ESTADÍSTICA ESPAÑOLA
Vol. 51, núm. 171, 2009, págs. 237 a 256

El reaseguro proporcional de umbral y la probabilidad de supervivencia como criterio de elección de estrategias(*)

por
M. MERCÈ CLARAMUNT
MAITE MÁRMOL
y
ANNA CASTAÑER
Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial. Universitat de Barcelona

RESUMEN

En este artículo presentamos una nueva estrategia de reaseguro, a la que denominamos estrategia de reaseguro umbral, que actúa de forma diferente en función del nivel de las reservas. Así, para unos niveles de las reservas inferiores a un determinado nivel, el gestor decide aplicar un reaseguro proporcional, y para niveles superiores, al considerar que se ha alcanzado cierta solvencia en la cartera, opta por no ceder ningún porcentaje del riesgo. El análisis del efecto de la introducción del reaseguro umbral sobre la probabilidad de supervivencia, y su comparación con el reaseguro proporcional y la opción de no reasegurar, nos permite hallar estrategias de reaseguro equivalentes desde el punto de vista de la solvencia.

(*) Trabajo financiado parcialmente por el Ministerio de Educación y Ciencia y FEDER 2006. MTM2006-13468 y MTM2006-09920.

Los autores agradecen a los evaluadores anónimos los comentarios y sugerencias que han mejorado este trabajo.

Palabras clave: teoría del riesgo, reaseguro de umbral, reaseguro proporcional, probabilidad de supervivencia.

Clasificación AMS: 91B30, 62P05.

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo centramos nuestro análisis en la introducción de una nueva estrategia de reaseguro, a la que denominamos estrategia de reaseguro umbral. El reaseguro es una de las herramientas de gestión de riesgos más importante para cualquier tipo de asegurador.

La nueva estrategia de reaseguro umbral que proponemos en este artículo permite al gestor de carteras de seguros no vida optar por una nueva alternativa a la hora de decidir qué parte del riesgo asumirá y qué parte del riesgo cederá.

El reaseguro hace referencia al seguro suscrito por un asegurador para protegerse de determinados riesgos de las pólizas de seguro que ha emitido. A cambio de la cesión de estos riesgos, el reasegurador recibe del asegurador directo (cedente) una prima de reaseguro.

Dos de los principales objetivos por los cuales el asegurador suscribe un reaseguro son (IAA (2004)):

- Mitigar el riesgo, es decir, limitar los efectos de siniestros grandes o catastróficos, o bien limitar la cuantía total de los siniestros asumidos.
- Cumplir con objetivos estratégicos y financieros, principalmente el de incrementar la capacidad de negocio asumido.

Evidentemente, en ambos casos el reaseguro se introduce como un elemento fundamental en la gestión de riesgos para garantizar la estabilidad y la solvencia del asegurador (Nieto et al. (1993)).

En el sector reasegurador en España se aprecia una tendencia positiva desde el ejercicio 2002. En el ejercicio 2006 el volumen de primas cedidas en reaseguro fue de 3.340 millones de euros. Teniendo en cuenta que las primas imputadas del seguro directo ascendieron a 35.865 millones de euros, el porcentaje de negocio que fue cedido a las reaseguradoras fue de un 7,5%. (Mapfre (2007)).

Nos centramos en analizar el efecto de la introducción de la nueva estrategia de reaseguro que presentamos (estrategia de reaseguro umbral) en la solvencia, medida a través de la probabilidad de supervivencia de la cartera en un horizonte temporal infinito. La metodología que se utiliza es la proporcionada por la teoría clásica del riesgo (ver por ejemplo Gerber (1979), Bühlmann (1970) o Panjer y Willmot (1992)), que analiza la evolución de las reservas en una cartera de seguros no vida. En este contexto, la mayoría de los trabajos se han centrado en el efecto del reaseguro en el coeficiente de ajuste como una herramienta intermedia para el cálculo de la probabilidad de supervivencia (ver Bühlmann (1970) y Centeno (1986 y 2002)).

La estrategia de reaseguro proporcional clásica consiste en la cesión al reasegurador de una proporción fija de la cuantía de los siniestros que ocurren en la cartera de seguros gestionada por el asegurador, y evidentemente también de una proporción fija de las primas. Los modelos a largo plazo, como el planteado en este trabajo, permiten al gestor la toma de decisiones hoy, teniendo en cuenta todo el futuro de la empresa. Por lo tanto, estos modelos permiten controlar la solvencia a largo plazo, ofreciendo una visión más amplia de la estabilidad de la cartera. Si se considera un horizonte temporal infinito, el reaseguro proporcional implica que la proporción cedida es siempre la misma independientemente del nivel de las reservas del asegurador. Esta hipótesis se adapta escasamente a la realidad de la gestión del reaseguro. Parece lógico que la proporción cedida en reaseguro esté relacionada con las reservas de que dispone en cada momento el asegurador, y en concreto, que si las reservas superan un determinado nivel de seguridad el gestor considere que no es necesario reasegurar. El modelo de reaseguro umbral presentado en este artículo, representa una mejora de los modelos a largo plazo en el sentido expresado. Es decir, permite al gestor calcular, en el momento inicial, el efecto de una política de reaseguro dinámica dependiente del nivel de las reservas.

Después de esta introducción, el trabajo se estructura de la siguiente forma. En el apartado 2, recogemos los elementos básicos del modelo clásico de la teoría del riesgo que analiza la evolución de las reservas en una cartera de seguros no vida. Modificamos éste modelo con la introducción de un nuevo tipo de reaseguro al que denominamos reaseguro proporcional de umbral.

En el apartado 3, presentamos el teorema que nos permite calcular la probabilidad de supervivencia con este nuevo tipo de reaseguro y determinamos las expresiones para el caso concreto en que la cuantía individual de los siniestros se distribuye según una exponencial.

En el apartado 4, comparamos los efectos de la estrategia de reaseguro umbral con los de otras estrategias de reaseguro. Finalmente, presentamos las conclusiones y futuras ampliaciones derivadas de este trabajo.

2. REASEGURO PROPORCIONAL DE UMBRAL

En el modelo clásico de la teoría del riesgo, el nivel de las reservas $R(t)$ en un momento determinado $t \in [0,\infty)$ se define como $R(t) = u + ct - S(t)$, con $u = R(0)$ siendo el nivel inicial de las reservas, $S(t)$ la siniestralidad agregada hasta el momento *t*, y *c* la intensidad de prima recibida.

$S(t)$ es un proceso de Poisson compuesto,

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i,$$

donde $N(t)$, es el número de siniestros ocurridos hasta el momento *t*, que sigue un proceso de Poisson con parámetro λ, y Z_i es la cuantía del i-ésimo siniestro con función de densidad $f(z)$. Las cuantías de los siniestros son idénticas e independientemente distribuidas, e independientes del número de siniestros.

La intensidad de prima, *c*, es proporcional al número medio de siniestros, λ, y a la media de la cuantía de un siniestro, $E[Z]$. Es decir, $c = \lambda E[Z](1+\rho)$, donde ρ, denominado recargo de seguridad, es una constante positiva (condición "net profit").

En este modelo los tiempos de interocurrencia entre dos siniestros consecutivos, $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ son una secuencia de variables aleatorias idéntica e independientemente distribuidas, que siguen una distribución exponencial de media $1/\lambda$.

El momento de ruina, definido como el primer momento en el que las reservas toman niveles negativos, se denota como $T = \min\{t : R(t) < 0\}$, con $T = \infty$ si $R(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$.

La probabilidad de ruina última es,

$$\psi(u) = P[T < \infty / R(0) = u].$$

Por tanto, $\psi(u)$ indica la probabilidad de que las reservas pasen a ser negativas, es decir, la probabilidad de que la cartera deje de tener capacidad de hacer frente a los pagos por ocurrencia de siniestros.

La probabilidad de supervivencia, $\varphi(u)$, se define como la complementaria de la probabilidad de ruina, es decir,

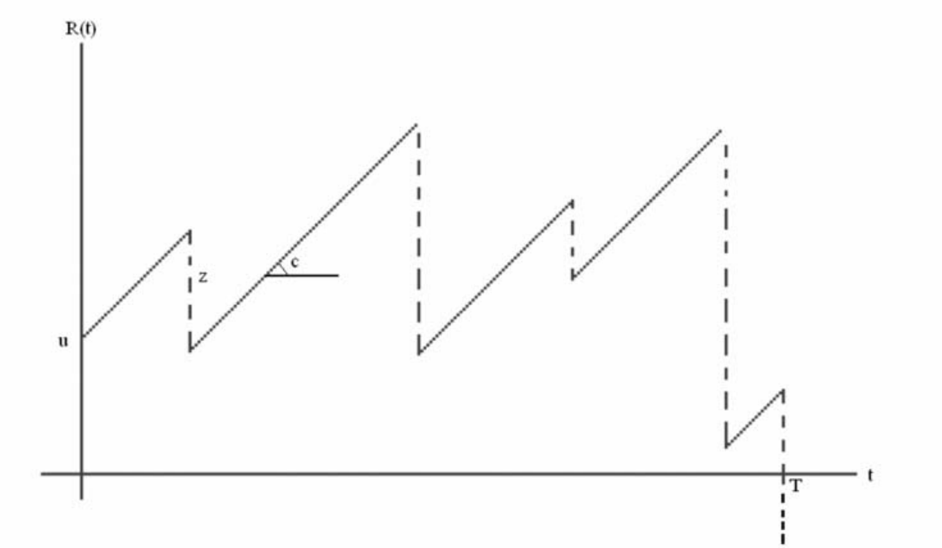
$$\varphi(u) = 1 - \psi(u).$$

Es precisamente esta magnitud la que analizamos en este trabajo como indicador de la solvencia de la cartera.

La representación gráfica de este modelo se recoge en la Figura 1.

Figura 1

TRAYECTORIA DE LAS RESERVAS $R(t)$.



En este artículo, presentamos una nueva estrategia de reaseguro que podemos considerar dinámica, ya que actúa de forma diferente en función del nivel de las reservas. La denominamos "estrategia de reaseguro umbral", ya que encontramos dos tramos diferenciados en función de un umbral b:

- Primer tramo para $0 \le u < b$: La entidad aseguradora decide aplicar un reaseguro proporcional siempre que su nivel de reservas es inferior a un nivel predeterminado al que denominamos b. En este tramo, el asegurador (al que se denomina cedente) asume únicamente un porcentaje *k* de la cuantía de los siniestros, al que se denomina nivel de retención, y el reasegurador se hará cargo del $(1-k)$ restante.

Así, la siniestralidad agregada esperada asumida por el asegurador es $k\lambda E[Z]$ y la siniestralidad agregada esperada asumida por el reasegurador es $(1-k)\lambda E[Z]$.

De igual forma que se cede la obligación de pagos de una parte del siniestro, también se cede a la reaseguradora una parte de la prima. Denominamos c' a la prima que retiene el asegurador.

Tanto asegurador como reasegurador deben incluir un recargo de seguridad positivo en sus primas. Llamamos ρ al recargo de seguridad que cobra el asegurador al asegurado, y ρ_R al recargo de seguridad que cobra el reasegurador al asegurador.

Así, la prima retenida por el asegurador, c', dependerá de dicho recargo ρ_R y de la proporción *k* de la cartera retenida,

$$c' = c - (1-k)(1+\rho_R)\lambda E[Z] = \lambda E[Z](1+\rho) - (1-k)(1+\rho_R)\lambda E[Z] . \qquad [1]$$

Al mismo tiempo, podemos calcular el nuevo recargo de seguridad real para el asegurador, que denominamos ρ_N, a partir de

$$c = k\lambda E[Z](1+\rho_N) .$$

Este nuevo recargo de seguridad, que depende únicamente de ρ, ρ_R y k*,* puede calcularse fácilmente a partir de la expresión anterior y de [1] siendo,

$$\rho_N = \rho_R - \frac{\rho_R - \rho}{k}, \ \forall k > 0 .$$

Como el asegurador debe mantener la condición de "net profit" en su cartera retenida, no puede tener una prima neta inferior a la siniestralidad esperada asumida, por tanto $\rho_N > 0$. De esta condición, obtenemos un límite inferior para la proporción de negocio retenida,

$$1 \geq k > \mathrm{Max}\left\{0, \frac{\rho_R - \rho}{\rho_R}\right\} \text{con } \ \rho > 0, \ \rho_R > 0 . \qquad [2]$$

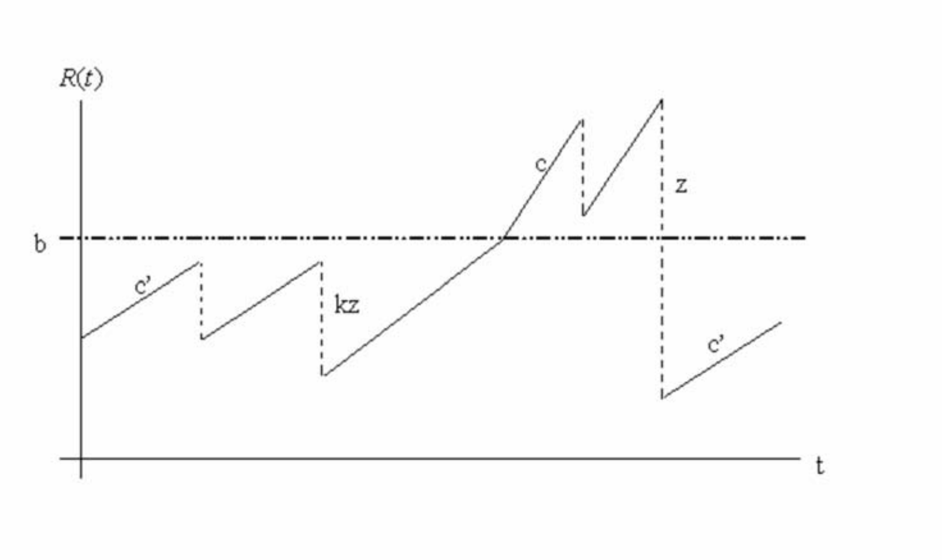
Si $\rho = \rho_R$, la prima total pagada por el asegurado, c, se reparte entre el asegurador y el reasegurador en la misma proporción k, por tanto $c' = kc$, $\rho_N = \rho$ y $1 \geq k > 0$.

• Segundo tramo para $u \geq b$: Cuando las reservas superan el nivel *b,* el asegurador considera que ya no es necesario ceder una parte de los siniestros y de las primas, puesto que la cartera ya ha alcanzado un nivel de reservas suficientes que le asegura cierta estabilidad y seguridad.

Gráficamente, la idea de esta estrategia de reaseguro umbral se recoge en la Figura 2.

Figura 2

TRAYECTORIA DE LAS RESERVAS, $R(t)$, EN UNA CARTERA CON ESTRATEGIA DE REASEGURO UMBRAL.



3. OBTENCIÓN DE LA PROBABILIDAD DE SUPERVIVENCIA

En este apartado, en primer lugar, calculamos la ecuación íntegro-diferencial que cumple la probabilidad de supervivencia en un modelo modificado con una estrategia de reaseguro umbral. Posteriormente, obtenemos la expresión de la probabilidad de supervivencia si la cuantía de un siniestro sigue una distribución exponencial.

En la estrategia de reaseguro umbral definida en el apartado 2, la probabilidad de supervivencia como función de las reservas iniciales u, queda definida como una función a tramos.

$$\varphi_k(u) = \begin{cases} \varphi_{k1}(u) & 0 \le u < b \\ \varphi_{k2}(u) & u \ge b \end{cases}.$$

En el siguiente Teorema obtenemos la ecuación íntegro-diferencial para la probabilidad de supervivencia.

Teorema 1: La probabilidad de supervivencia $\varphi_k(u)$ cumple la siguiente ecuación íntegro-diferencial

$$\varphi'_k(u) = \begin{cases} \varphi'_{k1}(u) & 0 \le u < b \\ \varphi'_{k2}(u) & u \ge b \end{cases},$$

donde

$$\begin{aligned} \varphi'_{k1}(u) &= \frac{\lambda}{c'}\varphi_{k1}(u) - \frac{\lambda}{c'}\int_0^{\frac{u}{k}} \varphi_{k1}(u - zk)\, f(z)dz, \quad 0 \le u < b \\ \varphi'_{k2}(u) &= \frac{\lambda}{c}\varphi_{k2}(u) - \frac{\lambda}{c}\left[\int_0^{u-b} \varphi_{k2}(u - z)\, f(z)dz + \int_{u-b}^{u} \varphi_{k1}(u - z)\, f(z)dz\right], \; u \ge b. \end{aligned} \qquad [3]$$

En aras de una mayor concisión, la demostración al Teorema 1 se encuentra en el **Anexo I**.

Si la cuantía individual de un siniestro se distribuye según una exponencial unitaria, con $f(z) = e^{-z}$, las expresiones explícitas para la probabilidad de supervivencia son,

$$\varphi_k(u) = \begin{cases} \varphi_{k1}(u) = C_2\left[e^{-\frac{u\rho_N}{(1+\rho_N)k}} - (1+\rho_N)\right], 0 \le u < b \\ \varphi_{k2}(u) = 1 + C_4 e^{-\frac{u\rho}{(1+\rho)}} \qquad\qquad , u \ge b \end{cases} \qquad [4]$$

siendo

$$C_2 = \frac{\rho}{e^{-hb}\left(\rho - \frac{h}{1-h}\right) - e^{-b}\left(\rho_N - \frac{h}{1-h}\right) - \rho(1+\rho_N)},$$

$$C_4 = \frac{\frac{h}{1-h}e^{-b\left(h - \frac{\rho}{1+\rho}\right)} + \frac{\rho}{1+\rho}\left(\rho_N + \rho(1+\rho_N) - \frac{h+\rho}{1-h}\right)e^{-\frac{1}{1+\rho}b}}{e^{-hb}\left(\rho - \frac{h}{1-h}\right) - e^{-b}\left(\rho_N - \frac{h}{1-h}\right) - \rho(1+\rho_N)}.$$

Los detalles de la obtención de [4] se encuentran en el **Anexo II**.

Es interesante observar como, a partir de este resultado obtenido para la probabilidad de supervivencia en un modelo donde hemos introducido la estrategia de reaseguro umbral, es posible obtener las soluciones del modelo sin ningún tipo de reaseguro y el modelo donde, independientemente del nivel de las reservas, se aplica siempre un reaseguro proporcional. Así, podemos analizar los siguientes casos:

— Para un porcentaje de retención $k = 1$, el asegurador asume todo el riesgo y no cede nada. Por tanto, estamos eliminando el reaseguro. En este caso, evidentemente $\rho_N = \rho$, y $C_2 = C_4 = -\frac{1}{1+\rho}$, obteniéndose la expresión para la probabilidad de supervivencia en un modelo sin reaseguro (Panjer y Willmot (1992)), es decir

$$\varphi_k(u) = 1 - \frac{1}{1+\rho} e^{-\frac{\rho}{(1+\rho)}u}.$$

— Para $b \to \infty$ reconvertimos el modelo con reaseguro umbral en un modelo donde se aplica el reaseguro proporcional para cualquier nivel de las reservas. En este caso, $\lim_{b\to\infty} C_2 = -\frac{1}{1+\rho_N}$, y la probabilidad de supervivencia con estrategia de reaseguro umbral se convierte en la probabilidad de supervivencia con reaseguro proporcional (Castañer et al. (2007)),

$$\lim_{b\to\infty} \varphi_{k1}(u) = 1 - \frac{1}{1+\rho_N} e^{-\frac{\rho_N}{(1+\rho_N)k}u}, u \geq 0.$$

4. ANÁLISIS NUMÉRICO

A continuación calculamos la probabilidad de supervivencia con una estrategia de reaseguro umbral, siendo el porcentaje de retención, *k,* la variable de decisión del gestor, y comparamos dicha probabilidad de supervivencia con la que se obtiene sin reaseguro y con un reaseguro proporcional siempre.

Todos los cálculos se realizan para los siguientes datos: $z_i \sim \text{Exp}(1)$, $\lambda = 1$, $u = 5$, y $b = 10$. Aunque los análisis presentados en este apartado se han realizado para unos datos concretos, sus conclusiones son válidas para el resto de valores posibles de los parámetros y variables que intervienen.

Realizamos el estudio para dos casos diferentes: el **Caso 1**, en el que $\rho = \rho_R$, y el **Caso 2** en el que $\rho < \rho_R$:

Caso 1

Consideramos un recargo de seguridad del asegurador, *p*, coincidente con el recargo de seguridad del reasegurador ρ_R , $\rho = \rho_R = \rho_N = 0,2$.

La probabilidad de supervivencia en el reaseguro umbral como función del porcentaje de retención k a partir de [4] es

$$\varphi_{k1}(5) = \frac{0,2e^{-\frac{1}{1,2k}} - 0,24}{\left(\frac{0,24k - 0,24}{1,2k - 0,2}\right)\left(e^{-\frac{1,66}{k}} - e^{-10}\right) - 0,24},$$

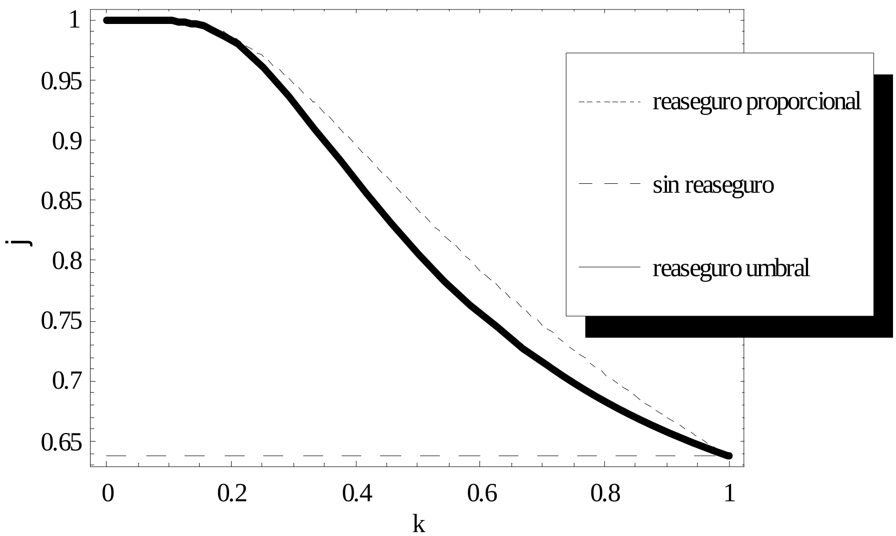
y la probabilidad de supervivencia para el reaseguro proporcional, a la que denominamos $\varphi_{RP}(u)$, es

$$\varphi_{RP}(5) = 1 - \frac{1}{1,2}e^{-\frac{1}{1,2k}}.$$

Los valores para diferentes k se recogen en el Gráfico 1,

Gráfico 1

PROBABILIDAD DE SUPERVIVENCIA EN FUNCIÓN DE *k* PARA $\rho = \rho_R$



Podemos observar en los resultados que, tanto si se opta por un reaseguro proporcional, como si la estrategia tomada es un reaseguro umbral, cuanto mayor es el nivel de retención k, menor es la probabilidad de supervivencia. Evidentemente, la probabilidad de supervivencia sin reaseguro no depende de k.

Para un determinado nivel de retención, la probabilidad de supervivencia es superior con el reaseguro proporcional que con el reaseguro umbral, siendo ambas superiores a las del modelo sin reaseguro.

Por tanto, si los recargos del asegurador y del reasegurador coinciden, tomando como factor de decisión la probabilidad de supervivencia, siempre es preferible reasegurar a no reasegurar. En el límite, la estrategia óptima consiste en no retener nada y ceder en reaseguro el 100%. Obviamente, se trata de una situación extrema que no es una opción aceptable para el gestor. Dickson y Waters (1996), ya contemplaron esta situación para el reaseguro proporcional.

Caso 2

Si el recargo del reasegurador es superior al del asegurador, tal y como hemos comentado en la expresión [2], el conjunto de valores factibles de k se reduce como resultado de imponer la condición "net profit". Así, para un recargo del asegurador

$\rho = 0,2$ y un recargo del reasegurador $\rho_R = 0,3$ sabemos que $k > 1 - \dfrac{\rho}{\rho_R}$, por tanto

$k > 0,\widehat{3}$.

La probabilidad de supervivencia es

$$\varphi_{k1}(5) = \frac{0,2e^{-\frac{1,5k-0,5}{1,3k^2-0,1k}} - 0,26 + \dfrac{0,02}{k}}{\left(\dfrac{0,26k^2 - 0,38k + 0,12}{1,3k^2 - 0,4k + 0,1}\right)e^{-\frac{3k-1}{1,3k^2-0,1k}} - \left(\dfrac{0,39k^3 - 0,55k^2 + 0,17k - 0,001}{1,3k^3 - 0,4k^2 + 0,1k}\right)e^{-10} - \dfrac{0,26k - 0,02}{k}}$$

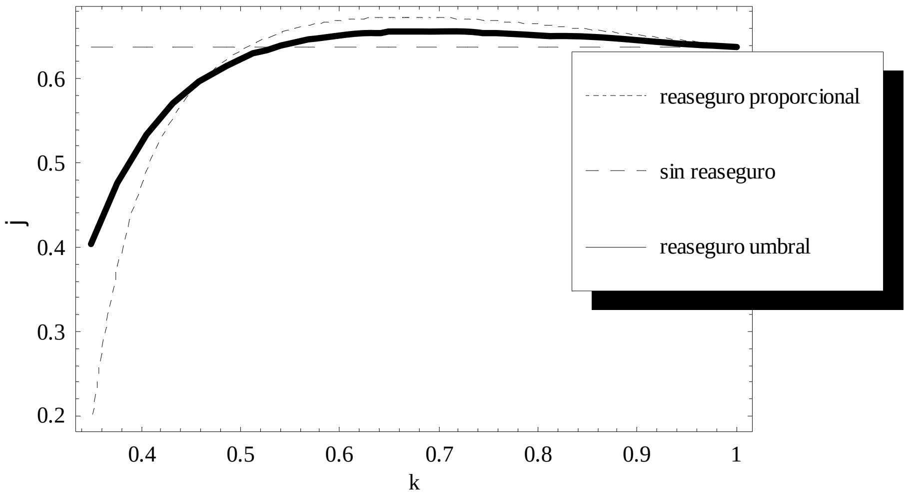
y la probabilidad de supervivencia para el reaseguro proporcional es

$$\varphi_{RP}(5) = 1 - \frac{k}{1,3k - 0,1} e^{-\frac{1,5k-0,5}{1,3k^2-0,1k}}.$$

Los resultados obtenidos para diferentes valores de k se recogen en el Gráfico 2,

Gráfico 2

PROBABILIDAD DE SUPERVIVENCIA EN FUNCIÓN DE *k* PARA $\rho < \rho_R$.



En este caso, a diferencia del **Caso 1**, la probabilidad de supervivencia con la estrategia de reaseguro umbral (φ_k) tiene un primer tramo creciente respecto a k, alcanzándose un máximo para un determinado valor de k, siendo decreciente a partir de este punto. El mismo comportamiento podemos observar en la probabilidad de supervivencia con reaseguro proporcional siempre (φ_{RP}). En la siguiente Tabla 3 recogemos los porcentajes de retención que maximizan φ_k y φ_{RP} ,

Tabla 3

PORCENTAJES DE RETENCIÓN QUE MAXIMIZAN φ_k Y φ_{RP} .

	k	*Probabilidad de supervivencia*
Reaseguro de umbral	0,6889	0,6558
Reaseguro proporcional	0,6676	0,6730

Por tanto, teniendo en cuenta que la probabilidad de supervivencia sin reaseguro (φ) es de 0,6378, en este caso la estrategia óptima, utilizando como criterio el de máxima probabilidad de supervivencia, es optar por un reaseguro proporcional con un porcentaje de retención del 66,76%.

Podemos observar que φ_k y φ_{RP} tienen un único punto de corte, al que denominamos k_{ind}, para el cual ambas estrategias de reaseguro son indiferentes. En nuestro ejemplo numérico, $k_{ind} = 0,4615$, obteniéndose $\varphi_k = \varphi_{RP} = 0,5988$. Para $k < k_{ind}$, entonces $\varphi_k > \varphi_{RP}$, por tanto la estrategia preferida es la de reaseguro umbral. Para $k > k_{ind}$, tenemos que $\varphi_k < \varphi_{RP}$, por lo cual el gestor debería optar por una estrategia de reaseguro proporcional.

Existen también puntos de indiferencia, los que nos proporcionan la misma probabilidad de supervivencia, entre cada una de las estrategias de reaseguro y la estrategia de sin reaseguro. El valor de k para el que $\varphi = \varphi_{RP}$ es inferior al que hace que $\varphi = \varphi_k$, debido al comportamiento de las funciones comentado en los párrafos anteriores.

En nuestro ejemplo, son estrategias indiferentes para el asegurador las siguientes:

- no reasegurar,
- reaseguro umbral con $k = 0,5356$,
- reaseguro proporcional con $k = 0,5063$,

obteniéndose en los tres casos una probabilidad de supervivencia de 0,6378.

Por tanto, si el gestor decide optar por una estrategia de reaseguro, tiene que retener un porcentaje mínimo para no disminuir su probabilidad de supervivencia. Este porcentaje mínimo de retención es diferente según la estrategia de reaseguro elegida, proporcional o umbral.

CONCLUSIONES

En la gestión de las carteras de seguros no vida una de las principales herramientas para el control de la solvencia es la introducción de estrategias de reaseguro.

La estrategia de reaseguro umbral presentada en este trabajo, ofrece una nueva posibilidad al gestor a la hora de decidir el riesgo que quiere asumir, proporcionándole dos herramientas de decisión: el nivel del umbral a partir del cual no se reasegura, y el porcentaje de retención en el tramo con reaseguro.

La probabilidad de supervivencia representa una medida del efecto del reaseguro umbral en la solvencia de la cartera y es utilizada en el trabajo como criterio de elección entre estrategias. En concreto, la comparación de la estrategia de reaseguro umbral con la opción de no reasegurar y la opción de aplicar un reaseguro proporcional, nos ha permitido encontrar porcentajes de retención equivalentes desde el punto de vista de la solvencia.

El modelo presentado en este trabajo permite ampliaciones y extensiones que se llevarán a cabo en futuros trabajos. Así, se pueden considerar procesos de renovación más generales que el proceso de Poisson, y criterios adicionales de selección de estrategias como la introducción de barreras de dividendos.

ANEXO I

Cuando $0 \leq u < b$, siendo $t^* = \dfrac{b-u}{c'}$

$$\begin{aligned}\varphi_{k1}(u) = & \int_0^{t^*} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{\frac{u+c't}{k}} \varphi_{k1}(u + c't - zk)\, dF(z)\, dt + \\ & \int_{t^*}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{c(t-t^*)} \varphi_{k2}(b + c(t - t^*) - z)\, dF(z)\, dt + \\ & \int_{t^*}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_{c(t-t^*)}^{b+c(t-t^*)} \varphi_{k1}(b + c(t - t^*) - z)\, dF(z)\, dt\ .\end{aligned} \qquad [5]$$

Haciendo el cambio de variable $u + c't = s$ en el primer sumando de [5] y $b + c(t - t^*) = s$ en el segundo y tercer sumando de [5] llegamos a,

$$\begin{aligned}\varphi_{k1}(u) = & \frac{\lambda}{c'} \int_u^b e^{-\lambda \frac{s-u}{c'}} \int_0^{\frac{s}{k}} \varphi_{k1}(s - zk)\, dF(z)\, ds + \\ & \frac{\lambda}{c} e^{-\lambda t^*} \int_b^{\infty} e^{-\lambda \frac{s-b}{c}} \int_0^{s-b} \varphi_{k2}(s - z)\, dF(z)\, ds + \\ & \frac{\lambda}{c} e^{-\lambda t^*} \int_b^{\infty} \lambda e^{-\lambda \frac{s-b}{c}} \int_{s-b}^{s} \varphi_{k1}(s - z)\, dF(z)\, ds\ .\end{aligned} \qquad [6]$$

Derivando [6] respecto a u obtenemos

$$\begin{aligned}\varphi'_{k1}(u) = & -\frac{\lambda}{c'} \int_0^{\frac{u}{k}} \varphi_{k1}(s - zk)\, dF(z) + \\ & \int_u^b \left(\frac{\lambda}{c'}\right)^2 e^{-\lambda \frac{s-u}{c'}} \int_0^{\frac{s}{k}} \varphi_{k1}(s - zk)\, dF(z)\, ds + \\ & \frac{\lambda^2}{c} \frac{1}{c'} e^{-\lambda t^*} \int_b^{\infty} \lambda e^{-\frac{\lambda}{c'}(s-b)} \int_0^{s-b} \varphi_{k2}(s - z)\, dF(z)\, ds + \\ & \frac{\lambda^2}{c} \frac{1}{c'} e^{-\lambda t^*} \int_b^{\infty} \lambda e^{-\frac{\lambda}{c'}(s-b)} \int_{s-b}^{s} \varphi_{k1}(s - z)\, dF(z)\, ds\ .\end{aligned} \qquad [7]$$

Y teniendo en cuenta [6] podemos escribir [7] como

$$\varphi'_{k1}(u) = \frac{\lambda}{c'}\varphi_{k1}(u) - \frac{\lambda}{c'}\int_0^{\frac{u}{k}} \varphi_{k1}(u - zk)\, f(z)dz, \quad 0 \leq u < b$$

obteniéndose el primer tramo del **Teorema 1**.

De forma similar, para $u \geq b$,

$$\varphi_{k2}(u) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t}\left[\int_0^{u+ct-b} \varphi_{k2}(u + ct - z)dF(z) + \int_{u+ct-b}^{u+ct} \varphi_{k1}(u + ct - z)dF(z)\right] dt. \qquad [8]$$

Haciendo el cambio de variable $u + ct = s$ en [8] llegamos a,

$$\varphi_{k2}(u) = \frac{\lambda}{c}\int_u^{\infty} e^{-\lambda\frac{s-u}{c}}\left[\int_0^{s-b} \varphi_{k2}(s - z)dF(z) + \int_{s-b}^{s} \varphi_{k1}(s - z)dF(z)\right] ds, \qquad [9]$$

y derivando [9] respecto a u obtenemos

$$\begin{aligned} \varphi'_{k2}(u) = -\frac{\lambda}{c}&\int_0^{u-b} \varphi_{k2}(u - z)dF(z) + \\ &\int_u^{\infty}\left(\frac{\lambda}{c}\right)^2 e^{-\lambda\frac{s-u}{c}}\int_0^{s-b} \varphi_{k2}(s - z)dF(z)\, ds - \\ &\frac{\lambda}{c}\int_{u-b}^{u} \varphi_{k1}(u - z)dF(z) + \\ &\int_u^{\infty}\left(\frac{\lambda}{c}\right)^2 e^{-\lambda\frac{s-u}{c}}\int_{s-b}^{s} \varphi_{k1}(s - z)dF(z)\, ds. \end{aligned} \qquad [10]$$

Así, a partir de [9] y [10] podemos escribir,

$$\varphi'_{k2}(u) = \frac{\lambda}{c}\varphi_{k2}(u) - \frac{\lambda}{c}\left[\int_0^{u-b} \varphi_{k2}(u - z)\, f(z)dz + \int_{u-b}^{u} \varphi_{k1}(u - z)\, f(z)dz\right],$$

obteniéndose el segundo tramo del **Teorema 1**.

ANEXO II

Sustituyendo en [3] la función de densidad $f(z)=e^{-z}$ obtenemos,

$$\begin{aligned}
&\varphi'_{k1}(u)=\frac{\lambda}{c'}\varphi_{k1}(u)-\frac{\lambda}{c'}\int_0^{\frac{u}{k}}\varphi_{k1}(u-zk)\,e^{-z}dz, \quad 0\le u<b \\
&\varphi'_{k2}(u)=\frac{\lambda}{c}\varphi_{k2}(u)-\frac{\lambda}{c}\left[\int_0^{u-b}\varphi_{k2}(u-z)\,e^{-z}dz+\int_{u-b}^{u}\varphi_{k1}(u-z)\,e^{-z}dz\right],\ u\ge b.
\end{aligned} \qquad [11]$$

Derivando [11] respecto a u obtenemos,

$$\begin{aligned}
&\varphi''_{k1}(u)=\frac{\lambda}{c'}\varphi'_{k1}(u)-\frac{1}{k}\left[\frac{\lambda}{c'}\varphi_{k1}(u)-\frac{\lambda}{c'}\int_0^{\frac{u}{k}}\varphi_{k1}(u-zk)\,e^{-z}dz\right],0\le u<b \\
&\varphi''_{k2}(u)=\frac{\lambda}{c}\varphi'_{k2}(u)-\frac{\lambda}{c}\varphi_{k2}(u)+\frac{\lambda}{c}\int_0^{u-b}\varphi_{k2}(u-z)\,e^{-z}dz+ \\
&\qquad \frac{\lambda}{c}\int_{u-b}^{u}\varphi_{k1}(u-z)\,e^{-z}dz,\ u\ge b
\end{aligned} \qquad [12]$$

Así, podemos observar que en [12] aparecen las expresiones para $\varphi'_{k1}(u)$ y $\varphi'_{k2}(u)$ halladas en [11]. Por tanto, sustituyendo [11] en [12] obtenemos,

$$\begin{aligned}
&\varphi''_{k1}(u)-\left(\frac{\lambda}{c'}-\frac{1}{k}\right)\varphi'_{k1}(u)=0, \quad 0\le u<b \\
&\varphi''_{k2}(u)-\left(\frac{\lambda}{c}-1\right)\varphi'_{k2}(u)=0, \quad u\ge b.
\end{aligned} \qquad [13]$$

Con esta metodología de derivación sucesiva, hemos reconvertido las ecuaciones íntegro-diferenciales iniciales en un problema de resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales.

Las ecuaciones características de estas dos ecuaciones diferenciales son, respectivamente

$$\begin{aligned}
&c'kr^2+(c'-k\lambda)r=0, \quad 0\le u<b \\
&cr^2+(c-\lambda)r=0, \quad u\ge b
\end{aligned}$$

siendo las raíces,

$$r_1 = 0 \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{\lambda}{c'} - \frac{1}{k} = -\frac{\rho_N}{(1+\rho_N)k}, \quad 0 \le u < b$$

$$r_3 = 0 \quad \text{y} \quad r_4 = \frac{\lambda}{c} - 1 = -\frac{\rho}{(1+\rho)}, \qquad u \ge b$$

por tanto, la solución es

$$\varphi_k(u) = \begin{cases} \varphi_{k1}(u) = C_1 + C_2 e^{-\frac{\rho_N}{(1+\rho_N)k}u}, & 0 \le u < b \\ \varphi_{k2}(u) = C_3 + C_4 e^{-\frac{\rho}{(1+\rho)}u} & ,u \ge b. \end{cases} \qquad [14]$$

Podemos destacar que $C_i, i = 1,...,4$ no dependen de u, pero si son funciones de b.

Los valores de $C_i, i = 1,...,4$, se encuentran a partir de las siguientes cuatro ecuaciones:

— Considerando que $\lim_{u \to \infty} \varphi_k(u) = 1$, debido a que cuando las reservas iniciales tienden a infinito la probabilidad de supervivencia es uno, obtenemos que $C_3 = 1$.

— A partir de [11], para $u = 0$,

$$\varphi'_{k1}(0) = \frac{\lambda}{c'} \varphi_{k1}(0),$$

y a partir de [14], obtenemos $C_1 = -C_2(1+\rho_N)$.

— Teniendo en cuenta que $\varphi_k(u)$ es continua en el punto $u = b$, es decir $\varphi_{k1}(b) = \varphi_{k2}(b)$, obtenemos $C_1 + C_2 e^{-\frac{\rho_N}{(1+\rho_N)k}b} = C_3 + C_4 e^{-\frac{\rho}{(1+\rho)}b}$.

— A partir de [11] para $u = b$,

$$\varphi'_{k2}(b) = \frac{\lambda}{c} \varphi_{k2}(b) - \frac{\lambda}{c} \int_0^b \varphi_{k1}(b-z)\, e^{-z} dz. \qquad [15]$$

Y sustituyendo [14] en [15],

$$-C_4 e^{-\frac{\rho}{(1+\rho)}b} = \frac{1}{(1+\rho)}\left[1 - C_2\left(\frac{1}{1-h}\left(e^{-hb} - e^{-b}\right) - (1+\rho_N)\left(1-e^{-b}\right)\right)\right],$$

siendo $h = \dfrac{\rho_N}{(1+\rho_N)k}$.

REFERENCIAS

BÜHLMANN, H. (1970), «Mathematical Methods in Risk Theory». Springer Verlag, New York.

CASTAÑER, A., CLARAMUNT, M.M. Y MÁRMOL, M. (2007), «Influencia del Reaseguro Proporcional en las Medidas de Solvencia del Asegurador», en el libro Investigaciones en Seguros y Gestión de Riesgos: RIESGO 2007, José María Sarabia y Montserrat Guillén (Editores), Ediciones TGD, 87-101.

CENTENO, L. (1986), «Measuring the effects of reinsurance by the adjustment coefficient». Insurance: *Mathematics and Economics*, 5,169-182.

CENTENO, L. (2002), «Measuring the effects of reinsurance by the adjustment coefficient in the Sparre Anderson model». Insurance: *Mathematics and Economics*, 30, 37-49.

DICKSON, D.C.M. Y WATERS, H.R. (1996), «Reinsurance and ruin». Insurance: *Mathematics and Economics*, 19, 61-80 .

GERBER, H. (1979), «An Introduction to Mathematical Risk Theory». Ed. Richard D. Irwin, Illinois.

IAA (2004), «A global framework for insurer solvency assessment». Research Report of the Insurer Solvency Assessment WP of the IAA, disponible en www.actuaries.org.

MAPFRE (2007), «El mercado español de seguros en 2006». Informe de la fundación Mapfre, disponible en www.mapfre.com.

NIETO DE ALBA, U. Y VEGAS ASENSIO, J. (1993), «Matemática actuarial». Editorial Mapfre, Madrid.

PANJER, H. Y WILLMOT, G. (1992), «Insurance Risk Models». Society of Actuaries.

THE THRESHOLD REINSURANCE STRATEGY AND THE SURVIVAL PROBABILITY AS STRATEGY SELECTION CRITERION.

ABSTRACT

In this paper we present a new reinsurance strategy, called threshold reinsurance strategy, that has a different behaviour depending on the reserves. Whenever the reserves are less than a certain level, the portfolio manager decides to apply a proportional reinsurance. If the reserves are greater than b, it is considered that the level of solvency is enough, and then the decision is not to cede any risk.

The study of the effect of the introduction of the threshold reinsurance on the survival probability, and the comparison with the proportional reinsurance and the option of not reinsuring, allows us to find equivalent strategies of reinsurance from the solvency point of view.

Key words: risk theory, threshold reinsurance, proportional reinsurance, survival probability.

Classification AMS: 91B30, 62P05.