

# Análisis de la Teoría del Riesgo: La transformada del Momento de Ruina

Anna Castañer i Garriga

Facultat de Ciències Econòmiques i Empresariales

Universitat de Barcelona

## Resumen

En este trabajo se analiza el momento de ruina en el modelo clásico de teoría del riesgo modificado con la introducción de una barrera constante. Mediante el uso de transformadas de Laplace se obtiene la función que nos permite hallar los diferentes momentos de esta variable. Para diferentes cuantías de los siniestros (distribución exponencial unitaria, exponencial  $\alpha$  y para una Erlang  $(2, \alpha)$ ) se derivan los momentos ordinarios y centrales presentando resultados numéricos.

**Palabras claves:** Teoría del riesgo, seguros no vida, solvencia, transformadas de Laplace.

## 1. Introducción

El presente trabajo se enmarca dentro del ámbito de solvencia de las entidades aseguradoras no vida. La solvencia del asegurador puede definirse como la capacidad de hacer frente a sus obligaciones de pagar los siniestros presentes y futuros de los asegurados (IAIS 2000).

Podemos entender la solvencia desde dos puntos de vista distintos: la solvencia estática y la solvencia dinámica. La primera de ellas se estudia como la solvencia de balance, es decir, cuando en un momento dado del tiempo el asegurador es capaz de hacer frente a las obligaciones derivadas de su cartera. Para obtener una buena solvencia estática el asegurador tendrá que gestionar una correcta dotación e inversión de las provisiones para riesgos en curso y para prestaciones pendientes. En cuanto al concepto de solvencia dinámica, tenemos que considerar el negocio de la compañía aseguradora como un flujo continuo de ingresos y pagos que va evolucionando con el paso del tiempo bajo la influencia de diversos factores que hacen que la siniestralidad sufra fluctuaciones alrededor de su valor medio. Para poder cubrir estas fluctuaciones es necesario una exigencia de garantías financieras por encima de las provisiones técnicas de primas y de prestaciones. Estas variables de control son fundamentalmente el margen de solvencia y las provisiones para desviaciones de la siniestralidad, por lo que estamos hablando de unas reservas libres que no están atadas a los compromisos previamente contraídos. Por tanto, el concepto de solvencia es muy amplio y se ha de tener en cuenta todos los factores y circunstancias que influyen en ella. Algunos de ellos son endógenos, como el tamaño y composición de la cartera, la selección de riesgos, tarificación, valoración de las reservas, reaseguro, inversiones... Otros son exógenos, como las fluctuaciones del mercado asegurador y financiero, inflación, reglamentaciones, cambios estructurales y normativos en la sociedad y en el medio internacional, el grado de actividad en la economía nacional, etc. Existe gran variedad de métodos para estudiar la solvencia. Según Kastelijn y Remmerswaal (1986), se pueden agrupar en tres grandes grupos: Métodos basados en ratios, métodos que consideran especialmente el riesgo de variación en el coste total agregado y métodos que incluyen análisis de otras fuentes de riesgo, agregando factores como gastos, rendi-

mientos de activos, inflación, ciclos...

Este trabajo se centrará en el estudio de la solvencia desarrollado por la teoría de la Ruina. En las compañías de seguros no vida el principal riesgo a tener en cuenta es la siniestralidad. Ésta puede ser causante de pérdidas inesperadas e incluso producir la ruina. De ahí la importancia de estudiar la variable aleatoria tiempo de ruina, la cual analiza el momento en que una aseguradora se arruinará. Actualmente se está diseñando una metodología de análisis y de cuantificación que permita determinar cuál es el posicionamiento de las aseguradoras frente a los riesgos, y con ello establecer los niveles de recursos propios que necesitan. Se trata del proyecto de Solvencia II, el cual se inició con el objetivo de investigar la necesidad de revisar el actual sistema de solvencia de la UE. Tiene tres objetivos principales denominados los Tres Pilares:

- **Pilar I: Exigencia de Recursos Propios**

Desarrollo y establecimiento de un nuevo sistema que permita determinar los recursos propios mínimos requeridos para cada aseguradora en función de los riesgos asumidos y la gestión que se realice. Los métodos de cálculo tendrán que adaptarse a la evolución de los diferentes riesgos de las entidades.

- **Pilar II: Procesos de Supervisión**

Establecimiento de nuevas competencias y mecanismos de actuación de los supervisores, para poder ser capaz de anticiparse y evitar las posibles situaciones de incremento de los diversos riesgos de las compañías.

- **Pilar III: Disciplina de mercado**

Obtener una mayor transparencia de información de las entidades respecto a su política de gestión de riesgos con objeto de que todos los participantes en el mercado dispongan de información suficiente para su toma de decisiones y mantenimiento del nivel de solvencia.

Como ya se comentó al principio, el principal riesgo a considerar por parte del asegurador no vida es el riesgo de siniestralidad, que se define como el riesgo de que ocurran más

siniestros de los esperados o de que algunos siniestros sean de importe muy superior al esperado de manera que se obtengan pérdidas inesperadas.

La teoría de la ruina se ocupa de las fluctuaciones aleatorias en los resultados financieros del asegurador provocados por las fluctuaciones en el número e importe de los siniestros. El modelo clásico más trabajado hasta ahora es el de modelizar el coste total de los siniestros como un proceso de Poisson Compuesto donde la hipótesis básica es que el número de siniestros sigue un proceso estocástico de Poisson. Actualmente, en la literatura actuarial se están estableciendo procesos alternativos o modificaciones al proceso de Poisson, una de las cuales consiste en perturbar el proceso de Poisson con un proceso de difusión representado por un movimiento Brownian estándar.

El objetivo general del trabajo es analizar la variable momento de ruina en un entidad de seguros no vida, con el enfoque de la teoría de la ruina, y considerando únicamente el riesgo de siniestralidad. En este trabajo nos hemos centrado en el modelo clásico modificado con una barrera constante, y hemos utilizado como instrumento matemático las transformadas de Laplace. Para ello, tendremos que estudiar previamente las propiedades y características de las transformadas, para poder así conseguir expresiones que nos permitan analizar el momento de ruina con este nuevo enfoque. Se realizará el estudio, posteriormente, bajo distintas hipótesis para la distribución de la cuantía del siniestro, estudiando los momentos ordinarios y centrales de nuestra variable aleatoria mediante ejemplos numéricos.

## **2. Fundamentos teóricos**

En Gerber (1979), se define la Teoría del Riesgo como el conjunto de ideas para diseñar, dirigir y regular una empresa de riesgos. Dentro de la teoría del riesgo encontramos en la literatura actuarial dos tipos de teorías del riesgo: Teoría del riesgo individual y teoría del riesgo colectivo.

La Teoría Individual considera a la cartera como una suma de riesgos, de forma que la siniestralidad total viene calculada como la suma de la siniestralidad de cada una de las

pólizas,

$$S = \sum_{i=1}^n X_i,$$

donde  $\left\{ \begin{array}{l} n : \text{número de pólizas de la cartera} \\ X_i : \text{siniestralidad total de la póliza } i\text{-ésima.} \end{array} \right.$

Esta teoría se utiliza básicamente en los seguros de vida en análisis uniperiódicos.

En este trabajo, sin embargo utilizaremos el enfoque de la teoría colectiva del riesgo ya que es la utilizada en los seguros no vida y nos permite hacer un análisis tanto uniperiódico como a largo plazo. Se considera la cartera de riesgos como una corriente de siniestros cuyo volumen depende del número de siniestros y de su cuantía. Ahora la siniestralidad total será el resultado de sumar el importe de todos los siniestros ocurridos. Tendremos que la siniestralidad agregada en un período para una cartera será:

$$S = \sum_{i=1}^N X_i,$$

siendo,  $\left\{ \begin{array}{l} N : \text{número estocástico de siniestros} \\ X_i : \text{cuantía del siniestro } i\text{-ésimo, } i = 1, 2, \dots, N. \\ \text{Considerando que cuando } N = 0, S = 0. \end{array} \right.$

La hipótesis clásica que se asume es que las cuantías,  $X_i$ , son variables idénticas e independientemente distribuidas, e independientes de  $N$ . Debido a la necesidad de analizar periodos de tiempos más largos, se define  $S(t)$  como el proceso estocástico de la siniestralidad agregada, siendo

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

donde  $\left\{ \begin{array}{l} N(t) : \text{proceso que indica el número de siniestros hasta el momento } t \\ S(t) = 0 \text{ si } N(t) = 0. \end{array} \right.$

Podemos ver en la figura 1 una representación de  $S(t)$ , donde en el eje de abcisas está representado el tiempo y en el de ordenadas tenemos la siniestralidad agregada en el intervalo  $(0, t]$ . En cada ocurrencia de siniestro en los momentos  $T_i, i = 1, 2, 3, \dots$  la altura

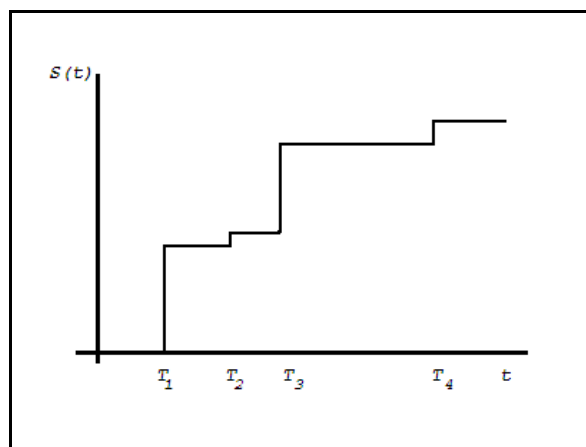


Figura 1: Siniestralidad agregada

del salto representa la cuantía individual de cada uno de ellos. Se trata, por lo tanto, de un proceso estocástico compuesto, ya que tanto el momento de ocurrencia como el número de siniestros son fenómenos aleatorios, siendo la cuantía individual de cada siniestro una variable aleatoria. En particular, si  $N(t)$  es un proceso de Poisson,  $S(t)$  es un proceso de Poisson compuesto. Por tanto, vemos la necesidad de desarrollar modelos con la ayuda de los procesos estocásticos (ver Arnold 1974, Malliaris 1988), y profundizaremos en el proceso de las reservas,  $U(t)$ , considerando que la ruina se produce en el momento en que las reservas sean negativas. El estudio de este proceso se puede realizar según el horizonte temporal, tanto en el caso de tiempo finito como el de tiempo infinito, y también según los puntos que se analicen, en el proceso en campo discreto o en continuo. Este trabajo se hace con horizonte temporal infinito en campo continuo.

## 2.1. Modelo clásico de riesgo

Este modelo tiene por base el proceso de Poisson y lo analiza en tiempo continuo. Previamente, y antes de estudiarlo en detalle, pasamos a presentar unos conceptos importantes sobre procesos estocásticos que nos serán necesarios para el desarrollo posterior<sup>1</sup>.

El proceso de riesgo con aplicación en la actividad de una compañía de seguros se

---

<sup>1</sup>En esta sección, seguimos a Feller (1971), Beard et al. (1990), Asmussen (2000), o Egídio dos Reis (2001).

construye a partir de un proceso de ocurrencia de siniestros que transcurren en tiempo continuo, es decir, un proceso de contagio en tiempo continuo. Entonces el modelo se forma en base a un proceso estocástico con el número de acontecimientos discreto en los enteros no negativos y con parámetro continuo para el tiempo  $t \geq 0$ . Tendremos por tanto el siguiente proceso estocástico:  $\{N(t), t \geq 0\}$ .

**Definición 1** *Proceso de Contagio.* Un proceso estocástico es un proceso de contagio  $\{N(t), t \geq 0\}$ , si  $N(t)$  es el número de acontecimientos u ocurrencias en  $(0, t]$ .

Ejemplos clásicos de este tipo de procesos son los procesos de renovación, y más concretamente, el proceso de Poisson y el cuál es un proceso de renovación en que los tiempos de interocurrencia<sup>2</sup> tienen distribución exponencial.

**Definición 2** *Proceso de Poisson.* Es un tipo de proceso de contagio  $\{N(t), t \geq 0\}$  con  $N(0) = 0$ . Se denomina proceso de Poisson de parámetro  $\lambda$  si se verifican las condiciones:

1.  $\{N(t), t \geq 0\}$  tiene incrementos estacionarios<sup>3</sup> e independientes<sup>4</sup>;
2. Para  $\forall t > 0$ ,  $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$  (se distribuye según una Poisson de media  $\lambda t$ ).

El proceso de Poisson verifica los siguientes axiomas:

**Axioma 1** *El número de acontecimientos en intervalos de tiempo disjuntos son variables aleatorias independientes;*

**Axioma 2** *Para  $\forall t > 0$  y  $h > 0$   $N((t, t+h]) \stackrel{d}{=} N(h)$ , es decir, la distribución del número de ocurrencias en un determinado intervalo de tiempo depende sólo de la amplitud y no de su localización;*

---

<sup>2</sup>Sean  $0 < T_1 < T_2 < T_3 < \dots$  los momentos de ocurrencia, se definen los tiempos de interocurrencia como

$$W_i = T_i - T_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

siendo  $W_1 = T_1$ .

<sup>3</sup>La probabilidad de ocurrencia de un suceso en un intervalo depende sólo de su duración. Si diferentes intervalos coinciden con la misma duración tendrán la misma probabilidad.

<sup>4</sup>La ocurrencia de un suceso no influye en la ocurrencia de sucesos posteriores.

**Axioma 3** Para  $\forall t > 0$ ,  $\Pr[N((t, t + h]) = 1] = \lambda h + o(h)$ , siendo  $h$  un intervalo corto de tiempo;

**Axioma 4** Para  $\forall t > 0$ ,  $\Pr[N((t, t + h]) > 1] = o(h)$ , siendo  $o(h)$  un infinitésimo tal que  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$ ; propiedad que anula la probabilidad de que ocurra más de un suceso en un mismo instante.

**Definición 3** *Proceso de Poisson Compuesto.* Sea un proceso de Poisson  $\{N(t), t \geq 0\}$  y una sucesión de variables aleatorias,  $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ , idénticas e independientemente distribuidas, e independientes de  $N(t)$ ,  $\{S(t), t \geq 0\}$  es un proceso de Poisson compuesto cuando  $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ .

**Definición 4** *Proceso de Renovación.* Un proceso de contagio  $\{N(t), t \geq 0\}$  es un proceso de renovación cuando los tiempos entre ocurrencias sucesivas son variables aleatorias positivas idénticas e independientemente distribuidas.

De esta manera, podemos decir que los procesos de Poisson con parámetro  $\lambda$  son un tipo particular de los procesos de renovación, los tiempos de interocurrencia son efectivamente idénticos e independientemente distribuidos, con distribución exponencial de media  $\frac{1}{\lambda}$ .

### 2.1.1. El proceso de las reservas

El modelo clásico de riesgo para la actividad de una compañía de seguros en tiempo continuo es un proceso estocástico  $\{U(t), t \geq 0\}$ , resultando la ecuación que determina el proceso de reservas:

$$U(t) = u + c \cdot t - S(t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

donde  $U(t)$  es la reserva de riesgo o provisiones de una cartera en el instante  $t$ ,  $S(t)$  la siniestralidad agregada ocurrida en  $(0, t]$ ,  $ct$  las primas recibidas en el mismo periodo, siendo  $c$  una constante que representa la prima por unidad de tiempo, y  $u = U(0)$  es la reserva inicial. Una trayectoria posible del proceso es la representada en la Figura 2. En el modelo no se incluyen elementos como la inflación, rendimientos de la inversión, reparto de dividendos, o gastos de carácter administrativo o de gestión. En el modelo clásico el



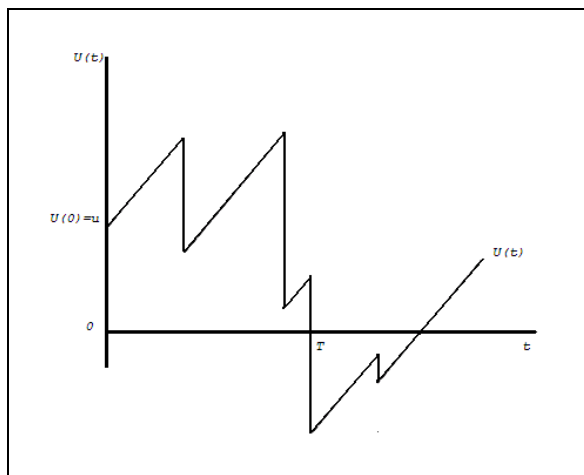


Figura 2: Proceso de las reservas

proceso de ocurrencia de siniestros  $\{N(t), t \geq 0\}$  es un proceso de Poisson de media  $\lambda$ . Resumidamente, consideramos las siguientes definiciones e hipótesis:

- $N(t)$  es el número de siniestros ocurridos en  $(0, t]$ .
- $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$  y  $S(t) = 0$  si  $N(t) = 0$ ;  $\{S(t), t \geq 0\}$  es un proceso de Poisson compuesto.
- $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$  es una secuencia de variables aleatorias idénticas e independientemente distribuidas, e independientes de  $N(t)$ , y representan las cuantías de los siniestros individuales.
- La función distribución de la variable  $X_i$  la representamos por  $P(x) = \Pr(X \leq x)$  y su respectiva función densidad como  $p(x)$ . Consideraremos  $P(0) = 0$ .
- Se supone la existencia de la esperanza de la variable aleatoria cuantía de siniestro como  $E(X) = p_1$ .
- $c > \lambda p_1$ , es decir, que existe un coeficiente de seguridad  $\theta$  positivo que recarga la prima pura, de tal forma que:

$$\theta = \frac{c}{\lambda \cdot p_1} - 1$$

- Es necesario admitir la existencia del momento de orden  $k$  y adicionalmente la función generatriz de momentos de  $X_i$ , que respectivamente quedan representados de la forma siguiente  $p_k = E(X^k)$  y  $m(s) = E(e^{sX_i})$ .

El fenómeno de la ruina ocurrirá cuando el proceso de las reservas,  $U(t)$ , sea negativo. En la figura 2, vemos que cuando la trayectoria de la reservas pasa por el punto  $T$  es el momento en que se produce la ruina. Seguidamente pasamos a definir las probabilidades de ruina y supervivencia en tiempo infinito y finito.

**Definición 5** *Probabilidad de Ruina en tiempo infinito. Definida como*

$$\psi(u) = \Pr \{U(t) < 0 \text{ para algún } t > 0 \mid U(0) = u\} = \Pr(T < \infty \mid U(0) = u),$$

con  $T = \inf \{t > 0 \text{ y } U(t) < 0\}$ , variable aleatoria que representa el Momento de Ruina para cada  $U(0) = u$ , es decir, siendo  $T$  el primer momento en que las reservas son negativas. Suponemos que si  $T = \infty$  el proceso de las reservas será positivo para todo  $t$  no negativo,  $U(t) \geq 0, \forall t > 0$ .

La probabilidad de Ruina está comprendida entre  $0 \leq \psi(u) \leq 1$ , se trata de una función decreciente respecto a  $u$  y tiende a cero cuando las reservas iniciales tienden al infinito.

**Definición 6** *Probabilidad de Supervivencia en tiempo infinito. Definida por*

$$\delta(u) = 1 - \psi(u) = \Pr \{U(t) \geq 0, \forall t > 0 \mid U(0) = u\} = \Pr(T = \infty \mid U(0) = u).$$

**Definición 7** *Probabilidad de Ruina en tiempo finito. Se define como*

$$\psi(u, t) = \Pr(T < t) = \Pr \{U(\tau) < 0 \text{ para algún } \tau, 0 < \tau \leq t \mid u = U(0)\},$$

donde  $t$  expresa el horizonte temporal finito.

**Definición 8** *Probabilidad de Supervivencia en tiempo finito. Como*

$$\delta(u, t) = 1 - \psi(u, t).$$

Una primera aproximación para la probabilidad de ruina bajo el estudio de un horizonte infinito es la proporcionada por el coeficiente de ajuste de Lundberg. Se trata de un instrumento útil para conseguir límites para la probabilidad de ruina. Para eso es preciso definir previamente el Coeficiente de Ajuste, una constante que designaremos por  $R$ . Se recogen los siguientes teoremas de Egídio dos Reis (2001) para su explicación:

**Teorema 1** Sea  $S(t) \sim$  Poisson Compuesta  $(\lambda t, P(x))$ . Existe una  $m(s)$  para  $-\infty < s < \gamma$  tal que el  $\lim_{s \rightarrow \gamma} m(s) = \infty$  ( $\gamma$  pudiendo ser  $\infty$ ). El coeficiente de ajuste  $R$  es la única raíz positiva de la ecuación

$$\lambda + c \cdot R - \lambda \cdot m(R) = 0 \tag{2}$$

**Demostración.** Sea  $h(r) = \lambda + c \cdot r - \lambda \cdot m(r)$ , entonces  $h(0) = 0$ .

$h'(r) = c - \lambda \cdot m'(r)$ , entonces  $h'(0) = c - \lambda \cdot p_1 > 0$  por hipótesis.

$h''(r) = -\lambda \cdot m''(r) = -\lambda \cdot E(X^2 e^{rX_i}) < 0$ . Por lo tanto  $h(r)$  es cóncava.

La ecuación  $h(r) = 0$  tiene dos raíces: una raíz trivial  $r = 0$ , y una raíz positiva  $R$ . Se representa  $h(r)$  en la figura 3. ■

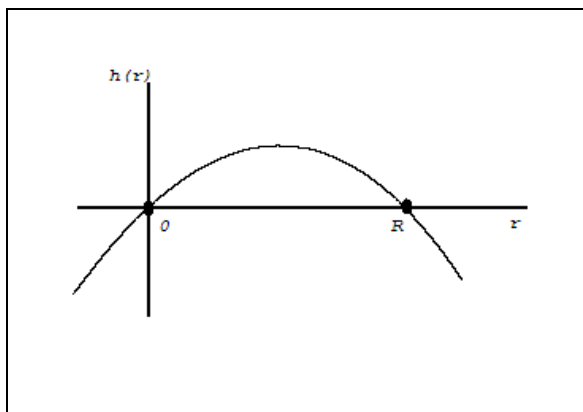


Figura 3: El coeficiente de Ajuste

**Teorema 2** Desigualdad de Lundberg. Sea  $S(t) \sim$  Poisson Compuesta  $(\lambda t, P(x))$ , con  $P(0) = 0$  y exista el coeficiente de ajuste  $R$ , entonces,

$$\psi(u) \leq e^{-R \cdot u}.$$

**Demostración.** Sea  ${}_n\psi(u)$  la probabilidad de ruina antes o en el  $n$ -ésimo siniestro. Comprobamos por inducción que  ${}_n\psi(u) \leq e^{-Ru}$ .

Sea  $n = 1$ , consideramos que la ruina sólo puede ocurrir en el primer siniestro. Por tanto el tiempo que transcurre hasta el siniestro tiene una distribución exponencial. Entonces,

$$\begin{aligned} {}_1\psi(u) &= \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \int_{u+ct}^\infty p(x) \cdot dx \cdot dt \\ &\leq \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \int_{u+ct}^\infty e^{-R \cdot (u+ct-x)} \cdot p(x) \cdot dx \cdot dt \\ &\leq \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \int_0^\infty e^{-R \cdot (u+ct-x)} \cdot p(x) \cdot dx \cdot dt \\ &= e^{-R \cdot u} \cdot \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot e^{-R \cdot ct} \cdot \int_0^\infty e^{R \cdot x} \cdot p(x) \cdot dx \cdot dt \\ &= e^{-R \cdot u} \cdot \int_0^\infty \lambda \cdot m(R) \cdot e^{-(\lambda+c \cdot R) \cdot t} \cdot dt \end{aligned}$$

recordando que  $\lambda + c \cdot R = \lambda \cdot m(R)$ ,

$$= e^{-R \cdot u} \cdot \int_0^\infty (\lambda + c \cdot R) \cdot e^{-(\lambda+c \cdot R) \cdot t} \cdot dt = e^{-R \cdot u}.$$

Para  $n + 1$ , suponiendo válido para  $n$ , tenemos que de forma análoga y considerando el acontecimiento de ruina para el primer siniestro más los  $n$  siguientes, tenemos que,

$$\begin{aligned} {}_{n+1}\psi(u) &= \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \int_{u+ct}^\infty p(x) \cdot dx \cdot dt \\ &\quad + \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \int_0^{u+ct} p(x) \cdot {}_n\psi(u + ct - x) \cdot dx \cdot dt \\ &\leq \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \int_{u+ct}^\infty e^{-R \cdot (u+ct-x)} \cdot p(x) \cdot dx \cdot dt \\ &\quad + \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \int_0^{u+ct} e^{-R \cdot (u+ct-x)} \cdot p(x) \cdot dx \cdot dt. \end{aligned}$$

Ya que  ${}_n\psi(u+ct-x) \leq e^{-R \cdot (u+ct-x)}$  por hipótesis y  $\int_{u+ct}^\infty p(x) \cdot dx \leq \int_{u+ct}^\infty e^{-R \cdot (u+ct-x)} \cdot p(x) \cdot dx$ , tenemos que

$$\begin{aligned} {}_{n+1}\psi(u) &\leq \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot \int_0^\infty e^{-R \cdot (u+ct-x)} \cdot p(x) \cdot dx \cdot dt \\ &= e^{-R \cdot u} \cdot \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-(\lambda+c \cdot R) \cdot t} \cdot \int_0^\infty e^{R \cdot x} \cdot p(x) \cdot dx \cdot dt = e^{-R \cdot u}. \end{aligned}$$

Por tanto, por inducción  ${}_n\psi(u) \leq e^{-R \cdot u}$  para todo  $n$ , y como el  $\lim_{n \rightarrow \infty} {}_n\psi(u) = \psi(u)$  queda demostrado que:

$$\psi(u) \leq e^{-R \cdot u}.$$

■

A continuación pasamos a determinar la probabilidad de ruina en el modelo clásico a través de ecuaciones integro-diferenciales. Se puede desarrollar mediante el argumento diferencial basado en la ocurrencia o no de un siniestro en un diferencial de tiempo o con el planteamiento de ecuaciones de renovación propuesto por Feller (1971), Gerber (1979) y Grandell (1991). En el planteamiento diferencial, de acuerdo con un proceso de Poisson, el número de siniestros en  $(0, dt)$ , un intervalo infinitesimal, puede ser:

- 0 con probabilidad  $1 - \lambda \cdot dt + o(dt)^5$ .
- 1 con probabilidad  $\lambda \cdot dt + o(dt)$ .
- $> 1$  con probabilidad  $o(dt)$ .

Teniendo en cuenta que la ruina puede o no ocurrir en el primer siniestro, tenemos:

$$\begin{aligned} \psi(u) = & (1 - \lambda \cdot dt) \cdot \psi(u + c \cdot dt) + \lambda \cdot dt \cdot \int_0^{u+c \cdot dt} p(x) \cdot \psi(u + c \cdot dt - x) \cdot dx \\ & + \lambda \cdot dt \cdot [1 - P(u + c \cdot dt)] + o(dt), \end{aligned}$$

expresión que podemos escribir como

$$\begin{aligned} \frac{\psi(u+c \cdot dt) - \psi(u)}{c \cdot dt} = & \frac{\lambda}{c} \cdot \psi(u + c \cdot dt) - \frac{\lambda}{c} \cdot \int_0^{u+c \cdot dt} p(x) \cdot \psi(u + c \cdot dt - x) \cdot dx \\ & - \frac{\lambda}{c} \cdot [1 - P(u + c \cdot dt)] + \frac{o(dt)}{c \cdot dt}, \end{aligned}$$

y haciendo  $dt \rightarrow 0$ , obtenemos:

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{c} \cdot \psi(u) - \frac{\lambda}{c} \cdot \int_0^u p(x) \cdot \psi(u - x) \cdot dx - \frac{\lambda}{c} \cdot [1 - P(u)]. \quad (3)$$

---

<sup>5</sup>siendo  $o(dt)$  un infinitésimo, tal que

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{o(dt)}{dt} = 0$$

Ecuación integro-diferencial que determina la probabilidad de ruina en el modelo clásico.

Para el planteamiento basado en las ecuaciones de renovación, obtenemos para la probabilidad de ruina y de supervivencia:

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c} \cdot \int_u^\infty [1 - P(x)] \cdot dx + \frac{\lambda}{c} \cdot \int_0^u \psi(u-x) \cdot [1 - P(x)] \cdot dx \iff \quad (4)$$

$$\delta(u) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c} \cdot \int_0^u \delta(u-x) \cdot [1 - P(x)] \cdot dx. \quad (5)$$

A partir de (5) se hace  $u \rightarrow \infty$  y se extrae el valor de la probabilidad de supervivencia para un nivel inicial de reservas cero (ver Claramunt y Mármol 2003), quedando de la siguiente forma:

$$\delta(0) = \frac{\theta}{1 + \theta}. \quad (6)$$

Sabiendo que  $\psi(u) = 1 - \delta(u)$ , tendremos también la probabilidad de ruina para un nivel inicial de reservas nulo, quedando de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \psi(0) &= 1 - \delta(0) \\ \psi(0) &= 1 - \frac{\theta}{1 + \theta} \\ \psi(0) &= \frac{1}{1 + \theta} \text{ con } \theta > 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Esta probabilidad de ruina para unas reservas iniciales 0 es independiente del número medio de siniestros  $\lambda$ , y de la función distribución de la cuantía de los siniestros  $P(x)$ , que sólo depende del coeficiente de seguridad  $\theta$ .

### 3. Inclusión de una barrera de dividendos

Como modelo alternativo, se introduce un enfoque que propone el reparto para una parte de las reservas en forma de dividendos. La base técnica para proponer el control de las reservas nace de la crítica de De Finetti (1957), que afirma bajo las hipótesis del modelo clásico de riesgo que el nivel de las reservas  $U(t) \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$  con probabilidad 1. Estas políticas de dividendos aparecen como una forma de control del crecimiento ilimitado de las reservas,  $U(t)$ . Surge, en este caso, la necesidad de cuantificar la parte de las reservas que se destinan al pago de dividendos. La magnitud elegida

será la esperanza del valor actual de las cuantías repartidas. Este reparto de dividendos afectará a la probabilidad de ruina, limitando el nivel de acumulación de las reservas, lo cual provoca que la probabilidad de ruina sea mayor. Siniestros que en el modelo clásico no provocaban ruina, ahora pueden producirse debido a que el nivel de las reservas se ve disminuido. Podemos ver en Mármol (2003) que se plantean dos hipótesis para el reparto de dividendos según el plazo considerado:

1. Hipótesis 1: En el momento en que se produce la ruina se da por acabado el proceso. Se representa la esperanza del valor actual de los dividendos repartidos hasta ese momento como  $W$ .
2. Hipótesis 2: El proceso no acaba con la ruina, permitiendo así la recuperación de  $U(t)$ . Se representa por  $V$  la esperanza del valor actual de los dividendos.

Se pueden diferenciar dos tipos de barrera que modifican el proceso de las reservas cuando asumimos análisis continuo,

1. Barreras absorbentes: El proceso acaba cuando el nivel de las reservas llega al valor de la barrera fijada. El caso más relevante es el de poner la barrera en cero para poder así controlar la ruina.
2. Barreras reflectantes: Cuando el nivel de las reservas alcanza la barrera,  $U(t)$  se mantiene en ese nivel hasta la ocurrencia del siguiente siniestro. En la figura 4, se representa una posible trayectoria del proceso incluyendo una barrera constante,  $b$ . Se observa que  $U(t)$  alcanza  $b$ , donde permanece hasta la ocurrencia de un siniestro (este puede originar o no la ruina). Cuando las reservas son negativas el proceso concluye en ruina. En la figura 4, es representado por el momento  $T$  (primer momento de ruina).

En el modelo modificado con una barrera constante,  $b(t) = b$ , la probabilidad de ruina es uno. Independientemente del nivel en el que pongamos la barrera, todas las trayectorias acabarán en ruina. Podemos por tanto formular el siguiente teorema.

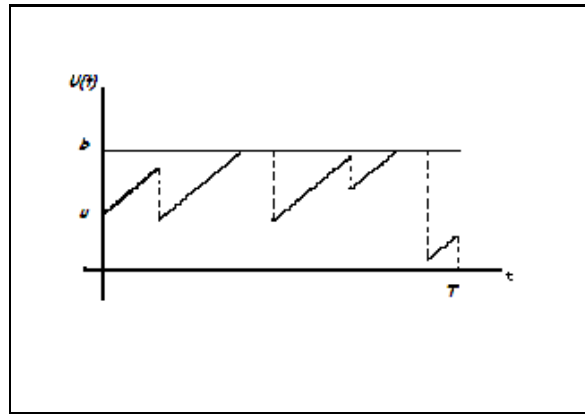


Figura 4: Proceso de la reserva con barrera constante

**Teorema 3** En un proceso modificado con una barrera constante,  $b(t) = b$ , la probabilidad de ruina en tiempo infinito y campo continuo,  $\psi(u, b)$ , es uno.

**Demostración.** En Egídio dos Reis (2001) se plantea una ecuación integro-diferencial para la probabilidad de ruina  $\psi(u, b)$ , suponiendo que el nivel de las reservas iniciales coincida con el valor de la barrera, por tanto  $u = b$ . Tenemos por un lado que tiene que cumplirse,

$$\psi(b, b) \leq \psi(u, b) \leq 1, \text{ si } 0 \leq u \leq b,$$

y con la ecuación integro-diferencial de la probabilidad de ruina modificada por la inclusión de la barrera,  $\psi(b, b)$  queda de la siguiente forma:

$$\psi(b, b) = (1 - \lambda \cdot dt) \cdot \psi(b, b) + \lambda \cdot dt \cdot \int_0^b p(x) \cdot \psi(b - x, b) \cdot dx + \lambda \cdot dt \cdot [1 - P(b)] + o(dt), \quad (8)$$

dividiendo por  $\lambda \cdot dt$  y haciendo que  $dt \rightarrow 0$ , nos queda:

$$\begin{aligned} \psi(b, b) &= \int_0^b p(x) \cdot \psi(b - x, b) \cdot dx + [1 - P(b)] \\ &\geq \int_0^b p(x) \cdot \psi(b, b) \cdot dx + [1 - P(b)] = P(b) \cdot \psi(b, b) + 1 - P(b), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\psi(b, b) \cdot [1 - P(b)] \geq 1 - P(b),$$

lo cual implica que,

$$\psi(b, b) \geq 1,$$



y como sabemos que  $\psi(b, b) \leq \psi(u, b) \leq 1$ , llegamos a

$$\psi(u, b) = 1.$$

■

Acabamos de ver como, en un modelo con barrera constante, la probabilidad de ruina en tiempo continuo es unitaria. Lo anterior también es cierto si se realiza un análisis discreto, como se demuestra en Claramunt, Mármol y Alegre (2003). Por ello, en un modelo con barrera constante el análisis del momento de ruina es de especial interés, ya que con niveles de barrera distintos, además de proporcionar esperanzas del valor actual de los dividendos distintas, conllevará también diferentes distribuciones para el momento de ruina.

## 4. Transformada del momento de ruina

Una vez analizado de manera introductoria el modelo clásico de riesgo y las políticas de dividendos, pasamos a estudiar el tiempo de ruina, es decir, el primer momento en que las reservas se hacen negativas. Expresamos el Momento de Ruina como:

$$T = \inf \{t > 0 : U(t) < 0\}. \quad (9)$$

En los siguientes puntos de esta sección desarrollaremos la transformada del momento de ruina, de acuerdo con el modelo clásico de riesgo en el que el proceso de las reservas  $\{U(t)\}_{t \geq 0}$  viene dado por

$$U(t) = u + c \cdot t - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

donde  $u$  es la reserva inicial y  $c$  es la intensidad de prima constante, cumpliéndose que  $c > \lambda \cdot p_1$ . Es decir, que existe un coeficiente de seguridad  $\theta$  positivo que recarga la prima pura.  $N(t)$  es el número de siniestros hasta el momento  $t$ , y  $X_i$  es la cuantía del  $i$ -ésimo siniestro.  $\{N(t)\}_{t \geq 0}$  es un proceso de Poisson, con parámetro  $\lambda$ , y  $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$  una secuencia de variables aleatorias positivas, idéntica e independientemente distribuidas, e independientes de  $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ , con función de distribución común que llamaremos  $P(x)$ ,

función de densidad  $p(x)$  y media  $p_1$ . A este proceso de las reservas se le añadirá una barrera de dividendos constante,  $b$ , limitando así la acumulación de las reservas lo cual provocará que la probabilidad de ruina sea mayor, convirtiéndose en cierta. Primero introduciremos brevemente el instrumento de la transformada de Laplace, pasando luego a desarrollar la transformada del momento de ruina donde el número de siniestros sigue una distribución de Poisson con parámetro  $\lambda$ , y la cuantía individual de los siniestros sigue una distribución exponencial unitaria, exponencial de parámetro  $\alpha$  y por último una Erlang( $2, \alpha$ ).

#### 4.1. Transformadas de Laplace

Esta herramienta es de gran utilidad para la resolución de diversos problemas que se tratan en la teoría de la ruina. Encontramos en la literatura actuarial trabajos como Avram y Usabel (2003), Drekić y Willmot (2003) o Dickson y Willmot (2005) donde se utilizan las transformadas de Laplace. En Egídio dos Reis (2001), se define la transformada de Laplace de la siguiente forma;

**Definición 9** Sea una función  $f(y)$  para  $y \geq 0$ , entonces la transformada de Laplace de  $f(y)$  se define como

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-s \cdot y} \cdot f(y) \cdot dy,$$

si la integral es convergente, siendo  $s$  el parámetro de la transformada. Para una función de densidad,  $f(y)$ , de una variable aleatoria no negativa, entonces la transformada de Laplace existe siempre al menos para un  $s \geq 0$ .

Consideramos algunas propiedades de la transformada de Laplace para poder utilizarla posteriormente:

**Propiedad 1** Sean  $f$  y  $g$  funciones, cuyas transformadas de Laplace existen y sean  $a$  y  $b$  constantes. Entonces:

$$\int_0^{\infty} e^{-s \cdot y} \cdot [a \cdot f(y) + b \cdot g(y)] \cdot dy = a \cdot \tilde{f}(s) + b \cdot \tilde{g}(s).$$

**Propiedad 2** Sea  $F(x) = \int_0^x f(y) \cdot dy$ , entonces:

$$\tilde{F}(s) = \frac{1}{s} \cdot \tilde{f}(s).$$

**Demostración.**

$$\begin{aligned} \tilde{F}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-s \cdot x} \cdot F(x) \cdot dx = \int_0^{\infty} e^{-s \cdot x} \cdot \int_0^x f(y) \cdot dy \cdot dx \\ &= \int_0^{\infty} f(y) \cdot \int_y^{\infty} e^{-s \cdot x} \cdot dx \cdot dy = \int_0^{\infty} f(y) \cdot \frac{1}{s} \cdot e^{-s \cdot y} \cdot dy = \frac{1}{s} \cdot \tilde{f}(s). \end{aligned}$$

■

**Propiedad 3** Sea  $f$  una función cuya transformada de Laplace existe. Entoces su derivada,  $f'$ ,

$$\tilde{f}'(y) = s \cdot \tilde{f}(s) - f(0).$$

**Propiedad 4** Sean  $\{f_j(\cdot)\}_{j=1}^n$  funciones cuyas transformadas de Laplace existen, y sea  $h(x)$  la n-ésima convolución  $h(x) = f_1 * f_2 * \dots * f_n(x)$ , donde  $f_j * f_k(x) = \int_0^x f_j(x-y) \cdot f_k(y) \cdot dy$ . Entonces la transformada de Laplace de  $h(x)$  viene dada por

$$\tilde{h}(x) = \prod_{j=1}^n \tilde{f}_j(s).$$

Existen tablas de transformadas de Laplace para determinadas funciones. En el Anexo se presenta una tabla resumen de las más utilizadas e inmediatas.

## 4.2. La función $\phi_{\delta}(u, b)$

Definimos primero una función  $\phi_{\delta}(u)$  para el modelo clásico sin barrera en tiempo infinito y campo continuo como:

$$\phi_{\delta}(u) = E[e^{-\delta \cdot T} \cdot I(T < \infty)], \quad (10)$$

donde  $I(T < \infty)$  es la función indicadora, que es igual a 1 cuando ocurre la ruina, y 0 para otros casos, es decir,

$$I(T < \infty) = \begin{cases} 1 & \text{si } T < \infty \\ 0 & \text{si } T = \infty. \end{cases}$$

En el modelo clásico, en el caso de un proceso de las reservas en horizonte infinito  $[0, \infty)$ , la probabilidad de ruina no es segura motivo por el cual se hace necesario el uso de la función indicadora definida previamente. En la Figura 5.a se representa dicho modelo. A este modelo le introducimos una barrera constante,  $b$ , quedando la función (10) de la

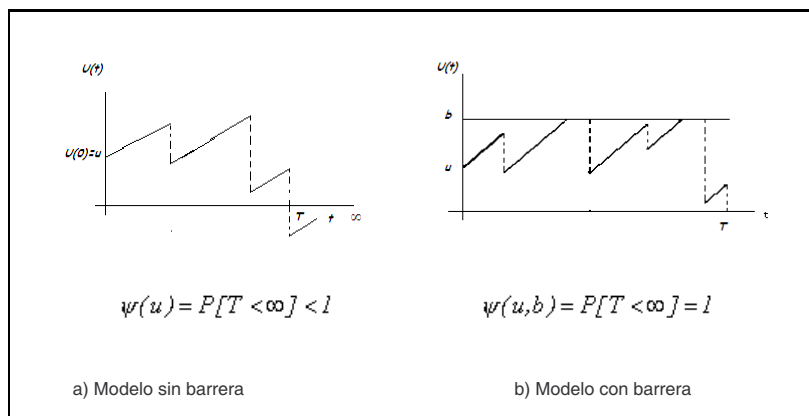


Figura 5: Procesos de las reservas

forma siguiente:

$$\phi_{\delta}(u, b) = E[e^{-\delta \cdot T}]. \quad (11)$$

La inclusión de la barrera en el modelo hace que la función indicadora sea 1 para el caso del horizonte infinito, ya que habíamos visto anteriormente que la probabilidad de ruina era cierta. Queda representado en la Figura 5.b el modelo que ahora nos planteamos. Una vez definida la función  $\phi_{\delta}(u, b)$ , ésta la podríamos utilizar para diferentes interpretaciones:

1. Como la transformada de Laplace del momento de Ruina  $T$ , donde  $\delta$  es el parámetro de la transformada. Interpretación que utilizaremos posteriormente.
2. Como la esperanza del valor actual de una unidad monetaria que se hace efectiva en el instante de ruina, donde  $\delta$  es la tasa de actualización financiera. En la Figura 6 representamos gráficamente el esquema de la actualización.
3. Como caso particular de la “penalty function”. En Gerber y Shiu (1998) se define la función  $\phi_{\delta}(u)$ , como la esperanza de la “penalty function” descontada

$$\phi_{\delta}(u) = E [w(U(T-), |U(T)|) \cdot e^{-\delta \cdot T} \cdot I(T < \infty)].$$

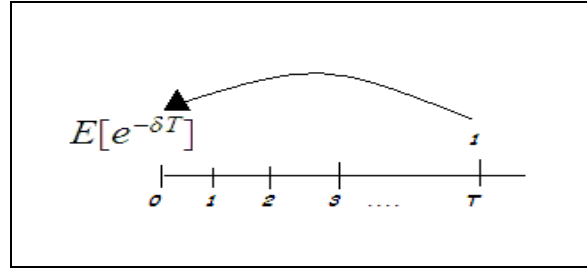


Figura 6: Esquema de la actualización

Cuando la función de penalización es de una unidad monetaria, es decir,

$$w(U(T-), |U(T)|) = 1,$$

obtenemos la función que hemos definido  $\phi_\delta(u) = E[e^{-\delta \cdot T} \cdot I(T < \infty)]$ .

Utilizaremos la primera interpretación, donde definimos la función  $\phi_\delta(u, b)$  como la transformada de Laplace del momento de ruina,

$$\phi_\delta(u, b) = E[e^{-\delta \cdot T}], \quad (12)$$

donde  $T$  es el momento de ruina y  $\delta$  es el parámetro de la transformación.

Debido a que el proceso se ve modificado con la introducción de la barrera constante, el valor de las reservas en  $t$ ,  $U(t)$ , depende de si  $t$  es mayor o menor que  $t^*$ , siendo  $t^*$  el punto de corte entre el proceso de las reservas y la barrera, suponiendo que no ocurre siniestro:

$$u + c \cdot t^* = b \Rightarrow t^* = \frac{b - u}{c}.$$

En la figura 7 se representa  $t$  cuando es menor o mayor que  $t^*$ . Por tanto, se puede escribir la función (12), donde el primer sumando es el representado en la figura 7.a y el segundo sumando es el correspondiente a la figura 7.b:

$$\begin{aligned} \phi_\delta(u, b) &= \int_0^{t^*} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot e^{-\delta \cdot t} \left[ \int_0^{u+c \cdot t} \phi(u + c \cdot t - x, b) \cdot p(x) \cdot dx + \int_{u+c \cdot t}^\infty p(x) \cdot dx \right] \cdot dt \\ &+ \int_{t^*}^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \left[ \int_0^b \phi(b - x, b) \cdot p(x) \cdot dx + \int_b^\infty p(x) \cdot dx \right] \cdot dt \\ &= \int_0^{t^*} \lambda \cdot e^{-(\lambda+\delta) \cdot t} \cdot \left[ \int_0^{u+c \cdot t} \phi(u + c \cdot t - x, b) \cdot p(x) \cdot dx + [1 - P(u + c \cdot t)] \right] \cdot dt \\ &+ \int_{t^*}^\infty \lambda \cdot e^{-(\lambda+\delta) \cdot t} \cdot \left[ \int_0^b \phi(b - x, b) \cdot p(x) \cdot dx + [1 - P(b)] \right] \cdot dt. \end{aligned} \quad (13)$$

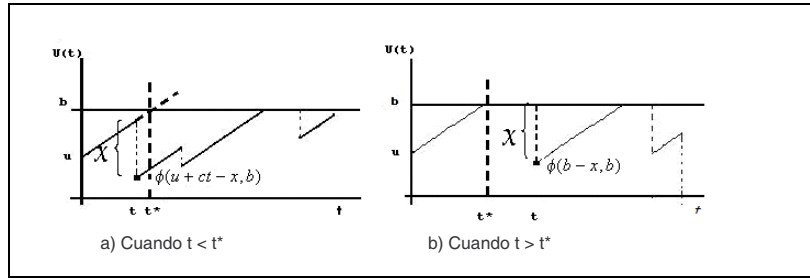


Figura 7: representación de los sumandos

Se aplica el cambio de variable  $s = u + c \cdot t$ , por tanto  $t = \frac{s-u}{c}$ , siendo:

$$\begin{cases} t = 0 \rightarrow s = u + c \cdot 0 = u \\ t = t^* \rightarrow s = u + c \cdot \frac{b-u}{c} = b \\ dt = \frac{ds}{c}, \end{cases}$$

por tanto, podemos escribir (13) como

$$\begin{aligned} \phi_\delta(u, b) &= \frac{1}{c} \cdot \int_u^b \lambda \cdot e^{-(\lambda+\delta) \cdot \left(\frac{s-u}{c}\right)} \cdot \left[ \int_0^s \phi(s-x, b) \cdot p(x) \cdot dx + [1 - P(s)] \right] \cdot ds \\ &\quad + \frac{1}{c} \cdot \int_b^\infty \lambda \cdot e^{-(\lambda+\delta) \cdot \left(\frac{s-u}{c}\right)} \cdot \left[ \int_0^b \phi(b-x, b) \cdot p(x) \cdot dx + [1 - P(b)] \right] \cdot ds \\ &= \frac{\lambda}{c} \cdot e^{(\lambda+\delta) \cdot \frac{u}{c}} \cdot \underbrace{\left[ \int_u^b e^{-(\lambda+\delta) \cdot \frac{s}{c}} \cdot \int_0^s \phi(s-x, b) \cdot p(x) \cdot dx \cdot ds + \int_u^b e^{-(\lambda+\delta) \cdot \frac{s}{c}} \cdot [1 - P(s)] \cdot ds \right]}_A \\ &\quad + \underbrace{\left[ \int_b^\infty e^{-(\lambda+\delta) \cdot \frac{s}{c}} \cdot \int_0^b \phi(b-x, b) \cdot p(x) \cdot dx \cdot ds + \frac{c}{\lambda + \delta} \cdot e^{-(\lambda+\delta) \cdot \frac{b}{c}} \cdot [1 - P(b)] \right]}_{(14)}, \end{aligned}$$

quedando (14) de forma simplificada

$$\phi_\delta(u, b) = \frac{\lambda}{c} \cdot e^{(\lambda+\delta) \cdot \frac{u}{c}} \cdot A,$$

por lo que

$$A = \frac{c}{\lambda} e^{-(\lambda+\delta) \cdot \frac{u}{c}} \cdot \phi_\delta(u, b). \quad (15)$$

Derivando la parte  $A$  de la ecuación (14) y de la ecuación (15) respecto a  $u$  e igualándolas se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{c}{\lambda} \cdot e^{-(\lambda+\delta) \cdot \frac{u}{c}} \cdot \left[ \phi'(u, b) - \frac{\phi(u, b) \cdot (\lambda+\delta)}{c} \right] &= -e^{-(\lambda+\delta) \cdot \frac{u}{c}} \cdot \left[ \int_0^u \phi(u-x, b) \cdot p(x) \cdot dx + 1 - P(u) \right], \\ \frac{c}{\lambda} \cdot \phi'(u, b) + \int_0^u \phi(u-x, b) \cdot p(x) \cdot dx + 1 - P(u) &= \frac{\lambda+\delta}{\lambda} \cdot \phi(u, b). \end{aligned}$$

Despejando  $\phi(u, b)$  se llega a

$$\begin{aligned}\phi_\delta(u, b) &= \frac{c}{\lambda + \delta} \cdot \phi'(u, b) + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot \int_0^u \phi(u - x, b) \cdot p(x) \cdot dx + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} - \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot P(u) \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot \left[ \frac{c}{\lambda} \cdot \phi'(u, b) + \int_0^u \phi(u - x, b) \cdot p(x) \cdot dx + 1 - \int_0^u p(x) \cdot dx \right].\end{aligned}\quad (16)$$

Solucionando la ecuación (16) mediante transformadas de Laplace (se utilizan las propiedades 2, 3, 4 y tabla de transformadas (Anexo) anteriormente explicadas):

$$\tilde{\phi}(s) = \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot \left[ \frac{c}{\lambda} \cdot \left( s \cdot \tilde{\phi}(s) - \phi(0) \right) + \tilde{\phi}(s) \cdot \tilde{f}(s) + \frac{1}{s} - \frac{\tilde{f}(s)}{s} \right],$$

despejando  $\tilde{\phi}(s)$  se obtiene,

$$\tilde{\phi}(s) = \frac{\lambda \cdot \left( 1 - \tilde{f}(s) \right) - c \cdot s \cdot \phi(0)}{(\lambda + \delta) \cdot s - c \cdot s^2 - \lambda \cdot s \cdot \tilde{f}(s)}.\quad (17)$$

Nos centramos en esta función  $\tilde{\phi}(s)$ , la cual solucionaremos sustituyendo  $\tilde{f}(s)$ , la transformada de la función de densidad de la cuantía del siniestro que queremos analizar, que cumpla:

$$\tilde{f}(s) = \frac{Q_{r-1}(s)}{Q_r(s)},$$

es decir, que el numerador sea de grado inferior al polinomio que tengamos en el denominador, y consiguiendo así que el denominador de la función (17) sea una ecuación característica de Lundberg generalizada (Bowers, Gerber, y et al. (1997)). Buscando las raíces,  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , donde  $n$  es el grado de la ecuación característica de Lundberg, podremos expresar  $\tilde{\phi}(s)$  en fracciones parciales de la siguiente forma:

$$\tilde{\phi}(s) = \frac{A_1}{s - r_1} + \frac{A_2}{s - r_2} + \dots + \frac{A_n}{s - r_n},$$

siendo su inversa de forma directa,

$$\phi_\delta(u, b) = \sum_{i=1}^n A_i \cdot e^{r_i \cdot u},\quad (18)$$

donde  $A_i$  son constantes que dependerán de  $b$ , pero no de  $u$ . Para determinarlas necesitaremos hallar  $n$  condiciones. Pasamos a realizar en los siguientes puntos el estudio para los casos en que la cuantía individual de siniestros sigue una distribución exponencial unitaria, una exponencial de parámetro  $\alpha$  y por último una Erlang(2,  $\alpha$ ).

### 4.3. Distribución de la cuantía del siniestro: Exponencial unitaria

Ahora consideramos el desarrollo del proceso que sigue una exponencial unitaria para la distribución de la cuantía del siniestro:

$$X \sim Exp(\alpha) \text{ con } \alpha = 1.$$

Tenemos que su función de densidad es:

$$p(x) = e^{-x},$$

y su transformada de Laplace es:

$$\tilde{f}(s) = \frac{1}{s+1}. \quad (19)$$

Sustituyendo la expresión (19) en (17) obtenemos

$$\tilde{\phi}(s) = \frac{\lambda - c \cdot \phi(0) \cdot (s+1)}{c \cdot s^2 - (\lambda + \delta - c) \cdot s - \delta}, \quad (20)$$

siendo,  $c \cdot s^2 - (\lambda + \delta - c) \cdot s - \delta$ , la ecuación característica de Lundberg y sus raíces:

$$r_1 = \frac{\lambda + \delta - c + \sqrt{(\lambda + \delta - c)^2 + 4 \cdot \delta \cdot c}}{2 \cdot c},$$

$$r_2 = \frac{\lambda + \delta - c - \sqrt{(\lambda + \delta - c)^2 + 4 \cdot \delta \cdot c}}{2 \cdot c}.$$

Expresando la transformada  $\tilde{\phi}(s)$  en fracciones parciales nos queda de la siguiente forma:

$$\tilde{\phi}(s) = \frac{A_1}{s - r_1} + \frac{A_2}{s - r_2},$$

seguidamente, su inversa es directa,

$$\phi_\delta(u, b) = A_1 \cdot e^{r_1 \cdot u} + A_2 \cdot e^{r_2 \cdot u}, \quad (21)$$

donde  $A_1$  y  $A_2$  dependerán de  $b$ , pero no de  $u$ . Para determinarlas necesitaremos hallar dos condiciones:



■ Primera condición:

En la expresión (16) si la distribución de cuantía del siniestro sigue una exponencial unitaria tenemos,

$$\phi_{\delta}(u, b) = \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot \left[ \frac{c}{\lambda} \cdot \phi'(u, b) + \int_0^u \phi(u - x, b) \cdot e^{-x} \cdot dx + e^{-u} \right]. \quad (22)$$

Sustituyendo la estructura de solución (21) en (22) :

$$\begin{aligned} A_1 \cdot e^{r_1 \cdot u} + A_2 \cdot e^{r_2 \cdot u} &= \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot \left[ \frac{c}{\lambda} \cdot (A_1 \cdot r_1 \cdot e^{r_1 \cdot u} + A_2 \cdot r_2 \cdot e^{r_2 \cdot u}) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^u (A_1 \cdot e^{r_1 \cdot (u-x)} + A_2 \cdot e^{r_2 \cdot (u-x)}) \cdot e^{-x} \cdot dx + e^{-u} \right] \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot e^{-u} + \frac{c}{\lambda + \delta} \cdot (A_1 \cdot r_1 \cdot e^{r_1 \cdot u} + A_2 \cdot r_2 \cdot e^{r_2 \cdot u}) \\ &\quad + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot \left[ \frac{A_1}{(r_1 + 1)} \cdot (e^{r_1 \cdot u} - e^{-u}) + \frac{A_2}{(r_2 + 1)} \cdot (e^{r_2 \cdot u} - e^{-u}) \right]. \end{aligned}$$

Simplificando, obtenemos la primera ecuación que nos servirá para hallar las  $A_1$  y

$A_2$ . A continuación se detallan los pasos seguidos,

$$\begin{aligned} A_1 \cdot e^{r_1 \cdot u} \cdot \left[ 1 - \frac{c}{\lambda + \delta} \cdot r_1 - \frac{\lambda}{(\lambda + \delta) \cdot (r_1 + 1)} \right] + A_2 \cdot e^{r_2 \cdot u} \cdot \left[ 1 - \frac{c}{\lambda + \delta} \cdot r_2 - \frac{\lambda}{(\lambda + \delta) \cdot (r_2 + 1)} \right] \\ = \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot e^{-u} + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot \left[ \frac{-A_1}{(r_1 + 1)} \cdot e^{-u} - \frac{A_2}{(r_2 + 1)} \cdot e^{-u} \right], \\ 0 = \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot e^{-u} + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot \left[ \frac{-A_1}{(r_1 + 1)} \cdot e^{-u} - \frac{A_2}{(r_2 + 1)} \cdot e^{-u} \right], \\ 0 = e^{-u} \cdot \left[ 1 - \frac{A_1}{(r_1 + 1)} - \frac{A_2}{(r_2 + 1)} \right], \\ \frac{A_1}{(r_1 + 1)} + \frac{A_2}{(r_2 + 1)} = 1. \end{aligned} \quad (23)$$

■ Segunda condición:

Nos planteamos la ecuación integro-diferencial de  $\phi_{\delta}(b, b)$ ,

$$\begin{aligned} \phi_{\delta}(b, b) &= \int_0^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \left[ \int_0^b \phi(b - x, b) \cdot p(x) \cdot dx + [1 - P(b)] \right] \cdot dt \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot [1 - P(b)] + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot \int_0^b \phi(b - x, b) \cdot p(x) \cdot dx \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot e^{-b} + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot \int_0^b \phi(b - x, b) \cdot e^{-x} \cdot dx. \end{aligned} \quad (24)$$

Sustituyendo la estructura de solución (21) en (24) :

$$\begin{aligned} A_1 \cdot e^{r_1 \cdot b} + A_2 \cdot e^{r_2 \cdot b} &= \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot e^{-b} + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot \int_0^b (A_1 \cdot e^{r_1 \cdot (b-x)} + A_2 \cdot e^{r_2 \cdot (b-x)}) \cdot e^{-x} \cdot dx, \\ A_1 \cdot e^{r_1 \cdot b} \left[ \lambda + \delta - \frac{\lambda}{(r_1 + 1)} \right] + A_2 \cdot e^{r_2 \cdot b} \left[ \lambda + \delta - \frac{\lambda}{(r_2 + 1)} \right] \\ &= \lambda \cdot e^{-b} \left[ 1 - \underbrace{\left( \frac{A_1}{(r_1 + 1)} + \frac{A_2}{(r_2 + 1)} \right)}_{\text{igual a 1 por la ecuación (23)}} \right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto nos queda la segunda ecuación expresada de la siguiente manera:

$$A_1 \cdot e^{r_1 \cdot b} \cdot \left[ \lambda + \delta - \frac{\lambda}{(r_1 + 1)} \right] + A_2 \cdot e^{r_2 \cdot b} \cdot \left[ \lambda + \delta - \frac{\lambda}{(r_2 + 1)} \right] = 0. \quad (25)$$

Una vez obtenidas las ecuaciones (23) y (25) tendremos que resolver el siguiente sistema para poder hallar  $A_1$  y  $A_2$ :

$$\begin{cases} \frac{A_1}{(r_1 + 1)} + \frac{A_2}{(r_2 + 1)} = 1 \\ A_1 \cdot e^{r_1 \cdot b} \cdot \left[ \lambda + \delta - \frac{\lambda}{(r_1 + 1)} \right] + A_2 \cdot e^{r_2 \cdot b} \cdot \left[ \lambda + \delta - \frac{\lambda}{(r_2 + 1)} \right] = 0, \end{cases}$$

por lo que  $A_1, A_2$  son:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{-(r_1 + 1) \cdot [r_2 \cdot (\lambda + \delta) + \delta] \cdot e^{r_2 \cdot b}}{-e^{r_2 \cdot b} \cdot [r_2 \cdot (\lambda + \delta) + \delta] + e^{r_1 \cdot b} \cdot [r_1 \cdot (\lambda + \delta) + \delta]}, \\ A_2 &= \frac{(r_2 + 1) \cdot [r_1 \cdot (\lambda + \delta) + \delta] \cdot e^{r_1 \cdot b}}{-e^{r_2 \cdot b} \cdot [r_2 \cdot (\lambda + \delta) + \delta] + e^{r_1 \cdot b} \cdot [r_1 \cdot (\lambda + \delta) + \delta]}, \end{aligned}$$

y sustituyendo en (21),

$$\phi_\delta(u, b) = \frac{-(r_1 + 1) \cdot [r_2 \cdot (\lambda + \delta) + \delta] \cdot e^{r_1 \cdot u + r_2 \cdot b} + (r_2 + 1) \cdot [r_1 \cdot (\lambda + \delta) + \delta] \cdot e^{r_2 \cdot u + r_1 \cdot b}}{e^{r_1 \cdot b} \cdot [r_1 \cdot (\lambda + \delta) + \delta] - e^{r_2 \cdot b} \cdot [r_2 \cdot (\lambda + \delta) + \delta]}. \quad (26)$$

Mediante la utilización del teorema de Vieta, a partir del polinomio de segundo grado que tenemos en el denominador de la expresión (20),  $c \cdot s^2 - (\lambda + \delta - c) \cdot s - \delta = 0$ , obtendremos una serie de expresiones<sup>6</sup> que nos servirán para poder simplificar la función (26). De esta forma (26) puede simplificarse, obteniendo

$$\phi_\delta(u, b) = E[e^{-\delta T}] = \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{r_1 \cdot e^{r_2 \cdot u + r_1 \cdot b} - r_2 \cdot e^{r_1 \cdot u + r_2 \cdot b}}{(r_1 + 1) \cdot r_1 \cdot e^{r_1 \cdot b} - (r_2 + 1) \cdot r_2 \cdot e^{r_2 \cdot b}}, \quad (27)$$

6

$$r_1 + r_2 = \frac{\lambda + \delta - c}{c},$$

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{-\delta}{c},$$

$$(r_1 + 1) \cdot (r_2 + 1) = \frac{\lambda}{c}.$$

que es la transformada del momento de ruina cuando la cuantía del siniestro sigue una distribución exponencial unitaria.

#### 4.4. Distribución de la cuantía del siniestro: Exponencial ( $\alpha$ )

Considerando que el proceso sigue una exponencial de parámetro  $\alpha$  para la distribución de la cuantía del siniestro:

$$X \sim Exp(\alpha)$$

Tenemos que su función de densidad es:

$$p(x) = \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot x},$$

y su correspondiente transformada de Laplace es:

$$\tilde{f}(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha}. \quad (28)$$

Sustituyendo la expresión (28) en (17), obtenemos

$$\tilde{\phi}(s) = \frac{\lambda - c \cdot \phi(0) \cdot (s + \alpha)}{c \cdot s^2 - (\lambda + \delta - \alpha \cdot c) \cdot s - \alpha \cdot \delta}, \quad (29)$$

siendo,  $c \cdot s^2 - (\lambda + \delta - \alpha \cdot c) \cdot s - \alpha \cdot \delta$ , la ecuación característica de Lundberg y sus raíces:

$$r_1 = \frac{\lambda + \delta - \alpha c + \sqrt{(\lambda + \delta - \alpha c)^2 + 4\delta\alpha c}}{2c},$$

$$r_2 = \frac{\lambda + \delta - \alpha c - \sqrt{(\lambda + \delta - \alpha c)^2 + 4\delta\alpha c}}{2c}.$$

Expresando la transformada  $\tilde{\phi}(s)$  en fracciones parciales nos queda de la siguiente forma:

$$\tilde{\phi}(s) = \frac{A_1}{s - r_1} + \frac{A_2}{s - r_2},$$

seguidamente, su inversa es directa,

$$\phi_\delta(u, b) = A_1 \cdot e^{r_1 \cdot u} + A_2 \cdot e^{r_2 \cdot u}, \quad (30)$$

donde  $A_1$  y  $A_2$  dependerán de  $b$ , pero no de  $u$ . Para determinarlas necesitaremos hallar dos condiciones:

■ Primera condición:

En la expresión (16), si la distribución de cuantía del siniestro sigue una distribución exponencial de parámetro  $\alpha$  tenemos,

$$\phi_\delta(u, b) = \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot \left[ \frac{c}{\lambda} \cdot \phi'(u, b) + \int_0^u \phi(u - x, b) \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha x} \cdot dx + e^{-\alpha u} \right]. \quad (31)$$

Sustituyendo la estructura de solución (30) en (31) :

$$\begin{aligned} A_1 \cdot e^{r_1 \cdot u} + A_2 \cdot e^{r_2 \cdot u} &= \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot \left[ \frac{c}{\lambda} \cdot (A_1 \cdot r_1 \cdot e^{r_1 \cdot u} + A_2 \cdot r_2 \cdot e^{r_2 \cdot u}) \right. \\ &\quad \left. + \alpha \cdot \int_0^u (A_1 \cdot e^{r_1 \cdot (u-x)} + A_2 \cdot e^{r_2 \cdot (u-x)}) \cdot e^{-\alpha x} \cdot dx + e^{-\alpha u} \right] \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot e^{-\alpha u} + \frac{c}{\lambda + \delta} \cdot (A_1 \cdot r_1 \cdot e^{r_1 \cdot u} + A_2 \cdot r_2 \cdot e^{r_2 \cdot u}) \\ &\quad + \frac{\lambda \cdot \alpha}{\lambda + \delta} \cdot \left[ \frac{A_1}{(r_1 + \alpha)} \cdot (e^{r_1 \cdot u} - e^{-\alpha u}) + \frac{A_2}{(r_2 + \alpha)} \cdot (e^{r_2 \cdot u} - e^{-\alpha u}) \right]. \end{aligned}$$

Simplificando, obtenemos la primera ecuación que nos servirá para hallar las  $A_1$ ,

$A_2$ . A continuación se detallan los pasos seguidos,

$$\begin{aligned} A_1 \cdot e^{r_1 \cdot u} \cdot \left[ 1 - \frac{c}{\lambda + \delta} \cdot r_1 - \frac{\lambda \cdot \alpha}{(\lambda + \delta) \cdot (r_1 + \alpha)} \right] + A_2 \cdot e^{r_2 \cdot u} \cdot \left[ 1 - \frac{c}{\lambda + \delta} \cdot r_2 - \frac{\lambda \cdot \alpha}{(\lambda + \delta) \cdot (r_2 + \alpha)} \right] \\ = \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot e^{-\alpha u} + \frac{\lambda \cdot \alpha}{\lambda + \delta} \cdot \left[ \frac{-A_1}{(r_1 + \alpha)} \cdot e^{-\alpha u} - \frac{A_2}{(r_2 + \alpha)} \cdot e^{-\alpha u} \right], \\ 0 = \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot e^{-\alpha u} + \frac{\lambda \cdot \alpha}{\lambda + \delta} \cdot \left[ \frac{-A_1}{(r_1 + \alpha)} \cdot e^{-\alpha u} - \frac{A_2}{(r_2 + \alpha)} \cdot e^{-\alpha u} \right], \\ 1 = \alpha \cdot \left[ \frac{A_1}{(r_1 + \alpha)} + \frac{A_2}{(r_2 + \alpha)} \right], \\ \frac{A_1}{(r_1 + \alpha)} + \frac{A_2}{(r_2 + \alpha)} = \frac{1}{\alpha}. \end{aligned} \quad (32)$$

■ Segunda condición:

Nos planteamos la ecuación integro-diferencial de  $\phi_\delta(b, b)$ ,

$$\begin{aligned} \phi_\delta(b, b) &= \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot e^{-\delta t} \cdot \left[ \int_0^b \phi(b - x, b) \cdot p(x) \cdot dx + [1 - P(b)] \right] \cdot dt \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot [1 - P(b)] + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot \int_0^b \phi(b - x, b) \cdot p(x) \cdot dx \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot e^{-\alpha b} + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot \int_0^b \phi(b - x, b) \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha x} \cdot dx. \end{aligned} \quad (33)$$

Sustituyendo la estructura de solución (30) en (33) :

$$\begin{aligned} A_1 \cdot e^{r_1 \cdot b} + A_2 \cdot e^{r_2 \cdot b} &= \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot e^{-\alpha \cdot b} + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot \int_0^b (A_1 \cdot e^{r_1 \cdot (b-x)} + A_2 \cdot e^{r_2 \cdot (b-x)}) \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot dx, \\ A_1 \cdot e^{r_1 \cdot b} \cdot \left[ \lambda + \delta - \frac{\lambda \cdot \alpha}{(r_1 + \alpha)} \right] + A_2 \cdot e^{r_2 \cdot b} \cdot \left[ \lambda + \delta - \frac{\lambda \cdot \alpha}{(r_2 + \alpha)} \right] \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot e^{-\alpha \cdot b} \cdot \left[ 1 - \underbrace{\left( \alpha \cdot \left( \frac{A_1}{(r_1 + \alpha)} + \frac{A_2}{(r_2 + \alpha)} \right) \right)}_{\text{igual a 1 por la ecuación (32)}} \right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto nos queda la segunda ecuación expresada de la siguiente manera:

$$A_1 \cdot e^{r_1 \cdot b} \cdot \left[ \lambda + \delta - \frac{\lambda \cdot \alpha}{(r_1 + \alpha)} \right] + A_2 \cdot e^{r_2 \cdot b} \cdot \left[ \lambda + \delta - \frac{\lambda \cdot \alpha}{(r_2 + \alpha)} \right] = 0. \quad (34)$$

Una vez obtenidas las ecuaciones (32) y (34) tendremos que resolver el siguiente sistema para poder hallar  $A_1$  y  $A_2$ :

$$\begin{cases} \frac{A_1}{(r_1 + \alpha)} + \frac{A_2}{(r_2 + \alpha)} = \frac{1}{\alpha} \\ A_1 \cdot e^{r_1 \cdot b} \cdot \left[ \lambda + \delta - \frac{\lambda \cdot \alpha}{(r_1 + \alpha)} \right] + A_2 \cdot e^{r_2 \cdot b} \cdot \left[ \lambda + \delta - \frac{\lambda \cdot \alpha}{(r_2 + \alpha)} \right] = 0, \end{cases}$$

por lo que  $A_1, A_2$  son:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{-(r_1 + \alpha) \cdot [r_2 \cdot (\lambda + \delta) + \alpha \cdot \delta] \cdot e^{r_2 \cdot b}}{-\alpha \cdot e^{r_2 \cdot b} \cdot [r_2 \cdot (\lambda + \delta) + \alpha \cdot \delta] + \alpha \cdot e^{r_1 \cdot b} \cdot [r_1 \cdot (\lambda + \delta) + \alpha \cdot \delta]}, \\ A_2 &= \frac{(r_2 + \alpha) \cdot [r_1 \cdot (\lambda + \delta) + \alpha \cdot \delta] \cdot e^{r_1 \cdot b}}{-\alpha \cdot e^{r_2 \cdot b} \cdot [r_2 \cdot (\lambda + \delta) + \alpha \cdot \delta] + \alpha \cdot e^{r_1 \cdot b} \cdot [r_1 \cdot (\lambda + \delta) + \alpha \cdot \delta]}, \end{aligned}$$

y sustituyendo en (30),

$$\phi_\delta(u, b) = \frac{-(r_1 + \alpha) \cdot [r_2 \cdot (\lambda + \delta) + \alpha \cdot \delta] \cdot e^{r_1 \cdot u + r_2 \cdot b} + (r_2 + \alpha) \cdot [r_1 \cdot (\lambda + \delta) + \alpha \cdot \delta] \cdot e^{r_2 \cdot u + r_1 \cdot b}}{\alpha \cdot e^{r_1 \cdot b} \cdot [r_1 \cdot (\lambda + \delta) + \alpha \cdot \delta] - \alpha \cdot e^{r_2 \cdot b} \cdot [r_2 \cdot (\lambda + \delta) + \alpha \cdot \delta]}. \quad (35)$$

Volvemos a utilizar el teorema de Vieta, a partir del polinomio de segundo grado que tenemos en el denominador de la expresión (29),  $c \cdot s^2 - (\lambda + \delta - \alpha c) \cdot s - \alpha \cdot \delta = 0$ , obtendremos una serie de expresiones<sup>7</sup> que nos servirán para poder simplificar la función (35). De esta forma (35), puede simplificarse, obteniendo

$$\phi_\delta(u, b) = E[e^{-\delta T}] = \frac{\lambda}{c} \cdot \frac{r_1 \cdot e^{r_2 \cdot u + r_1 \cdot b} - r_2 \cdot e^{r_1 \cdot u + r_2 \cdot b}}{(r_1 + \alpha) \cdot r_1 \cdot e^{r_1 \cdot b} - (r_2 + \alpha) \cdot r_2 \cdot e^{r_2 \cdot b}}, \quad (36)$$

7

$$r_1 + r_2 = \frac{\lambda + \delta - \alpha c}{c}$$

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{-\alpha \cdot \delta}{c}$$

$$(r_1 + \alpha) \cdot (r_2 + \alpha) = \frac{\alpha \cdot \lambda}{c}$$

que es la transformada del momento de ruina cuando la cuantía del siniestro sigue una distribución exponencial de parámetro  $\alpha$ . A esta misma expresión llegaron Dickson y Waters (2004) mediante un proceso de derivaciones sucesivas.

#### 4.5. Distribución de la cuantía del siniestro: Erlang $(2, \alpha)$

Consideramos el desarrollo del proceso que sigue una Erlang  $(2, \alpha)$  para la distribución de la cuantía del siniestro:

$$X \sim Erlang(2, \alpha)$$

Tenemos que su función de densidad es:

$$p(x) = \alpha^2 \cdot x \cdot e^{-\alpha \cdot x},$$

y su transformada de Laplace es:

$$\tilde{f}(s) = \frac{\alpha^2}{(s + \alpha)^2}. \quad (37)$$

Sustituyendo la expresión (37) en (17), obtenemos

$$\tilde{\phi}(s) = \frac{\lambda \cdot (s + 2 \cdot \alpha) - c \cdot \phi(0) \cdot (s + \alpha)^2}{c \cdot s^3 - (\lambda + \delta - 2 \cdot \alpha \cdot c) \cdot s^2 - \alpha \cdot (2 \cdot \lambda + 2 \cdot \delta - \alpha \cdot c) \cdot s - \alpha^2 \cdot \delta} \quad (38)$$

siendo,  $c \cdot s^3 - (\lambda + \delta - 2 \cdot \alpha \cdot c) \cdot s^2 - \alpha \cdot (2 \cdot \lambda + 2 \cdot \delta - \alpha \cdot c) \cdot s - \alpha^2 \cdot \delta$ , la ecuación característica de Lundberg y sus raíces son  $r_1, r_2$  y  $r_3$ . Expresando la transformada  $\tilde{\phi}(s)$  en fracciones parciales nos queda de la siguiente forma:

$$\tilde{\phi}(s) = \frac{A_1}{s - r_1} + \frac{A_2}{s - r_2} + \frac{A_3}{s - r_3},$$

seguidamente, su inversa es directa,

$$\phi_\delta(u, b) = A_1 \cdot e^{r_1 \cdot u} + A_2 \cdot e^{r_2 \cdot u} + A_3 \cdot e^{r_3 \cdot u}, \quad (39)$$

donde  $A_1, A_2$  y  $A_3$  dependerán de  $b$ , pero no de  $u$ . Para determinarlas necesitaremos hallar tres condiciones:

■ Primera y segunda condición:

En la expresión (16) si la distribución de cuantía del siniestro sigue una distribución Erlang  $(2, \alpha)$  tenemos,

$$\phi_\delta(u, b) = \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot \left[ \frac{c}{\lambda} \cdot \phi'(u, b) + \int_0^u \phi(u-x, b) \cdot \alpha^2 \cdot x \cdot e^{-\alpha x} \cdot dx + e^{-\alpha u} \cdot (u \cdot \alpha + 1) \right]. \quad (40)$$

Sustituyendo la estructura de solución (39) en (40):

$$\begin{aligned} & A_1 \cdot e^{r_1 \cdot u} + A_2 \cdot e^{r_2 \cdot u} + A_3 \cdot e^{r_3 \cdot u} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot \left[ \frac{c}{\lambda} \cdot (A_1 \cdot r_1 \cdot e^{r_1 \cdot u} + A_2 \cdot r_2 \cdot e^{r_2 \cdot u} + A_3 \cdot r_3 \cdot e^{r_3 \cdot u}) \right. \\ & \quad \left. + \alpha^2 \cdot \int_0^u (A_1 \cdot e^{r_1 \cdot (u-x)} + A_2 \cdot e^{r_2 \cdot (u-x)} + A_3 \cdot e^{r_3 \cdot (u-x)}) \cdot e^{-\alpha x} \cdot x \cdot dx \right. \\ & \quad \left. + e^{-\alpha u} \cdot (u \cdot \alpha + 1) \right] \\ &= \frac{c}{\lambda + \delta} \cdot (A_1 \cdot r_1 \cdot e^{r_1 \cdot u} + A_2 \cdot r_2 \cdot e^{r_2 \cdot u} + A_3 \cdot r_3 \cdot e^{r_3 \cdot u}) \\ & \quad + \frac{\lambda \cdot \alpha^2}{\lambda + \delta} \cdot \left[ \frac{A_1 \cdot e^{r_1 \cdot u}}{(r_1 + \alpha)^2} - \frac{A_1 \cdot e^{-\alpha \cdot u} \cdot u}{(r_1 + \alpha)} - \frac{A_1 \cdot e^{-\alpha \cdot u}}{(r_1 + \alpha)^2} + \frac{A_2 \cdot e^{r_2 \cdot u}}{(r_2 + \alpha)^2} - \frac{A_2 \cdot e^{-\alpha \cdot u} \cdot u}{(r_2 + \alpha)} \right. \\ & \quad \left. - \frac{A_2 \cdot e^{-\alpha \cdot u}}{(r_2 + \alpha)^2} + \frac{A_3 \cdot e^{r_3 \cdot u}}{(r_3 + \alpha)^2} - \frac{A_3 \cdot e^{-\alpha \cdot u} \cdot u}{(r_3 + \alpha)} - \frac{A_3 \cdot e^{-\alpha \cdot u}}{(r_3 + \alpha)^2} \right] \\ & \quad + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot e^{-\alpha \cdot u} \cdot (u \cdot \alpha + 1). \end{aligned}$$

Simplificando, obtenemos una expresión donde podemos deducir las dos primeras condiciones para hallar las  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$ . A continuación se detallan los pasos siguientes,

$$\begin{aligned} & A_1 \cdot e^{r_1 \cdot u} \cdot \left[ 1 - \frac{c}{\lambda + \delta} \cdot r_1 - \frac{\lambda \cdot \alpha^2}{(\lambda + \delta) \cdot (r_1 + \alpha)^2} \right] + A_2 \cdot e^{r_2 \cdot u} \cdot \left[ 1 - \frac{c}{\lambda + \delta} \cdot r_2 - \frac{\lambda \cdot \alpha^2}{(\lambda + \delta) \cdot (r_2 + \alpha)^2} \right] \\ & + A_3 \cdot e^{r_3 \cdot u} \cdot \left[ 1 - \frac{c}{\lambda + \delta} \cdot r_3 - \frac{\lambda \cdot \alpha^2}{(\lambda + \delta) \cdot (r_3 + \alpha)^2} \right] \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot e^{-\alpha \cdot u} \cdot (u \cdot \alpha + 1) \\ & + \frac{\lambda \cdot \alpha^2}{\lambda + \delta} \cdot \left[ -\frac{A_1 \cdot e^{-\alpha \cdot u} \cdot u}{(r_1 + \alpha)} - \frac{A_1 \cdot e^{-\alpha \cdot u}}{(r_1 + \alpha)^2} - \frac{A_2 \cdot e^{-\alpha \cdot u} \cdot u}{(r_2 + \alpha)} - \frac{A_2 \cdot e^{-\alpha \cdot u}}{(r_2 + \alpha)^2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{A_3 \cdot e^{-\alpha \cdot u} \cdot u}{(r_3 + \alpha)} - \frac{A_3 \cdot e^{-\alpha \cdot u}}{(r_3 + \alpha)^2} \right], \end{aligned}$$

$$1 = \alpha^2 \cdot \left[ \frac{A_1 \cdot u}{(r_1 + \alpha)} + \frac{A_1}{(r_1 + \alpha)^2} + \frac{A_2 \cdot u}{(r_2 + \alpha)} + \frac{A_2}{(r_2 + \alpha)^2} + \frac{A_3 \cdot u}{(r_3 + \alpha)} + \frac{A_3}{(r_3 + \alpha)^2} \right] - u \cdot \alpha,$$

$$0 = \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha^2 \cdot A_i \cdot u}{(r_i + \alpha)} + \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha^2 \cdot A_i}{(r_i + \alpha)^2} - u \cdot \alpha - 1,$$

$$0 = u \cdot \alpha \cdot \left[ \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha \cdot A_i}{(r_i + \alpha)} - 1 \right] + \left[ \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha^2 \cdot A_i}{(r_i + \alpha)^2} - 1 \right]. \quad (41)$$

A partir de la expresión (41), hallamos las dos primeras ecuaciones:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\alpha \cdot A_i}{(r_i + \alpha)} = 1, \quad (42)$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\alpha^2 \cdot A_i}{(r_i + \alpha)^2} = 1. \quad (43)$$

■ Tercera condición:

Nos planteamos la ecuación integro-diferencial de  $\phi_\delta(b, b)$ ,

$$\begin{aligned} \phi_\delta(b, b) &= \int_0^\infty \lambda \cdot e^{-\lambda t} \cdot e^{-\delta t} \cdot \left[ \int_0^b \phi(b-x, b) \cdot p(x) \cdot dx + [1 - P(b)] \right] \cdot dt \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \delta} [1 - P(b)] + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot \int_0^b \phi(b-x, b) \cdot p(x) \cdot dx \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot e^{-\alpha b} \cdot (b \cdot \alpha + 1) + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot \int_0^b \phi(b-x, b) \cdot \alpha^2 \cdot e^{-\alpha x} \cdot x \cdot dx. \end{aligned} \quad (44)$$

Sustituyendo la estructura de solución (39) en (44) :

$$\begin{aligned} &A_1 \cdot e^{r_1 \cdot b} + A_2 \cdot e^{r_2 \cdot b} + A_3 \cdot e^{r_3 \cdot b} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot e^{-\alpha b} \cdot (b \cdot \alpha + 1) + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot \int_0^b (A_1 \cdot e^{r_1 \cdot (b-x)} + A_2 \cdot e^{r_2 \cdot (b-x)} \\ &+ A_3 \cdot e^{r_3 \cdot (b-x)}) \cdot \alpha^2 \cdot e^{-\alpha x} \cdot x \cdot dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &A_1 \cdot e^{r_1 \cdot b} \cdot \left[ 1 - \frac{\lambda \cdot \alpha^2}{(\lambda + \delta) \cdot (r_1 + \alpha)} \right] + A_2 \cdot e^{r_2 \cdot b} \cdot \left[ 1 - \frac{\lambda \cdot \alpha^2}{(\lambda + \delta) \cdot (r_2 + \alpha)} \right] + A_3 \cdot e^{r_3 \cdot b} \cdot \left[ 1 - \frac{\lambda \cdot \alpha^2}{(\lambda + \delta) \cdot (r_3 + \alpha)} \right] \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \cdot e^{-\alpha b} \cdot \underbrace{\left[ b \cdot \alpha + 1 - \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha^2 \cdot A_i \cdot b}{(r_i + \alpha)} - \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha^2 \cdot A_i}{(r_i + \alpha)^2} \right]}_{\text{igual a 0 por las ecuaciones (42) y (43)}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto nos queda la tercera ecuación expresada de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^3 A_i \cdot e^{r_i \cdot b} \cdot \left[ \frac{\lambda + \delta}{\lambda} - \frac{\alpha^2}{(r_i + \alpha)} \right] = 0 \quad (45)$$



Una vez obtenidas las ecuaciones (42), (43) y (45) tendremos que resolver el siguiente sistema para poder hallar  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$ :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha \cdot A_i}{(r_i + \alpha)} = 1 \\ \sum_{i=1}^3 \frac{\alpha^2 \cdot A_i}{(r_i + \alpha)^2} = 1 \\ \sum_{i=1}^3 A_i \cdot e^{r_i \cdot b} \cdot \left[ \frac{\lambda + \delta}{\lambda} - \frac{\alpha^2}{(r_i + \alpha)} \right] = 0 \end{cases} .$$

Halladas  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  y sustituyendo en (39) se consigue la transformada del momento de ruina cuando la cuantía del siniestro sigue una distribución Erlang  $(2, \alpha)$ .

#### 4.6. Ejemplos numéricos para el caso de Erlang $(2, \alpha)$

Definidas las funciones  $\phi_\delta(u, b)$  para los casos en que la distribución de la cuantía del siniestro es una exponencial unitaria, exponencial de parámetro  $\alpha$  y Erlang  $(2, \alpha)$ , podemos considerarlas como sus transformadas del momento de ruina. De tal forma que si solucionásemos cada expresión por su correspondiente transformada inversa de Laplace hallaríamos la función de densidad de la variable que estamos estudiando. Es decir,

$$\phi_\delta(u, b) = E[e^{-\delta \cdot T}] = \int_0^\infty e^{-\delta \cdot T} \cdot f(T) \cdot dx = \tilde{f}(\delta),$$

siendo  $f(T)$  la función de densidad para el momento de ruina, la cual queremos hallar, y ahora  $\tilde{f}(\delta)$  su transformada respectiva con parámetro  $\delta$ . Como  $\tilde{f}(\delta) = \phi_\delta(u, b)$ , haciendo su transformada inversa de Laplace que denotaremos como  $L^{-1}[\tilde{f}(\delta)]$ , encontraríamos las funciones de densidad para cada caso:

$$L^{-1}[\tilde{f}(\delta)] = L^{-1}[\phi_\delta(u, b)] = f(T). \quad (46)$$

También podemos encontrar los momentos ordinarios de orden  $k$ ,  $p_k = E(T^k)$ , para el momento de ruina. Las transformadas de Laplace cumplen que sus derivadas de orden  $k$  sustituidas por el valor 0 en el parámetro de la transformación y cambiando el signo respecto  $(-1)^k$  para  $k = 1, 2, \dots$ , obtenemos los momentos de orden  $k$ ,  $p_k$ . Por lo tanto,

$$E(T^k) = (-1)^k \cdot \tilde{f}^{(k)}(0), \quad (47)$$

y tendremos para

$$\begin{aligned}
 E(T^1) &= -\tilde{f}'(0), \\
 E(T^2) &= +\tilde{f}''(0), \\
 E(T^3) &= -\tilde{f}'''(0), \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

A continuación se presentan unos ejemplos numéricos para ver el comportamiento de la esperanza, varianza, desviación típica y el coeficiente de variación de la variable momento de ruina cuando la distribución de cuantía del siniestro sigue una Erlang  $(2, \alpha)$  con  $\alpha = 2$ . Los resultados han sido obtenidos mediante programación en Mathematica.

**Ejemplo 1** Para una distribución de cuantía del siniestro Erlang(2, 2), considerando  $\lambda = 1$ ,  $b = 10$ ,  $c = 1'$ ,  $p_1 = 1$ , obtenemos en la figura 8 la tabla para distintos valores de  $u$ . Podemos observar como la esperanza del momento de ruina va aumentando

u	$E[T]= p_1$	$E[T^2]=p_2$	$V[T]= p_2 -(p_1)^2$	DT	$CV=(DT/ p_1) \times 100$
0	20,0631	3,867,47	3,464,94	58,6638	293,3930
1	39,9579	7,889,50	6,292,87	79,3276	198,5280
2	58,1935	11,666,10	8,279,59	90,9922	156,3620
3	73,2655	14,865,50	9,497,67	97,4560	133,0180
4	85,4515	17,507,70	10,205,70	101,0230	118,2230
5	95,0798	19,632,00	10,591,90	102,9170	108,2430
6	102,4450	21,279,60	10,784,70	103,8490	101,3710
7	107,8080	22,491,80	10,869,20	104,2550	96,7046
8	111,4000	23,309,10	10,899,20	104,3990	93,7157
9	113,4250	23,771,40	10,906,30	104,4330	92,0728
10	114,0630	23,917,20	10,906,90	104,4360	91,5600

Figura 8: para distintos valores de  $u$

a medida que tengamos un nivel inicial de reservas mayor, la cual cosa nos indica una cosa bastante lógica, ya que con más nivel inicial de reservas la ruina sucederá más tarde. Vemos que la variación o dispersión de la variable a más reservas iniciales va incrementando cada vez menos. Con el coeficiente de variación podemos medir la dispersión relativa de los datos. A la vista de los resultados, observamos que a mayor nivel inicial de reservas cada vez tenemos menos dispersión. En la figura 9 representamos gráficamente el comportamiento de la esperanza y el coeficiente de variación respecto a  $u$ .

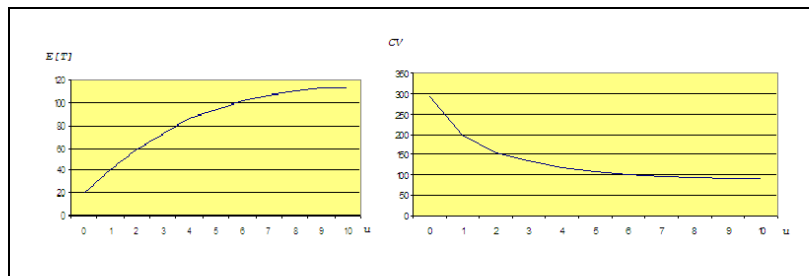


Figura 9: Esperanza y coeficiente de variación

**Ejemplo 2** Para una distribución de cuantía del siniestro Erlang(2, 2), considerando  $\lambda = 1$ ,  $u = 7$ ,  $c = 1'1$ ,  $p_1 = 1$ , obtenemos en la figura 10 la tabla para distintos valores de  $b$ . También en este caso la esperanza del momento de ruina va aumentando a

b	$E [T]= p_1$	$E [T^2]=p_2$	$V [T]= p_2 - (p_1)^2$	DT	$CV=(DT/p_1) \times 100$
7	51,09	4.790,72	2.181,00	46,70	91,42
8	67,73	8.488,80	3.901,49	62,46	92,22
9	86,54	14.133,60	6.643,89	81,51	94,18
10	107,81	22.491,80	10.869,20	104,26	96,70
20	551,25	761.936,00	458.065,00	676,81	122,78

Figura 10: para distinto valores de b

medida que tengamos una barrera de nivel superior, ya que el efecto de una barrera más alta retrasa el momento de ruina. Vemos que la variación de la variable a mayor nivel de la barrera mayor también es ésta. Con el coeficiente de variación vemos que la dispersión relativa de los datos es cada vez mayor cuanto mayor es el nivel de la barrera .

**Ejemplo 3** Para una distribución de cuantía del siniestro Erlang(2, 2), considerando  $\lambda = 1$ ,  $c = 1'1$ ,  $p_1 = 1$ , obtenemos en la figura 11 la tabla para distintos valores cuando  $b = u$ . La esperanza del momento de ruina va aumentando a medida que tengamos una barrera igual a las reservas cada vez mayores. Vemos que la variación de la variable también aumenta bastante rápido a mayor nivel de la  $b = u$ . Y en el coeficiente de variación observamos diferentes dispersiones relativas de los datos.

b=u	$E[T]=p_1$	$E[T^2]=p_2$	$V[T]=p_2-(p_1)^2$	DT	$CV=(DT/p_1)\times 100$
0	1,0000	2,00	1,00	1,00	100,000
1	2,1962	9,56	4,73	2,18	99,052
5	25,5944	1.210,02	554,95	23,56	92,042
10	114,0630	23.917,20	10.906,90	104,44	91,560
20	740,9260	1.037.600,00	488.629,00	699,02	94,344

Figura 11: para distintos valores cuando  $b=u$

## 5. Conclusiones

En este trabajo hemos analizado el momento de ruina en el modelo clásico de la teoría del riesgo modificado con la introducción de una barrera constante. Previamente, hemos introducido el modelo clásico de riesgo, que es el que tiene por base el proceso de Poisson, para la actividad de una compañía de seguros en tiempo continuo. Este modelo es un proceso estocástico que determina el proceso de las reservas, donde la ruina ocurrirá cuando éstas sean negativas. La primera vez que se produce la ruina se conoce como el momento de ruina, objeto de estudio en este trabajo. En la sección 2, se define la probabilidad de ruina y se presenta una primera aproximación de ésta mediante el coeficiente de ajuste y también hemos creído necesario definir la desigualdad de Lundberg ya que se trata de un instrumento útil para conseguir límites para la probabilidad de ruina.

Se introducen en el trabajo dos maneras posibles de determinar la probabilidad de ruina en el modelo clásico mediante ecuaciones integro-diferenciales: por un lado con el argumento diferencial basado en la ocurrencia o no de un siniestro en un diferencial de tiempo y por otro lado, con el planteamiento de ecuaciones de renovación. Este último es el que hemos utilizado para estudiar el momento de ruina.

Con un modelo alternativo, en el cual el modelo clásico se ve modificado por una barrera constante, vemos que la probabilidad de ruina en horizonte infinito es igual a uno. Independientemente del nivel en que pongamos la barrera todas las trayectorias acabarán arruinándose. Ello permite simplificar el cálculo de la transformada del momento de ruina, pues la función indicadora definida en el apartado 4.2 se hace igual a uno.

En el trabajo se obtiene la ecuación integro-diferencial para la transformada del momento de ruina. En este punto, conviene remarcar que la ecuación (16) es general para cualquier distribución de la cuantía del siniestro. Si solucionamos (16) utilizando transformadas de Laplace, obtenemos una estructura de solución, (18), válida para un grupo muy amplio de distribuciones de cuantía del siniestro. Para los casos particulares exponencial unitaria, exponencial de parámetro  $\alpha$  y para una Erlang  $(2, \alpha)$ , previa determinación de las condiciones adicionales necesarias y con el software Mathematica, obtenemos las expresiones de la transformada de Laplace del momento de ruina. Dichas expresiones permitirían obtener en un futuro la función de densidad del momento de ruina, realizando su transformada inversa de Laplace. Por último, en los ejemplos numéricos se obtienen los momentos ordinarios y centrales del Momento de Ruina.

## 6. Anexo

Algunas Transformadas de Laplace inmediatas:

$f(y)$	$\tilde{f}(s)$
1	$\frac{1}{s} \quad s > 0$
$y$	$\frac{1}{s^2} \quad s > 0$
$y^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}} \quad s > 0$
$e^{a \cdot y}$	$\frac{1}{s-a} \quad s > a$
$e^{-a \cdot y}$	$\frac{1}{s+a} \quad s > 0$
$\text{sen } ay$	$\frac{a}{s^2+a^2} \quad s > 0$
$\text{cos } ay$	$\frac{s}{s^2+a^2} \quad s > 0$
$\text{senh } ay$	$\frac{a}{s^2-a^2} \quad s >  a $
$\text{cosh } ay$	$\frac{s}{s^2-a^2} \quad s >  a $

## 7. Bibliografía

1. Arnold, L. (1974). *Stochastic Differential Equations: Theory and Application*. John Wiley & Sons, New York.

2. Asmussen, S. (2000). *Ruin probabilities*. Advanced series on statistical science and applied probability. World Scientific.
3. Avram, F. y Usabel, M. (2003). Finite time ruin probabilities with one Laplace inversion, *Insurance: Mathematics and Economics*, 32, 371-377.
4. Beard, R. E.; T. Pentikäinen y E. Pesonen (1990). *Risk Theory*. Chapman and Hall, London.
5. Bowers, N. L. et al. (1997). *Actuarial Mathematics*. The Society of Actuaries, Illinois.
6. Büllhmann, H. (1970). *Mathematical Methods in Risk Theory*. Springer-Verlag, New York.
7. Claramunt, M.M. y M. Mármol (2003). Solvencia: Una introducción a la probabilidad de ruina, *Col·lecció de publicacions del departament de matemàtica econòmica, financera i actuarial*, n°65.
8. Claramunt, M.M., M. Mármol y A. Alegre (2003). A note on the expected present value of dividends with a constant barrier on the discrete time model, *Mitteilungen der Schweiz Aktuarvereinigung*. Heft 2/2003.
9. Dickson, D.C.M. y G.E. Willmot (2005). The density of the time to ruin in the classical Poisson risk model, *Astin Bulletin*, to appear.
10. Dickson, D.C.M. y H.R. Waters (2004). Some optimal dividends problems, *Astin Bulletin*, Vol. 34, n°1.
11. Drekić, S. y G.E. Willmot (2003). On the Density and Moments of the time of ruin with exponential claims, *Astin Bulletin*, Vol. 33, n°1.
12. Drekić, S.; J.E. Stafford y G.E. Willmot (2004). Symbolic calculation of the moments of the time of ruin, *Insurance: Mathematics and Economics*, 34, 109-120.
13. Egídio dos Reis, A.D. (2001). Teoria da ruína, *Iseg*.

14. Feller, W. (1971). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Vol. II. 2a ed. John Wiley & Sons, New York.
15. Finetti, B. De (1957). Su un 'impostazione alternativa della teoria colectiva del rischio. *Trans. XV. Int. Congr. Act.* 2. 433-443.
16. Gerber, H. (1979). *An Introduction to Mathematical Risk Theory*. S.S. Huebner Foundation, University of Pennsylvania, Philadelphia.
17. Gerber, H. y E. Shiu (1998). On the time value of ruin, *North American Actuarial Journal*, 2, 48-78.
18. Grandell, J. (1991). *Aspects of Risk Theory*. Springer-Verlag, New York.
19. IAA (2002). Report of solvency working party, *Prepared for IAA Insurer Regulation Committee*, disponible en [www.iaisweb.org](http://www.iaisweb.org).
20. IAA (2004). A global framework for insurer solvency assessment, *Research Report of the Insurer Solvency Assessment WP of the IAA*, disponible en [www.iaisweb.org](http://www.iaisweb.org).
21. IAIS (2000). On solvency, solvency assessments and actuarial issues, *An IAIS Issues Paper*, disponible en [www.iaisweb.org](http://www.iaisweb.org).
22. Kastelijn, W.M. y J.C.M. Remmerswaal (1986). *Solvency. Surveys of actuarial studies*, n°3. nationale-Nederlanden N.V. search Department. Rotterdam.
23. Li, S. y D.C.M. Dickson (2005). The Maximum Surplus before Ruin in an Erlang(n) Risk Process and Related Problems, *Working paper*, n° 119.
24. Li, S. y J. Garrido (2004). On ruin for the Erlang(n) risk process, *Insurance: Mathematics and Economics*, 34, 391-408.
25. Lima, F.D.P.; García, J.M.A. y A.D. Egídio dos Reis (2002). Fourier/Laplace Transforms and ruin probabilities, *Astin Bulletin*, Vol. 32, n°1.

26. Lin, X.S.; G.E. Willmot y S. Drekić (2003). The classical risk model with a constant dividend barrier: analysis of the Gerber-Shiu discounted penalty function, *Insurance: Mathematics and Economics*, 33, 551-566.
27. Malliaris, A.G. y W.A. Brock (1988). *Stochastic Methods in Economics and Finance*. Advanced Textbooks in Economics, 17, North-Holland.
28. Mármol, M. (2003). *Política de dividendos en una cartera de seguros no vida: Un análisis desde la teoría colectiva del riesgo*, Tesis Doctoral, Facultat de Ciències Econòmiques i Empresariales, UB.
29. Mármol, M.; M. Claramunt y A. Castañer (2005). Política de reparto de dividendos en una cartera de seguros no vida: Análisis discreto, *Cuadernos Actuariales*.
30. Vilar, J. (1992). *Fundamentos matemáticos del análisis de la solvencia dinámica en seguros no vida*. Ed. De la U.C.M., Madrid.
31. Willmot, G.E. y D.C.M. Dickson (2003). The Gerber-Shiu discounted penalty function in the stationary renewal risk model, *Insurance: Mathematics and Economics*, 32, 403-411.