels quarks s'han pres zero. A la Fig. 1 hi han tots els diagrames proporcionals a N_f -- (per als vèrtexs la pota superior és la que porta moment zero). El diagrama a) contribueix a Π_2 , b) i c) a Π_{32} , d) a Π_3 , e) i f) a Π_{33} , g)i h) a Π_4 i la resta a Π_{34} . Es molt senzill comprovar que per a les contribucions lineals en a_0

$$\Pi_2 = \Pi_3$$
$$\Pi_{32} = \Pi_{33} \qquad (2)$$

de manera que no hi han termes proporcionals a $C_2(R)$ N_f dependents de a_0 en (1). La contribució abeliana a α_{EFF} és -- independent del gauge. És també fàcil convèncer-nos que la part proporcional a $C_2(G)$ N_f és, pel cap baix, quadràtica -- en a_0. Aquesta és precisament la contribució més senzilla de calcular. El resultat per aquestes contribucions quadràtiques és

$$\Pi_4 = a_0^2\left(\frac{1}{3\epsilon} + \frac{2\gamma}{3} + \frac{2}{3}\ln\frac{-p^2}{4\pi\nu^2} - \frac{11}{9}\right) \qquad (3)$$

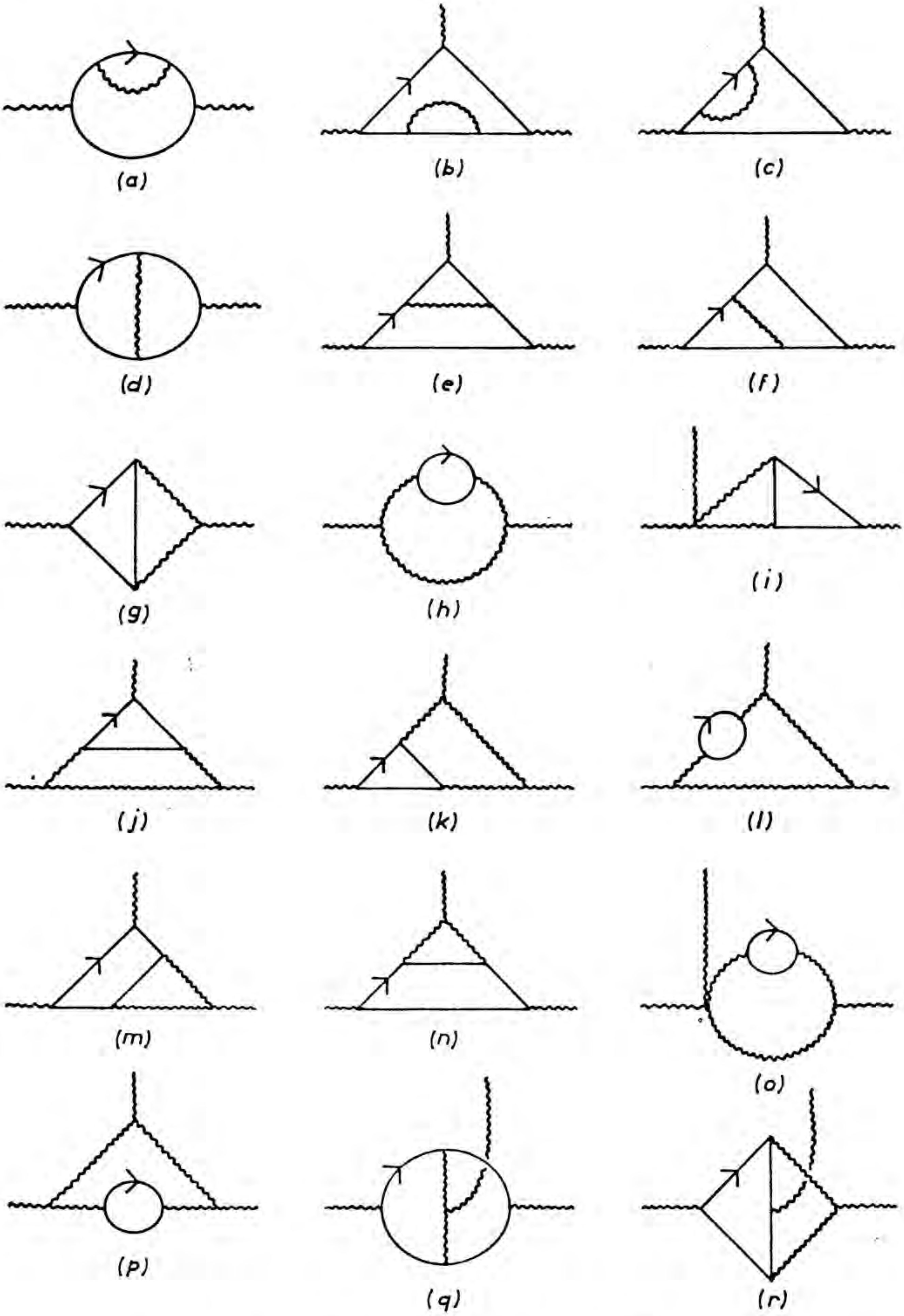


Fig. 1 Diagrames corresponents a l'auto-energia del gluo i al vèrtex de tres gluons contenent- un bucle de quarks a ordre α^2

$$\Pi_{34} = a_0^2 \left(\frac{1}{2\epsilon} + \gamma + \ln \frac{-p^2}{4\pi\nu^2} - \frac{4}{3} \right) \qquad (1)$$

Al nivell de dos bucles (16.5) és

$$\alpha_{EFF} = \alpha_0 \left[1 - 3\Pi_0^{(2)} + 2\Pi_{3gl}^{o(2)} + \Pi_{3gl}^{o(2)^2} + 2\Pi_{3gl}^{o(4)} - 6\Pi_0^{(2)}\Pi_{3gl}^{o(2)} - 3\Pi_0^{(4)} + 6\Pi_0^{(2)^2} \right] \qquad (2)$$

per la qual cosa hom necessita conèixer $\Pi_0^{(2)}$ i $\Pi_{3gl}^{o(2)}$ fins a termes lineals en ϵ. Llurs expressions -restringides a les parts en $C_2(G)\, a_0^2$ i N_f- són

$$\Pi_0^{(2)} = \frac{\alpha_0}{4\pi} \left\{ - C_2(G)\, a_0^2\, \frac{1}{4} \left(1 - 2\epsilon + \gamma\epsilon + \epsilon \ln \frac{-p^2}{4\pi\nu^2} \right) - \frac{2}{3} N_f \left(\frac{1}{\epsilon} + \gamma + \ln \frac{-p^2}{4\pi\nu^2} - \frac{5}{3} + O(\epsilon) \right) \right\}$$

$$\Pi_{3gl}^{o(2)} = \frac{\alpha_0}{4\pi} \left\{ - C_2(G)\, a_0^2\, \frac{3}{8} \left(1 - \frac{5}{3}\epsilon + \gamma\epsilon + \epsilon \ln \frac{-p^2}{4\pi\nu^2} \right) - \frac{2}{3} N_f \left(\frac{1}{\epsilon} + \gamma + \ln \frac{-p^2}{4\pi\nu^2} - \frac{2}{3} + O(\epsilon) \right) \right\} \qquad (3)$$

Finalment i tenint en compte que a l'esquema MS, on la constant d'acoblament renormalitzada és independent del paràmetre de gauge, constant d'acoblament i paràmetre de gauge es renormalitzen d'acord amb

$$\alpha_0 = Z_\alpha\, \alpha(\nu) \qquad Z_\alpha = 1 + \frac{\alpha(\nu)}{\pi} \frac{Z_\alpha^{(1)}}{\epsilon} + \cdots$$

$$a_0 = Z_a\, a(\nu) \qquad Z_a = 1 + \frac{\alpha(\nu)}{\pi} \frac{Z_a^{(1)}}{\epsilon} + \cdots \qquad (4)$$

anb

$$Z_\alpha^{(2)} = \frac{11}{12} C_2(G) - \frac{N_f}{6}$$
$$Z_a^{(2)} = -\frac{1}{8} C_2(G)\left(\frac{13}{3} - a(\nu)\right) + \frac{N_f}{6} \tag{1}$$

hom troba per a la contribució calculada

$$\alpha_{EFF}^{(4)}(p^2) = \alpha_{MS}(\nu)\left[\cdots + \left(\frac{\alpha_{MS}(\nu)}{4\pi}\right)^2 a^2(\nu) C_2(G) N_f \frac{1}{6} + \cdots\right] \tag{2}$$

que lamentablement no és zero i, per tant, el terme en --- $C_2(G)$ N_f depèn del gauge.

A l'ordre d'un bucle és trivial veure que la part en N_f de l'equació (16.5) no depèn de $a(\nu)$, puix que no hi han propagadors gluònics i, aleshores, és equivalent a provar - que a QCD sense quarks $\alpha_{EFF}(p^2)$ tal i com és definida per (16.5) no depèn del paràmetre de gauge a un bucle, car per a la part dels quarks no es requireix cap prova. El resul_ tat de (2) mostra que per a la part depeddent del quarks entra una dependència en el paràmetre de gauge, però aquesta de -- pendència podria no presentar- s'hi en QCD pura. Hom pot es_ tudiar la possibilitat que en una QCD sense quarks la cons_ tant d'acoblament efectiva fos independent de a_0. Els ter_ mes més senzills a comprovar, al nivell de dos bucles, són els que acompanyen $C_2(G)$ i tenen una potència quarta en a_0, que és la potència més alta que no pot veure's inmediatament que es cancel.la.

Els diagrames que contribueixen són representats a la - Fig. 2 . El resultat del càlcul és

$$\Pi_1 = a_0^4\left(\frac{1}{16}\right)$$
$$\Pi_{31} = a_0^4\left(\frac{1}{8}\right) \tag{3}$$

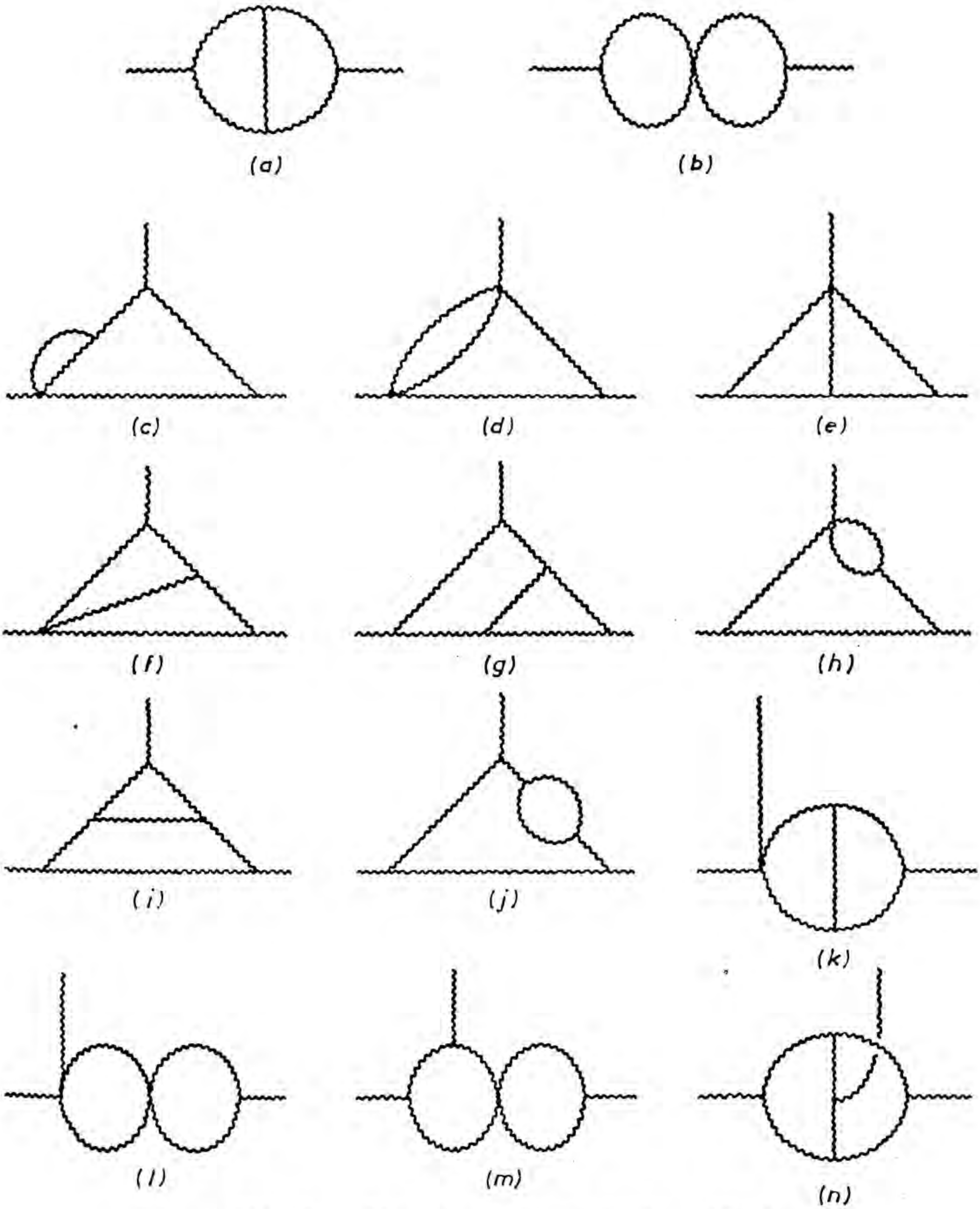


Fig. 2 Diagrames corresponents a l'auto-energia del gluo i vèrtex de tres gluons que contribueixen a $C_2^2(G)\,a_o^4$

i substituint-ho a (24.2)

$$\alpha_{EFF}^{(4)}(p^2) = \alpha_{MS}(\nu)\left[\cdots + \left(\frac{\alpha_{MS}(\nu)}{\pi}\right)^2 a^4(\nu)\, C_2^2(G)\left(\frac{1}{64}\right) + \cdots\right] \quad (1)$$

que no és tampoc independent del paràmetre de gauge.

S'ha vist per càlcul explícit que la constant d'acoblament independent del RS que és independent del paràmetre de gauge al nivell d'un bucle (i la única que te aquesta propietat) no ho és, dissortadament, a ordres superiors.

II.5 Comentaris finals

La introducció de les masses no canvia les conclusions dels apartats anteriors: a primer ordre el terme al qual contribuieixen les masses dels quarks és independent del paràmetre de gauge.

En definitiva, QED disposa d'una càrrega efectiva amb totes les propietats desitjades≠, però no tenim un anàleg en QCD.

En principi és possible definir quatre tipus de constant efectiva amb l'ajut dels quatre vèrtexs presents al lagrangià, encara que només (16.5) és independent del paràmetre a_0 a l'ordre més baix. Totes aquestes constants reuneixen les següents propietats:

≠ La generalització d'aquesta constant en el cas de $SU(2) \times U(1)$ és possible. Apareix aleshores una constant d'estructura fina efectiva, anàleg a la de QED, però també una constant de Fermi efectiva, α_Z^{EFF}.

La questió ha estat darrerament estudiada en un llarg paper per Baulieu i Coquereaux [29]. Vegeu també les refs. 30–32.

1) Són finites (UV i IR)

2) Poden expressar-se en termes de quantitats sense renormalitzar.

3) Són, per tant, independents de l'esquema de renormalització. Poden calcular-se en qualsevol d'ells.

4) Relacionen apropiadament la constant d'acoblament renormalitzada en diferents esquemes.

5) A QCD amb masses exhibeixen explicitament el desacoblament dels quarks pesats.

6) Molt per sobre de qualsevol llindar fermiònic

$$\alpha_{EFF}(q^2) \sim \bar{\alpha}(q^2)$$

(recordem que aquesta propietat és també present a QED)

7) $\alpha_{EFF}(q^2 = |\mu^2|) = \bar{\alpha}_\mu(\mu)$

8) La seva expressió en termes de funcions de Green no és única. Les identitats d'Slavnov-Taylor permeten escriure α_{EFF} com a combinació de distintes funcions pròpies (la seva expressió com a funció de q^2 sí és evidentment única)

Malgrat llur dependència gauge, com la sèrie completa de QCD no pot dependre del gauge i, per això, α_{EFF} amb una elecció arbitrària del gauge conserva la seva utilitat com a paràmetre de l'expansió (per descontat, no observable). ---- $\alpha_{EFF}(q^2)$ exhibeix a QCD amb masses el desacoblament dels - quarks pesats, però ràpidament per sobre i per sota dels -- llindars fermiònics s'apropa a $\bar{\alpha}(q^2)$ (hom suposa, evidentment, que els llindars es troben prou separats). Una alternativa a emprar α_{EFF} per arreu és, doncs, emprar ---

$\bar{\alpha}^{p}_{\overline{MS}}(q^2)$ per sota del p-éssim llindar i $\bar{\alpha}^{p+1}_{\overline{MS}}(q^2)$ per sobre. α_{EFF} proporciona un enllaç a ambdues constants elegint les condicions de contorn de les equacions que fixen l'evolució de les constants d'acoblament runnig com

$$\begin{aligned} \alpha^{p+1}_{\overline{MS}}(\mu) &= \alpha_{EFF}(q^2=(\mu^2)) \\ \alpha^{p}_{\overline{MS}}(\mu) &= \alpha_{EFF}(q^2=(\mu^2)) \end{aligned} \tag{1}$$

que, tenint en compte l'expresió per a α_{EFF} ≠ condueix a[23]

$$\alpha^{p}_{\overline{MS}}(\mu) = \alpha^{p+1}_{\overline{MS}}(\mu)\left[1+\frac{\alpha^{p+1}_{\overline{MS}}(\mu)}{\pi}\frac{1}{3}\ln\frac{M_F\sqrt{2}}{\mu}\right] \tag{2}$$

≠ L'expressió de α_{EFF} de ref. 23 està calculada en el punt simètric $p_i^2 = -\mu^2$, i=1,2,3 i per al vèrtex ghost-ghost-gluo. La relació (2) no depèn, però, d'aquestes arbitrarietats segons ha demostrat Weinberg mitjançant una acció efectiva[33]. Per integració del quarks pesats arriba igualment a (2) com a relació entre les constants d'acoblament running en ambdós costats del llindar. Aquesta relació és, a més, independent del gauge.

≠≠ De la mateixa manera que en QED, a QCD es defineix una massa efectiva (Cfr. p. 13) Malgrat aquest paral.lelisme, el significat és aquí molt més fosc. Donat que els quarks no son, segons sembla, detectables com a partícules lliures, el definir llur massa com el pol del propagador pot ésser perfectament irreal. Apareixen, a més, dos tipus de masses "experimentals" de molt distinta magnitud; les masses corrents i les masses constituents.

Recentment s'ha defensat la identificació de les masses efectives amb les masses constituents dels quarks[34]. Tot i així, les correccions no pertorbatives a aquestes masses (importants per als quarks lleugers) son dependents del gauge[35,36].

REFERÈNCIES DE LA SECCIÓ II

1 Dine,M, Sapirstein,J Phys. Rev. Lett. 43,668(1979)

2 Chetyrkin,K.G., Kataev,A.L., Tkachov,F.V. Phys. Lett. 85 B,277(1979)

3 Celmaster,W., Gonsalves,R.J. preprint UCSD-10P10-206 (1979)

4 Pascual,P., Tarrach,R. Anales de Física, 77,4(1981)

5 Celmaster,W., Sivers, D. Phys. Rev. D23,277(1981)

6 Cvitanović,P. Nucl. Phys. B127, 176(1977)

7 't Hooft,G. Phys. Lett.

8 Espriu,D., Palanques,A., Pascual,P., Tarrach,R. Zeits. f. Phys. C13,153(1982)

9 Coquereaux,R. Phys. Rev. D23,2276(1981)

10 Pascual,P., Tarrach,R. Nucl. Phys. B174,123(1980)

11 Applequist,T., Carrazone,J. Phys. Rev. D11,2856(1978)

12 Kubo,J., Sakakibara,S. preprint Dortmund DO-TH 81/07

13 Sachrajda,C.T. GIFT Lectures 1979. Quantum Chromodynamics. Proceedings edited by J.L. Alonso and R. Tarrach. Springer 1980

14 Yndurâin,F.J. Quantum Chromodynamics. An Introduction to the Theory of Quarks and Gluons,

15 Stevenson,P.M. Phys. Lett. 100B,61(1981)

16 Grunberg,G. Phys. Lett. 95B,70(1980)

17 Coquereaux,R. Ann. of Phys. 125,401(1980)

18 Stückelberg,E.C.G., Peterman,A. Hel. Phys. Acta 26,499(1953)

19 Gell-Mann,M., Low,F. Phys. Rev. 95,1300(1954)

20 Binétruy,P., Schücker,T. CERN report TH-2857(1980)

21 Ovrut,B., Schnitzer,H. Brandeis preprint (1980)

22 Coquereaux,R. Thèse. Université d'Aix-Marseille II

23 Coquereaux,R. Phys. Rev. D23,1365(1981)

24 Weinberg,S. Phys. Rev. 118,838(1960)

25 Symanzik,K. Springer Tracts in Modern Physics, vol 57, 1971

26 Espriu,D., Pascual,P. Treball no publicat

27 Caswell,W., Phys. Rev. Lett. 33,244(1974)

28 Jones,D.R.T. Nucl. Phys. B75,531(1974)

29 Baulieau,L., Coquereaux,R. Ann. of Phys. 140,163(1982)

30 Kazama,Y., York-Peng,Y. FERMILAB Pub 81/18-THY 1981

31 Kubo,J., Sakakibara,S. Dortmund preprint DO-TH 80/05 (1980)

32 Llewellyn-Smith,C.H., Ross,C.G., Wheather,J.F. Oxford preprint 57/80

33 Weinberg,S. Phys. Lett. 91B,51(1980)

34 Tarrach,R. Nucl. Phys. B183,384(1981)

35 Politzer,H.D. Nucl. Phys. B117,397(1976)

36 Pascual,P., de Rafael,E. Zeits. f. Phys. C12,127(1982).

Problemes cada volta més esquius
et vénen a tortar la dolça son.

S. Espriu

A l'apartat anterior ha quedat clara la necessitat d'utilitzar diferents esquemes de renormalització. En particular, l'elecció d'una prescripció determinada implica la utilització del grup de renormalització en aquest esquema. A (I.14.4) s'han definit les funcions del grup de renormalització. En aquesta secció ens proposem discutir algunes de llurs propietats; singularment la dependència en la prescripció.

III.1 Punts fixos

El comportament de la solució d'una equació de la forma

$$\frac{dz}{dt} = z\,\beta(z) \tag{1}$$

com (I.16.1.a), està governat pels zeros o punts fixos de $\beta(z)$. Tant (I.16.2.a) com (I.16.2.b) i (I.16.2.c) començan -en el límit $\epsilon \longrightarrow 0$ - a ordre α. Clarament $z = 0$ és un punt fix. El comportament de la solució al voltant de l'origen hom l'obtindria solucionant

$$\int \frac{dz}{z\,\beta_1 \frac{z}{\pi}} = t + C \quad , \tag{2}$$

amb les condicions de contorn de (I.16.1)

$$\int_{\alpha}^{\bar{\alpha}} \frac{dz}{z\,\beta_1 \frac{z}{\pi}} = t \tag{3}$$

(3) és evidentment vàlida sempre i quan ens mantinguem en un domini de t en el que $\bar{\alpha}$ sigui petit.

Hi han dues possibilitats, $\beta_1 \gtrless 0$. Quan $\beta_1 > 0$ ($\beta_1 < 0$), $\bar{\alpha}$ creix (decreix) amb t. A la llum de (1.3), una teoria amb $\beta_1 < 0$ és asimptòticament lliure ≠. - S'ha provat que les úniques teories que presenten lliber_ tat asimptòtica són les teories no abelianes de gauge sen_ se trencament espontani de simetria i $\lambda\phi^4$ (amb el signe del terme d'acoblament canviat) en quatre dimensions[1].

En teories SU(N),

$$\beta_1 = -\left(\frac{11}{3}\frac{N}{2} - \frac{1}{3}N_f\right) \tag{1}$$

i, per tant, a QCD hi ha llibertat asimptòtica sempre que $N_f \leqslant 16$ ≠≠.

$\beta(z)$ pot certament presentar altres zeros. Po_ ssiblement més enllà d'on pot arribar-se amb uns pocs ter_ mes pertorbatius. Suposem que z_1 és un zero simple de $\beta(z)$. En un entorn de z_1

$$\beta(z) = \beta_1 \frac{z - z_1}{\pi} \tag{2}$$

i (1.3) és ara:

$$\int_{\alpha}^{\bar{\alpha}} \frac{dz}{z\,\beta_1 \frac{z - z_1}{\pi}} = t \tag{3}$$

Si $\beta_1 < 0$ i no hi han altres zeros entre α i z_1 , en el límit ultra-violeta, $t \to \infty$, $\bar{\alpha} \to z_1$; z_1 és un punt fix estable ultra-violeta (UVSFP).

≠ Històricament, aquesta fou una fita important per a QCD. Era sa_ but a la llum del model de partons, ben contrastat en col.lisions profun_ dament inelàstiques, que els constituents hadrònics apareixien com lliures a molt altes energies. Era sabut també que una teoria amb $\beta_1 < 0$ seria en aquest sentit asimptòticament lliure. El conèixer que aquesta propietat era a les teories no abelianes de gauge, tipus Yang-Mills, va donar peu a considerar seriosament aquestes com a candidats per a descriure les inte_ raccions fortes [2,3].

≠≠ No és la millor fita. Arguments cosmològics semblen imposar $N_f \leqslant 4$ i molt probablement només hi han les tres generacions actuals.

Si $\beta_1 > 0$ i α es troba en el domini d'atracció de z_1, en el límit infra-roig, $t \to -\infty$, $\bar{\alpha} \longrightarrow z_1$; z_1 és un punt fix estable infra-roig (IRSFP).

En ambdós casos, si els zeros no són simples[ǂ] la qües_tió pot ser un xic més delicada. Si el zero és d'ordre im_parell l'anàlisi funciona igualment. Si és d'ordre parell el signe relevant és aleshores el de $\beta_1 (z - z_1)$. Com en qualsevol teoria de camps, al menys pertorbativament, $\beta(0) = 0$, l'origen és un UVSFP o un IRSFP necessaria_ment. En cas d'haver-hi més d'una constant d'acoblament, - l'origen pot ser un punt fix IR per a un cert acoblament i UV per a un altre.

Examinem algunes possibilitats

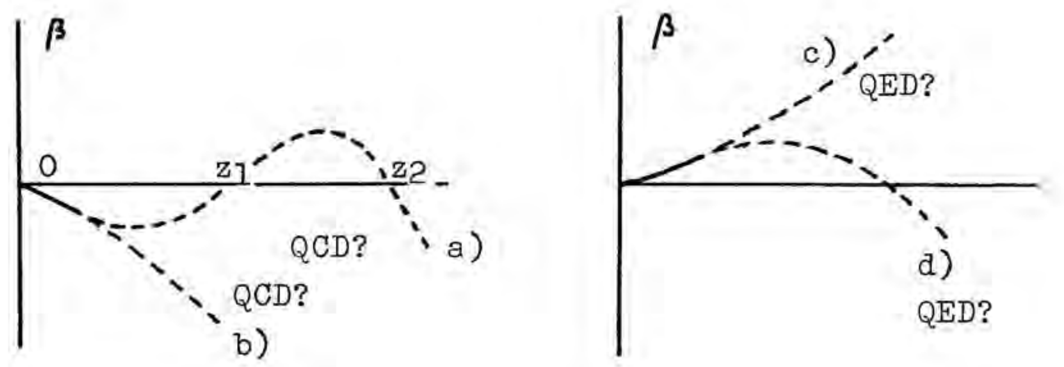


Fig. 1

El cas a) és una teoria amb dos punts fixos UV i un IR, z_1. Si la constant d'acoblament renormalitzada en un cert esquema es troba entre 0 i z_1 , en el límit $t \to \infty$ (UV) $\bar{\alpha} \longrightarrow 0$, la teoria serà asimptòticament lliure. Quan $t \to -\infty$, $\bar{\alpha}$ s'apropa a z_1 que serà el IRSFP de la teo_

ǂ L'ordre del zero determina la rapidesa amb que la constant d'aco_blament s'apropa al punt fix.

ria. Si α es trobés entre z_1 i z_2 ; z_2 seria el UVSFP. Naturalment en aquest cas no tindria llibertat asimptòtica, $\bar{\alpha} \not\rightarrow 0$; tot i així, aquesta és una zona possiblement no accesible pertorbativament.

b) és també un possible candidat per a la funció β de QCD. Si aquest és el cas, α es trobaria sempre dins del domini d'atracció de l'origen. La llibertat asimptòtica - s'exhibiria qualsevulla que fos α . En aquesta situació no existiria cap IRSFP.

D'haver-hi un IRSFP, en el límit $t \rightarrow -\infty$, $\bar{\alpha} \rightarrow z_1$. Naturalment si z_1 és petit té encara sentit un càlcul pertorbatiu, encara en aquest límit, i difícilment pot imaginar-se un mecanisme dinàmic per a obtenir confinament. Si z_1 és d'una mena tal que impedeix parlar pròpiament d'una sèrie -- pertorbativa, el confinament és possible en principi.

En absència d'un IRSFP hi han dues possibilitats

$$\int_{\alpha}^{\infty} \frac{dz}{z\,\beta(z)} = \begin{cases} \tau < \infty & \text{(a)} \\ \infty & \text{(b)} \end{cases} \qquad (1)$$

En el cas (1.b), $\bar{\alpha} \rightarrow \infty$ en el límit $t \rightarrow -\infty$. És la -- possibilitat més obvia de confinament[≠]. El cas (1.a) correspon a trobar ja un acoblament infinit per a una distància -- finita (seria una construcció dinàmica d'un bag-model). - En qualsevulla d'aquestes possibilitats obviament no és vàlid un càlcul pertorbatiu.

Com oposició a QCD, QED té $\beta_1 = \frac{2}{3} > 0$. La teoria no té llibertat asimptòtica -per tant és estable infra-roja. A curtes distàncies la constant d'acoblament de QED es

---

[≠] Encara que és molt probable que l'esclavatge infra-roig ($\bar{\alpha} \rightarrow \infty$) impliqui confinament, no hi ha una prova definitiva en QCD.

fa més i més gran$^{\neq}$. Eventualment pot presentar un UVSFP -- (Fig. 1.d))

L'anàlisi anterior pot extendre's a les restants funcions del grup de renormalització. Considerem

$$\frac{d\bar{x}_i}{dt} = - [1 + \gamma_i] \bar{x}_i \qquad (1)$$

que té per solució

$$\bar{x}_i = \frac{x_i}{\lambda} \exp - \int_0^t \gamma_i (\bar{\alpha}(t')) dt' \qquad (2)$$

on λ és el factor que escala els moments (I.15.2). En teories asimptòticament lliures quan $t \to \infty$, $\gamma_i \ll 1$ i, per -- tant, $\bar{x}_i \to 0$. Weinberg ha demostrat que en teories ---- asimptòticament lliures els termes logarítmics -en qualsevol potència- no depenen de les masses i, per tant, en el límit $t \to \infty$ pot substituir-se $\bar{m} \to 0$ [6].

Els zeros de la funció γ_i tenen idèntic significat als de β . Pertorbativament només $\bar{\alpha} \sim 0$ és acccesible i - l'únic punt fix ($\bar{m} \to 0$) és UVSFP. Eventualment poden - haver-hi altres zeros.

En teories no abelianes $Z_{3\,YM} \neq Z_{1\,YM}$ $^{\neq\neq}$, per tant $\delta \neq \beta$. δ satisfà l'equació

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \delta (\bar{\alpha}, \bar{a}) \quad {}^{\neq\neq\neq} \qquad (3)$$

amb la condició de contorn $\bar{a}(0, \alpha, a) = a$. A primer --

---

$\neq$ Aquest creixement ha estat efectivament comprovat experimentalment. La mesura amb gran precisió del moment magnètic anòmal del muo és sensible al comportament a curtes distàncies del propagador del fotó. -- La consistència amb les prediccions és excelent[4,5].

$\neq\neq$ S'entén en la formulació habitual. És possible trobar un gauge en el que $Z_{3\,YM} = Z_{1\,YM}$: el background field gauge (Cfr. secc. IV).

$\neq\neq\neq$ Suposem un esquema independent del sabor.

ordre

$$\delta(\bar{\alpha},\bar{a}) = \frac{\bar{\alpha}}{\pi}\bar{a}\left[C_1(G)\left(\frac{13}{12}-\frac{\bar{a}}{4}\right)-\frac{N_f}{3}\right]+O(\bar{\alpha}^2) \qquad (1)$$

Clarament $\bar{a}=0$ és un punt fix de (5.3). Quan $\frac{39}{4}<N_f<\frac{33}{2}$ veiem de (I.17.6) que $\bar{a}=0$ és un UVSFP. En canvi, $\bar{a}\to\frac{13}{3}-\frac{4}{9}N_f$ quan $t\to\infty$ sempre que $N_f<\frac{39}{4}\ (<10)$ $\frac{13}{3}-\frac{4}{9}N_f$ és el UVSFP aleshores.

Ordre per ordre a teoria de pertorbacions és possible trobar un gauge $a=\frac{13}{3}-\frac{4}{9}N_f+O(\alpha)$ tal que la dimensió -- anòmala del camp de gauge es faci zero (evidentment això no pot fer-se a QED, car Z_3 és, aleshores, independent del gauge).

III.2 Dependència de l'esquema

Com canvia la situació al passar d'un esquema de renor_ malització a un altre diferent ? L'existència dels zeros de les funcions del grup de renormalització no pot dependre de l'esquema de renormalització emprat[7], puix que tenen, com s'ha vist relevància física. En principi els zeros en un valor finit de l'acoblament poden tenir una dependència de l'esquema triat.

Examinem quina és la dependència de les funcions del -- grup de renormalització en la prescripció agafada per a eli_ minar les divergències ultra-violetes.

Considerem dues prescripcions I,II , independents de -- les masses. Llurs constants renormalitzades en μ_I i μ_{II} són respectivament α_I i α_{II} , relacionades per

$$\alpha_I = \alpha_{II}\left(1+A\left(\frac{\alpha_{II}}{\pi}\right)+B\left(\frac{\alpha_{II}}{\pi}\right)^2+\cdots\right) \qquad (2)$$

si suposem que A,B,... no depenen de a , el paràmetre de gauge, derivant respecte a μ en ambdós costats

$$\beta_I^{(1)} = \beta_{II}^{(1)} + O(\epsilon)$$

$$\beta_I^{(2)} = \beta_{II}^{(2)} + O(\epsilon) \qquad (1)$$

$$\beta_I^{(3)} = \beta_{II}^{(3)} + (B - A^2)\,\beta_{II}^{(1)} - A\,\beta_{II}^{(2)} + O(\epsilon) \quad \neq$$

$$\ldots$$

La independència del RS dels primer dos coeficients de la funció β de Callan-Symanzik fou primerament establerta, encara que d'una forma diferent, degut a la presència d'un terme màssic, per Symanzik[9]. Malgrat això, la teoria de camps que Symanzik considerà és $\lambda\phi^4$ i no una teoria gauge. Els seus resultats només poden traslladar-se a una teoria gauge si el paràmetre de gauge es manté fix; això és, si no satisfà ell mateix una equació del grup de renormalització que governa la seva dependència del punt de renormalització. Nogensmenys, quan les equacions del grup de renormalització s'obtenen mantenint tots els paràmetres despullats de la teoria fixats, de forma que els paràmetres renormalitzats varien, hi ha una diferència entre les teories amb o sense simetria gauge. Això és així perque la quantització introdueix un nou paràmetre en les teories gauge, el paràmetre de gauge, que es renormalitza i depèn aleshores del punt de renormalització μ. Quan les equacions del grup de renormalització s'obtenen en la manera habitual, mantenint fixes el paràmetres despullats, una nova dependència en μ apareix mitjançant el paràmetre de gauge renormalitzat. Això requereix una revisió de les propietats d'independència del RS dels coeficients de les funcions del grup de renormalització. Això és el que ens agradaria estudiar ara.

$\neq$ 't Hooft ha assenyalat el fet notable que sempre és possible trobar una prescripció tal que $\beta^{(3)} = \beta^{(4)} = \ldots = 0$. Aleshores $\alpha/\pi\, \beta^{(1)} + (\alpha/\pi)^2 \beta^{(2)}$ és la funció β exacta, a tots els ordres. Lamentablement hom no pot donar-li significat físic. La raó és que la constant d'acoblament corresponent a aquesta prescripció no correspon a la renormalització de cap funció de Green[8].

En qualsevol esquema de renormalització hi ha un parà_ metre amb dimensions de massa, μ , que especifica el punt de renormalització. En els esquemes dimensionals com ara el MS i el $\overline{\text{MS}}$ intervé quan la constant d'acoblament sense re_ normalitzar, α_{0D} , que en $D = 4 + 2\epsilon$ dimensions té una certa dimensionalitat, s'escriu d'una forma tal que exhibeix explicitament la seva dimensió $\alpha_0 = \alpha_{0D}(\mu^2)^\epsilon$. En esque_ mes de tipus subtracció en un moment euclidià com l'esque_ ma μ o W entra, evidentment, com el punt on es fa la - subtracció, $p^2 = -\mu^2$. En aquests darrers esquemes, per simplicitat, farem servir la mateixa μ per a les dimen_ sions de la constant d'acoblament despullada i per al punt de subtracció.

Donat que ens referim únicament a esquemes independents del sabor, les funcions del grup de renormalització seran - independents de X_i i γ_j no serà dependent del sabor, podent, aleshores, ometre l'índex.

Recordem que les tres funcions β , γ i δ tenen una expansió en α

$$\begin{aligned} \beta &= \beta_0 + \frac{\alpha}{\pi}\beta_1 + \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2\beta_2 + \cdots \\ \gamma &= \frac{\alpha}{\pi}\gamma_1 + \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2\gamma_2 + \cdots \\ \delta &= \frac{\alpha}{\pi}\delta_1 + \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2\delta_2 + \cdots \end{aligned} \tag{1}$$

i $\beta_0 = 2\epsilon$ apareix degut al fet que α_0 , la constant d'aco_ blament nua, sense dimensions, depèn de μ per a α_{0D} fix. Els coeficients β_j , γ_j i δ_j són només funció de a . Per j = 1 tots tres són essencialment indepen_ dents del RS, com s'ha vist. El seu valor es dóna a (I.18.1). A l'esquema MS, els segons coeficients venen donats per --- (I.18.2). Recentment, hom ha calculat també β_3^{MS} [10].

Ara ens proposem calcular en els altres esquemes. La constant d'acoblament, la massa i el paràmetre de gauge renormalitzats estan relacionats amb els seus homònims despullats per

$$\alpha_0 = \alpha_{0_D}(\mu^2)^{\epsilon} = Z_\alpha^R\, \alpha^R(\mu)$$
$$m_0 = Z_m^R\, m^R(\mu) \qquad (1)$$
$$a_0 = Z_a^R\, a^R(\mu)$$

Recordant (I.14.4)

$$\beta^R - \beta_0 = -(Z_\alpha^R)^{-1} \mu \frac{dZ_\alpha^R}{d\mu}$$
$$\gamma^R = (Z_m^R)^{-1} \mu \frac{dZ_m^R}{d\mu} \qquad (2)$$
$$\delta^R = -a^R(\mu)(Z_a^R)^{-1} \mu \frac{dZ_a^R}{d\mu}$$

Abans de continuar, noteu que β_1^{MS} , β_2^{MS} , γ_1^{MS} i γ_2^{MS} són independents del paràmetre de gauge. Aquest resultat és degut a Caswell i Wilczek[11≠]. Es demostra que en un RS on la

---

≠ L'argument és el següent (per simplicitat considerarem QCD sense quarks) : considerem una funció de Green $\Gamma^{(n)}$, amb n camps de gauge. Obeeix una equació com

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial\mu} + \beta\alpha \frac{\partial}{\partial\alpha} + n\gamma_\Gamma + \delta \frac{\partial}{\partial a}\right] \Gamma^{(n)} = 0$$

Un canvi en el paràmetre de gauge podrà compensar-se per un canvi en la constant d'acoblament més un canvi en l'escala

$$\left[\frac{\partial}{\partial a} + \rho(\alpha, a)\,\alpha \frac{\partial}{\partial\alpha} + n\,\sigma(\alpha, a)\right] \Gamma^{(n)} = 0$$

Reunint ambdues equacions

$$D\bar{\beta} - \bar{\beta}\alpha \frac{\partial\rho}{\partial\alpha} = 0 \qquad D\bar{\gamma}_\Gamma - \bar{\beta}\alpha \frac{\partial\sigma}{\partial\alpha} = 0$$

amb $\bar{\beta} = \beta - \rho\delta$, $\bar{\gamma}_\Gamma = \gamma_\Gamma - \sigma\delta$ i $D = \rho\alpha \frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial a}$. També es verifica

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial\mu} + \bar{\beta}\alpha \frac{\partial}{\partial\alpha} + n\bar{\gamma}_\Gamma\right] \Gamma^{(n)} = 0$$

ρ, σ són calculables en teoria de pertorbacions, començant totes dues en $O(\alpha)$. En conseqüència, β i γ_Γ no depenen de a a l'ordre més baix.

En renormalització dimensional, en principi

$$\alpha_0 = \alpha\left(1 + \frac{a_1(\alpha, a)}{\epsilon} + \frac{a_2(\alpha, a)}{\epsilon^2} + \cdots\right)$$

per tant $\rho \sim \frac{\partial\alpha}{\partial a} = 0$ i $\bar{\beta}\ (=\beta)$ és independent de a . Per idèntica raó $\sigma = 0$ i γ_Γ no depèn del gauge.

constant d'acoblament renormalitzada és independent del paràmetre de gauge, també la funció β és independent del gauge. Això esdevé així al MS o al $\overline{\text{MS}}$, però no al W. Com a conseqüència també la demostració de que β_2 no depèn de l'esquema falla. En efecte, escrivim la relació entre $\alpha^R(\mu)$ i $\alpha^{MS}(\mu)$ com

$$\alpha^{MS}(\mu) = \alpha^R(\mu)\left(1 + A^R(a^R(\mu))\frac{\alpha^R(\mu)}{\pi} + B^R(a^R(\mu))\left(\frac{\alpha^R(\mu)}{\pi}\right)^2 + \cdots\right) \quad (1)$$

tota la dependència en μ de $A^R, B^R, \ldots$ ve mitjançant el paràmetre de gauge renormalitzat, $a^R(\mu)$. Derivant, com abans, a tots dos costats respecte a μ trobem inmediatament, amb l'ajut de (9.2)

$$\begin{aligned} \beta_1^R &= \beta_1^{MS} - \beta_0 A^R \\ \beta_2^R &= \beta_2^{MS} - \delta_1^R \frac{dA^R}{da^R} + 2(A^{R2} - B^R)\beta_0 \end{aligned} \quad (2)$$

així que β_1 és efectivament independent del RS en el límit $\epsilon \to 0$ i β_2 en el límit $\epsilon \to 0$ i quan A^R és independent del paràmetre de gauge. Calculem A^R en diferents esquemes.

Recordem que al nivell d'un bucle

$$Z_\alpha^{MS(2)} = 1 + \frac{\alpha^{MS}(\mu)}{\pi}\frac{1}{\epsilon}\left[\frac{11}{12}C_2(G) - \frac{N_f}{6}\right] \quad (3)$$

Per al $\overline{\text{MS}}$, el factor numèric $\gamma_E - \ln 4\pi$, γ_E : constant d'Euler, que sempre acompanya el pol s'inclou a la constant de renormalització

$$Z_\alpha^{\overline{MS}(2)} = 1 + \frac{\alpha^{\overline{MS}}(\mu)}{\pi}\left(\frac{1}{\epsilon} + \gamma_E - \ln 4\pi\right)\left[\frac{11}{12}C_2(G) - \frac{N_f}{6}\right] \quad (4)$$

L'esquema W es defineix demanant que les funcions de Green renormalitzades no tinguin correccions radiatives en un cert punt euclidià en el límit de massa zero per als quarks. Per a l'esquema W el resultat pot trobar-se a refs. 12,13; tri_ ant, p. ex., el vèrtex de tres gluons en el punt simètric per a fer la subtracció, hom té

$$Z_\alpha^{W(2)} = 1 + \frac{\alpha^W(\mu)}{\pi}\Big\{\Big[\frac{11}{12}C_2(G) - \frac{N_f}{6}\Big]\Big(\frac{1}{\epsilon} + \gamma_E - \ln 4\pi\Big)$$
$$+ C_2(G)\Big[-\frac{23}{12} - \frac{R}{72} - (1-a^W(\mu))\frac{5}{48}R +$$
$$\frac{1}{16}(1-a^W(\mu))^2\Big(1-\frac{2R}{3}\Big) + \frac{1}{48}(1-a^W(\mu))^3\Big] + N_f\Big(\frac{1}{3}+\frac{2}{9}R\Big)\Big\}$$

amb $R = 2.343907...$

De (9.1) i (10.1) hom dedueix

$$A^{\overline{MS}} = (\gamma_E - \ln 4\pi)\Big[\frac{11}{12}C_2(G) - \frac{N_f}{6}\Big]$$
$$A^W = (\gamma_E - \ln 4\pi)\Big[\frac{11}{12}C_2(G) - \frac{N_f}{6}\Big]$$
$$+ C_2(G)\Big[-\frac{23}{12} - \frac{R}{72} - (1-a^W(\mu))\frac{5}{48}R + \tag{2}$$
$$\frac{1}{16}(1-a^W(\mu))^2\Big(1-\frac{2R}{3}\Big) + \frac{1}{48}(1-a^W(\mu))^3\Big] + N_f\Big(\frac{1}{3}+\frac{2}{9}R\Big)\Big\}$$

Això demostra que fins i tot per a la part finita ($\epsilon \to 0$), $\beta_2^W \neq \beta_2^{MS}$ i, a més, β_2^W depèn del paràmetre de gauge. Efectivament, com $\delta_1^{MS} = \delta_1^W$ trobem per $\epsilon \to 0$

$$\beta_2^W = \beta_2^{MS} - a^W(\mu)\Big[C_2(G)\Big(\frac{13}{12} - \frac{a^W(\mu)}{4}\Big) - \frac{N_f}{3}\Big]\cdot C_2(G)\cdot$$
$$\Big[\frac{5}{48}R - \frac{1}{8}(1-a^W(\mu))\Big(1-\frac{2R}{3}\Big) - \frac{1}{16}(1-a^W(\mu))^2\Big] \tag{3}$$

Existeix una modificació de l'esquema de Weinberg standard, $\overline{W}$, en la que $\beta_2^{\overline{W}} = \beta_2^{MS}$ per $\epsilon \to 0$. Correspon a fer la subtracció per al vèrtex de tres gluons en una configuració on un dels moments és zero, essent euclidians els altres dos. Tot i que aquesta és certament una configuració excepcional, $\alpha^{\overline{W}}(\mu)$ és, en aquest esquema, finita infra-roig. Però més interessant és que és independent del paràmetre de gauge. La constant de renormalització corresponent és[14]:

$$Z_\alpha^{\overline{W}(\mu)} = 1 + \frac{\alpha^{\overline{W}}(\mu)}{\pi}\left\{\left[\frac{11}{12}C_2(G) - \frac{N_f}{6}\right]\left(\frac{1}{\epsilon} + \gamma_E - \ln 4\pi\right) + C_2(G)\left(-\frac{35}{18}\right) + \frac{11}{18}N_f\right\} \tag{1}$$

i

$$A^{\overline{W}} = (\gamma_E - \ln 4\pi)\left[\frac{11}{12}C_2(G) - \frac{N_f}{6}\right] - \frac{35}{18}C_2(G) + \frac{11}{18}N_f \tag{2}$$

que certament no depèn de $a^{\overline{W}}(\mu)$. Hi ha una cancel.lació completa de les parts dependents del gauge de l'auto-energia del gluo i del vèrtex de tres gluons en aquest punt de subtracció. Aquesta modificació de l'esquema de Weinberg també és força convenient des del punt de vista de càlcul.

La dependència en $a^{W}(\mu)$ de β_2^{W} porta,però, un nou problema. Recordem que quan β_2^{R} no depèn de $a^{R}(\mu)$ la integració de les funcions (I.16.1) pot fer-se sense problemes. - Al nivell de dos bucles condueix a (I.17.1), definint una constant d'integració Λ_R dependent del RS, però independent del punt, naturalment. Aquesta constant d'integració ve només correctament definida al nivell de dos bucles per

$$\frac{\alpha^{R}(\mu)}{\pi} = \frac{1}{-\beta_1^{R}\frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{\Lambda_R^2}} - \frac{1}{\left(-\beta_1^{R}\frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{\Lambda_R^2}\right)^2}\frac{\beta_2^{R}}{\beta_1^{R}}\ln\ln\frac{\mu^2}{\Lambda_R^2} \tag{3}$$

Ara bé, a l'esquema W, β_2^{W} depèn de $a^{W}(\mu)$ i, com a conseqüencia, les equacions (I.16.1) estan acoblades entre si, al nivell de dos bucles i no existeix una definició de Λ_W anàleg a la de Λ_{MS} . És a dir, no satisfaria una equació com (3). Veiem que sortosament, al menys al nivell de dos bucles, això no és així.

Recordem que la integració, al nivell d'un bucle, de (I.16.1.c) porta a (Cfr. (I.17.6))

$$a^R(\mu) = \frac{\hat{a}^R}{\dfrac{\hat{a}^R}{\frac{13}{3} - \frac{4}{3}\frac{N_f}{C_2(G)}} + \left(\frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{\Lambda_R^2}\right)\frac{1}{\beta_1^R}\left(\frac{13}{12}C_2(G) - \frac{N_f}{3}\right)} \qquad (1)$$

El límit per a μ gran és

$$a^R(\mu) \longrightarrow \frac{13}{3} - \frac{4}{3}\frac{N_f}{C_2(G)} \qquad si \qquad N_f < \frac{13}{4}C_2(G)$$

$$a^R(\mu) \longrightarrow 0 \qquad si \quad \frac{13}{4}C_2(G) < N_f < \frac{11}{2}C_2(G) \qquad (2)$$

Les correccions a aquests límits són de l'ordre de potències negatives de $\ln \mu^2/\Lambda_R^2$. Aleshores, al terme dominant a segon ordre, hom pot substituir el paràmetre de gauge pel seu límit segons (2). Però precisament en aquests dos lí_mits, la part dependent del gauge és zero ! Aleshores, en la constribució dominant, $\beta_2^W = \beta_2^{MS}$ per $\epsilon \to 0$ i la integració de (I.16.1.a) pot fer-se a l'esquema W com per al MS. Per això, hom pot definir una Λ_W en analogia amb Λ_{MS}.

III.3 Funcions γ i δ

Estudiem ara γ_2^R. Com per a la constant d'aco_blament, també les masses renormalitzades en dos esquemes diferents estan relacionades per una sèrie en potències de la constant d'acoblament

$$m^{MS}(\mu) = m^R(\mu)\left(1 + C^R(a^R(\mu))\frac{\alpha^R(\mu)}{\pi} + D^R(a^R(\mu))\left(\frac{\alpha^R(\mu)}{\pi}\right)^2 + \cdots\right) \qquad (3)$$

Prenent derivades,

$$\begin{aligned} \gamma_1^R &= \gamma_1^{MS} + \beta_0 C^R \\ \gamma_2^R &= \gamma_2^{MS} + A^R\gamma_1^{MS} + C^R\beta_1^{MS} + \frac{dC^R}{da^R}\delta_1^R + (2D^R - C^{R^2} - C^R A^R)\beta_0 \end{aligned} \qquad (3)$$

d'on γ_1 és independent del RS per a $\epsilon \to 0$. La situació per a γ_2^R és més complicada. Les constants de renormalització de la massa en els diferents esquemes poden obtenir-se de ref. 12

$$
\begin{aligned}
Z_m^{MS(2)} &= 1 + \frac{\alpha^{MS}(\mu)}{\pi} \frac{1}{\epsilon} \frac{3}{4} C_2(R) \\
Z_m^{\overline{MS}(2)} &= 1 + \frac{\alpha^{\overline{MS}}(\mu)}{\pi} \frac{1}{\epsilon} \frac{3}{4} C_2(R)\left(1+\epsilon(\gamma_E - \ln 4\pi)\right) \\
Z_m^{\overset{(-)}{W}(2)} &= 1 + \frac{\alpha^{\overset{(-)}{W}}(\mu)}{\pi}\left\{ \frac{3}{4} C_2(R)\left(\frac{1}{\epsilon} + \gamma_E - \ln 4\pi\right) \right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{4} C_2(R)\left(4 + a^{\overset{(-)}{W}}(\mu)\right)\right\}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

de manera que

$$
\begin{aligned}
C^{\overline{MS}} &= (\gamma_E - \ln 4\pi)\, \frac{3}{4} C_2(R) \\
C^{\overset{(-)}{W}} &= (\gamma_E - \ln 4\pi)\, \frac{3}{4} C_2(R) - \frac{1}{4} C_2(R)\left(4 + a^{\overset{(-)}{W}}(\mu)\right)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Aquests resultats juntament amb (10.2), (11.2) i (12.2) -- condueixen en el límit $\epsilon \to 0$ a

$$
\begin{aligned}
\gamma_2^{\overline{MS}} &= \gamma_2^{MS} \\
\gamma_2^{W} &= \gamma_2^{MS} + \frac{1}{4} C_2(R)\left\{ C_2(G)\left[-\frac{19}{6} - \frac{R}{12} - (1-a^W(\mu))\left(\frac{5}{4} + \frac{5}{8}R\right)\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + (1-a^W(\mu))^2\left(\frac{5}{8} - \frac{R}{4}\right) + \frac{1}{8}(1-a^W(\mu))^3\right] + N_f\left[\frac{2}{3} + \frac{4}{3}R\right]\right\} \\
\gamma_2^{\overline{W}} &= \gamma_2^{MS} + \frac{1}{4} C_2(R)\left\{ C_2(G)\left[-\frac{10}{3} - (1-a^{\overline{W}}(\mu))\frac{5}{4} + (1-a^{\overline{W}}(\mu))\frac{21}{4}\right] + \frac{7}{3}N_f\right\}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Noteu que γ_2 no canvia al anar del MS al $\overline{MS}$. Tenim aquí exactament el mateix problema que per a la integració de (I.16.1.a) teniem abans, però ara per a (I.16.1.b). Per aquells esquemes que fan γ_2 independent del gauge, la integració de (I.16.1.b) al nivell de dos bucles és:

$$
m^R(\mu) = \frac{\hat{m}^R}{\left(\frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{\Lambda_R^2}\right)^{\gamma_1^R/-\beta_1^R}} \left[1 + \frac{\gamma_2^R - \gamma_1^R \frac{\beta_2^R}{\beta_1^R}}{\beta_1^{R\,2}\frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{\Lambda_R^2}} - \frac{\gamma_1^R \beta_2^R \ln\ln\frac{\mu^2}{\Lambda_R^2}}{\beta_1^{R\,3}\frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{\Lambda_R^2}} \right]
\tag{4}
$$

Això és, aleshores, vàlid per als esquemes MS i $\overline{MS}$. Si hom vol utilitzar aquesta expressió per als esquemes W o $\overline{W}$, ha d'emprar γ_2^{W} i $\gamma_2^{\overline{W}}$ tal i com venen donades a l'equació (14.3), substituint-hi el paràmetre de gauge per al seu límit donat a (13.2). En aquests límits cap d'elles coincideix amb γ_2^{MS}.

Encara que certament de menys interès, considerem, per completitud, δ^{R} . Com abans

$$a^{MS}(\mu) = a^{R}(\mu)\left(1 - E^{R}(a^{R}(\mu))\frac{\alpha^{R}(\mu)}{\pi} + F^{R}(a^{R}(\mu))\left(\frac{\alpha^{R}(\mu)}{\pi}\right)^{2} + \dots\right) \quad (1)$$

i, derivant,

$$\begin{aligned} \delta_1^{R} &= \delta_1^{MS} - a^{R}E^{R}\beta_0 \\ \delta_2^{R} &= \delta_2^{MS} - \delta_1^{MS}(E^{R} - A^{R}) - a^{R}E^{R}\beta_1^{MS} + \frac{d\delta_1^{MS}}{da^{MS}}E^{R}a^{R} \\ &\quad - a^{R}\delta_1^{R}\frac{dE^{R}}{da^{R}} + a^{R}(E^{R2} + A^{R}E^{R} - 2F^{R})\beta_0 \end{aligned} \quad (2)$$

de nou δ_1 és independent del RS per $\epsilon \longrightarrow 0$. Per a conèixer δ_2 hom necessita les constants de renormalització

$$\begin{aligned} Z_a^{MS(2)} &= 1 + \frac{\alpha^{MS}(\mu)}{\pi}\frac{1}{\epsilon}\left[-\frac{1}{8}C_2(G)\left(\frac{13}{3} - a(\mu)\right) + \frac{N_f}{C}\right] \\ Z_a^{\overline{MS}(2)} &= 1 + \frac{\alpha^{\overline{MS}}(\mu)}{\pi}\left(\frac{1}{\epsilon} + \gamma_E - \ln 4\pi\right)\left[-\frac{1}{8}C_2(G)\left(\frac{13}{3} - a^{\overline{MS}}(\mu)\right) \right. \\ &\qquad \left. + \frac{N_f}{6}\right] \\ Z_a^{\overset{(-1)}{W}(2)} &= 1 + \frac{\alpha^{\overset{(-1)}{W}}(\mu)}{\pi}\left\{\left(\frac{1}{\epsilon} + \gamma_E - \ln 4\pi\right)\left[-\frac{1}{8}C_2(G)\cdot\right.\right. \\ &\qquad \left.\cdot\left(\frac{13}{3} - a^{\overline{W}}(\mu)\right) + \frac{N_f}{6}\right] + \frac{1}{8}C_2(G)\left[\frac{62}{9} - 2\left(1 - a^{\overset{(-1)}{W}}(\mu)\right) + \frac{1}{2}\left(1 - a^{\overset{(-1)}{W}}(\mu)\right)^{2}\right] \\ &\qquad \left. - \frac{5}{18}N_f\right\} \end{aligned} \quad (3)$$

per tant,

$$E^{\overline{MS}} = (\gamma_E - \ln 4\pi)\left[-\frac{1}{8}C_2(G)\left(\frac{13}{3} - a^{\overline{MS}}(\mu)\right) + \frac{N_f}{6}\right] \quad (4)$$

$$E^{(-1)\overline{W}} = (\gamma_E - \ln 4\pi)\left[-\frac{1}{8}C_2(G)\left(\frac{13}{3} - a^{(\overline{W})}(\mu)\right) + \frac{N_f}{6}\right]$$
$$+ \frac{1}{8}C_2(G)\left[\frac{62}{9} - 2\left(1-a^{(\overline{W})}(\mu)\right) + \frac{1}{2}\left(1-a^{(\overline{W})}(\mu)\right)^2\right] - \frac{5}{18}N_f \qquad (1)$$

i en el límit $\epsilon \longrightarrow 0$

$$\delta_2^{\overline{MS}} = \delta_2^{MS} \qquad (2)$$

i més complicades expressions per a δ_2^{W} i $\delta_2^{\overline{W}}$.

Noteu que de nou el coeficient a segon ordre és el mateix per a MS i $\overline{\text{MS}}$. Això no succeeix per a δ_2^{W} ni $\delta_2^{\overline{W}}$ que difereixen de δ_2^{MS} fins i tot en el límit asimptòtic quan $N_f < \frac{13}{4}C_2(G)$. Per a

$$\frac{13}{4}C_2(G) < N_f < \frac{11}{2}C_2(G) \qquad (3)$$

el límit és 0 i, per descontat, totes les δ_2's són iguals, car són totes zero.

III.4 Conclusions

Resumim els resultats per als RS's que hem estudiat en unes poques línies. Recordem que els nostres resultats es refereixen a les funcions del grup de renormalització obtingudes mantenint fixes els paràmetres despullats de la teoria. El segon coeficient de la funció β és independent entre aquells esquemes per als quals la constant d'acoblament renormalitzada a un bucle és independent del paràmetre de gauge. Quan això no és així, existeix una nova contribució --dependent del gauge- que, però, asimptòticament no contribueix. El segon coeficient de la funció γ és independent del RS entre els esquemes MS i $\overline{\text{MS}}$ [†], per als quals la constant d'acoblament a un bucle (renormalitzada) i la massa renormalizada a un bucle són independents de a

---

[†] De fet qualsevol esquema en el qual les parts finites de $Z_\alpha^{(2)}$ i $Z_m^{(2)}$ estiguin en la mateixa proporció que les respectives parts divergents.

(condició necessaria, però no suficient). En els altres esquemes hi ha una nova contribució -fins i tot asimptòticament. La mateixa situació passa en el segon coeficient de la funció δ . Això es deu a que hom pot introduir la modificació que el $\overline{MS}$ fa al MS ja al nivell de regularització, pesant la integral de Feynman D-dimensional amb l'apropiada funció d'Euler. Aleshores la renormalització funciona com abans, subtreient els pols.

REFERÈNCIES DE LA SECCIÓ III

1 Coleman,S., Gross,D.J. Phys. Rev. Lett. 31,851(1973)

2 Politzer,H.D. Phys. Rev. Lett. 30,1346(1973)

3 't Hooft,G. Marseille Conference on Yang-Mills Theo_ ries, 1972.

4 Lautrup,B., de Rafael,E. Nucl. Phys. B70,317(1974)

5 Calmet,J., Narison,S., Perrottet,M., de Rafael,E. Rev. Mod. Phys. 49,21(1977)

6 Weinberg,S. Phys. Rev. D8,3497(1973)

7 Gross,D.J. "Methods in Field Theory" ed. R. Balian, J. Zinn-Justin, North-Holland, Les Houches 1975

8 't Hooft,G. "The Whys of Subnuclear Physics" ed. A. Zi_ chichi, Plenum Press, Erice 1977

9 Symanzik,K. Lett. Nuovo Cim. 6,77(1973)

10 Tarasov,O.V., Vladimirov,A.A., Zharkov,Yu. Phys. Lett. 93B,429(1980)

11 Caswell,W., Wilczek,F. Phys. Lett. 49B,291(1974)

12 Celmaster,W., Gonsalves, R.J. Phys. Rev. D20,1420(1979)

13 Pascual,P., Tarrach,R. Nucl. Phys. B174,123(1980)

14 Espriu,D., Tarrach,R. Phys. Lett. B102,163(1981).

Sentir només, saber de cada cosa
el nom senzill, el simple nom ...

S. Espriu

Quins són els objectes relevants en una Teoria de --Camps ? Prenent com a punt de referència l'Electrodinàmica semblaria obligat afirmar que són els camps elèctric i magnètic. Són ells els que tenen, d'entrada, entitat física i són, per descontat, invariants gauge. L'experiment de Bohm-Aharonov[1] ens fa veure, malgrat això, que, encara que clàssicament no és així, el potencial electromagnètic, A_μ, té una relevància física. Tot i així, el camp del fotó és dependent del gauge. Quines són,aleshores, les variables que proporcionen una descripció adient de l'Electrodinàmica Quàntica ?

Aquesta qüestió ha estat estudiada per T.T. Wu i C.N. Yang[2]. De l'experiència de Bohm-Aharonov sabem que el canvi en la fase induït pel potencial vector ve donat per

$$\exp\left[-i\frac{q}{\hbar c}\oint dx_\mu A^\mu(x)\right] \tag{1}$$

que és, naturalment, invariant gauge. Si $F_{\mu\nu}$ sots-descriu l'electromagnetisme, hom podria pensar que

$$\oint dx_\mu \, A^\mu(x) \tag{2}$$

és la variable cercada. Una descripció en termes de (2) és, però, super-abundant. Canvis en el flux en un quantitat $2\pi\hbar c/q$ deixen la física invariant. Wu i Yang suggereixen una descripció en termes de la variable no local

$$\xi_{QP} = \exp\left[-i\frac{q}{\hbar c}\int_P^Q dx_\mu A^\mu(x)\right] \tag{3}$$

La qüestió és, en certa forma, acadèmica en QED. La teoria de pertorbacions construida sobre el camp del fotó és plenament satisfactòria en la seva predictivitat experimental. En general en tota teoria quàntica lliure de pro_ blemes infra-roigs no hem d'amoïnar-nos per una descripció potser no apropiada. En Cromodinàmica Quàntica la situació és ràdicalment diferent i els mètodes pertorbatius tradicionals semblen ésser, en general, inadequats per a relacionar les prediccions de QCD amb els observables. La teoria de pertorbacions ve formulada en termes d'objectes no directament observables com quarks, gluons i ghosts. A més, com ja hem fet esment, la manca d'un límit clàssic impedeix trobar un mètode de renormalització privilegiat (i, en conseqüència,una constant d'acoblament natural).

Ha estat assenyalat per Polyakov[3], Nambú[4], i Gervais i Neveu[5] que , potser, una descripció en termes de les variables no locals equivalents en QCD a (1.1) o (1.3) fóra adequada. La qüestió no és, ni de bon tros, simple. El caràcter no local d'aquests objectes fa difícil llur tractament en el continu, encara que poden ésser estudiats intensivament en lattice QCD (refs. 6-9). L'expansió 1/N introduida per 't Hooft[10] constitueix precisament l'aproximació WKB a QCD quan es descriu en terme de bucles[11].

En front d'aquests operadors no locals, existeixen en tota teoria de camps els productes de dos o més camps al mateix punt. El mateix lagrangià és una suma d'alguns d'aquests operadors compostos. Es tracta d'objectes, en principi, no pròpiament definits, car el producte de dos camps al mateix punt és necessariament singular[≠]. Es clar, però, que en una teoria gauge els operadors compostos invariants gauge seran relacionables amb quantitats observables.

Que aquests operadors apareixen d'una manera natural en tota teoria de camps (especialment si és asimptòticament lliure) és, també, clar. L'Operator Product Expansion, OPE, de Wilson[14] estableix un desenvolupament en termes d'opera_

≠ La definició apropiada dels operadors compostos ve donada en termes del producte normal de Zimmermann[12,13], NPA -no ha de confondre's amb l'ordenació normal habitual en teoria de pertorbacions.

dors compostos, de la forma

$$A(x)\,B(0) \underset{x^\mu \to 0}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x)\, O_n(0) \tag{1}$$

A(x) i B(0) són operadors locals. $O_n(0)$ són operadors com_ postos de la dimensió apropiada. Els $c_n(x)$ són c-nombres, funcions de x, que eventualment poden ésser singulars en el con de llum. L'expressió (1) ha d'entendre's que guanya el seu significat dins d'una funció de Green. Cal assenyalar el caràcter totalment general de (1). Els camps que apa_ reixen poden ésser lliures o en interacció, renormalitzats o no. Per suposat, les funcions $c_n(x)$ depenen de la teoria en particular i són calculables pertorbativament. Llur -- singularitat depèn essencialment de la dimensió anòmala -- del operador compost corresponent[14] (Cfr. (19.2)).

L'utilització d'operadors compostos és extraordinària_ ment fructífera. Les regles de suma de l'ITEP[15], p. ex., permeten relacionar observables a baixes energies amb les funcions de correlació d'operadors compostos. Aquestes fun cions de correlació hom les calcula retenint les contribu_ cions no pertorbatives representades pels valors esperats en el buit dels operadors compostos invariants gauge, amb els nombres quàntics adients i de dimensió creixent.

IV.1 Operadors compostos

Considerem el funcional generador de QCD sense quarks

$$W[J,\chi] = \int [dW][d\varphi][d\bar\varphi]\ \exp i\int d^4x\, [\ \mathcal{L}(W,\varphi,\bar\varphi) + J^a_\mu W^\mu_a + J_a\bar\varphi^a + \varphi^a \bar J_a + \chi_i O_i\,] \tag{1}$$

Hom ha introduit certs operadors compostos O_i acoblats a - les fonts χ_i . Les funcions de Green contenint la inser ció d'un operador compost O_k vindran donades per les deri_ vades funcionals

$$\Gamma(x_1 .. x_k .. x_n) = \frac{1}{W[0]} \left. \frac{\delta \hat{W}[J,\chi]}{\delta J(x_1) \ldots \delta \chi_k(x_k) \ldots \delta J(x_n)} \right|_{J=\chi=0} \qquad (1)$$

Les funcions de Green connexes contenint una inserció de O_k seran generades per

$$Z[J,\chi] = -i \ln W[J,\chi] \qquad (2)$$

Les quantitats observables en un teoria de camps gauge com QCD vindran donades per funcions de correlació d'operadors compostos invariants gauge, si hom els associa una entitat física. Aquests operadors compostos que són invariants - gauge constituiran la classe I . Un segon tipus d'operadors compostos el formaran aquells operadors que, tot i essent formalment invariants gauge, són nuls per les equacions del moviment (classe II). Finalment, la classe III d'operadors compostos contindrà aquells no invariants gauge.

A l'Operator Product Expansion d'un producte invariant gauge hem de limitar-nos a considerar simplement els operadors de classe I . La contribució dels operadors de classe II, com $\bar{\Psi}(i\not{D}-m)\Psi$, a les quantitats físiques, malgrat llur invariància gauge, és nula. Finalment, els operadors de classe III tampoc han de contribuir a cap quantitat observable, tal i com intuitivament hom esperaria. Efectivament, s'ha demostrat sota certes restriccions que la contribució provinent d'operadors de classes II o III és nula[16].

Una funció de Green en la que hom insereix un operador O_k de dimensió ω_k canviarà la seva divergència superficial

$$\omega' = \omega + \omega_k - 4 \qquad (3)$$

Les insercions d'operadors de dimensió quatre no canvien el grau superficial de divergència (per tant les parts de re_ normalització). Dimensions més petites en les insercions milloren el comportament ultra-violeta de les integrals.

Un cas interessant és aquell en el que les insercions corresponen a operadors de classe I presents en el lagrangià. Considerem el funcional generador de QCD

$$W[J] = \int [dW][d\varphi][d\bar{\varphi}] \exp i \int d^4x \, [\mathcal{L}(W,\varphi,\bar{\varphi}) + J_\mu^a W_a^\mu + J_a \bar{\varphi}^a + \varphi^a \bar{J}_a] \qquad (1)$$

en el que efectuem el canvi de variables

$$\begin{aligned} J_\mu^a &\longrightarrow J_\mu^a (1 - \tfrac{1}{2}\epsilon) \\ g_0 &\longrightarrow g_0 (1 - \tfrac{1}{2}\epsilon) \\ a_0 &\longrightarrow a_0 (1 + \epsilon) \end{aligned} \qquad (2)$$

aleshores

$$W[J]' = W[J] + \epsilon \left[a_0 \frac{\partial}{\partial a_0} - \frac{g_0}{2} \frac{\partial}{\partial g_0} - \frac{1}{2} \int d^4x \, J_\mu^a \frac{\delta}{\delta J_\mu^a} \right] W[J] + O(\epsilon^2) \qquad (3)$$

fent encara un nou canvi en $W[J]'$

$$W_\mu^a \longrightarrow W_\mu^a (1 + \frac{1}{2}\epsilon)$$

$$W[J]' = W[J] + \epsilon \int [dW][d\varphi][d\bar{\varphi}] \left(\frac{-i}{4} \int d^4x \, F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \right) \cdot \exp i \int d^4x \, [\mathcal{L}(W,\varphi,\bar{\varphi}) + J_\mu^a W_a^\mu + J^a \bar{\varphi}^a + \varphi^a \bar{J}_a] \qquad (4)$$

Per tant, la inserció de l'operador $O_1 = -\frac{1}{4} \int d^4x \, F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}$, que correspon, a l'espai de moments, a una inserció de -- $F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}$ amb moment zero, s'expressa

$$\Gamma_{O_{1_0}}^{(n)} = \left(a_0 \frac{\partial}{\partial a_0} - \frac{g_0}{2} \frac{\partial}{\partial g_0} + \frac{n}{2} \right) \Gamma_0^{(n)} \qquad (5)$$

si ens limitem a funcions pròpies.

De manera anàleg, una inserció de l'operador de dimensió 3

$$O_2 = \overline{\Psi}_i \Psi_i \tag{1}$$

amb moment nul, correspondrà a

$$\Gamma_{O_{2_0}} = i \frac{\partial}{\partial m_{i_0}} \Gamma_0 \tag{2}$$

Les insercions d'operadors amb $\omega_k > 4$ no seran relacionables amb funcions de Green ordinàries, fins i tot en el límit de moment zero. Com veurem més endavant, no sempre és possible fer les insercions en aquest límit.

IV. 2 Renormalització d'Operadors Compostos

Naturalment les funcions de Green pròpies que contenen insercions d'operadors compostos han de renormalitzar-se. L'addició dels oportuns contra-termes en el lagrangià ha de fet finites les dites funcions. Un cop renormalitzats camps i paràmetres, els nous contra-termes corresponen en realitat a renormalitzar les divergències provinents dels operadors compostos i que no corresponen a la renormalització de camps i paràmetres ordinària.

Preparata i Weisberger[17] han demostrat que si un operador compost, construit com un bilineal dels camps de fermions renormalitzats és (pseudo) conservat, aleshores tant el corrent com la seva divergència es fan finits multiplicant per la constant de renormalització dels camps, Z_F , ingredients del bilineal. En altres paraules, la seva renormalització com operador compost cancel.la la dels camps . Aquest és, p. ex., el cas del corrent vectorial.

En general, però, al contenir un operador compost productes de camps al mateix punt, seran necessàries subtraccions suplementàries en la funció de Green que s'insereix. Com a qüestió de notació, $O^o{}_{k_o}$ serà l'operador sense -

renormalitzar escrit en termes dels camps sense renormalitzar; O_{k_o} representarà un operador compost del qual hom ha tret ja la renormalització corresponent als camps; mentre que O_k serà l'operador ja renormalitzat.

Considerem una certa funció de Green en la qual s'ha fet una inserció -de moment zero o no- d'un operador compost. Les eventuals divergències que, ordre a ordre, es presentin acompanyaran, una volta hom ha subtret totes les divergències d'ordre inferior, un polinomi de grau ω', ω' éssent el grau superficial de divergència un cop s'ha efectuat la inserció, en les masses i/o els moments externs[18]. En general existiran altres operadors compostos la inserció dels quals dins de la funció de Green dita doni lloc a la mateixa estructura tensorial, encara que, possiblement, només un d'ells -en les dimensions més baixes sempre és així- tingui diagrama arbre.

Designant genèricament els camps renormalitzats que apareixen a la teoria com Φ_i, la funció de Green amb n partícules externes i una inserció de l'operador $\overset{o}{O}_{k_o}$ serà:

$$\Gamma^{(n)}_{O_k} = \langle \Phi_i \ldots \overset{o}{O}_{k_o} \ldots \Phi_j \rangle \qquad (1)$$

suposem que per a un cert O_k es verificarà $\Gamma^{(n)(0)}_{O_k} \neq 0$ mentre que per a O_i, $i \neq k$, $\Gamma^{(n)(0)}_{O_i} = 0$. A un ordre suficientment elevat aquests operadors poden, però, contribuir quan hom els insereix dins de $\Gamma^{(n)}$. Al elegir els contra-termes en el lagrangià cal que siguem especialment acurats. No n'hi ha prou amb efectuar l'ordinària renormalització multiplicativa; si així procedíssim no s'haurien subtret les divergències dels diagrames sense ordre zero en teoria de pertorbacions. En el programa de renormalització d'operadors compostos aquests es mesclen amb altres de la seva mateixa dimensió.

El procés de renormalització és, per tant, més complicat. Cal que considerem tots els operadors que són suscep_ tibles de barrejar-se amb un de donat en la renormalització; que tinguin idèntica dimensió i els mateixos nombres quàntics.

$$O_k = Z_{kk}\, \overset{\circ}{O}_{k_\circ} + \sum_{i \neq k} Z_{ki}\, \overset{\circ}{O}_{i_\circ} \tag{1}$$

i inserir cada relació (1) dins d'una funció de Green. El resultat és un sistema de tantes equacions com operadors compostos hem de renormalitzar, les incògnites són les constants de renormalització. En el procés de renormalització exigirem que

$$\langle \Phi_i \ldots O_k \cdots \Phi_j \rangle^{(0)} = \langle \Phi_i \ldots \overset{\circ}{O}_{k_0} \cdots \Phi_j \rangle^{(0)} \tag{2}$$

És essencial exigir unes condicions de renormalització compatibles , evidentment, amb l'ordre més baix i que respectin les invariàncies de la teoria. Altrament el mètode no seria capaç de subtreure totes les divergències. En els operadors compostos, però, existeix una certa llibertat en la tria de les condicions de renormalització. La qüestió ha estat estudiada per Zimmermann[12].

Una vegada s'ha determinat la matriu de renormalització, Z_{ij} , la inserció de qualsevol operador en qualsevol funció de Green serà finita, en termes de les quantitats renormalitzades. Per descontat, sempre que la teoria sigui renormalitzable.

IV.3 Identitats de Zimmermann

En un llenguatge més formal, les identitats de Zimmermann[12] tradueixen la mescla d'operadors compostos. Per simplicitat considerem el lagrangià de $\lambda\phi^4$.

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 - \frac{\mu_0^2}{2} \phi_0^2 - \frac{\lambda_0}{4!} \phi_0^4 \tag{1}$$

μ_0 , λ_0 i ϕ_0 són, respectivament, la massa, la constant d'acoblament i el camp (real i escalar) sense renormalitzar. la relació amb els seus equivalents renormalitzats serà:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= Z_\mu \, \mu \\ \lambda_0 &= Z_\lambda \, \lambda \\ \phi_0 &= Z_\phi^{1/2} \phi \end{aligned} \tag{2}$$

Amb dimensió igual o més petita que 4 podem construir els operadors compostos

$$\begin{aligned} &\phi_0 \qquad \omega = 2 \\ &\phi_0^4 , \ \partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 , \ \phi_0 \Box \phi_0 \qquad \omega = 4 \end{aligned} \tag{3}$$

Ens proposem estudiar les insercions d'aquests operadors en funcions de Green. $\Gamma_0^{(n)}$ indicarà la funció de Green de n potes externes sense renormalitzar (resp. $\Gamma^{(n)}$ per a la funció de Green renormalitzada), mentre que $\Gamma_{O_{i_0}}^{(n)}$ (resp. $\Gamma_{O_i}^{(n)}$) serà la mateixa funció de Green en la qual s'ha inserit O_i . En particular les insercions amb moment zero podrem relacionar-les fàcilment amb funcions de Green ordinàries (en aquest límit --- $\partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 = \phi_0 \Box \phi_0$).

$$\Gamma^{(n)}_{\phi_0^2/2} = i \frac{\partial}{\partial \mu_0^2} \Gamma_0^{(n)} \tag{4.a}$$

$$\Gamma^{(n)}_{\phi_0^4} = i \, 4! \frac{\partial}{\partial \lambda_0} \Gamma_0^{(n)} = i \, 4! \, V \frac{1}{\lambda_0} \Gamma_0^{(n)} \tag{4.b}$$

$$\Gamma^{(n)}_{[\phi(\Box+\mu^2)\phi]_0} = -2 i \, \Gamma_0^{(n)} \cdot \mathrm{I} \tag{4.c}$$

on I és el nombre de línies internes i V el de vèrtexs. Les condicions de renormalització que exigirem sobre les noves funcions amb divergència primitiva seran:

$$\Gamma^{(2)}_{\phi^2/2}(0) = 1 \qquad \Gamma^{(4)}_{\phi^4}(p_i^2=0,\ s=t=u=0) = -i\lambda \tag{1}$$

Si bé es verifica (9.4.a) no és cert que[≠]

$$i\frac{\partial}{\partial\mu^2}\Gamma^{(2)} = \Gamma^{(2)}_{\phi^2/2} \tag{2}$$

En efecte, de la solució de Zimmermann a l'equació de recu_rrència de Bogoliubov (I.11.1)

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial\mu^2}R_{\Gamma^{(n)}} &= \sum_{U(\Gamma)}\prod_{\gamma\in U}(-T_\gamma)\, i\frac{\partial}{\partial\mu^2} I_{\Gamma^{(n)}} \\ &= -i\sum_{U(\Gamma)}\prod_{\gamma\in U}(-T_\gamma)\, I_{\Gamma^{(n)}_{\phi^2/2}} \end{aligned} \tag{3}$$

però, donat que les parts de renormalització són distintes per haver efectuat una inserció d'un operador de dimensió 2, en realitat

$$i\frac{\partial}{\partial\mu^2}R_{\Gamma^{(n)}} = R_{\Gamma^{(n)}_{[\phi^2/2]_4}} \tag{4}$$

$[\phi^2/2]_4$ indica que tractem la inserció de ϕ^2 com corres_ponent a un operador de dimensió 4 . $[\phi^2/2]_4$ serà l'opera_dor "hard" en oposició al "soft" $\phi^2/2$. Es clar que tot i que $\phi^2/2$ és l'únic operador de dimensió 2 i, per tant, no pot mesclar-se amb cap altre, renormalitzant-se multiplicativament, no passarà el mateix amb la seva ver_sió hard.

Les subtraccions necessàries a (3) podrem descom_posar-les com

---

≠ En canvi, si és cert per als altres operadors de (9.4), car teren dimensió 4.

$$T_\gamma = T_\gamma^{(2)} + \hat{T}_\gamma \tag{1}$$

$T_\gamma^{(2)}$ seran les subtraccions que efectuariem si les -- parts de renormalització de (10.4) fossin efectivament les corresponents a $\phi^2/2$. $\hat{T}_\gamma$ serà, doncs, les subtraccions complementàries. Substituint (1) dins de (10.3) -- hom obtindria una sèrie de termes. Hi haurà un d'ells que totes les subtraccions seran del tipus $T_\gamma^{(2)}$. -- Aquest evidentment donarà $\mathcal{R}\,\Gamma^{(n)}_{\phi^2/2}$, la inserció -renormalitzada de l'operador soft.

Tots els altres termes contindran, pel cap baix, un $\hat{T}_\gamma$. Podem agrupar, amb tota generalitat, les subtraccions necessàries dins de cada bosc en la forma

$$T_{\gamma_1} \cdots T_{\gamma_{k-1}} \hat{T}_{\gamma_k} T^{(2)}_{\gamma_{k+1}} \cdots T^{(2)}_{\gamma_m} \tag{2}$$

Recordem que ha d'actuar primerament l'expansió Taylor -- més interna. Suposem que γ_k correspon, p. ex., a una part de renormalització amb quatre potes externes. Fins aquest moment hem renormalitzat "correctament", és a dir, coherentment amb el seu caràcter soft, la inserció de ϕ^2 . Per tant, $\hat{T}_{\gamma_k}$ actua sobre $\overline{\mathcal{R}}\,\Gamma^{(4)}_{\phi^2/2}$ (amb uns certs moments, en realitat variables d'integració). Però $\overline{\mathcal{R}}\,\Gamma^{(4)}_{\phi^2/2}$ és finita (correspon a una inserció de dimensió 2 en una funció de Green de quatre punts), per tant $\hat{T}_{\gamma_k}$ simplement fa zero els moments. El resultat és que -- $\overline{\mathcal{R}}\,\Gamma^{(4)}_{\phi^2/2}(p_i=0)$ factoritza i la resta del diagrama correspon a una inserció de ϕ^4 amb moment zero, convenientment renormalitzada a més, car les subtraccions ulteriors tenen dimensió quatre !

Semblantment pot veure's la contribució corresponent a la inserció de $\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi$ (en aquest cas hem de fixar-nos en una part de renormalització de dos punts). En resum

$$\mathcal{R}_{\Gamma^{(n)}_{[\phi^2/2]_4}} = \mathcal{R}_{\Gamma^{(n)}_{\phi^2/2}} + r\,\mathcal{R}_{\Gamma^{(n)}_{\phi^4}} + s\,\mathcal{R}_{\Gamma^{(n)}_{\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi}} \tag{1}$$

Simbòlicament

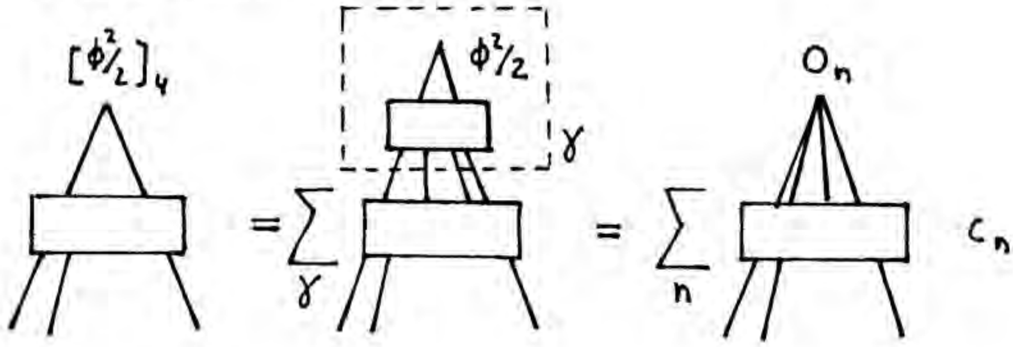


Fig. 1

Quina és la situació, no amb unes condicions de renormalització (10.1), sinó en la renormalització dimensional ? El mètode BPHZ ha estat estès a la regularització dimensional per Breitenlohner i Maison[18]. L'equivalent a la solució de Zimmermann és ara

$$\mathcal{R}_{\Gamma^{(n)}} = \lim_{\epsilon\to 0} \sum_{U(\Gamma)} \prod_{\gamma\in U} (-P_\gamma)\, I_{\Gamma^{(n)},\epsilon} \tag{2}$$

on $\epsilon = \frac{4-D}{2}$; $I_{\Gamma^{(n)},\epsilon}$ és l'integrand regularitzat (contenint pols en ϵ). $P_\gamma I_{\Gamma^{(n)},\epsilon}$ és $I_{\Gamma^{(n)}/\gamma,\epsilon}$ amb el pol de $I_{\gamma,\epsilon}$ inserit com a vèrtex. Com abans cal entendre que la subtracció actua primer sobre les parts de renormalització més internes.

És possible trobar unes identitats de Zimmermann en aquest esquema[19]. Concretament

$$\mathcal{R}_{\Gamma^{(n)}_{\epsilon O_i}} = \epsilon\,\mathcal{R}_{\Gamma^{(n)}_{O_i}} + \sum_n c_n\,\mathcal{R}_{\Gamma^{(n)}_{O_n}} \tag{3}$$

Gràficament

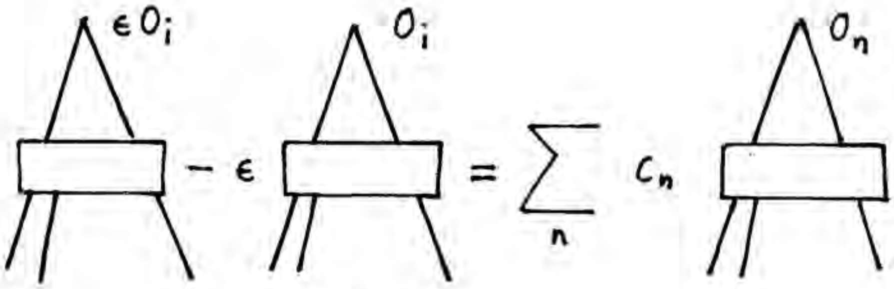


Fig. 2

El paper de $[\phi^2/2]_4$ és ara jugat per ϵO_i . El factor ϵ fa correspondre a aquest operador unes parts de renormalització que no s'adiuen amb la seva dimensionalitat.

IV.4 Renormalització d'operadors compostos i invariància gauge

A les teories gauge la mescla d'operadors compostos pren una nova complicació. El procediment de quantificació exigeix trencar explícitament la invariància gauge. Per aquesta raó no està garantit, en absolut, que un operador formalment invariant gauge no es barregi en la seva renormalització amb operadors no invariants gauge. Evidentment ha de satisfer-se en qualsevol cas que el valor calculat per a una quantitat observable no depengui del gauge escollit. Donat que els operadors invariants gauge són relacionables amb quantitats observables, esperem que no aparegui cap dependència en el terme de trencament del gauge introduit a la quantificació. Tot i així, s'ha -- vist[20] que la renormalització d'un operador invariant sota transformacions clàssiques de gauge, com, p. ex., -- $F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_a$, implica un acoblament a operadors no invariants que no pot ignorar-se per al càlcul, fins i tot a un bucle. La dificultat que això introdueix és evident.

Caldrà calcular la matriu Z_{ij} per a tots els operadors no invariants gauge d'una dimensió donada ?

Sortosament hi ha una solució a aquesta dificultat. En el background field gauge (vegeu A.1) hom reté la invariància sota transformacions clàssiques de gauge en el camp extern. Donat que en la quantificació i en el procés de renormalització es manté aquesta invariància -no en el camp quàntic, certament- la constant de renormalització del camp clàssic, que resulta ésser igual a la renormalització de la constant d'acoblament, ha d'ésser independent del gauge. Això indueix a pensar que aquest procediment, malgrat la seva major complexitat des del punt de vista calculístic, és adient per al càlcul de quantitats invariants gauge.

S'ha demostrat[20] que la renormalització dels operadors de classe I es realitza, en el background gauge, solament entre ells mateixos i els operadors de classe II (aquells que essent formalment invariants gauge, són zero en virtud de les equacions del moviment). Això elimina automàticament els operadors de classe III en el càlcul de quantitats invariants gauge. Els operadors de classe II o de classe III es barregen entre tot ells en el procés de renormalització, però no amb els de classe I. El fet notable és que operadors invariants gauge com els de classe II, adquireixen una contribució dependent del gauge. Tot i així, aquests operadors no semblen jugar cap paper en el còmput de cap observable. L'aventatge d'aquest mètode és palesa, Serà suficient calcular la mescla amb altres operadors invariants gauge de la mateixa dimensió.

Les constants de renormalització del tipus $Z_{I\ II}$; és a dir, les que proporcionen una contribució de classe II als operadors I, poden ésser dependents del gauge, car els operadors II són essencialment no físics. Que fins i tot entre quantitats formalment invariants gauge aparegui un lligam dependent del gauge és simplement una reminiscència del fet que en el camp quàntic sí que es trenca la invariància gauge i, per tant, una certa dependència en el terme del trencament es reté.

En general, la matriu Z_{ij} serà:

$$|Z_{ij}| = \begin{array}{c} \\ \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} \text{independent del gauge} & \text{dependent del gauge} & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\text{dependent}} \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\text{del gauge}} \end{array}\right] \end{array} \tag{1}$$

En operadors de dimensió elevada pot ésser complicat establir quins pertanyen exactament a la classe I. Sempre haurà d'escollir-se una base d'operadors independents.

IV.5 Un exemple. Renormalització de $F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a$

Considerem la renormalització de l'operador compost invariant gauge $F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a$. Aquest problema ha estat estudiat per Tarrach[21]. Si considerem únicament insercions amb moment zero en QCD sense masses, $F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a$ només podrà mesclar-se amb $i\,\bar{\Psi}_j \not{D}\, \Psi_j$ (j és l'índex de sabor del quark).

Emprant la notació $O_1 = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_a$, $O_2 = -\bar{\Psi}\not{D}\Psi$, calcularem

$$O_1 = Z_{11}\, O^0_{1_0} + Z_{12}\, O^0_{2_0} \tag{2}$$

La relació entre operadors sense renormalitzar, en termes de camps no renormalitzats i en termes de camps renormalitzats ve donada per

$$
\begin{aligned}
O_{1_0} &= Z_\alpha \mathring{O}_{1_0} \\
O_{2_0} &= Z_F^{-1} \mathring{O}_{2_0}
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

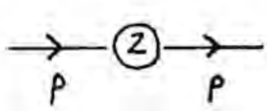
Les constants de renormalització Z_{11} i Z_{12} les obtindrem exigint la convergència de les funcions de Green

$$
\begin{aligned}
\langle A^\mu_a O_1 A^\nu_b \rangle &= Z_\alpha^{-1} Z_{11} \langle A^\mu_a O_{1_0} A^\nu_b \rangle + Z_{12} \langle A^\mu_a \mathring{O}_{2_0} A^\nu_b \rangle \\
\langle \psi O_1 \bar{\psi} \rangle &= Z_{11} \langle \psi \mathring{O}_{1_0} \bar{\psi} \rangle + Z_F Z_{12} \langle \psi O_{2_0} \bar{\psi} \rangle
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Treballarem amb la renormalització dimensional, exigint, a més, les condicions de renormalització

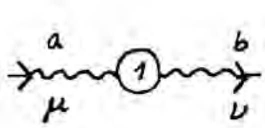
$$
\begin{aligned}
\langle A^\mu_a O_1 A^\nu_b \rangle^{(0)} &= \langle A^\mu_a \mathring{O}_{1_0} A^\nu_b \rangle^{(0)}, \quad \langle A^\mu_a O_2 A^\nu_b \rangle^{(0)} = 0 \\
\langle \psi O_2 \bar{\psi} \rangle^{(0)} &= \langle \psi \mathring{O}_{2_0} \bar{\psi} \rangle^{(0)}, \quad \langle \psi O_1 \bar{\psi} \rangle^{(0)} = 0
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

(A^μ_b és el camp clàssic d'índex Lorentz μ i color b)
Les regles de Feynman per a les insercions dels operadors O_1, O_2, amb moment zero seran:



$i\not{p}$

(4)



$-i\,\delta_{ab}\,(p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)$

Donat que ens referim a operadors que apareixen en el lagrangià, les insercions en els vèrtexs venen donades per les Regles de Feynman ordinàries. El procediment -- consisteix en calcular les funcions de Green que hem es_ crit a (16.2). Això pot fer-se sense necessitat de cal_ cular realment cap diagrama. Els gràfics que contribui_ ran a $\langle A^{\mu}_{a}\, O_{1_0}\, A^{\nu}_{b}\rangle^{(2)}$ són:

Fig. 3

La contribució dels quals és zero[21]. El diagrama que - contribueix a $\langle \psi\, \overset{\circ}{O}_{1_0}\, \overline{\psi}\rangle^{(2)}$ és:

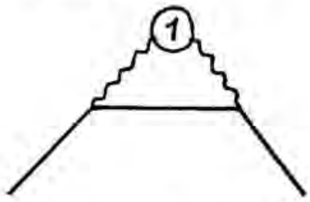


Fig. 4

i el seu valor és zero en el gauge de Landau, en el que calculem. També pot veure's fàcilment que s'anulen els diagrames que contribuirien a $\langle A^{\mu}_{a}\, \overset{\circ}{O}_{2_0}\, A^{\nu}_{b}\rangle^{(2)}$

Fig. 5

Finalment, el diagrama corresponent a $\langle \psi\, O_{2_0}\, \overline{\psi}\rangle^{(2)}$,

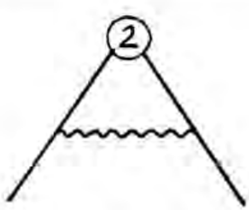


Fig. 6

és igualment zero en el gauge de Landau. Donat que també en aquest gauge $Z_F^{(2)} = 1$ hom dedueix que

$$Z_{11}^{(2)} = Z_{\alpha}^{(2)}$$
$$Z_{12}^{(2)} = 0 \qquad (1)$$

Com a conseqüència, fent ús del símbol $[FF]$ per a indicar l'operador renormalitzat,

$$\alpha\,[FF]^{(2)} = \alpha_0\,(F_0 F_0) \qquad (2)$$

El càlcul pot extendre's a ordre α^2. Ara els diagrames que contribueixen a $\langle A_a^\mu\, O_{1_0}\, A_b^\nu \rangle^{(4)}$ són 12 i amb l'ajut de tècniques diagramàtiques, aquests diagrames es redueixen als típics d'auto-energies. El resultat és

$$-i\delta_{ab}(p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu)\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{\beta_2}{4\epsilon} \qquad (3)$$

Hi han 11 diagrames topològicament diferents que contribueixen a $\langle \psi O_{1_0}^{0} \bar{\psi}\rangle^{(4)}$. Llur divergència pot calcular-se fàcilment en el gauge de Landau, car és precisament

$$2i\not p\, \Sigma_{0_2}^{(4)}(p^2)$$
$$= i\not p\, \frac{1}{2}\, \gamma_{F_2}(a=0)\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{1}{\epsilon} \qquad (4)$$

No necessitem calcular els altres dos elements de matriu, puix que les constants d'acoblament creuades són, pel cap baix, d'ordre α i llur contribució a ordre α és nula. D'on

$$Z_{11}^{(4)} = Z_{\alpha}^{(4)}\left(1 - \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{\beta_2}{\epsilon}\right)$$
$$Z_{12}^{(4)} = -\frac{\gamma_{F_2}(a=0)}{2}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{1}{\epsilon} \qquad (5)$$

i

$$[FF]^{(4)} = Z_{\alpha}^{(4)} \left(1 - \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{\beta_2}{\epsilon}\right) (F_0 F_0) + 2\delta_{F_2}(a=0) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{1}{\epsilon} (\bar{\psi}_0 i \not{D} \psi_0) \qquad (1)$$

Com hom podia esperar Z_{11} és independent del gauge. No obstant, donat que O_2 és de classe II, Z_{12} pot depen_ dre -i així és- del gauge.

La dimensió anòmala de FF ve determinada per

$$\begin{aligned} \gamma_{FF} &= \nu \frac{d}{d\nu} \ln Z_{11} \\ &= -\frac{\alpha}{\pi} \beta_1 - 2\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \beta_2 \end{aligned} \qquad (2)$$

IV.6 Anomalia de la traça

Hem vist que el lagrangià de QCD presenta una sèrie de simetries a nível clàssic (Cfr. I.2,3). Malgrat això, per a que la teoria estigui pròpiament definida cal renormalitzar-la. La pregunta és, aleshores, immediata. És alguna de les simetries incompatible amb el procés de renormalització? En altres paraules, ens preguntem si la renormalització de la teoria trenca, a algun ordre, les simetries que s'exhibeixen al nivell del lagrangià.

La resposta és afirmativa. Considerem, p. ex., el corrent de dilatacions, la divergència del qual és (Cfr. I.8.4) la traça del tensor energia-impuls

$$\partial_\mu D^\mu = \theta^\mu{}_\mu \qquad (3)$$

En absència de correccions d'ordre superior, no hi ha di_ ficultat. $\theta^\mu{}_\mu$ ve donada simplement pels termes de massa del lagrangià. En absència d'aquests el corrent de dila_ tacions és exactament conservat. Sabem, però, que exis_ teix la transmutació dimensional; això és, en virtud de la renormalització apareix una escala natural d'energies en la teoria, fins i tot amb un lagrangià sense masses. Per tant, el corrent de dilatacions deixerà d'ésser pseudo-conservat i la traça del tensor energia-impuls contindrà uns termes anòmals suplementaris.

Considerem la inserció de $D_\mu(x)$ i $\partial^\mu D_\mu(x)$ en una funció de Green $\Gamma^{(n)}$ i calculem

$$\partial^\mu \Gamma^{(n)}_{D_\mu} - \Gamma^{(n)}_{\partial^\mu D_\mu} \equiv A \tag{1}$$

A nivell clàssic, les dues expressions clarament coincideixen. Això no té, però, que mantenir-se a ordres superiors. El segon terme de (1) l'escriurem com

$$\Gamma^{(n)}_{\theta^\mu_\mu + x_\nu \partial_\mu \theta^\mu_\nu} \tag{2}$$

mentre que el primer serà:

$$(g^\mu_\nu + x_\nu \partial^\mu)\, \Gamma_{\theta_\mu^{\ \nu}} \tag{3}$$

Ara bé, $\theta_\mu^{\ \nu}$ no depèn explícitament de les coordenades, (3) serà, doncs,$^{\not\,}$

$$g^\mu_\nu \Gamma^{(n)}_{\theta_\mu^{\ \nu}} + \Gamma^{(n)}_{x_\nu \partial_\mu \theta^\mu_\nu} \tag{4}$$

en conseqüència el terme anòmal A és[23]:

$$A = g^\mu_\nu\, \Gamma^{(n)}_{\theta_\mu^{\ \nu}} - \Gamma^{(n)}_{g^\mu_\nu \theta^\nu_\mu} = - \Gamma^{(n)}_{\hat{g}^\mu_\nu \theta^\nu_{\ \mu}} \tag{5}$$

amb $\hat{g}^\mu_\nu \equiv g^\mu_\nu (D\ dim) - g^\mu_\nu (4\ dim)$ (Cfr. A.2). Recordem que a (3) el límit $\epsilon \longrightarrow 0$ es fa abans de la contracció, car

---

$\not\,$ De les propietats del Producte normal, NPA, si M(x) és un monomi en els camps i llurs derivades sense dependència explícita en x,

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \langle M(x) \ldots \phi(z) \rangle = \langle \frac{\partial}{\partial x_\mu} M(x) \ldots \phi(z) \rangle$$ (Cfr. ref. 22).

en tot moment les funcions de Green a que ens referim són renormalitzades.

Si per simplicitat considerem el lagrangià de $\lambda\phi^4$ (9.1), per a una inserció amb moment zero de $\theta^\mu{}_\mu$ podrà escriure's una identitat tipus Zimmermann

$$\Gamma^{(n)}_{\theta^\mu{}_\mu} = r\,\Gamma^{(n)}_{\mu^2\frac{\phi^2}{2}} + s\,\Gamma^{(n)}_{\phi(\Box+\mu^2)\phi+\lambda\frac{\phi^4}{3!}} + t\,\Gamma^{(n)}_{\phi^4/4!} \qquad (1)$$

Calculem ara quin és l'efecte d'una inserció de $\theta^\mu{}_\mu$ amb moment zero a l'espai de moments. D'un contatge dimensional,

$$\Gamma^{(n)}(\{p_i,\lambda,\mu,\nu) = \nu^D F\left(\frac{\{p_ip_j}{\nu^2},\lambda,\frac{\mu}{\nu}\right) \qquad (2)$$

ν és el punt de renormalització. Fent ús del teorema d'Euler

$$\left(2\mu^2\frac{\partial}{\partial\mu^2} + 2\nu^2\frac{\partial}{\partial\nu^2} + \xi\frac{\partial}{\partial\xi} - D\right)\Gamma^{(n)}(\{p_i,\lambda,\mu,\nu) = 0 \qquad (3)$$

i escrivint la relació a l'espai de posicions, D és la dimensió de la funció de Green considerada,

$$\left(2\mu^2\frac{\partial}{\partial\mu^2} + 2\nu^2\frac{\partial}{\partial\nu^2}\right)\Gamma^{(n)}(x_1\ldots x_n) = \left(D+\sum_{k=1}^{n} x_k^\mu\frac{\partial}{\partial x_k^\mu}\right)\Gamma^{(n)}(x_1\ldots x_n) \qquad (4)$$

Però, $\left(D+\sum x^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)$ equival a una inserció de $\partial^\mu D_\mu$ amb moment zero[24] (Cfr. I.3)

$$\int d^4x \, \langle \partial^\mu D_\mu(x)\,\phi(y)\ldots\phi(z)\rangle = i\left(D+\sum_{k=1}^{n} x^\mu\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)\langle\phi(y)\ldots\phi(z)\rangle$$

Per tant, una inserció de $\theta^\mu{}_\mu$ amb moment nul a l'espai de moments s'escriurà

$$\Gamma^{(n)}_{\theta^{\mu}_{\mu}} = \left[2i\mu^2 \frac{\partial}{\partial\mu^2} + 2i\nu^2 \frac{\partial}{\partial\nu^2} \right] \Gamma^{(n)} \tag{1}$$

D'altra banda, de l'equació del grup de renormalització ,

$$\left[i\nu^2 \frac{\partial}{\partial\nu^2} + \gamma_\mu i\mu^2 \frac{\partial}{\partial\mu^2} + \beta i \frac{\partial}{\partial\lambda} - n\gamma i \right] \Gamma^{(n)} = 0 \tag{2}$$

En (2) substituirem la derivada respecte la constant d'a_ coblament per una inserció de $\phi^4/4!$, mentre que la derivada respecte la massa és:

$$i\mu^2 \frac{\partial}{\partial\mu^2} \Gamma^{(n)} = \Gamma^{(n)}_{\mu^2 \frac{\phi^2}{2}} \tag{3}$$

i finalment, el nombre de potes externes, n, pot substi_ tuir-se (recordant la relació n = 4V - 2I) per

$$i n \Gamma^{(n)} = \Gamma^{(n)}_{\phi(\Box+\mu^2)\phi + \lambda \frac{\phi^4}{3!}} \tag{4}$$

que és precisament la inserció d'una equació del moviment i, per tant, zero. En resum,

$$i\nu^2 \frac{\partial}{\partial\nu^2} \Gamma^{(n)} = -\gamma_\mu \Gamma^{(n)}_{\mu^2 \frac{\phi^2}{2}} - \beta \Gamma^{(n)}_{\frac{\phi^4}{4!}} + \gamma \Gamma^{(n)}_{\phi(\Box+\mu^2)\phi + \lambda\frac{\phi^4}{3!}} \tag{5}$$

i substituint a (1)

$$\Gamma^{(n)}_{\theta^{\mu}_{\mu}} = 2\, \Gamma^{(n)}_{\mu^2 \frac{\phi^2}{2}} - 2\gamma_\mu \Gamma^{(n)}_{\mu^2 \frac{\phi^2}{2}} - \frac{2\beta}{4!} \Gamma^{(n)}_{\phi^4} + t \tag{6}$$

t és certa funció -finita- que no ens interessa, car fent ús de les equacions de moviment l'últim terme de (6) és zero.

Per tant, la traça del tensor energia-impuls serà:

$$\theta^{\mu}_{\ \mu} = (1-\gamma_\mu)\mu^2\phi^2 - \frac{2\beta}{4!}\phi^4 \qquad (1)$$

i treta la part canònica, l'anomalia és$^{\neq}$

$$\hat{\theta}^{\mu}_{\ \mu} = -\gamma_\mu \mu^2\phi^2 - \frac{2\beta}{4!}\phi^4 \qquad (2)$$

En QCD un procediment similar portaria a la traça del tensor energia-impuls. El resultat és[25,26]:

$$\theta^{\mu}_{\ \mu} = (1+\gamma_m)\sum_i m_i \bar{\psi}_i \psi_i + \frac{\beta}{4} F F \qquad (3)$$

γ_m i β són ara les corresponents funcions del grup de renormalització en QCD. Donat que la definició de $\theta^{\mu}_{\ \mu}$ ve donada en termes de camps despullats, la part dreta de (3) no pot dependre de ν ; és a dir, és un invariant sota el grup de renormalització. La renormalització dels operadors que intervenen en la traça anòmala ha estat estudiada recentment a ref. 21. Hom ha vist ja la renormalització de FF en el cas de QCD sense masses. En aquest límit, la traça del tensor energia-impuls és simplement

$$\frac{1}{4}\beta(\alpha) F F \qquad (4)$$

Aquesta quantitat és, per descontat, invariant sota el

$\neq$ En $\lambda\phi^4$,

$$\gamma_\mu = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{16\pi^2}\right) - \frac{5}{12}\left(\frac{\lambda}{16\pi^2}\right)^2 \cdots$$

$$\beta/\lambda = \frac{3}{2}\left(\frac{\lambda}{16\pi^2}\right) - \frac{17}{6}\left(\frac{\lambda}{16\pi^2}\right)^2 \cdots$$

$$\gamma = \frac{1}{24}\left(\frac{\lambda}{16\pi^2}\right)^2 + \cdots$$

grup de renormalització; tot i així, això no vol dir pas que la seva constant de renormalització sigui la unitat. Aquest fet poc usual prové de la presència d'una constant d'acoblament amb dimensions en una expressió no homogènea.

Recordant (19.1) i cancel.lant l'últim terme en virtud de les equacions de moviment,

$$[FF]^{(4)} = Z_\alpha^{(4)}\left(1-\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2\frac{\beta_2}{4\epsilon}\right)(F_0 F_0) \tag{1}$$

d'on

$$\left[\beta_1\frac{\alpha}{\pi}+\beta_2\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2\right][FF]^{(4)} = \left[\beta_1\frac{\alpha_0}{\pi}+\beta_1\beta_2\left(\frac{\alpha_0}{\pi}\right)^3\frac{1}{4\epsilon}+\beta_2\frac{\alpha_0^2}{\pi^2}\right](F_0 F_0) \tag{2}$$

Per tant, $\beta[FF]$ no és igual al seu equivalent en termes de camps i paràmetres sense renormalitzar, malgrat la seva no dependència de ν . És possible trobar una expressió que no es renormalitzi

$$\left[2\beta_1\frac{\alpha}{\pi}+\beta_2\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2\right][FF]^{(4)} = \left[2\beta_1\frac{\alpha_0}{\pi}+\beta_2\left(\frac{\alpha_0}{\pi}\right)^2\right](F_0 F_0) \tag{3}$$

però és dependent de ν .

IV.7 Anomalia axial

Com ja s'ha fet esment a la secc. I, existeix una segona anomalia, comuna a totes aquelles teories que, com QCD, poden presentar fermions acoblats a algun corrent axial.

D'acord amb el teorema de Sutherland-Veltman[27,28] i la idea standard de PCAC, si la divergència del corrent axial es fa servir com a camp interpolant per al pió, l'element de matriu que determinarà la desintegració $\pi^0 \longrightarrow 2\gamma$

$$\epsilon_\mu(p)\,\epsilon_\nu(q)\,p_\alpha q_\beta\,T^{\mu\nu\alpha\beta}(k^2) \tag{1}$$

on ϵ_μ , ϵ_ν són els vectors de polarització dels fotons i $k = p + q$ és el moment del pió desintegrat, resulta ser nul per a $k^2 = 0$. Donat que la massa del pió és excepcionalment petita hom esperaria

$$T(m_\pi^2) \simeq 0 \tag{2}$$

Però... el pió decau en dos fotons amb una amplària de l'ordre de 10 eV‡.

Donat que la part fermiònica del corrent axial conté dos camps al mateix punt, és singular. Per a regular aquesta singularitat hom introdueix una petita separació. En QED,

$$J^5_{\mu_0}(x,\epsilon) = \bar{\psi}_0(x+\tfrac{\epsilon}{2})\,\gamma_\mu\gamma^5\,\psi_0(x-\tfrac{\epsilon}{2}) \tag{3}$$

Aquest corrent no és invariant sota les transformacions de gauge

$$\psi_0(x) \rightarrow e^{ie_0\Lambda(x)}\,\psi_0(x) \tag{4}$$

Hom pot, però, redefinir un corrent axial que sí sigui invariant gauge

$$J^5_{\mu_0}(x,\epsilon,a_0) = \bar{\psi}_0(x+\tfrac{\epsilon}{2})\,\gamma_\mu\gamma^5\,\psi_0(x-\tfrac{\epsilon}{2})\,\exp\, ie_0 \int_{x-\frac{\epsilon}{2}}^{x+\frac{\epsilon}{2}} A_0^\alpha(y)\,dy_\alpha \tag{5}$$

d'on, utilitzant les equacions de moviment,

---

‡ Històricament, la primera persona en calcular el procés $\pi^0 \longrightarrow 2\gamma$ i donar-se compte de la dificultat, des d'un punt de vista teòric, fou Steinberger el 1949 (ref. 29). Segons explica R. Jackiw[30], deixà d'ésser teòric d'ençà. Dos anys després, en 1951, J. Schwinger[31] donà la solució del problema.

$$\partial_\mu J^\mu_{5_0}(x,\epsilon,a_0) = 2m_0 i\, \bar{\psi}_0(x+\tfrac{\epsilon}{2})\gamma^5 \psi_0(x-\tfrac{\epsilon}{2}) + e J^5_\mu(x,\epsilon,a)\,\epsilon^\alpha\left[\partial_\alpha A_{\mu_0}(x) - a\,\partial_\mu A_{\alpha_0}(x) + O(\epsilon)\right] \tag{1}$$

Si, d'una manera poc crítica, hom pren el límit $\epsilon \to 0$ és clar que retroba un corrent pseudo-conservat. Aquest fer no està justificat, donat que $J^5_\mu(x,\epsilon,a)$ no té necessàriament un comportament suau quan $\epsilon \to 0$. En realitat pot veure's que[30,31]

$$\epsilon^\alpha \langle J^\mu_{5_0}(x,\epsilon,a_0)\rangle = -\frac{e_0}{16\pi^2}(1+a_0)\langle \tilde{F}_0^{\mu\alpha} \rangle \tag{2}$$

per la qual cosa

$$\partial^\mu J^5_{\mu_0}(x,a_0) = 2mi\,\bar{\psi}_0\gamma^5\psi_0 - \frac{e_0^2}{16\pi^2}(1+a_0)\,\tilde{F}_{\mu\nu_0}F_0^{\mu\nu} \tag{3}$$

La invariància gauge exigeix naturalment a = 1, raó per la que el corrent axial conté inevitablement un terme anòmal. Per descontat que amb a = -1 no apareix l'anomalia i les identitats de Ward axials són canòniques, però les vectorials, provinents directament de la invariància gauge són ara anòmales. És, per tant, impossible el satisfer simultàniament ambdós tipus d'identitats.

En QCD hom troba

$$\sum_{i=1}^{N_f} \partial^\mu(\bar{\psi}_{i_0}\gamma_\mu\gamma^5\psi_{i_0}) = 2i\sum_{i=1}^{N_f} m_{i_0}\bar{\psi}_{i_0}\gamma^5\psi_{i_0} - \frac{\alpha_0}{4\pi}N_f\,\tilde{F}^a_{\mu\nu_0}F^{\mu\nu}_{a_0} \tag{4}$$

L'existència de l'anomalia fou re-descoberta independent i simultàniament per Bell i Jackiw[32] en 1969 per al model σ i per Adler[33] per a l'Electrodinàmica. En totes aquestes teories un desenvolupament pertorbatiu porta a l'existència d'un diagrama triangular. La integral que aquest diagrama porta associada és linealment divergent.

És sabut que les manipulacions formals -canvis en les variables d'integració, etc.- són legítims quan les integrals són, com a molt, logarítmicament divergents. Per tant, les manipulacions en el diagrama triangular suposaran, en principi, termes de superfície, proporcionals a $\tilde{F} F$.

Existeixen altres diagrames anòmals en qualsevol teoria amb fermions acoblats a corrents axials i vectorials. A més del que és relevant per a la desintegració $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$

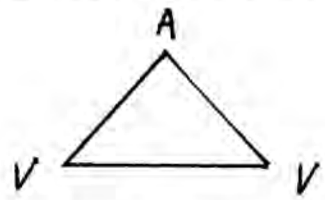


Fig. 7

tenim

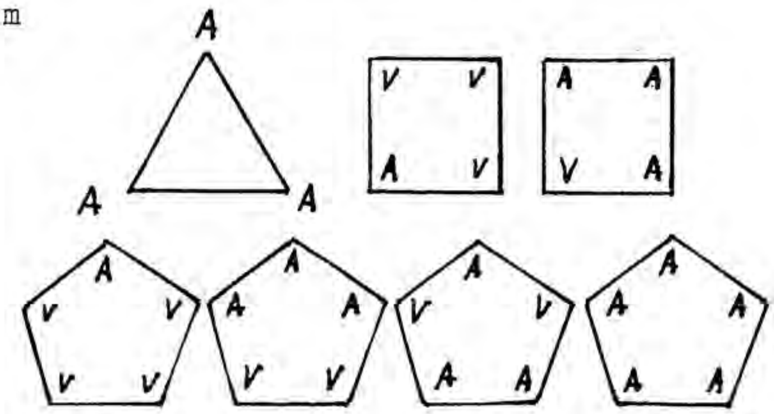


Fig.8

En tots ells és precís un nombre imparell de corrents axials[(a)].

Adler i Bardeen[34] varen provar explícitament que les correccions radiatives al diagrama triangular són zero[(b)]. En aquest sentit hom parla de la no-renormalització de la anomalia.

No pot satisfer-se simultàniament la invariància gauge i la simetria axial. Tornarem més endavant sobre aquest punt, però pot demostrar-se que la anomalia no trenca en aquest cas la renormalizabilitat de la teoria. Tot i així, en la teoria electro-dèbil o, en general, en qualsevol model amb un acoblament γ^5 al lagrangià les anomalies poden trencar la finitud del model i han d'ésser curosament evitades.

En la regularització dimensional l'existència de -- l'anomalia apareix íntimament lligada a la dificultat en la definició de γ^5 en $D \neq 4$ dimensions. S'ha demostrat que les identitats de Ward i equacions de moviment de la teoria mantenen llur forma canònica un cop la teoria ha estat renormalitzada sempre que no s'impliqui explícitament una dependència en D[18].

Aquesta dependència pot aparèixer de dues formes, bé mitjançant els mateixos camps (llur dimensió depèn de D), donant lloc a la traça anòmala, bé en una dependència de l'àlgebra del nombre de dimensions (cas de γ^5). En ambdues situacions operadors com $\bar{\psi}\{\gamma_\mu\gamma^5\}\psi$ o $(D-4)\,O_K$ que són nuls a nivell arbre guanyen un valor no nul. Ja hem vist com, per les identitats de Zimmermann, aquest tipus d'operadors es mesclarà amb altres no nuls, en el procés de renormalització. Aquests seran precisament els termes anòmals.

IV.8 Renormalització del operadors de l'anomalia axial

Hi han algunes diferències que distingeixen la renormalització de $F\tilde{F}$ de la de FF que ja hem vist en un límit simplificador:

i) L'aparició de les funcions del grup de renormalit zació en la traça anòmala i, en conseqüència, de potèn_cies en qualsevol ordre de α , que fa impossible es_criure en una forma compacte la part dreta de (23.3), al contrari de (26.4).

ii) L'aparició de γ^5 en l'anomalia del triangle i del problema de com tractar-la en D dimensions.

iii) El fet que $\tilde{F}F$ pot escriure's com una diver_gència total, mentre que FF no, i per tant la seva renormalització no pot estudiar-se en el límit de moment zero.

Aquests dos operadors han estats estudiats recent_ment en una lattice[35,36].

El pròxim apartat esta dedicat a la renormalització al nivell d'un bucle, mentre que el càlcul a dos bucles i el problema γ^5 s'estudiaran més endavant. Acabarem amb uns comentaris sobre els resultats obtinguts i llur aplicació a la fenomenologia.

Renormalització a un bucle:

Treballarem en el background field gauge, de manera que tots els operadors invariants gauge no nuls per les equacions de moviment només es barregen amb altres opera_dors invariants gauge. Aleshores, necessitem els opera_dors invariants gauge de dimensió quatre

$$\begin{aligned}
O_1 &= -\frac{i}{4} F\tilde{F} \\
O_2 &= \sum_{i=1}^{N_f} \bar{\psi}_i \gamma^5 (i\not{D} - m_i) \psi_i \\
O_3 &= i \sum_i \partial^\mu (\bar{\psi}_i \gamma_\mu \gamma^5 \psi_i) \\
O_4 &= \sum_i m_i \bar{\psi}_i \gamma^5 \psi_i
\end{aligned} \tag{1}$$

Els operadors compostos renormalitzats s'escriuran com

$$O_i = Z_{i1} O^{\circ}_{1_0} + Z_{i2} O^{\circ}_{2_0} + Z_{i3} O^{\circ}_{3_0} + Z_{i4} O^{\circ}_{4_0} \qquad (1)$$

per a i = 1,3,4 . Per i = 2 les coses són diferents perquè O_2 és precisament un operador que és zero per les equacions del moviment. Com O_2 no apareix en l'anomalia del triangle (ec. (26.4)) no estem interessats en la seva renormalització. Recordem que

$$\begin{aligned} O_{1_0} &= Z_\alpha O^{\circ}_{1_0} \\ O_{2,3,4_0} &= Z_F^{-1} O^{\circ}_{2,3,4_0} \end{aligned} \qquad (2)$$

on hem fet ús de $Z_A = Z_\alpha^{-1}$, això és, la constant de renormalització del camp del gluo és igual al invers de la constant de renormalització de la constant d'acoblament en el background gauge.

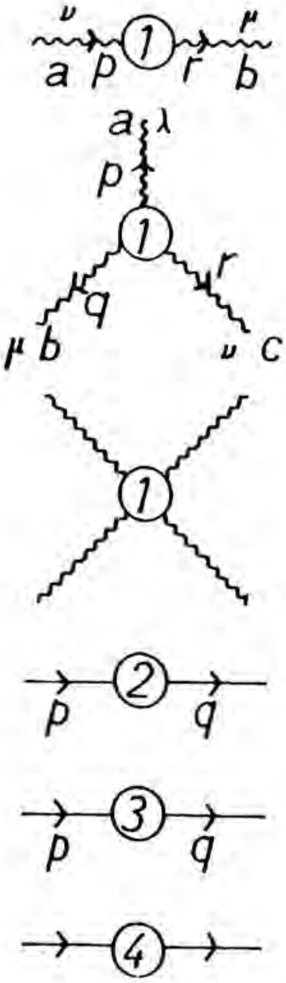
Com al nivell d'un bucle el problema de γ^5 és irrelevant per al càlcul de les constants de renormalització a l'esquema mínim on només els pols en ϵ son retinguts, deixem aquesta qüestió per després. Les regles de Feynman necessàries es donen a la Fig. 9, per a les insercions dels operadors O_i. Quan no, s'apliquen les regles del background field gauge ordinàries (A.1)

A fi d'obtenir les constants de renormalització de O_1, considerem les funcions de Green

$$\begin{aligned} \langle A^\mu_a O_1 A^\nu_b \rangle &= Z_\alpha^{-1} Z_{11} \langle A^\mu_a O_{1_0} A^\nu_b \rangle + \sum_{j=2,3,4} Z_{1j} \langle A^\mu_a O^{\circ}_{j_0} A^\nu_b \rangle \\ \langle \psi O_1 \overline{\psi} \rangle &= Z_{11} \langle \psi O^{\circ}_{1_0} \overline{\psi} \rangle + Z_F \sum_{j=2,3,4} Z_{1j} \langle \psi O_{j_0} \overline{\psi} \rangle \end{aligned} \qquad (3)$$

amb les condicions

$$\langle A^\mu_a O_1 A^\nu_b \rangle^{(0)} = \langle A^\mu_a O_{1_0} A^\nu_b \rangle^{(0)} , \quad \langle \psi O_1 \overline{\psi} \rangle^{(0)} = 0 \qquad (4)$$



$-i\delta_{ab}\,\epsilon^{\nu\alpha\mu\beta}\,p_\alpha r_\beta$

$g\, f_{abc}\,\epsilon^{\alpha\lambda\mu\nu}(p+q+r)_\alpha$

0

$\gamma^5(\not p - m_0)$

$(\not p - \not q)\gamma^5$

$m_0\gamma^5$

Fig. 9 Regles de Feynman per a la inserció dels operadors compostos O_i .

Se segueix inmediatament que Z_{12}, Z_{13} i Z_{14} comencen amb els pols en ϵ d'ordre α , de manera que els únis càlculs no trivials que hom ha de fer són $\langle A^\mu_a O_{10} A^\nu_b \rangle^{(2)}$ i $\langle \psi O^{\circ}_{10} \overline{\psi} \rangle^{(2)}$. Això es fa fàcilment, els diagrames relevants són a la Fig. 10 . El resultat és que

$$Z^{(2)}_{11} = Z^{(2)}_{\alpha}$$
$$Z^{(2)}_{12} = Z^{(2)}_{14} = 0 \qquad (1)$$

$$Z_{13} = -C_2(R)\,\frac{3}{8}\,\frac{\alpha}{\pi}\,\frac{1}{\epsilon} \tag{1}$$

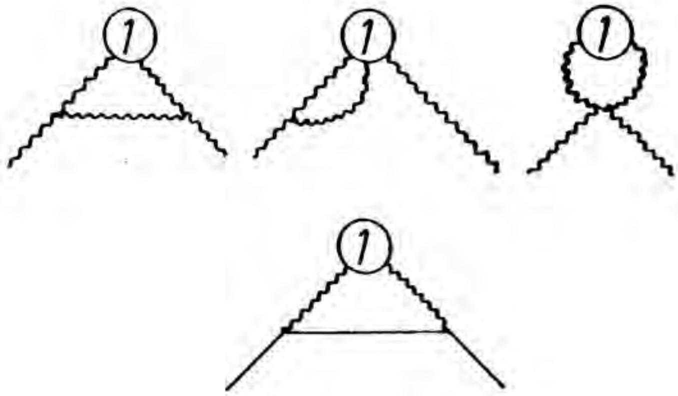


Fig. 10 Diagrames que corresponen a la re_ normalització de O_1 a un bucle.

Com ja hem fet esment, només necessitem a aquest nivell γ^5 en quatre dimensions, on ve definida per

$$\gamma^5 = -\frac{i}{4!}\,\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\,\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\gamma\gamma_\delta \tag{2}$$

i hom ha fet ús de l'expressió

$$\gamma_\sigma\gamma^5 = -\frac{i}{3!}\,\epsilon_{\sigma\alpha\beta\gamma}\,\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma \tag{3}$$

Per a renormalitzar O_3 hem de considerar les matei_ xes funcions de Green que per a O_1

$$\begin{aligned} \langle \psi O_3 \bar\psi \rangle &= Z_{31}\langle \psi O^{\circ}_{1_0} \bar\psi\rangle + Z_F \sum_{j=2,3,4} Z_{3j}\langle \psi O_{j_0} \bar\psi\rangle \\ \langle A^\mu_a O_3 A^\nu_b \rangle &= Z_{31} Z_\alpha^{-1}\langle A^\mu_a O_{1_0} A^\nu_b\rangle + \sum_{j=2,3,4} Z_{3j}\langle A^\mu_a O^{\circ}_{j_0} A^\nu_b\rangle \end{aligned} \tag{4}$$

i les condicions

$$\langle \psi O_3 \overline{\psi} \rangle^{(0)} = \langle \psi O_{3_0} \overline{\psi} \rangle^{(0)} , \quad \langle A_a^\mu O_3 A_b^\nu \rangle^{(0)} = 0 \qquad (1)$$

que impliquen que Z_{31}, Z_{32} i Z_{34} comencen amb el pol en ϵ d'ordre α . Cal calcular, per tant, $\langle \psi O_{3_0} \overline{\psi} \rangle^{(2)}$ i $\langle A_a^\mu O_{3_0}^{\circ} A_b^\nu \rangle^{(2)}$. Els diagrames són a la Fig. 11 i el resultat és

$$Z_{31}^{(2)} = Z_{32}^{(2)} = Z_{34}^{(2)} = 0$$
$$Z_{33}^{(2)} = 1 \qquad (2)$$

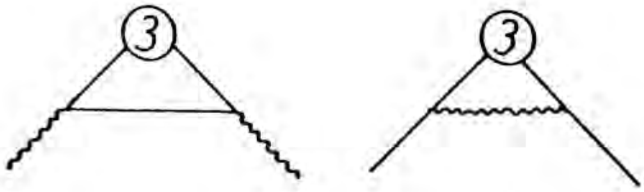


Fig. 11 Diagrames corresponents a la renormalització a un bucle de O_3.

Com veurem més tard l'absència de mescla es esperada a partir de la invariància gauge per un argument similar al que ara farem servir per a la renormalització de O_4. En efecte, no pot haver-hi barreja perquè $\overline{\psi}\gamma^5\psi$ té dimensió 3 i no hi ha cap altre operador pseudoescalar invariant gauge de dimensió 3 . De la invariància sota el grup de renormalització de $m\overline{\psi}\psi$ (Cfr. (6.2)) hom troba

$$Z_{41} = Z_{42} = Z_{43} = 0$$
$$Z_{44}^{(2)} = 1 \qquad (3)$$

Al nivell d'un bucle els resultats són:

$$\frac{1}{4}[F\tilde{F}]^{(2)} = Z_\alpha^{(2)} \frac{1}{4} F_0 \tilde{F}_0 + C_2(R) \frac{3}{8} \frac{\alpha}{\pi} \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^{N_f} \partial^\mu (\bar{\psi}_{i_0} \gamma_\mu \gamma^5 \psi_{i_0})$$

$$[\partial^\mu (\bar{\psi}_i \gamma_\mu \gamma^5 \psi_i)]^{(2)} = \partial^\mu (\bar{\psi}_{i_0} \gamma_\mu \gamma^5 \psi_{i_0}) \tag{1}$$

$$m_i [\bar{\psi}_i \gamma^5 \psi_i]^{(2)} = m_{i_0} \bar{\psi}_{i_0} \gamma^5 \psi_{i_0}$$

La primera relació ens diu que només per a QCD pura hom té

$$\alpha^{(2)} [F\tilde{F}]^{(2)} = \alpha_0 F_0 \tilde{F}_0 \tag{2}$$

i és, aleshores, una expressió invariant sota el grup de renormalització. En presència de quarks això deixa d'ésser veritat degut a la barreja. La segona relació de (1) diu que, tot i que el corrent axial singlet de sabor és anòmal, és encara veritat al nivell d'un bucle que, - - essent el corrent canònicament pseudo-conservat, no es renormalitza. Això esdevé així perquè l'anomalia és d'ordre α .

Dels resultats de (1), l'anomalia escrita en termes de camps sense renormalitzar a l'equació (26.4) pot expressar-se en funció dels operadors renormalitzats com

$$\sum_{i=1}^{N_f} [\partial^\mu (\bar{\psi}_i \gamma_\mu \gamma^5 \psi_i)]^{(1)} = 2i \sum_{i=1}^{N_f} m_i [\bar{\psi}_i \gamma^5 \psi_i]^{(1)} - \frac{\alpha}{4\pi} N_f [F\tilde{F}]^{(0)} \tag{3}$$

i té la mateixa forma, fins a ordre α inclòs, que l'equivalent no renormalitzat.

Renormalització a dos bucles:

Ara, la generalització de (3) a ordre α^2 requereix les expressions a dos bucles dels operadors O_3 i O_4 només. Per descontat una prescripció de com tractar la γ^5 en regularització dimensional es necessita ara. Tres pres cripcions s'han emprat:

i) L'original de 't Hooft i Veltman[37,38] en la que

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 2\gamma^5 \hat{\gamma}^\mu \tag{1}$$

amb (Cfr. A.2)

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}^\mu &= 0 \quad \mu = 1,2,3 \\ \hat{\gamma}^\mu &= \gamma^\mu \quad \mu > 3 \end{aligned} \tag{2}$$

que creiem és l'única per a la que hom sap treballar sense ambigüitat a qualsevol ordre, al preu, però, d'un àlgebra extraorinàriament més complicada.

ii) La reducció dimensional proposada inicialment per Siegel[39,40]. En ella l'algebra de Dirac i els camps vectorials es prenen en 4 dimensions, però les coordenades i moments en $D < 4$ dimensions. Aleshores,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0 \tag{3}$$

donat que només existeixen en 4 dimensions. S'ha vist que el mètode funciona fins al nivell de dos bucles. Requereix, però, gran cura perquè la invariància gauge s'ha perdut en 4-D dimensions i apareixen 4-D-escalars[40].

iii) Mantenir la regla d'anticommutació 4-dimensional de (3) fins i tot en D dimensions. Hom sap que això porta a inconsistències per al valor de[41,42]

$$\mathrm{Tr}\ \gamma^5 \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta \tag{4}$$

però, com es discutit per Chanowitz, Furman i Hinchliffe, aquesta traça sempre apareix precisament en el diagrama anòmal i hom pot, aleshores, fixar-la per l'equació de - l'anomalia (26.4). Això condueix, pel cap baix fins a segon ordre, a una prescripció consistent, encara que ad hoc. Aquesta prescripció té al seu favor la simplicitat dels càlculs. Començarem amb aquesta prescripció i discu tirem les altres dues. Realment no necessitarem fer cap càlcul a dos bucles.

Comencem per l'operador O_4 . Com $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ no es mescla sota renormalització és suficient considerar la funció de Green

$$\langle \psi O_4 \bar{\psi} \rangle^{(4)} = Z_{44}^{(4)} Z_F^{(4)} \langle \psi O_{4_0} \bar{\psi} \rangle^{(4)} \tag{1}$$

i calcular $\langle \psi O_{4_0} \bar{\psi} \rangle^{(4)}$ per a obtenir $Z_{44}^{(4)}$. Això es fa més convenientment per $(\bar{\psi}_0\gamma^5\psi_0)$ (en lloc de O_{4_0}) en el límit de massa zero. Els diagrames amb una línia de quarks oberta són els mateixos que per $(\bar{\psi}_0\psi_0)$, car hom anticommuta γ^5 al final de la línia de quarks. L'únic diagrama on això no és possible és el de la Figura 12, però aquest és zero tant per $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ com per $\bar{\psi}\psi$. Aleshores, de la invariància sota el grup de renormalització de $m\bar{\psi}\psi$ se segueix la de $m\bar{\psi}\gamma^5\psi$ i

$$Z_{44}^{(4)} = 1 \tag{2}$$

Considerem ara l'operador O_3. És fàcil demostrar que la manca de mescla que hem vist a un bucle és veritat a tots els ordres. Considerem en el seu lloc l'operador $\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma^5\psi$; és l'unic operador axial invariant gauge de dimensió 3 i, aleshores, no pot barrejar-se amb cap altre operador. Naturalment, el mateix succeeix a la seva divergència. El mateix argument no pot aplicar-se a O_1 perquè, tot i que pot escriure's com una divergència total, el corrent del qual és divergència no és invariant gauge.

Per a obtenir O_3 renormalitzat és suficient considerar la funció de Green

$$\langle \psi O_3 \bar{\psi} \rangle^{(4)} = Z_{33}^{(4)} Z_F^{(4)} \langle \psi O_{3_0} \bar{\psi} \rangle^{(4)} \tag{3}$$

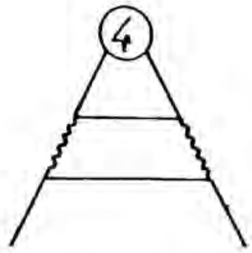


Fig. 12 El nombre imparell de matrius força aquest diagrama a ser zero en qualsevol prescripció.

Els diagrames que contribueixen a $\langle \psi O_{3_0} \bar{\psi} \rangle^{(4)}$ són a la --- Fig. 13 . Per aquells que contenen una línia de quarks oberta hom aplica el mateix criteri que per O_4: treballant en el límit de massa zero, anticommuta γ^5 al final de la línia de qurks. Queden aleshores els mateixos diagrames que contribueixen a l'operador $\partial^\mu (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi)$. L'últim diagrama de Fig. 13 , l'únic amb un bucle de - - quarks, dóna ara una nova contribució respecte al cas -- vectorial: l'anomalia. Recordant que el corrent vectorial no es renormalitza,

$$Z_{33}^{(4)} = 1 - \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{3}{8} C_2(R)\, N_f \frac{1}{\epsilon} \tag{1}$$

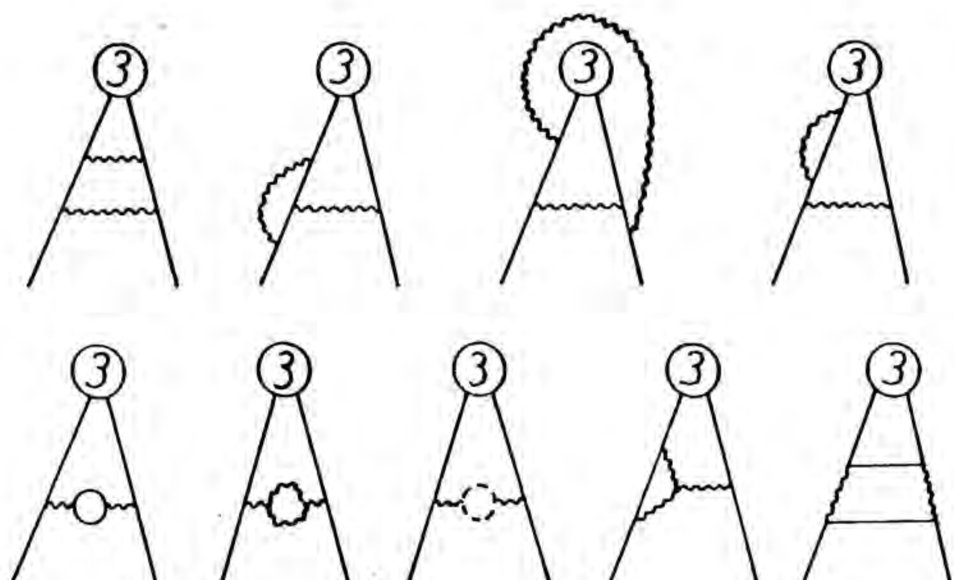


Fig. 13 Diagrames a dos bucles necessaris per a calcular $Z_{33}^{(4)}$

Els resultats són:

$$\begin{aligned} [\partial^\mu(\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma^5\psi)]^{(4)} &= \left(1-\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{3}{8} C_2(R) N_f \frac{1}{\epsilon}\right)\partial^\mu(\bar{\psi}_0\gamma_\mu\gamma^5\psi_0) \\ m[\bar{\psi}\gamma^5\psi]^{(4)} &= m_0\,\bar{\psi}_0\gamma^5\psi_0 \end{aligned} \tag{1}$$

que juntament amb (34.1) condueix a l'equació de l'anomalia renormalitzada

$$\sum_{i=1}^{N_f}[\partial^\mu(\bar{\psi}_i\gamma_\mu\gamma^5\psi_i)]^{(4)} = 2i\sum_{i=1}^{N_f} m_i[\bar{\psi}_i\gamma^5\psi_i]^{(4)} - \frac{\alpha}{4\pi}N_f[F\tilde{F}]^{(2)} \tag{2}$$

Suposem ara que no haguéssim utilitzat el nostre coneixement referent a la manca de barreja de O_3. Aleshores i emprant el nostre resultat a un bucle (33.3)

$$\langle A_a^\mu O_3 A_b^\nu\rangle^{(4)} = Z_{31}^{(4)}\langle A_a^\mu O_{1_0} A_b^\nu\rangle^{(4)} + \langle A_a^\mu \overset{o}{O}_{3_0} A_b^\nu\rangle^{(4)} \tag{3}$$

però, com no hi ha mescla, $Z_{31}^{(4)} = 0$ i $\langle A_\alpha^\mu \overset{o}{O}_{3_0} A_b^\nu\rangle^{(4)}$ no pot tenir divergències. Aquest és precisament l'anàleg no abelià del familiar teorema d'Adler i Bardeen[34] envers la no renormalització del diagrama triangular. Si hom extén llur prova a QCD, necessàriament $Z_{11}^{(2)} = Z_\alpha^{(2)}$. Recíprocament si $Z_{11}^{(2)} = Z_\alpha^{(2)}$ amb l'ajut de manipulacions algebraiques simples hom demostra que les correccions radiatives al triangle, al menys al nivell de dos bucles, són zero. En aquest sentit (31.1) expressa d'una manera compacte l'anul·lació de les correccions radiatives.

De (38.1) hom té la següent identitat

$$\sum_{i=1}^{N_f}\partial^\mu(\bar{\psi}_{i_0}\gamma_\mu\gamma^5\psi_{i_0}) + \frac{\alpha_0}{4\pi}N_f F_0\tilde{F}_0 = \sum_{i=1}^{N_f}[\partial^\mu(\bar{\psi}_i\gamma_\mu\psi_i)]^{(4)} + \frac{\alpha}{4\pi}N_f[F\tilde{F}]^{(4)} \tag{4}$$

Ara bé, si la teoria despullada es regularitza dimensionalment, aquesta igualtat s'ha d'escriure en termes de la seva transformada de Fourier per a no tenir problemes amb les dimensions

$$\int d^D x \, e^{ipx} \sum \partial^\mu (\bar{\Psi}_{i_0} \gamma_\mu \gamma^5 \Psi_{i_0})(x) + \frac{\alpha_0}{4\pi} N_f \int d^D x \, e^{ipx} (F_0 \tilde{F}_0)_D (x) =$$

$$\int d^4 x \, e^{ipx} \sum \left[\partial^\mu (\bar{\Psi}_i \gamma_\mu \gamma^5 \Psi_i) \right]^{(4)} (x) + \frac{\alpha}{4\pi} N_f \int d^4 x \, e^{ipx} \left[F \tilde{F} \right]^{(2)} (x) \quad (1)$$

Noteu que α_0 és la constant d'acoblament en 4 dimensions, no la constant sense dimensions en D dimensions que hom sap és dependent del punt de renormalització, -- d'acord amb

$$\mu \frac{d}{d\mu} \alpha_0 = 2\epsilon \alpha_0 \qquad (2)$$

Altrament la transformada de Fourier de l'equació de --- l'anomalia despullada tindria un terme, $\alpha_0 F_0 \tilde{F}_0$, que fóra dependent de μ . Aquesta discussio ens diu que (38.2) és invariant sota el grup de renormalització.

Comentem ara els altres esquemes de regularització per a γ^5 . En la reducció dimensional l'algebra de Dirac es manté en quatre dimensions, aleshores γ^5 anticommuta amb γ^μ i, seguint el mateix argument que abans, el corrent pseudo-escalar es transforma en el escalar i l'axial en el vectorial més el diagrama anòmal. Ara, els corrents escalar i vectorial no depenen de γ^5 i, per tant, la reducció dimensional ha de donar el mateix resultat que la regularització dimensional standard. Com el diagrama anòmal conté un pol simple en ϵ és independent de la regularització de γ^5 que fem servir, estem exactament en la mateixa situació que abans i els resultats (38.1,2) no canvien. S'ha de dir, però, que les coses han de ser - d'aquesta manera, però realment pot ser complicat comprovar-ho explicitament degut a les subtilitats d'aquesta -- tècnica.

Finalment, referim-nos a la prescripció original de γ^5 [37]. En aquesta prescripció la no anticommutació de

γ^5 en D dimensions fa els càlculs més complicats i hi un cert nombre de subtilitats remarcables.

En aquest esquema, a més dels covariants D-dimensionals normals (p^μ , γ^μ,...) hi han covariants D-4-dimensionals (com $\hat{p}^\mu$ o $\hat{\gamma}^\mu$). Quan hom calcula qualsevol funció de Green que conté γ^5 , l'estructura tensorial s'enriquirà amb aquests nou covariants. Per descontat, el resultat físic s'obté igualant a zero $\hat{p}^\mu$, $\hat{\gamma}^\mu$,... una vegada que s'han fet les apropiades substraccions per a fer finit el resultat. Malgrat això, en principi tant les divergències com les parts finites que corresponen als covariants normals per mor d'emprar aquesta prescripció hauran canviat respecte els que s'obtindrien, p. ex., amb un γ^5 completament anticommutant.

Comentem aquest punt un xic més. Supcsem,p.ex., que hom està interessat en calcular la part divergent de

$$\langle \psi O_{3_0} \bar{\psi} \rangle^{(2)} \tag{1}$$

Sabem ja quin és el resultat en la prescripció iii) per a γ^5 . La seva divergència és exactament cancelada per la renormalització dels camps, de forma que en el gauge de Landau és finit. Tot i que per aquesta raó hom podria pensar que aquesta part finita no dependrà aleshores de la prescripció de γ^5, car és ben conegut que el terme dominant en un diagrama no depèn de l'àlgebra en D-4 dimensions, això no és cert. La raó és que disposem ara de dues estructures tensorials

$$\not{p}\gamma^5 \quad , \quad \hat{\not{p}}\gamma^5 \tag{2}$$

quan abans només teniem $\not{p}\gamma^5$. En totes dues apareixeran divergències i per tant no podem fer una comparació directe entre els resultats obtinguts en la prescripció i) i en la iii)

El mateix raonament ens dirà que, fins i tot en el gauge de Landau, el pol simple del càlcul a dos bucles depèn de la prescripció de γ^5, tot i que el pol doble és, en aquest gauge zero. De manera que utilitzar una γ^5 no anticommutant sembla introduir divergències no esperades en l'equació de l'anomalia més enllà del nivell d'un bucle. Sortosament veurem que això no és així, sinó que tota la diferència entre les dues prescripcions rau en les parts finites.

Per a calcular la divergència de (40.1) treballarem en el límit de massa zero i farem ús de la propietat

$$\frac{i}{\not q+\not p}\not p\gamma^5\frac{i}{\not q} = -\gamma^5\frac{1}{\not q} - \frac{1}{\not p+\not q}\gamma^5 - 2\,\frac{i}{\not q+\not p}\,\hat{\not q}\gamma^5\,\frac{i}{\not q} \qquad (1)$$

Els primers dos termes de la banda dreta de (1) donen lloc a diagrames típics d'autoenergia que inclouen una γ^5, mentre que l'últim correspon a una inserció amb moment p de l'operador

$$\hat{O}_0 = \sum_{i=1}^{N_f} -i\,\bar{\psi}_i\gamma^5\hat{\not\partial}\,\psi_i \qquad (2)$$

en la línia de quarks. Fent servir les regles d'anticommutació de γ^5 aquestes poden sortir fora dels diagrames d'auto-energia, però apareixeran dos nous diagrames que corresponen a sengles insercions de $\hat{O}_0$ en ambdós vèrtexs (vegeu Fig. 14). Podem agrupar fàcilment la contribució deguda exclusivament a la no anticommutativitat de com

$$-2\,\langle \psi\hat{O}_0\bar{\psi}\rangle^{(2)}\Big|_{M_0=0} \qquad (3)$$

A l'ordre següent existeix el diagrama anòmal (Fig. 12). En ell la inserció de $\hat{O}_0$ en el bucle de quarks dóna lloc precisament a l'anomalia[37]. Per als altres diagrames l'argument previ que ha portat a (3) pot extendre's sense dificultat, de forma que la diferència entre tractar γ^5 en la prescripció iii) o en la prescripció i) és:

$$-2\langle \psi \hat{O}_0 \bar{\psi} \rangle^{(4)}_{DNA} \Big|_{m_0=0} \tag{1}$$

El sub-índex ens diu que només hem de considerar les inserccions en diagrames no anòmals.

Emprarem la mateixa tècnica per a la renormalització de O_{4_0}. Considerem la identitat

$$2im_0 \langle \psi | \bar{\psi}_0 \gamma^5 \psi_0 | \bar{\psi} \rangle = -\langle \psi | \bar{\psi}_0 \gamma^5 (\overrightarrow{\not{\partial}} - \overleftarrow{\not{\partial}}) \psi_0 | \bar{\psi} \rangle + \langle \psi | \bar{\psi}_0 \gamma^5 (\overrightarrow{\not{\partial}} + im_0) \psi_0 | \bar{\psi} \rangle + \langle \psi | \bar{\psi}_0 \gamma^5 (-\overleftarrow{\not{\partial}} + im_0) \psi_0 | \bar{\psi} \rangle \tag{2}$$

i mantenim ara les masses explícitament distintes de zero. (2) dóna lloc exactament als mateixos diagrames de la Fig. 14, excepte per la presència de masses finites. Igualment a l'ordre següent, solament que ara no hi ha anomalia, de forma que la contribució deguda al caràcter no anticommutant de γ^5 és ara

$$\langle \psi \hat{O}_0 \bar{\psi} \rangle^{(4)}_{DNA} \tag{3}$$

Veiem, doncs, que les modificacions que el mètode de 't Hooft i Veltman imposa s'expressen com insercions en diagrames no anòmals d'un operador que és zero en quatre dimensions; és a dir, no físic. Si en lloc d'aplicar el mètode a un corrent anòmal ho féssim a un que no presentes cap anomalia, és clar que el resultat hagués estat el mateix.

Ara bé, considerant diagrames no anòmals és clar que la inserció d'un operador no físic, zero en quatre dimensions no pot donar cap contribució divergent independent del gauge que no s'anul·li en D=4, car altrament aquest operador es barrejaria en el procés de renormalització amb operadors de classe $I^{(c)}$.

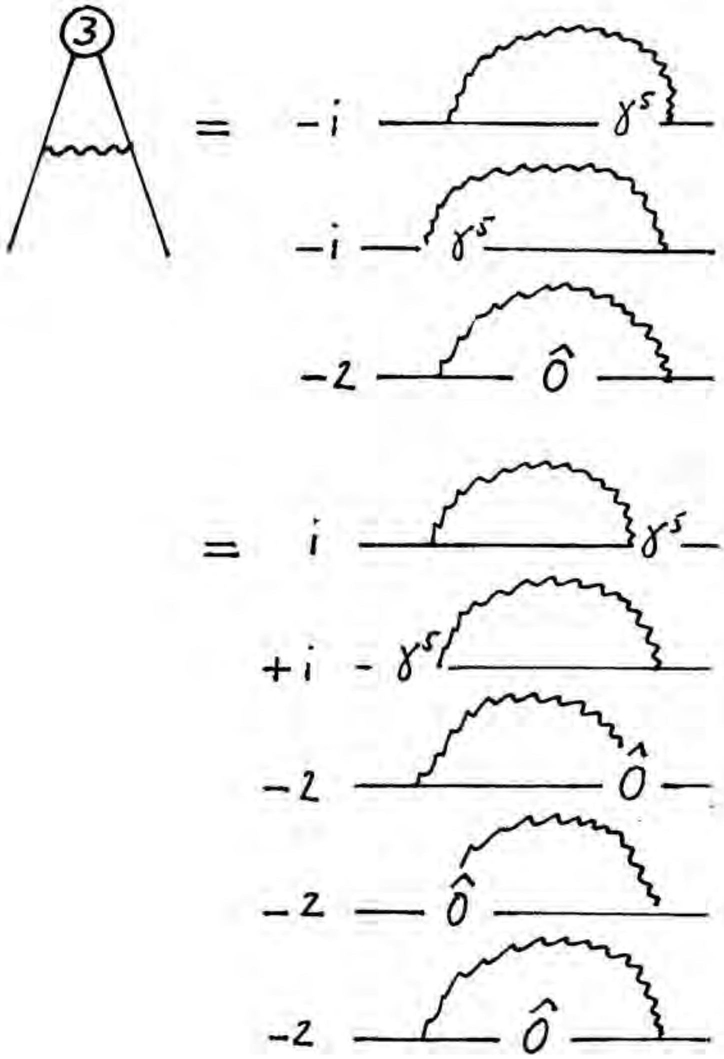


Fig. 14 Deducció diagramàtica de la diferència entre les dues prescripcions per a γ^5.

La conseqüència és clara. Tant les identitats d- Ward anòmales com les no anòmales són satisfetes automàticament per a les parts divergents. A les parts finites la situació és diferent; $\hat{O}$ pot contribuir i contribueix els termes no divergents que, per tant, canvien d'una prescripció a un altre.

La contribució d'aquestes parts finites serà relevant per a la renormalització de O_3 i O_4 al nivell de dos bucles a través de la renormalització de les parts finites a un bucle. Aquestes parts finites són distintes per als dos operadors, la qual cosa vol dir que l'equació de l'anomalia no seria invariant sota el grup de renormalització. En definitiva això vol dir que per a restaurar aquesta invariància (és a dir, per a satisfer les identitats de Ward canòniques de la teoria) hom ha de fer una renormalització finita ad hoc.

Trueman[43] fent un ús intel.ligent de les especials propietats del gauge de Landau ha estudiat la renormalització del corrent no anòmal al nivell de dos bucles, tant per al corrent axial com per al vectorial. Les corresponents constants de renormalització són diferents degut a la renormalització de la part finita provinent del càlcul a un bucle. Aquestes divergències espuries fan anòmales identitats de Ward que se saben lliures d'anomalies, però evidentment han d'ésser subtretes a mà[⌿].

⌿ Per aquesta raó Nachtmann i Wetzel[44] havien especulat sobre un trencament espontani de la simetria quiral en QCD, obtenible pertorbativament.

Conclusions:

S'ha vist la renormalització dels operadors que apareixen a l'equació de l'anomalia axial, en el background -- field gauge. Els principals resultats, alguns d'ells -- certs a tots els ordres són:

Mescla d'operadors: $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ i $\partial^\mu(\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma^5\psi)$ no es barregen. $F\tilde{F}$,però, es mescla amb $\partial^\mu(\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma^5\psi)$.

Invariància sota el grup de renormalització: $\alpha F\tilde{F}$ és invariant sota el grup de renormalització quan no hi han quarks. En altre cas els invariants són:

$$m_0\,\bar{\psi}_0\gamma^5\psi_0 = m\,[\bar{\psi}\gamma^5\psi]$$

$$\sum \partial^\mu(\bar{\psi}_0\gamma_\mu\gamma^5\psi_0)+\frac{\alpha_0}{4\pi}N_f F_0\tilde{F}_0 = \sum[\partial^\mu(\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma^5\psi)]+\frac{\alpha}{4\pi}N_f[F\tilde{F}]$$

Equació de l'anomalia: com a conseqüència d'això, l'equació de l'anomalia pren exactament la mateixa forma en -- termes de quantitats renormalitzades o no. Aquest és en el context dels operadors compostos la no renormalització de l'anomalia.

Fenomenologia: els operadors aquí estudiats rauen a la base de les regles de suma del ITEP per a mesons pseudo-escalars i glueballs[45]. Especialment en el tractament de glueballs pseudo-escalars hom ha de tenir en compte la mescla amb la divergència del corrent axial de $F\tilde{F}$ sota renormalització. Això no ha estat fet apropiadament encara.

REFERÈNCIES DE LA SECCIÓ IV

1 Bohm,D., Aharonov,Y. Phys. Rev. 108,1070(1957)

2 Wu,T.T., Yang,C.N. Phys. Rev. D12,3845(1975)
Nucl. Phys. B 107,365(1976)
Phys. Rev. Lett 33,445(1974)

3 Polyakov,A.M. Phys. Lett. 82B,247(1979)

4 Nambú,Y. Phys. Lett. 80B,372(1979)

5 Gervais,J.L., Neveu,A. Phys. Lett. 80B,255(1979)
Nucl. Phys. B153,445(1979)

6 Wilson,K. Phys. Rev. D10,2445(1974)
Cornell Preprint CLNS 80/442 (1980)

7 Itzykson, C. Phys. Rep. 23C, 368 (1976)
Itzykson, C., Drouffe, J. M. 38C, 133 (1978)

8 Creutz,M. Phys. Rev. Lett. 43,553(1979)
Phys. Rev. D21,2308(1980)

9 Kogut,J., Pearson,R., Shigemitsu,J. Phys. Rev. Lett. 43,484(1979)

10 't Hooft,G. Nucl. Phys. B72,461(1974)

11 Makeenko,Yu.M., Migdal,A.A. Nucl. Phys. B188,269 (1981)

12 Zimmermann,W. Brandeis Lectures on Elementary Particles And Field Theory. Ed. S. Deser et al. MIT press, Cambridge, Mass. 1970.

13 Collins,J.C. Nucl. Phys. B92,477(1975)

14 Wilson,K. Phys. Rev. 179,1499(1969)

15 Shifman,M.A., Vainshtein,A.I., Zakharov,V.I.
Nucl. Phys. B147,385,448(1979)

16 Deans,W.S., Dixon,J.A. Phys. Rev. D18,1113 (1978)
Kluberg-Stern,H., Zuber,J.B. Phys. Rev. D12,467(1975)

17 Preparata,G., Weisberger,W.I. Phys. Rev. 175,1965 (1968)

18 Breitenlohner,P., Maison,D. Comm. Math. Phys. 52, 11,39,55(1977)

19 Bonneau,G. Nucl Phys. B167,261(1980)

20 Kluberg-Stern,H., Zuber,J.B. Phys. Rev. D12,3159 (1975)

21 Tarrach,R. Nucl. Phys. B196,45(1982)

22 Collins,J.C. Nucl. Phys. B92,477(1975)

23 Bonneau,G. Nucl. Phys. B171,477(1980)

24 Symanzik,K. Comm. Math. Phys. 18,227(1970)

25 Nielsen,N.K. Nucl. Phys. B120,212(1977)

26 Collins,J.C., Duncan,A., Joglekar,S.D. Phys. Rev. D16,438(1977)

27 Sutherland,D.G. Nucl. Phys. B2,433(1967)

28 Veltman,M. Proc. Roy. Soc. A301,107(1967)

29 Steinberger,J. Phys. Rev. 76,1180(1949)

30 Jackiw,R. "Current Algebra and its Applications" Princeton University Press, Princeton, 1972.

31 Schwinger,J. Phys. Rev. 82,664(1951)

32 Bell,J.S., Jackiw,R. Nuovo Cim. 60A,47(1969)

33 Adler,S.L. Phys. Rev. 177,2426(1969)

34 Adler,S.L., Bardeen,W.A. Phys. Rev. 182,1517(1969)

35 Di Giacomo,A., Rossi,G.C. Phys. Lett. 100B,481(1981)

36 Di Vecchia,P., Fabricius,K., Rossi,G.C., Veneziano,G. CERN preprint TH-3091(1981), TH-3180(1981)

37 't Hooft,G., Veltman,M. Nucl. Phys. B44,89(1972)

38 Akyeampong,D.A., Delbourgo,R. Nuovo Cim. 17A, 578(1973), 18A,94(1973),19A, 219(1974)

39 Siegel,W. Phys. Lett. 84B,193(1979)

40 Altarelli,G., Curci,G., Martinelli,G., Petrarca,S. Nucl. Phys. B187,461(1981)

41 Bardeen,W.A., Gastmans,R., Lautrup,B. Nucl Phys. B46,319(1972)

42 Chanowitz,M., Furman,M., Hinchliffe,I. Nucl. Phys. B159,225(1979)

43 Trueman,T.L. Phys. Lett. 98B,331(1979)

44 Nachtmann,O., Wetzel,W. Phys. Lett. 81B,211(1979)

45 Novikov,V.A., Shifman,M.A., Vainshtein,A.I., Zakharov,V.I. Nucl. Phys. B191, 301(1981).

NOTES DE LA SECCIÓ IV

a. És possible l'existència de diagrames anòmals més enllà del diagrama triangular. En la funció anòmala de quatre punts el terme ambigu és d'ordre zero en els moments externs

$$\langle V_i^\mu V_j^\nu V_k^\tau A_l^\rho \rangle = R\, \epsilon^{\mu\nu\tau\rho}\, Tr\, [\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l] \qquad \text{(a.1)}$$

$$\langle V_i^\mu A_j^\nu A_k^\tau A_l^\rho \rangle = S\, \epsilon^{\mu\nu\tau\rho}\, Tr\, [\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l] \qquad \text{(a.2)}$$

Quan ens trobem en presència d'algun corrent que per mor d'un acoblament derivatiu contribueix a una integral linealment divergent es presentarà una tal anomalia.

La qüestió és més delicada per a l'anomalia pentagonal, present a VVVVA, VVAAA o AAAAA. Ara no hi haurà pas cap integral divergent, fins i tot amb un acoblament derivatiu. Malgrat això, les identitats de Ward que relacionen les funcions VVVVA, VVAAA o AAAAA poden ser també anòmales. La raó són els termes ambigus de quatre punts que són generats pels commutadors -termes de contacte, si es prefereix[≠].

Tot i així, les funcions de cinc punts són certament finites i no ambigües. La dificultat rau únicament en llurs identitats de Ward.

≠ W.A. Bardeen, Phys. Rev. 184, 1848(1969). R. Aviv, A Zee, Phys. Rev. D5,2372(1972). J.Wess, B. Zumino, Phys. Lett. 37B, 95(1971)

De fet, tant l'anomalia del quadrat com l'anomalia pentagonal estan estretament relacionades amb l'anomalia triangular. Així, amb manipulacions algebràiques hom pot reduir el quadrat al triangle anòmal.

Hom creu que el triangle, quadrat i pentàgon són els únics diagrames anòmals degut a γ^5 (vegeu també la nota b)

b. Aquest punt es veu més fàcilment si ens donem compte que per diagrames amb més d'un bucle sí existeix un procediment de regularització que és compatible amb γ^5 .

Una possibilitat és substituir la part fermiònica del lagrangià

$$i\bar{\psi}\not{\partial}\psi \qquad \text{(b.1)}$$

per

$$i\bar{\psi}\left[1-\frac{D^2}{\Lambda^2}\right]\not{\partial}\psi \qquad \text{(b.2)}$$

Λ és un paràmetre amb dimensions de massa que finalment farem creixer infinitament[≠] . El propagador es comporta com

$$\frac{\Lambda^2\not{p}}{p^2(\Lambda^2+p^2)} \qquad \text{(b.3)}$$

Els vèrtexs guanyen un factor Λ^{-2} . Els bosons es tracten d'una forma similar. El resultat és que un diagrama amb k bucles és proporcional a Λ^{2k-2} . Naturalment això ve compensat per moments en el denominador. Això fa tots els gràfics amb $k > 1$ convergents. Aquest és, per tant, un procediment de regularització adient per dia_

≠ A. Slavnov, Theor. Math. Phys. 13, 174 (1972).

grames sense divergència primitiva. El mètode respecta la simetria sota γ^5 per la qual cosa no poden presentar-se anomalies. Naturalment hom necessita una regularització subsidiaria per als diagrames a un bucle. La seva formalització i la prova del teorema d'Adler-Bardeen amb aquest mètode s'ha donat ben recentment[†]. Gràfics com

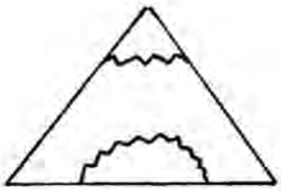


Fig. 1

simplement contribueixen a la renormalització dels paràmetres, mentre que diagrames com

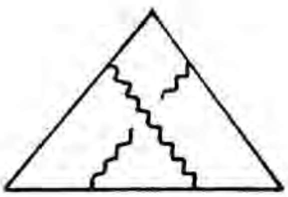


Fig. 2

no tenen anomalies. Una molt bona discussió sobre les anomalies i llur influència en la renormalitzabilitat i unitarietat pot trobarse al llibre de J.C. Taylor[††].

c. Aquest és solament un argument semi-intuitiu. Per una demostració completa que el mètode de 't Hooft i Veltman no condueix a divergències espuries pot veure's p. ex. el treball de Aoyama i Tonin[†††]. En el sentit de no agafar contribució d'operadors de classe I més que en diagrames anòmals, els operadors $\hat{O}$, nuls en quatre dimensions poden considerar-se com de classe II; tot i que no existeixen com a tals i són únicament artificiosament introduïts en el càlcul.

---

† M. Day, Cambridge University preprint DAMTP 82/15

†† J. C. Taylor, Gauge Theories of Weak Interactions, Cambridge University Press, Cambridge, 1978

††† S. Aoyama, M. Tonin, Istituto Nazionale de Fisica Nucleare-Padova preprint IFPD 14/80.

REFERÈNCIES GENERALS

N.N. Bogolubov, D.V. Shirkov, Introduction to the Theory of Quantized Fields, Interscience, New York, 1959.

J. Schwinger, Particles, Sources and Fields, Addison-Wesley, 1973.

H.D. Politzer, Phys. Rep. 14C,129(1974).

S. Weinberg, Rev. Mod. Phys. 46,255(1974).

H. Pagels, Phys. Rep. 16C,219(1975).

J.C. Taylor, Gauge Theories of Weak Interactions, Cambridge University Press, Cambridge, 1976.

W. Marciano, H. Pagels, Phys. Rep. 36C,132(1978).

P. Pascual, Lectures on Deep Inelastic Scattering and Asymp_ totic Freedom, Univ. Barcelona pre_ print, 1980.

S. Coleman, The Whys of Subnuclear Physics, ed. A. Zichichi Plenum Press, New York, 1979.

G. 't Hooft, ibid.

A. Wightman, ibid.

J. Ellis, C.T. Sachrajda, QCD and its Applications, Cargèse lectures, 1979.

E. de Rafael, Proceedings of the X GIFT Seminar on Theoreti_ cal Physics, ed. J.L. Alonso, R. Ta_ rrach, Springer, 1980.

C.T. Sachrajda, ibid.

C. Itzykson, J.B. Zuber, Quantum Field Theory, McGraw-Hill, 1980.

A.J. Buras, Rev. Mod. Phys. 52,199(1980).

F.J. Yndurâin, Quantum Chromodynamics. An Introduction to the Theory of Quarks and Gluons, a aparèi_ xer.

A.1 Background Field Gauge

El funcional generador ve definit com:

$$W[J] = \int [dQ_\mu^a] \det \left[\frac{\delta G^a}{\delta w^b} \right] \exp i \int d^4x \\ \left[\mathcal{L}[Q] - \frac{1}{2a} [G^a]^2 + J_\mu^a Q_a^\mu \right] \quad (1)$$

G^a és el gauge fixing term. El gauge covariant és:

$$G^a \equiv \partial^\mu Q_\mu^a \quad (2)$$

La derivada $\delta G^a / \delta w^b$ pot exponenciar-se en termes d'uns camps escalars anticommutants (fantasmes de Faddeev-Popov[1]). Les derivades funcionals de $W[J]$ respecte a la font J donen les funcions de Green completes de la teoria. Les funcions connexes deriven de

$$Z[J] = -i \ln [W[J]] \quad (3)$$

L'acció efectiva ve definida com la transformada de Legendre de $Z[J]$.

$$\Gamma[\hat{Q}] = Z[J] - \int d^4x \; J_\mu^a \hat{Q}_a^\mu$$

$\hat{Q}_a^\mu$ reben el nom de camps clàssics. Les derivades de $\Gamma[\hat{Q}]$ respecte $\hat{Q}$ són les 1PI-funcions de Green de la teoria, que fins a tres derivades coincidiran amb les pròpies.

Normalment, i aquest és el cas de (1), tant en el gauge covariant (2) com en gauge axials[2], hem perdut la invariància gauge al introduir el Gauge Fixing Term. En el Background Field Gauge el trencament es fa de tal manera que hom conserva certa invariància. Considerem una teoria amb un funcional generador

$$\tilde{W}[J,A] = \int [dQ_\mu^a] \det\left[\frac{\delta G^a}{\delta \omega^b}\right] \exp i \int d^4x$$
$$\left(\mathcal{L}(A+Q) - \frac{1}{2a}(G^a)^2 + J_\mu^a Q_a^\mu \right) \tag{1}$$

A_μ és el background field. Seguint 't Hooft hom no l'acobla a cap font. El gauge fixing term és ara

$$G^a \equiv \partial_\mu Q_a^\mu + g f^{abc} A_\mu^b Q_c^\mu \tag{2}$$

Suposem primerament que A_μ^b és una quantitat fixa. En termes de les noves variables, la transformació de gauge es llegeix

$$\delta(Q_\mu^a + A_\mu^a) = \delta(Q_\mu^a) = \frac{1}{g}\partial_\mu \omega^a - f^{abc}\omega^b(A_\mu^c + Q_\mu^c) \tag{3}$$

Per descontat, $\mathcal{L}(A+Q)$, el lagrangià és invariant sota aquestes transformacions, però el gauge fixing term, no. Escollint una condició de gauge hom perd la invariància gauge.

Suposem, però, que hom fa una transformació en el camp A_μ^a i en la font

$$\delta A_\mu^a = \frac{1}{g}\partial_\mu \omega^a - f^{abc}\omega^b A_\mu^c \qquad \delta J_\mu^a = -f^{abc}\omega^b J_\mu^c \tag{4}$$

Aleshores (fent el canvi en la variable d'integració $Q_\mu^a \rightarrow Q_\mu^a - f^{abc}\omega^b Q_\mu^c$)

$$\mathcal{L}(A+Q) = \mathcal{L}(A'+Q)$$
$$(G^a)^2 = (G'^a)^2 \tag{5}$$

En altres paraules, hom ha introduit un formalisme en el que es reté una invariància en el background field. De la mateixa manera els equivalents en aquest formalisme a (1.2) i (1.3)

$$\tilde{Z}[J,A] = -i \ln\left[\tilde{W}[J,A]\right] \tag{1}$$

$$\tilde{\Gamma}[\tilde{Q},A] = \tilde{Z}[J,A] - \int d^4x \, J_\mu^a \tilde{Q}^\mu{}_a \tag{2}$$

retindran la invariància gauge en A_μ^a . En particular (2) és invariant sota

$$\delta A_\mu^a = -f^{abc} w^b A_\mu^c + \frac{1}{g} \partial_\mu w^a, \quad \delta \tilde{Q}_\mu^a = -f^{abc} w^b \tilde{Q}_\mu^c \tag{3}$$

D'altra banda, fent un canvi de variables en (2.1)

$$Q \longrightarrow Q - A \tag{4}$$

$$\tilde{W}[J,A] = \int [dQ_\mu^a] \det\left[\frac{\delta G^a}{\delta w^b}\right] \exp i \int d^4x \left[\mathcal{L}(Q) - \frac{1}{2\alpha} G^a + J_\mu^a Q^\mu_a - J_\mu^a A^\mu_a \right] \tag{5}$$

amb

$$G^a = \partial_\mu Q^\mu_a - \partial_\mu A^\mu_a + g f^{abc} A_\mu^b Q^\mu_c \tag{6}$$

És a dir,

$$\tilde{W}[J,A] = W[J] \exp -i \int d^4x \, J_\mu^a A^\mu_a \tag{7}$$

$W[J]$ està calculada en el gauge (6). Fent la trans_ de Legendre

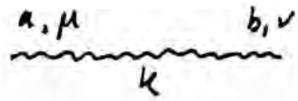
$$\tilde{\Gamma}[\tilde{Q},A] = \Gamma[\hat{Q}]\Big|_{\hat{Q}=A+\tilde{Q}} \tag{8}$$

En particular

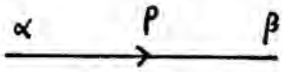
$$\tilde{\Gamma}[0,A] = \Gamma[\hat{Q}]\Big|_{\hat{Q}=A} \tag{9}$$

$\tilde{\Gamma}[0,A]$ proporciona una manera de calcular $\Gamma[\hat{Q}]$ en un gauge particular. $\tilde{\Gamma}[0,A]$ es calcula sumant tots els diagrames 1PI amb el camp A com a camp extern. No apareixen camps quàntics Q a fora, puix fem $Q=0$ a l'acció efectiva. No hi ha cap A dins dels bucles, puix que el camp A no s'integra.

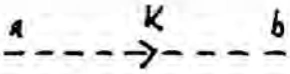
És fàcil calcular les regles de Feynman associades[3]



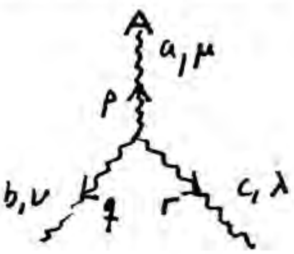
$$\delta_{ab}\,\frac{-i}{k^2+i\epsilon}\left[g_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}(1-a)\right]$$



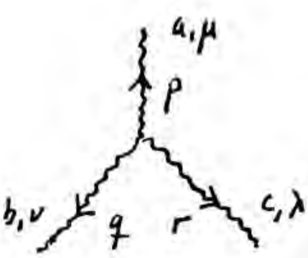
$$\delta_{\alpha\beta}\,\frac{i}{\not{p}-m+i\epsilon}$$



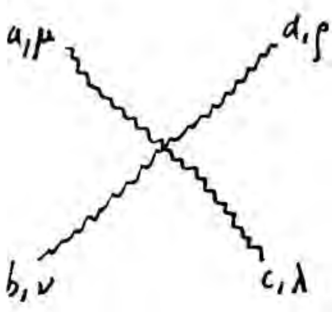
$$-i\,\delta_{ab}\,\frac{1}{k^2+i\epsilon}$$



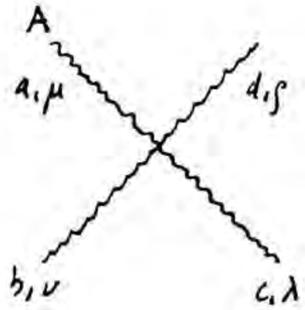
$$-g f_{abc}\left[g_{\mu\nu}\left(p-q-\frac{r}{a}\right)_\lambda + g_{\nu\lambda}(q-r)_\mu + g_{\lambda\mu}\left(r-p+\frac{q}{a}\right)_\nu\right]$$



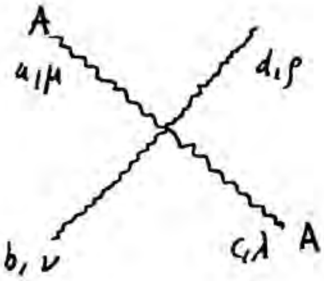
$$-g f_{abc}\left[g_{\mu\nu}(p-q)_\lambda + g_{\nu\lambda}(q-r)_\mu + g_{\lambda\mu}(r-p)_\nu\right]$$



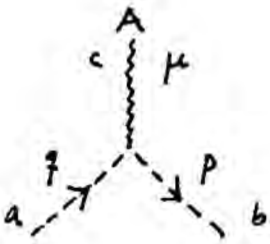
$$-ig^2\left[f_{abx}f_{xcd}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}-g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}) + f_{adx}f_{xbc}(g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}-g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}) + f_{acx}f_{xbd}(g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}-g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda})\right]$$



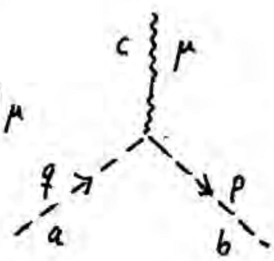
$$-ig^2\left[f_{abx}f_{x\nu\rho}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}) + f_{adx}f_{xbc}(g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}) + f_{acx}f_{xbd}(g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda})\right]$$



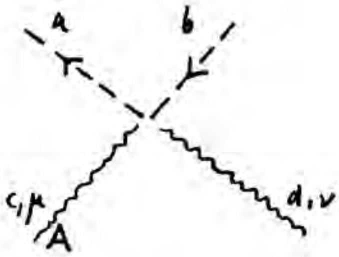
$$-ig^2\left[f_{abx}f_{xcd}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} + \frac{1}{a}g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}) + f_{adx}f_{xbc}\cdot(g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - \frac{1}{a}g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}) + f_{acx}f_{xbd}(g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda})\right.$$



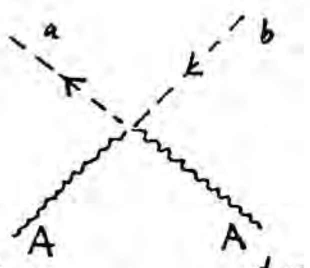
$g f_{abc}(p+q)_\mu$



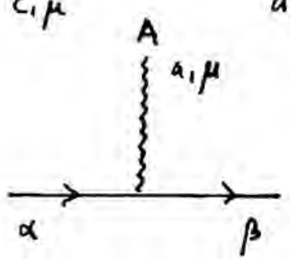
$g f_{abc} p_\mu$



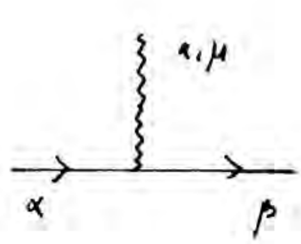
$ig^2 f_{acx}f_{xdb}\, g_{\mu\nu}$



$ig^2 g_{\mu\nu}(f_{acx}f_{xdb} + f_{adx}f_{xcb})$



$ig\gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2}{}_{\beta\alpha}$



que són les ordinàries tret dels nous vèrtexs. Cal anar amb cura al treballar en el gauge de Landau. Degut als termes 1/a hom no pot fet el límit a = 0 més que quan s'han cancel.lat tots aquests factors.

Degut a la invariància gauge en A, els infinits que apareixeran a $\tilde{\Gamma}[0, A]$ han de prendre una forma invariant gauge. Donat que una vegada les quantitats han estat escrites en termes dels paràmetres renormalitzats les úniques divergències rauen a les funcions de Green amb dos, tres o quatre camps A (en QCD - sense quarks), les singularitats de l'acció clàssica han d'ésser proporcionals a

$$F_{\mu\nu}^{a} \; F^{\mu\nu}_{a} \tag{1}$$

i, per tant

$$Z_g = Z_A^{-1/2} \tag{2}$$

Com a qüestió de notació, el tensor d'auto-energia en el background field s'escriu com

$$i\,\Pi^{\mu\nu}_{ab}(p) = i\,(p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu})\,\Pi(p^2) \tag{3}$$

i llur renormalització és:

$$1 + \Pi(p^2) = Z_A\,(1 + \Pi_0(p^2)) \tag{4}$$

L'auto-energia dels quarks és:

$$-i\Sigma(\not p) = -i\,[m\Sigma_1(p^2) + (\not p - m)\Sigma_2(p^2)] \tag{5}$$

mentre que la renormalització actua com

$$1 - \Sigma_2(p^2) = Z_F\,(1 - \Sigma_{0_2}(p^2)) \tag{6}$$

$$1-\Sigma_2(p^2)+\Sigma_1(p^2)=Z_4\left[1-\Sigma_{0_1}(p^2)+\Sigma_{0_2}(p^2)\right] \quad (1)$$

amb

$$Z_4 = Z_M \, Z_F \quad (2)$$

A.2 Covariants Lorentz D-dimensionals[4]

Hom ha de trobar una extensió dels comuns covariants en quatre dimensions, que li permetin de tractar-los en D-dimensions. Això es fa definint-los com objectes formals que obeeixen certes identitats algebràiques, sense fer ús dels valors que poden assolir els índexs.

L'únic lloc on això porta problemes és en el tensor completament antisimètric $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$, $\epsilon_{0123}=1$. Aquests és típicament un objecte 4-dimensional. Aleshores per a obviar aquesta dificultat hom introdueix, a més dels D-covariants uns 4-D covariants. Els D-covariants són els habituals, $g_{\mu\nu}, p_\mu, \gamma_\nu, \ldots$, obeint les identitats

$$
\begin{aligned}
& g_{\mu\nu} g^{\nu}{}_{\lambda} = g_{\mu\lambda} \\
& g_{\mu\nu} \gamma^{\nu} = \gamma^{\mu} \\
& g_{\mu\nu} \epsilon^{\nu}{}_{\rho\sigma\tau} = \epsilon_{\mu\rho\sigma\tau} \\
& \{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2 g^{\mu\nu} \\
& g^{\mu}{}_{\mu} = D
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Introduirem, però, $\hat{g}_{\mu\nu}, \hat{p}_\mu, \hat{\gamma}_\nu$, obeint

$$
\begin{aligned}
& g_{\mu\nu} \hat{g}^{\nu}{}_{\lambda} = \hat{g}_{\mu\nu} \hat{g}^{\nu}{}_{\lambda} = \hat{g}_{\mu\lambda} \qquad \hat{g}_{\mu\nu} = \hat{g}_{\nu\mu} \\
& \hat{g}_{\mu\nu} p^{\nu} = \hat{p}_{\mu} \qquad \hat{g}_{\mu\nu} \gamma^{\nu} = \hat{\gamma}_{\mu}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

D'aquestes premises hom dedueix

$$
\begin{aligned}
& g_{\mu\nu} \hat{\gamma}^{\nu} = \hat{g}_{\mu\nu} \hat{\gamma}^{\nu} = \hat{\gamma}_{\mu} \\
& \{\gamma_{\mu}, \hat{\gamma}_{\nu}\} = \{\hat{\gamma}_{\mu}, \hat{\gamma}_{\nu}\} = 2 \hat{g}_{\mu\nu} \\
& \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \hat{g}_{\sigma\tau} = 0 \\
& \hat{g}^{\mu}{}_{\mu} = D-4
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Pel que fa a γ^5, observem que en D=4 pot definir-se per les seves dues propietats

$$Tr\ \gamma^5\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta \sim \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{1}$$

que pot mantenir-se, i

$$\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0 \tag{2}$$

que no és admisible, car

$$D(D-2)(D-4)\ Tr\ \gamma^5\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta = 0 \tag{3}$$

Si hom defineix

$$\gamma^5 = -\frac{i}{4!}\ \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\ \gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta \tag{4}$$

aleshores

$$\{\gamma_\alpha, \gamma_5\} = \{\hat{\gamma}_\alpha, \gamma_5\} = 2\hat{\gamma}_\alpha\gamma_5 \tag{5}$$

És fàcil demostrar que amb aquesta definició el quadrat de γ^5 té mòdul unitat.

REFERÈNCIES

1 Faddeev,L.D., Popov,V.N. Phys. Lett. 25B,29(1967)

2 Kummer,W. Acta Phys. Austr. 41,315(1975)

3 Abbott,L.F. CERN preprint TH-2973

4 Breitenlohner,P., Maison,D. Comm. Math Phys. 52,11(1977).