

TRABAJO FINAL DE MÁSTER

Título: OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS ESTOCÁSTICAS EN EL MARCO DE SOLVENCIA II

Autoría: Eric Lasheras

Tutoría: Oriol Roch

Curso académico: 2019-2020



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat d'Economia
i Empresa

Màster
**de Ciències
Actuarials
i Financeres**

Facultad de Economía y Empresa
Universidad de Barcelona

Trabajo Final de Máster
Máster en Ciencias Actuariales y Financieras

**OPTIMIZACIÓN DE
CARTERAS ESTOCÁSTICAS
EN EL MARCO DE
SOLVENCIA II**

Autoría: Eric Lasheras Valdivia

Tutoría: Oriol Roch

“El contenido de este documento es de exclusiva responsabilidad del autor, quien declara que no ha incurrido en plagio y que la totalidad de referencias a otros autores han sido expresadas en el texto”

Resumen: El presente texto explora los problemas de optimización de carteras de inversión estocásticas existentes en el mercado asegurador, desde una perspectiva fundamentalmente práctica. Para ello, se parte de la metodología clásica de optimización, que se combina con el uso de procesos estocásticos como el Movimiento Geométrico Browniano. Posteriormente, se contextualiza el problema de acuerdo con la normativa Solvencia II, que establece unos determinados requerimientos de capital a las entidades en función de los riesgos asumidos, y puede influir en la localización de los activos. Finalmente, se pone en práctica el método adoptado y se analizan los resultados obtenidos con el mismo.

Palabras clave: finanzas, estocásticas, seguros, optimización, Solvencia II

Summary: The present paper explores the stochastic optimization problems of investment portfolios that exist in the insurance market, from a fundamentally practical approach. With that intention, it begins with the classical optimization theory, which is combined with stochastic processes like the Geometric Brownian Motion. Afterwards, the problem is contextualized in regard to the Solvency II regulation, which establishes certain capital requirements to the companies, according to their own risks, that can be influential in the distribution of the assets. Finally, the adopted method is tested and the obtained results are analysed.

Key words: finance, stochastic, insurance, optimization, Solvency II

ÍNDICE

1.	INTRODUCCIÓN.....	1
I.	MARCO TEÓRICO.....	4
2.	CONTEXTO ACTUAL DEL MERCADO ASEGURADOR EN ESPAÑA	4
3.	TEORÍA MODERNA DE CARTERAS.....	8
4.	INCIDENCIA DE SOLVENCIA II EN LOS PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN	11
4.1.	<i>Módulo de riesgo de mercado.....</i>	<i>12</i>
5.	MÉTODO DE OPTIMIZACIÓN.....	16
5.1.	<i>Modelización del precio de los activos.....</i>	<i>17</i>
II.	CASO PRÁCTICO.....	20
6.	ANÁLISIS DE LOS DATOS	20
7.	MODELIZACIÓN DE LOS PRECIOS	24
8.	OPTIMIZACIÓN DE LA CARTERA Y ANÁLISIS DE RESULTADOS	27
9.	CONCLUSIONES.....	30
III.	ANEXOS.....	32
	ANEXO I. CÓDIGO UTILIZADO.....	32
IV.	BIBLIOGRAFÍA.....	43

1. Introducción

El objetivo del presente trabajo es explorar una posible aproximación práctica al problema de optimización de carteras de inversión al que se enfrentan las entidades aseguradoras. La naturaleza de estas compañías es muy peculiar, ya que su modelo de negocio se basa en el cobro de primas como contraparte por la cobertura de determinados riesgos, que podrían provocar un perjuicio económico, o de otra índole, sobre el asegurado, en caso de que se produjeran. En tal caso, es la compañía la que se hace cargo del pago de la totalidad, o de la parte del siniestro que le corresponda en base a las obligaciones adquiridas. Por tanto, las entidades aseguradoras están expuestas a un gran riesgo derivado de la incertidumbre acerca de la probabilidad de acaecimiento de los siniestros, y la magnitud de los mismos. Debido a esta circunstancia, la actividad de inversión de las entidades aseguradoras es un área clave de la compañía, pues debe primar la obtención de la mayor rentabilidad posible, reinvertiendo las primas obtenidas, mediante la construcción de una cartera de activos altamente líquida y con un perfil de riesgo bajo. En el apartado práctico de este trabajo, se propondrá una posible cartera óptima en términos de rentabilidad y riesgo. Este problema se ha resuelto a través de la construcción de un algoritmo en Python, cuyo código se acompaña en los anexos del presente texto.

Debido a la importancia de las entidades aseguradoras en el funcionamiento y seguridad de los mercados, existe en la actualidad una estrecha legislación que regula la gestión de los riesgos por parte de las compañías. En el ámbito europeo, esta regulación está recogida en la *Directiva 2009/138/CE del Parlamento Europeo y del Consejo sobre el acceso a la actividad de seguro y de reaseguro y su ejercicio (2009)*, en adelante, Solvencia II. Esta normativa pretende, a grandes rasgos, que las entidades cumplan con unos requisitos cuantitativos, de gobernanza y de información. Los dos últimos, están fuera del alcance de este trabajo, ya que se ha situado el énfasis en la parte más técnica de la normativa. En concreto, los requisitos cuantitativos se centran en el cálculo de las provisiones y en el cumplimiento de unos determinados umbrales de capital; los cuales, como es lógico, aumentan a medida que la entidad aseguradora asume mayores riesgos. Debido al carácter financiero del presente trabajo, nos centraremos en los riesgos relacionados con las inversiones de la compañía; concretamente, se aproximará una expresión para el cálculo de este capital, que incluiremos como una restricción en la optimización de la cartera de la compañía. Esto, nos permitirá un acercamiento más realista al problema de optimización, ya que las compañías deben cumplir con Solvencia II y otras regulaciones, que influyen en la localización de su cartera de activos.

Por otro lado, el enfoque utilizado para el problema de optimización se basa en la teoría moderna de carteras de Markowitz (1952). Como veremos más adelante, esta teoría plantea la existencia de una cartera óptima que maximiza la rentabilidad, en función de un determinado nivel riesgo. En base a esto, trataremos de encontrar la cartera que maximice una medida de rentabilidad-riesgo, conocida como Ratio de Sharpe y planteada por el propio Sharpe (1994), a la par que cumple con la restricción de capital, mediante la correcta distribución de las inversiones de la compañía. Para simplificar el análisis, y

con el objetivo de que los resultados arrojen una mayor claridad, asumiremos que la entidad aseguradora analizada únicamente puede realizar dos tipos de inversiones:

- Inversión en renta fija (bonos).
- Inversión en renta variable (acciones).

A pesar de que parece una simplificación poco realista, veremos cómo, en la práctica, estos tipos de activos componen prácticamente la totalidad de la cartera de inversión de las compañías en el mercado asegurador español.

El método de trabajo seguido se ha basado en la teoría estocástica, ya que asumimos que la compañía querrá maximizar su cartera en base a los rendimientos que obtendrá en un momento futuro y que en la actualidad desconoce, debido a las fluctuaciones en el precio de los activos. Por ello, modelizaremos estos precios asumiendo que siguen la dinámica de un proceso browniano, de manera similar al análisis realizado por Merton (1969), con lo que se pretende captar los movimientos aleatorios que se dan en el mercado. Mediante este proceso, se obtendrá el valor esperado de los precios de los activos en un momento futuro, que serán datos necesarios en el proceso de optimización. Nótese que, mediante la creación de estos escenarios, será posible realizar una optimización probabilística, basada en las predicciones realizadas.

En definitiva, supondremos que la entidad pretende maximizar la rentabilidad de su cartera, lo cual le llevará a dedicar una mayor proporción de la misma a inversiones de mayor riesgo, como las acciones. Esta asunción de riesgos deberá mitigarse mediante la reserva de un determinado capital, exigido acorde a lo establecido en Solvencia II. Este capital, no podrá superar un determinado umbral debido a efectos prácticos, lo cual actuará como restricción en el problema.

El planteamiento del problema de optimización es similar al seguido por autores como Black y Litterman (1992), Dembo y Rosen (1999) y Rockafellar y Uryasev (2000). En especial, se ha seguido un proceso más parecido a éstos últimos, con la diferencia de que en este caso el riesgo se mide en base a los requisitos de Solvencia II y no al CVaR.

Por último, el presente trabajo se divide en dos grandes bloques. El primero de estos está compuesto por el marco teórico del trabajo, donde se introduce toda la información necesaria para el planteamiento y la resolución del problema, y se divide básicamente en los siguientes apartados:

- a. Contexto actual del mercado asegurador en España
- b. Teoría Moderna de Carteras
- c. Incidencia de Solvencia II en la optimización
- d. Método de optimización

En el primer apartado, se contextualizará el mercado asegurador español, con el objetivo de plantear la existencia del problema y aportar algunas cifras relevantes para el entendimiento del mismo. Posteriormente, se introducirá la Teoría Moderna de Carteras, que sentó las bases de la optimización de carteras y en la cual se basan partes de el presente texto. A continuación, se procede a analizar la normativa Solvencia II, especialmente en lo referente a inversiones, con el fin de ver la afectación que tiene en la

localización de activos por parte de las compañías aseguradoras. Finalmente, se planteará teóricamente el método utilizado para resolver el problema de optimización.

Una vez presentada la teoría necesaria, se procede al segundo bloque del trabajo, la aplicación práctica, donde se realizará el análisis del caso y se expondrán los resultados obtenidos. Los apartados de este segundo bloque son los siguientes:

- a. Análisis de los datos
- b. Modelización de los precios
- c. Optimización de la cartera y análisis de resultados

En último lugar, y para finalizar, se expondrán las conclusiones obtenidas mediante la realización de este trabajo.

I. MARCO TEÓRICO

2. Contexto actual del mercado asegurador en España

A fin de poder comprender en mayor medida las motivaciones del autor en la realización de este análisis, se procede a contextualizar brevemente el mercado asegurador español, mediante la presentación de ciertas cifras relevantes del sector, especialmente en lo que respecta a las inversiones realizadas por las entidades.

En primer lugar, el volumen total que representaron las inversiones de las entidades aseguradoras españolas en 2018 ascendió a 295.287 millones de euros, que representa prácticamente el 25% del PIB español en el mismo año. Con esto, se pretende poner en relevancia la importancia de estas entidades en el mercado, no sólo como garantes de seguridad, sino también como motor económico del mismo.

En segundo lugar, según datos publicados por el Servicio de estudios de MAPFRE (2019), en 2018 la inversión en renta fija representó de media el 75% del total de la cartera de las entidades, mientras que la inversión en renta variable ascendió al 5,2%, como se puede observar en la *Figura 1*. Este primer dato es muy relevante, ya que nos da indicios de que el sector asegurador es bastante conservador en cuanto a sus inversiones, buscando, en su mayoría, invertir su cartera en renta fija. Además, dentro de este 75%, más del 55% corresponde a renta fija soberana, considerada la inversión libre de riesgo. El resto de la cartera se localizó principalmente en fondos de inversión, tesorería e inmuebles, suponiendo esta última inversión un porcentaje muy reducido, de tan solo el 3,6%.

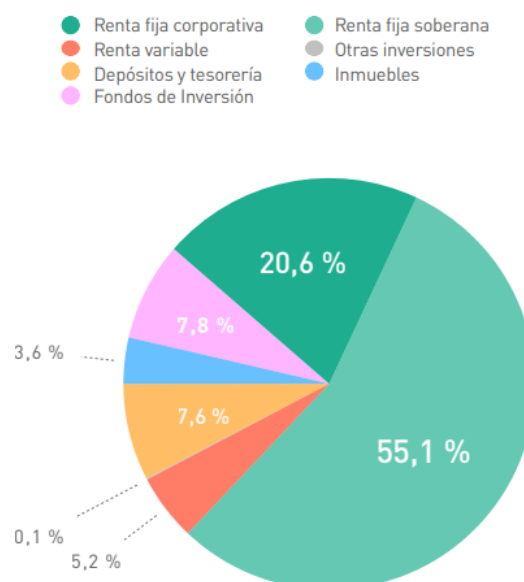


Figura 1. Estructura de las inversiones afectas a provisiones técnicas, 2018 (%) (Fuente: Servicio de estudios de MAPFRE)

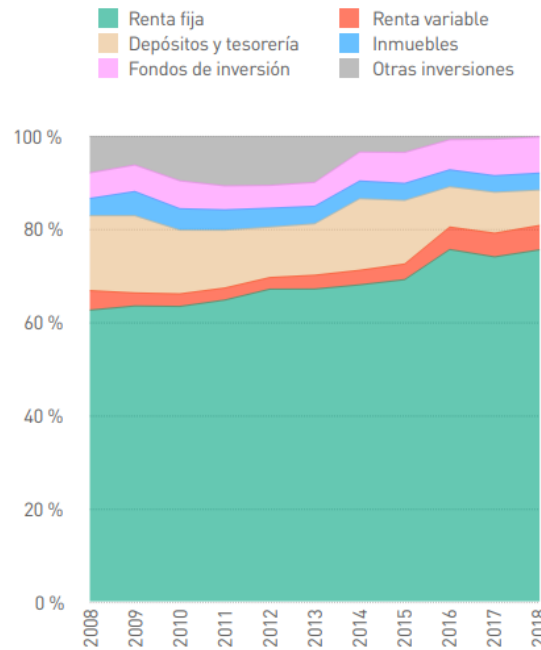


Figura 2. Evolución de la estructura de las inversiones del mercado asegurador, 2008-2018 (%) (Fuente: Servicio de estudios de MAPRE)

Es interesante analizar también la evolución de la distribución de esta cartera en los últimos años. Como se puede observar en la *Figura 2*, la tendencia ha sido aumentar la proporción destinada a renta fija, que en 2008 representaba prácticamente 15 puntos porcentuales menos. La renta variable también ha experimentado un crecimiento bastante considerable, y parece que la tendencia continúa siendo alcista. Por otro lado, la parte que más se reduce es la tesorería y depósitos, por lo que se puede afirmar que el sector asegurador ha aumentado la cantidad de sus inversiones en la última década. Nótese también, el significativo cambio en la distribución que se produce a partir del año 2015, donde las tendencias comentadas anteriormente parecen acelerarse con respecto al resto de años. Esto es debido a que en 2016 entró en vigor Solvencia II que, como se ha comentado, exige ciertos requerimientos de capital a las entidades, en función de su perfil de riesgo. Por tanto, podemos confirmar que esta normativa propició ciertos cambios en la gestión de los activos por parte de las compañías, especialmente a partir de 2015, a pesar de que ya venían preparándose desde años anteriores.

Por otro lado, la *Figura 3* muestra la evolución de las rentabilidades obtenidas por el sector asegurador con inversiones financieras en la última década. En los primeros años, se observa como esta rentabilidad es bastante cambiante. Sin embargo, a partir de 2014 podemos observar una tendencia claramente decreciente, con un rendimiento del 2,8% en el último año; es decir, en niveles similares a los de la última crisis. No obstante, la rentabilidad del sector todavía se sitúa por encima de la obtenida con inversiones teóricamente libres de riesgo, aunque en el último año se asemeja bastante a aquellas de mayor plazo.

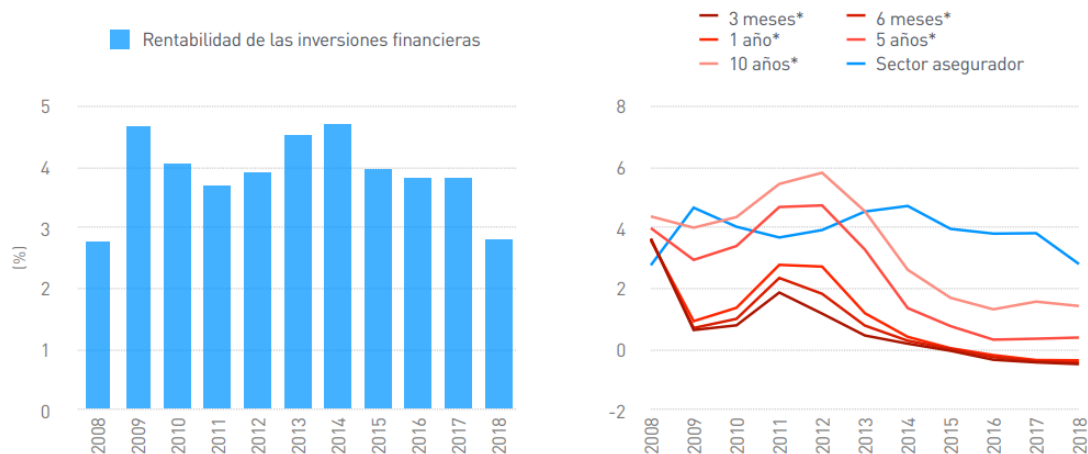


Figura 3. Rentabilidad de las inversiones financieras del sector asegurador, 2008-2018 (ingresos financieros / inversiones promedio, %; tipo de interés libre de riesgo, %) (Fuente: Servicio de estudios de MAPFRE)

En cuanto a la calidad de las inversiones, la mayor parte se concentra en el segundo escalón del *rating* de Solvencia II, teniendo sentido ya que se corresponde con el *rating* de la deuda soberana española (A-) en el último año, que precisamente es el principal destinatario de las inversiones del sector. En último lugar, podemos analizar la evolución de uno de los indicadores de rentabilidad más usados, el ROA, o retorno de los activos. Como se muestra en la *Figura 4*, el sector experimentó un crecimiento en cuanto a su rentabilidad en los años posteriores a la crisis, rendimiento que se mantuvo en niveles cercanos al 2% hasta el año 2015, cuando hubo una caída muy significativa. Esta caída en la rentabilidad de los activos coincide temporalmente con el momento en el que el sector comenzó a destinar una mayor parte de sus inversiones a la renta fija, como hemos visto anteriormente, con el presumible objetivo de prepararse para Solvencia II. A partir de este momento, los niveles de rentabilidad parecieron próximos a la recuperación hasta 2017, cuando se experimentó una nueva caída.

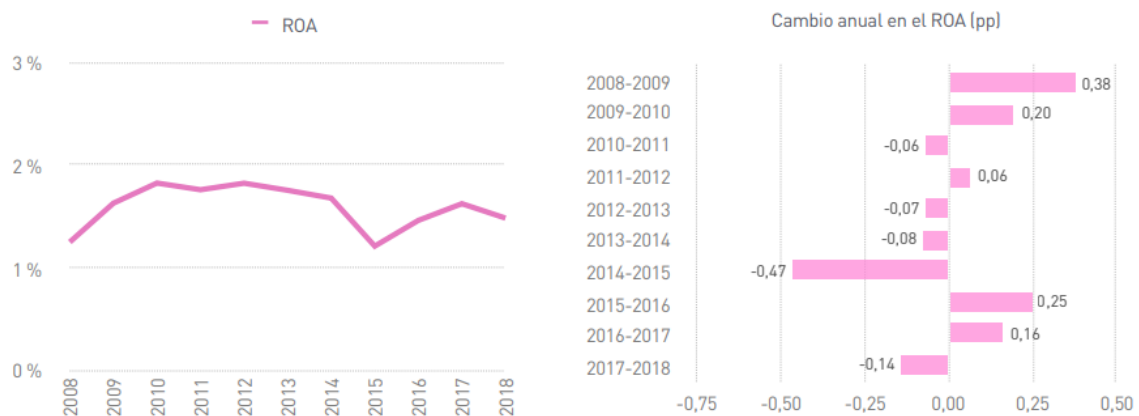


Figura 4. Evolución del retorno sobre activos (ROA), 2008-2018 (retorno sobre activos, %) (Fuente: Servicio de estudios de MAPFRE)

En conclusión, las entidades aseguradoras españolas se encuentran en un momento complejo en cuanto a la colocación de sus activos. Como hemos visto, la mayor parte de las inversiones se destinan a renta fija, para limitar la asunción de riesgos y cumplir con los capitales de Solvencia II. No obstante, los tipos cercanos a cero provocan que en los

últimos años la rentabilidad de sus inversiones se haya visto mermada. Por estos motivos, es manifiesto que nos encontramos frente a un escenario muy interesante, en el que vale la pena analizar posibles métodos de optimización de carteras para aumentar las rentabilidades obtenidas, tal y como se propone en el presente texto. En concreto, en la parte práctica se analizará la posibilidad de destinar un mayor porcentaje a la renta variable, y a estudiar cuál sería el impacto de esta decisión.

3. Teoría Moderna de Carteras

Tras observar la situación actual del mercado asegurador español, ha quedado patente la importancia de la localización de las inversiones por parte de las compañías. Además, es evidente que el reto de aumentar la rentabilidad está en la mesa de todos los departamentos financieros después de unos años con tipos relativamente bajos. En este sentido, podemos afirmar que la optimización de carteras está a la orden del día, no solo en nuestro sector, sino en cualquier otro. Por estos motivos, en este apartado se procede a repasar brevemente la Teoría Moderna de Carteras (TMC), con el objetivo de comprender a posteriori los razonamientos utilizados en la maximización de la cartera en la parte práctica.

La Teoría Moderna de Carteras surgió en el año 1952, a raíz de que Harry Markowitz publicara su famoso artículo "*Portfolio selection*". Hasta ese momento, los inversores se habían basado únicamente en el cálculo de la rentabilidad a la hora de escoger sus inversiones. No obstante, Markowitz observó que el riesgo es otro factor fundamental, ya que no se puede gestionar una cartera sin tener en cuenta las pérdidas que esta puede tener. Pese a que esto era algo que ya se sabía entre los expertos del sector, no fue hasta el momento de la publicación de este artículo, cuando comenzaron a implementarse procesos efectivos de optimización, fundamentados en un análisis técnico del binomio rentabilidad-riesgo. En la actualidad, existen muchos más métodos cuyos resultados reflejan de una forma más realista el comportamiento de los mercados. No obstante, se ha escogido este método por dos motivos: el primero de ellos es que es simple, en el buen sentido, pues permite extraer unas conclusiones muy claras y fáciles de interpretar; en segundo lugar, es imposible hablar de optimización de carteras sin pasar el algún punto por Markowitz. No olvidemos que sus estudios fueron tan relevantes que le llevaron a ganar el premio Nobel de Economía en 1990. Tras esta aclaración, procedemos a desarrollar los puntos más importantes de esta teoría, a fin de poder entender el proceso que se ha seguido en la optimización.

En "*Portfolio selection*", se expone que los inversores adversos al riesgo pueden maximizar la rentabilidad esperada en base a un determinado nivel de riesgo de mercado. En concreto, la teoría expone que la rentabilidad y volatilidad de las inversiones deben analizarse para el conjunto de una cartera, no de forma individual. Para ello, Markowitz construye la denominada frontera eficiente, donde se sitúan todas las carteras óptimas, es decir, las que maximizan la rentabilidad en base a un determinado nivel de riesgo.

En la *Figura 5*, podemos observar la denominada frontera eficiente, que se construye de la siguiente forma: dado un conjunto de activos, podemos representar gráficamente todas las combinaciones posibles de los mismos, que se distribuirán en el plano en función de su rentabilidad esperada y desviación estándar. A partir de aquí, podemos unir los puntos que representan las carteras óptimas, obteniendo así la frontera eficiente, donde se encuentran todas las carteras en las que es aconsejable invertir. De esta manera, dado un determinado nivel de riesgo, podemos construir una cartera que maximice el rendimiento esperado. Del mismo modo, dada una rentabilidad esperada, elegiremos la cartera que presente un menor riesgo.

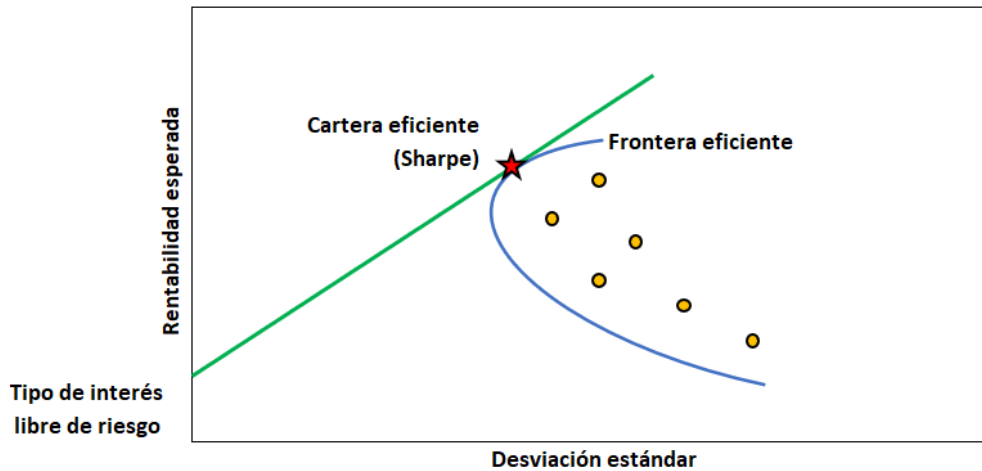


Figura 5. Frontera eficiente de Markowitz (Fuente: Elaboración propia)

A raíz de la publicación de esta teoría, el ganador del Nobel, William Sharpe, desarrolló el conocido **Ratio de Sharpe**. Esta expresión permite a los inversores entender la rentabilidad de sus inversiones en base a su riesgo.

$$\text{Ratio de Sharpe} = \frac{r_p - r_f}{\sigma_p}$$

donde:

r_p = Rendimiento de la cartera

r_f = Rendimiento de los activos libres de riesgo

σ_p = Desviación estándar de los rendimientos de la cartera

El Ratio de Sharpe es uno de los métodos más utilizados para calcular el rendimiento ajustado en base al riesgo y, por tanto, es una herramienta muy útil para comparar distintas carteras, que se ajusta a lo expuesto anteriormente. Además, tiene en cuenta la diversificación, ya que activos con bajas correlaciones presentan una desviación estándar inferior y, por tanto, un mayor Ratio de Sharpe. Si situamos de nuevo nuestra atención en la *Figura 5*, podemos observar que la cartera más eficiente en base a Sharpe es la cartera tangente respecto a la frontera eficiente, en este caso señalada con una estrella roja.

En definitiva, mediante esta expresión podemos encontrar los pesos de nuestra cartera que maximizan el resultado de la ratio, otorgándonos un resultado concreto en la optimización. Por estos motivos, en el presente texto la comparación entre carteras se usará en base a los resultados obtenidos con la expresión anterior, como se recoge en la parte práctica.

Cabe mencionar también, que usualmente los métodos de optimización se basan en datos históricos, a través de los cuales se calculan rentabilidades y desviaciones históricas, que se usan posteriormente como dato en el problema. En este trabajo, sin embargo, el objetivo es realizar el análisis a nivel estocástico, por lo que la optimización se realizará a partir del cálculo de rentabilidades y desviaciones modelizadas según procesos estocásticos, tal y como recoge Birge y Louveaux (2011). Ello, nos permitirá obtener una cartera eficiente en base a las predicciones del futuro comportamiento de los activos, y

no únicamente en función de los datos históricos. En el apartado práctico, analizaremos si este método otorga mejores resultados que una optimización clásica, o si, por el contrario, no merece la pena el esfuerzo analítico y computacional y es mejor basarse únicamente en el pasado para tomar decisiones que afecten al futuro comportamiento de la cartera de activos de la compañía.

4. Incidencia de Solvencia II en los problemas de optimización

Hasta este momento, hemos comentado el funcionamiento general de las inversiones por parte de las aseguradoras, y como la normativa Solvencia II influye en las mismas. En este apartado, el objetivo será analizar en mayor detalle esta normativa y, en concreto, cómo influye a las decisiones que toman las compañías en materia de inversiones. En última instancia, buscamos encontrar una expresión que nos permita calcular el requerimiento de capital que tendría una aseguradora en base a una determinada cartera de activos. Posteriormente, usaremos dicha expresión como una restricción en el problema de optimización, asumiendo que la compañía no puede sobrepasar el umbral de capital requerido máximo.

La Directiva 2009/138/CE, y su respectivo *Ammendment 2014/51/EU* conforman Solvencia II, normativa que, de acuerdo con EIOPA, “*introduce por primera vez un marco prudencial armonizado, sólido y robusto para las compañías de seguros en la UE. Se basa en el perfil de riesgo de cada compañía de seguros individual para promover la comparabilidad, la transparencia y la competitividad*”.

En la práctica, el objetivo de esta legislación es que las entidades aseguradoras conozcan y evalúen mejor sus riesgos, con el fin último de proteger al cliente. Para ello, se divide en tres pilares:

1. Primer pilar: requisitos cuantitativos, especialmente en materia de fondos propios y de cálculo de provisiones técnicas.
2. Segundo pilar: requisitos en materia de organización y gobernanza.
3. Tercer pilar: requisitos de información.

En el presente trabajo, nos centramos en el primer pilar, más concretamente, en el cálculo del CSO (Capital de Solvencia Obligatorio). El CSO es el capital económico que Solvencia II exige a las entidades aseguradoras para asegurarse de que estas disponen de los recursos propios suficientes para hacer frente a sus riesgos. De hecho, representa los fondos propios que deberían tener las compañías para limitar su probabilidad de ruina al 0,5% o, lo que es lo mismo, a 1 de cada 200 veces.

Como se observa en la *Figura 6*, el CSO se divide en tres bloques:

$$CSO = CSO_{básico} + CSO_{riesgo\ operacional} + Ajustes$$

Donde la parte más importante es el $CSO_{básico}$, que se divide en distintos módulos, agregados entre sí a través de una matriz de correlaciones, como se desprende de la siguiente expresión:

$$CSO_{básico} = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{i,j} \cdot CSO_i \cdot CSO_j} + CSO_{intangibles}$$

dónde i, j representan los siguientes módulos:

- Suscripción de no vida
- Suscripción de vida
- Suscripción de salud
- Mercado
- Contraparte



Figura 6. Desagregación del CSO (Fuente: Elaboración propia).

Nuestro objetivo, por tanto, será el de maximizar la Ratio de Sharpe de una cartera, sujeto a la restricción de que el valor esperado del $CSO_{mercado}$ no supere un determinado umbral. Es decir, aumentar la rentabilidad esperada de las inversiones, teniendo en cuenta que cuanto mayor es el riesgo, mayor será el capital que la entidad aseguradora deberá reservarse.

Por tanto, en el siguiente subapartado se procederá a analizar el submódulo de riesgo de mercado, explicando el funcionamiento del mismo, así como las hipótesis que se utilizan en este trabajo y la deducción de la expresión final que utilizaremos como restricción en la optimización de la cartera.

4.1. Módulo de riesgo de mercado

Este módulo representa el riesgo derivado de la volatilidad de los precios de mercado de los instrumentos financieros que integran los activos y pasivos de la compañía. Su importancia en el global del $CSO_{básico}$ es mayúscula, como se puede observar en la

Figura 7, que representa el peso medio de este módulo, respecto al global, en las entidades aseguradoras españolas.

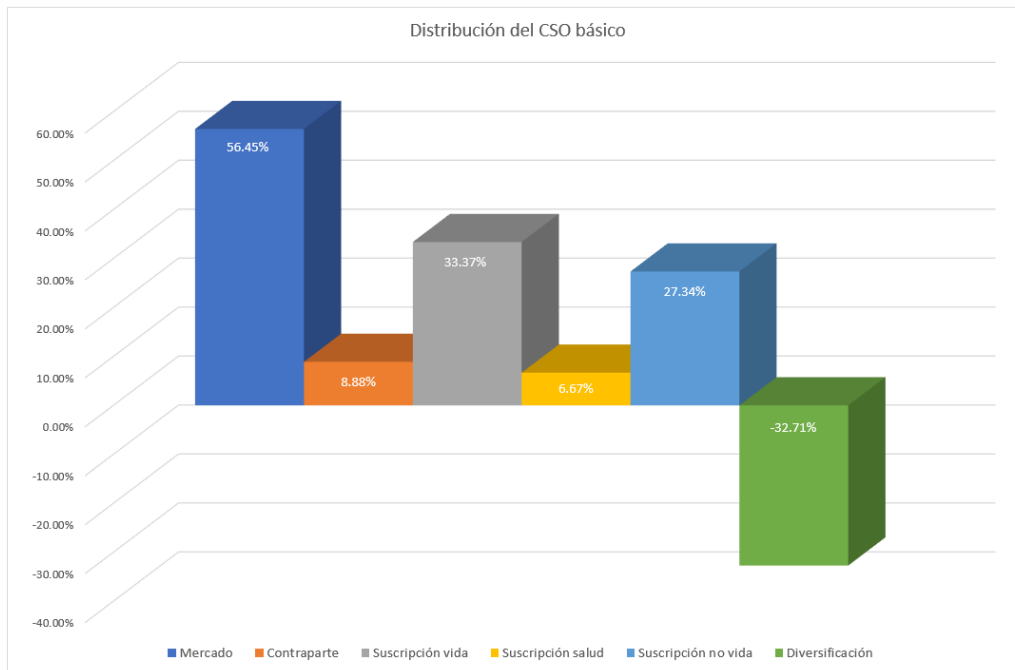


Figura 7. Distribución del CSO básico (Fuente: Elaboración propia a partir de datos de la DGSFP)

En concreto, representa de media el 56,45% de la carga final de CSO. Por tanto, Solvencia II considera que más de la mitad del riesgo que asumen las entidades aseguradoras se debe a su política de inversiones, y no a su ejercicio de suscripción, como podría suponerse. Después de demostrar la importancia del riesgo de mercado en los requisitos de capital, procedemos a analizar el funcionamiento de éste.

EL CSO de mercado calcula conforme a la siguiente expresión:

$$CSO_{mercado} = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{i,j} \cdot CSO_i \cdot CSO_j}$$

A su vez, se divide en los siguientes submódulos:

- Riesgo de tipo de interés: sensibilidad de los activos y pasivos frente a variaciones en la estructura temporal de tipos de interés (ETTI).
- Riesgo de acciones: sensibilidad de los activos y pasivos frente a variaciones en el nivel, la volatilidad o los precios de mercado de las acciones.
- Riesgo inmobiliario: sensibilidad de los activos y pasivos frente a variaciones en la volatilidad o en los precios de mercado de los inmuebles.
- Riesgo de diferencial: sensibilidad de los activos y pasivos frente a variaciones en el nivel o la volatilidad de los diferenciales de crédito en relación con la estructura temporal de tipos de interés sin riesgo.
- Riesgo de divisa: sensibilidad del valor de los activos y pasivos frente a variaciones en el nivel o la volatilidad de los tipos de cambio.

- Riesgo de concentración de riesgo de mercado: riesgos adicionales como consecuencia de una elevada exposición al riesgo de incumplimiento de un emisor o por poca diversificación de la cartera.

Llegados a este punto, vamos a proceder a presentar las hipótesis planteadas acerca de la cartera de inversión de la compañía:

1. La compañía solo puede invertir en dos tipos de activos:
 - a. Acciones (renta variable).
 - b. Bonos (renta fija).
2. Las acciones son exclusivamente de tipo 1, según la clasificación de Solvencia II. Es decir, son acciones cotizadas en mercados regulados de países que sean miembros del Espacio Económico Europeo (EEE) o de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE).
3. Los bonos estarán emitidos por administraciones centrales o bancos centrales de estados miembros, y denominados y financiados en la moneda nacional de dichas administraciones centrales y bancos centrales.
4. Todas las inversiones se realizan en euros (moneda nacional).
5. No existe riesgo de concentración.

Como se ha visto en la contextualización del mercado, asumir estas hipótesis, a pesar de ser una simplificación, es bastante plausible, ya que representa el mayor porcentaje de las inversiones de las entidades aseguradoras. Por tanto, en este caso, el riesgo de mercado quedaría restringido al submódulo de acciones y al submódulo de diferencial, en el que se tendría en cuenta el riesgo de los bonos. Sin embargo, al estar éstos emitidos por administraciones centrales, no generarán carga de capital, al asignarles un factor de estrés del 0%, según el apartado 2 del Art. 180 del REGLAMENTO DELEGADO (UE) 2015/35 DE LA COMISIÓN de 10 de octubre de 2014, en adelante Reglamento Delegado, que completa la Directiva Solvencia II. Se puede apreciar que Solvencia II realiza una clara discriminación entre el riesgo de renta variable y de renta fija, siendo este último favorecido en cuanto a requerimientos de capital se refiere.

En definitiva, el CSO de mercado quedaría únicamente compuesto por el CSO de acciones, que analizaremos a continuación.

El CSO de acciones será igual a lo siguiente:

$$CSO_{acciones} = \sqrt{CSO_{acc\ tipo\ 1}^2 + 2 \cdot 0,75 \cdot CSO_{acc\ tipo\ 1} \cdot CSO_{acc\ tipo\ 2} + CSO_{acc\ tipo\ 2}^2}$$

En nuestro caso, por tanto, el CSO de acciones estará compuesto únicamente por el CSO de acciones de tipo 1. Por tanto, finalmente tendríamos lo siguiente:

$$CSO_{mercado} = \sqrt{CSO_{acciones}^2} = CSO_{acciones} = \sqrt{CSO_{acc\ tipo\ 1}^2} = CSO_{acc\ tipo\ 1}$$

En definitiva, se deduce que para llegar al CSO de mercado únicamente deberemos calcular el CSO de acciones tipo 1.

En base al Art. 169 del Reglamento Delegado, el capital de riesgo frente a acciones de tipo 1 será igual a la pérdida de fondos propios básicos que resultaría de una disminución instantánea del valor de las acciones igual a la suma del 39%, junto con un ajuste simétrico. El ajuste simétrico es igual a lo siguiente:

$$AS = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{CI-AI}{AI} - 8\% \right),$$

donde:

- a) CI representará el nivel actual de un índice de acciones representativo.
- b) AI representará la media ponderada de los niveles diarios del índice de acciones durante los últimos 36 meses.

Y finalmente obtendríamos la expresión que incluiremos como restricción en la optimización:

$$CSO_{\text{mercado}} = 0,39 \cdot V_{acc} + AS$$

donde:

V_{acc} = Valor actual de las acciones de la compañía.

En definitiva, esta expresión representará el capital máximo que podrá asumir la compañía en nuestro problema.

5. Método de optimización

Tras poner en contexto la totalidad del problema, en este apartado se procede a presentar el método utilizado para la optimización de la cartera de inversiones. Este método se basa en calcular la cartera que maximice la Ratio de Sharpe, dada una restricción de CSO máximo y usando como datos el valor esperado de los rendimientos de los dos activos. Este valor esperado se obtiene a través de la modelización de los respectivos precios conforme a un Modelo Geométrico Browniano, como se muestra en su respectivo apartado del presente texto, el cual se basa en las aportaciones de Hull (2006) y Embrechts *et al.* (2005). Cabe mencionar que esta modelización se ha hecho para $T=259$, que representa un año financiero en este caso. Por tanto, el problema de optimización a resolver es el siguiente:

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{r_p - r_f}{\sigma_p} \\ \text{s. a. : } & P(CSO_{\text{mercado}} \leq CSO_{\text{mercado máx}}) \geq 0.95 \\ & w_i + w_j = 1 \end{aligned}$$

donde:

- $\frac{r_p - r_f}{\sigma_p}$ = Ratio de Sharpe de la cartera con vector de pesos $[w_i, w_j]$.
- CSO_{mercado} = CSO de mercado para la cartera con vector de pesos $[w_i, w_j]$.
- $CSO_{\text{mercado máx}}$ = CSO de mercado máximo que la entidad aseguradora está dispuesta a asumir.
- $P(CSO_{\text{mercado}} \leq CSO_{\text{mercado máx}})$ = Probabilidad de que el CSO_{mercado} sea inferior al valor máximo fijado por la entidad.
- $[w_i, w_j]$ es el vector de pesos i, j .

A continuación, se procede a analizar en mayor detalle cada uno de los componentes del problema. Nótese que el $CSO_{\text{mercado máx}}$ es un parámetro positivo que fija la entidad, de acuerdo con sus niveles de fondos propios y sus requerimientos de capital.

Por su parte, la Ratio de Sharpe ya se ha introducido en este trabajo, por lo que solo cabe analizar sus componentes. En primer lugar, el rendimiento de la cartera se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$r_p = r_i w_i + r_j w_j ,$$

donde r_i, r_j representan respectivamente el rendimiento medio anual esperado para los activos i, j y $[w_i, w_j]$ es el vector de pesos.

Por otro lado, la desviación estándar de la cartera, entendiéndola ésta como volatilidad o riesgo, se obtiene del siguiente modo:

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_i^2 w_i^2 + 2\sigma_i w_i \sigma_j w_j \rho_{ij} + \sigma_j^2 w_j^2} ,$$

donde σ_i, σ_j representan respectivamente la desviación estándar media anual esperada para los activos i, j , ρ_{ij} es la correlación de los activos i, j y $[w_i, w_j]$ es el vector de pesos.

Como sabemos, r_f es un parámetro que representa el rendimiento de las inversiones libres de riesgo. Su valor se suele obtener de distintas formas, pero en el caso que nos ocupa, donde los tipos de interés se encuentran en niveles ínfimos, se ha decidido asignarle valor cero siguiendo el criterio de otros autores.

En definitiva, todos los valores son conocidos o bien han sido estimados de forma previa a la optimización, por lo que nuestra única variable aleatoria es el vector de pesos $[w_i, w_j]$, que interfiere en la obtención del $CSO_{mercado}$, que recordemos se calculaba conforme a la siguiente expresión:

$$CSO_{mercado} = 0,39 \cdot V_{acc} + AS ,$$

donde $V_{acc} = E[P_{acc}] \cdot w_{acc}$. Por su parte, P_{acc} es el precio del índice de acciones modelizado mediante el GBM y w_{acc} es el peso de la renta variable en la cartera.

Por tanto, el problema se resolverá probando distintas combinaciones de $[w_i, w_j]$ y analizando los resultados obtenidos con cada uno. De este modo, nuestra cartera óptima será aquella que dado un determinado vector de pesos y cumpliendo las restricciones presentadas, obtenga un Ratio de Sharpe mayor.

5.1. Modelización del precio de los activos

Como hemos visto, el objetivo es maximizar la Ratio de Sharpe de la cartera, por lo que nos interesa que los rendimientos sean elevados. En definitiva, queremos maximizar el siguiente cociente para cada activo.

$$r_i = \log \left(\frac{S(T)}{S(0)} \right) ,$$

donde $S(T)$ es un valor incierto, ya que representa el precio final del bono o el índice en un momento futuro T . En este caso particular, asumimos que disponemos de información acerca de los precios hasta el 31 de diciembre de 2017, y nuestro momento futuro T es justamente el cierre del año siguiente. Por tanto, asumiremos que nuestros activos pasan por 259 días de cotización hasta llegar a su precio final, el cual queremos encontrar. Se ha buscado modelizar, por tanto, el movimiento de los activos durante 2018 para tener así la posibilidad de hacer *backtesting* con los datos reales de mercado y comprobar de esta manera la viabilidad de los resultados obtenidos.

Existen muchas formas de modelizar este precio, todas ellas con sus ventajas e inconvenientes. A priori, podemos afirmar que es imposible conocer el valor futuro de una cotización, y esa afirmación sería totalmente cierta. No obstante, aun sabiendo esto, merece la pena aproximarse a este valor de la mejor forma posible, pues de ello dependerá la consecución de los objetivos económicos planteados. Con ese propósito, en este trabajo asumimos que los activos siguen un determinado comportamiento, conocido como Movimiento Geométrico Browniano, debido a su sencillez y popularidad.

5.1.1. Movimiento Geométrico Browniano

El Movimiento Browniano es un proceso estocástico continuo muy utilizado en finanzas para modelizar el precio de los activos. Este proceso es muy relevante y presenta una gran influencia en diversas áreas como son la electrónica, la cibernética, la biología o, para el caso que nos ocupa, la economía.

Su origen se remonta al año 1827, cuando el botánico inglés Robert Brown observó a través de su microscopio que las partículas que se encuentran en un medio líquido se ven permanentemente sometidas a un movimiento errático a través del fluido. El propio Brown prosiguió sus estudios acerca de este movimiento, pero no fue hasta principios del s.XX cuando, paralelamente, Albert Einstein y Marian Smoluchowski realizaron el primer análisis cuantitativo acerca del mismo. A partir de entonces, grandes científicos de renombre continuaron analizando este fenómeno y en el año 1918, Norbert Wiener comenzó el estudio matemático de este proceso. Sus aportaciones fueron tales que desarrollaron ampliamente la teoría del movimiento, así como la de los procesos estocásticos en general, hasta el punto de que el Movimiento Browniano pasó a conocerse como Proceso de Wiener en multitud de áreas. Finalmente, en 1900 Louis Bachelier publicó su tesis doctoral *Théorie de la spéculation* acerca de la aplicación del movimiento browniano en las fluctuaciones de los mercados, lo que permitió que hoy en día este modelo sea ampliamente utilizado en el mundo financiero y, por ende, en el presente trabajo.

Concretamente, este modelo se utiliza en finanzas para describir la evolución del precio de los activos a lo largo del tiempo, y eso es lo que se realizará para obtener el precio en $S(T)$ de los activos objeto de análisis. No obstante, un gran número de autores prefieren usar un Movimiento Geométrico Browniano para modelizar el precio de los activos, ya que es más simple al ser positivo en cualquier punto, con probabilidad 1. Por estos motivos, hemos escogido trabajar con el Movimiento Geométrico Browniano que, en definitiva, es el proceso estocástico que satisface la siguiente ecuación de diferencial estocástica (EDE):

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW(t) ,$$

donde σ es la volatilidad del precio del activo, r es el rendimiento medio del activo y $W(t)$ es un Movimiento Browniano estándar.

Esta ecuación modeliza los cambios en el precio de un activo, como incrementos de un movimiento browniano. La EDE se puede resolver aplicando el Lema de Itô, obteniendo así la siguiente expresión:

$$S(T) = S(0) \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W(T)\right) ,$$

donde $S(0)$ es el precio actual del activo y $W(T)$ es una variable aleatoria que sigue una distribución $N\sim(0, T)$, que también puede expresarse como $\sqrt{T}Z$, donde Z es una normal estándar. De esta manera, el precio del activo seguirá una distribución log-normal.

Por otro lado, $S(T)$ cumple las siguientes propiedades:

$$E[S(T)] = S(0)e^{rT}$$

$$Var[S(T)] = S^2(0)e^{2rT}(e^{\sigma^2 T} - 1),$$

siendo la $E[S(T)]$ especialmente interesante, ya que nos permitirá obtener directamente el valor esperado del activo en T .

Por último, al trabajar con dos activos como es el caso que nos ocupa, es posible introducir correlación entre los dos movimientos geométricos brownianos haciendo uso de la siguiente expresión:

$$Z(T) = \rho W_1(T) + \sqrt{1 - \rho^2} W_2(T),$$

donde $Z(T)$ es un proceso browniano estándar que cumple lo siguiente:

$$Corr(Z(T), W_1(T)) = \frac{Cov[Z(T), W_1(T)]}{\sqrt{Var[Z(T)]}\sqrt{Var[W_1(T)]}} = \frac{\rho T}{\sqrt{T}\sqrt{T}} = \rho.$$

Por tanto, $Z(T)$ está correlacionado con $W_1(T)$, con lo que finalmente podemos modelizar el precio de los dos activos mediante las siguientes expresiones:

$$S_1(T) = S_1(0) \exp\left(\left(r_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)T + \sigma_1 W_1(T)\right),$$

$$S_2(T) = S_2(0) \exp\left(\left(r_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2\right)T + \sigma_2 \left(\rho W_1(T) + \sqrt{1 - \rho^2} W_2(T)\right)\right).$$

II. CASO PRÁCTICO

Llegado a este punto, hemos presentado el funcionamiento del problema de optimización, así como las hipótesis en las que basa. En este apartado, por tanto, procederemos a exponer los resultados obtenidos a través de la aplicación práctica del mismo. Cabe destacar que todos los cálculos se han realizado a través del lenguaje informático *Python*, a partir de la generación de un código que permita obtener los resultados deseados y haciendo uso de algunos módulos diseñados en el propio lenguaje. Uno de estos módulos es el conocido como *scipy.optimize*, que ha permitido realizar la optimización mediante la creación de las formulas necesarias. En concreto, incluye el método *minimize*, que permite minimizar el valor de una función en base a restricciones lineales o no lineales. Para este caso en particular, se utiliza el método de iteración por SLSQP (*Sequential Least Squares Programming*) implementado primeramente por Kraft (1988). El proceso seguido, por tanto, se ha basado en minimizar la Ratio de Sharpe negativa (*-Ratio de Sharpe*), que es análogo a maximizar la propia expresión. Es importante también destacar que los resultados obtenidos con este modulo se han comprobado realizando el mismo proceso de optimización mediante la creación de un algoritmo que hace uso del método de Monte Carlo, a través de la simulación de un elevado número de posibles carteras, de forma similar a la planteada por Boyle *et al.* (1997). Los resultados obtenidos han sido homogéneos, con lo que se comprueba el buen funcionamiento de la optimización. Sin más, se procede a la exposición de los procesos seguidos en este apartado del trabajo.

6. Análisis de los datos

En este apartado, se muestra el análisis estadístico de los activos escogidos en el problema. Como ya se ha comentado, asumiremos que la compañía sólo realiza dos tipos de inversiones:

- a. Inversión en renta fija (bonos)
- b. Inversión en renta variable (acciones).

Se ha decidido utilizar datos del mercado alemán, para mantener el problema en el ámbito geográfico de la unión europea y debido a que Alemania es una de las grandes potencias mundiales y que las alteraciones que se producen en su mercado tienen una gran influencia en el devenir general del resto de los mercados europeos. En concreto, se han analizado los siguientes activos:

- Índice DAX
- Índice S&P Germany Sovereign Bond Index.

El Índice DAX, en adelante GDAXI, representa la cotización de las 30 mayores compañías alemanas que cotizan en la Bolsa de Frankfurt, en términos de volumen y capitalización de mercado, por lo que es un gran indicador del mercado de renta variable alemán y europeo. SAP, Bayer o Allianz son solo algunas de las empresas que componen el GDAXI. En segundo lugar, el Índice *S&P Germany Sovereign Bond Index*, en adelante

SPGSBI, es una representación ponderada por valor de mercado del rendimiento de los bonos emitidos por el gobierno alemán en el mercado europeo. Se ha escogido trabajar con índices ya que representan tendencias de todo un mercado, como en este caso es el alemán, mientras que, si se hubieran escogido activos individuales, los resultados obtenidos estarían muy sesgados y podrían no ser representativos. Los datos del GDAXI han sido obtenidos a través de *Yahoo Finance*, mientras que *Standard & Poor's* ha sido el proveedor de los datos referentes al SPGSBI.

A continuación, pasaremos analizar la información acerca de la cotización de los dos índices anteriores, para el período comprendido entre el 30 de noviembre de 2009 y el 31 de diciembre de 2017.

En primer lugar, procedemos a visualizar gráficamente la evolución del valor de los índices en el tiempo, representando ambos en base 100 para favorecer su comparación.

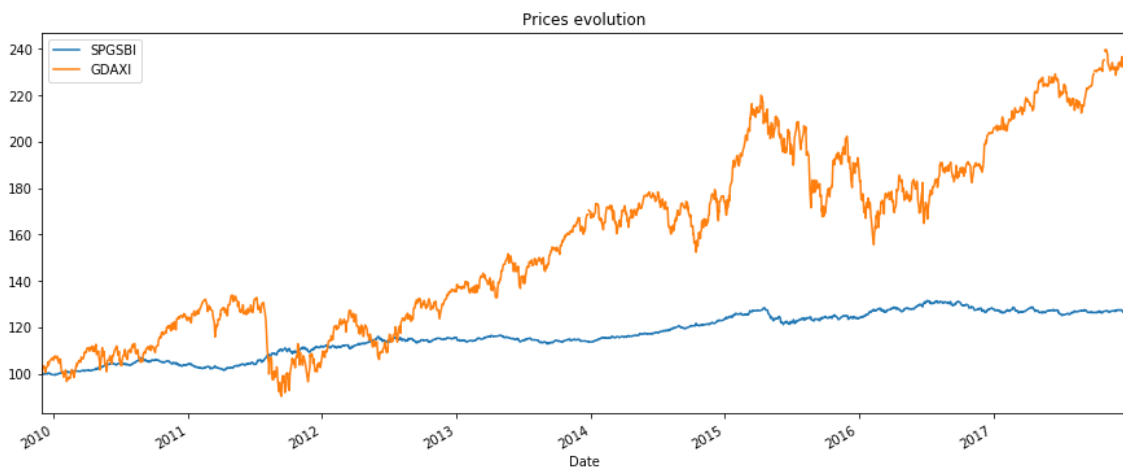


Figura 8. Evolución del precio de los índices, 2010-2017 (en base 100) (Elaboración propia)

A primera vista, podemos observar en la *Figura 8*, como claramente el GDAXI ha seguido una tendencia creciente, algo lógico debido al gran crecimiento que han experimentado muchas de las compañías que están representadas en el mismo, así como por la buena trayectoria del país en general durante el periodo de estudio. Por otro lado, el SPGSBI también ha seguido una tendencia creciente, aunque su trayectoria ha sido más estable que la de la renta variable y en los últimos años se ha estancado, con lo que la volatilidad parece inferior. Es habitual que la tendencia del SPGSBI sea esta, dado que en realidad refleja el interés al cual pide prestado el gobierno alemán y, como es lógico, pequeñas variaciones en el mismo conllevan cambios devastadores a nivel mundial. Por tanto, podemos afirmar que, a nivel gráfico, los comportamientos son los esperados en base a los datos que tenemos.

A continuación, vamos a analizar los rendimientos de nuestros datos y, a partir de ellos, obtendremos la media y la varianza de los mismos, así como la correlación entre ambos índices. Sin embargo, primeramente, vale la pena visualizar el gráfico de los rendimientos de nuestros activos para realizar un primer análisis de éstos.

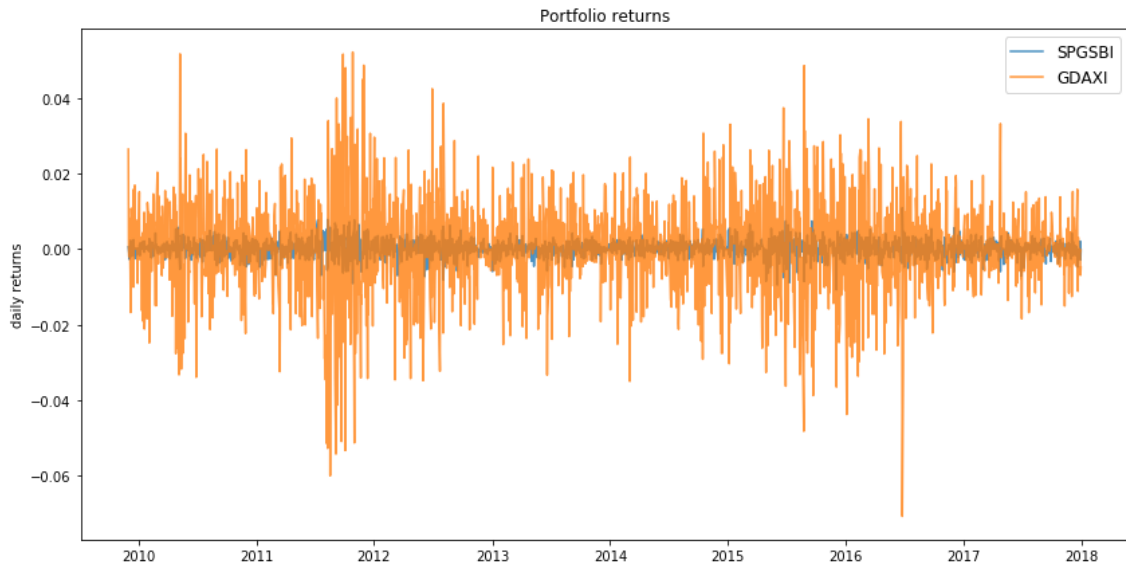


Figura 9. Rendimiento de los activos (Fuente: Elaboración propia)

En la *Figura 9*, podemos observar la representación gráfica de los rendimientos de nuestros dos activos. En concreto, observamos la desviación de éstos respecto a la media, que se sitúa en torno a cero. Esto se conoce como ruido de los rendimientos. Como se podía intuir en la representación gráfica inicial, el GDAXI presenta unos rendimientos mucho más elevados que el SPGSBI y es notablemente más volátil durante todo el período de estudio. En ese aspecto, está en línea con lo esperado según la teoría económica, ya que, a mayor nivel de rendimiento, mayor es el riesgo asumido.

En este punto, merece la pena destacar que se ha optado por utilizar rendimientos logarítmicos en el análisis, obtenidos a partir de la siguiente expresión:

$$r_t = \log \frac{P_t}{P_{t-1}},$$

donde:

- r_t es la rentabilidad en el instante t .
- P_t, P_{t-1} representan respectivamente el precio del activo en los instantes t y $t-1$, dónde $t < t-1$.

Se ha optado por utilizar estos rendimientos ya que presentan ciertas ventajas frente a los rendimientos simples, entre las cuales destacamos:

1. Log-normalidad: Si suponemos que nuestros precios siguen una distribución log-normal, $\log(1 + R_t)$ se distribuye normalmente.
2. Igualdad aproximada a los retornos anteriores cuando los rendimientos son muy pequeños.
3. Aditividad de los rendimientos de los activos en el tiempo. Esta es la característica más importante, ya que la suma de normales continúa siendo normal.
4. Estabilidad numérica.

A partir de estos rendimientos, se han obtenidos las siguientes medidas estadísticas:

	Rendimiento medio	Rendimiento medio anual ¹	Varianza de los rendimientos	Varianza anual de los rendimientos
SPGSBI	0,011%	2,739%	0,001%	0,123%
GDAXI	0,039%	9,626%	0,015%	3,782%

Como se puede observar, ambos activos presentan un rendimiento medio anual positivo en el período de análisis, siendo el del GDAXI más de tres veces superior al de SPGSBI. Sin embargo, ambos rendimientos son muy elevados, por lo que asumimos que el período analizado pertenece al ciclo expansivo de la economía. En cuanto a la diferencia entre ambos, no es ninguna sorpresa ya que se espera que el rendimiento de la renta variable sea superior. Por otro lado, el índice de la renta variable es mucho más volátil que el de la renta fija, que es prácticamente cero, por lo que podemos concluir que existe un riesgo mucho mayor si se invierte en acciones. Nos encontramos pues, ante un importante dilema financiero, asumir más riesgo a cambio de una mayor prima u optar por la renta fija y limitarse a unos rendimientos escasos. Analizaremos cual es la opción más eficiente, pero primeramente debemos analizar la correlación entre nuestros activos, que se muestra en el cuadro siguiente:

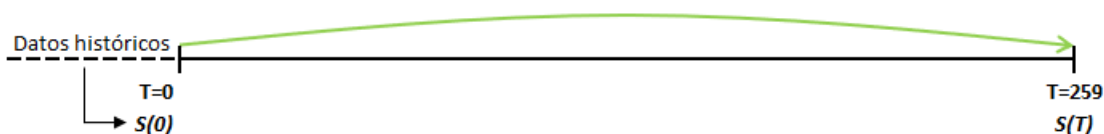
SPGSBI	1	-0,3936
GDAXI	-0,3936	1

En este caso, los rendimientos presentan una correlación negativa imperfecta. Este resultado es muy interesante, ya que nos indica que nuestros activos se mueven en direcciones opuestas. Es decir, cuando uno aumenta, el otro tiende a decrecer. A priori, esto puede permitir que la cartera presente una mayor diversificación y, por tanto, un menor riesgo.

¹ Para los cálculos anuales se ha multiplicado por 259, siguiendo el criterio del año financiero.

7. Modelización de los precios

Como ya se ha mencionado, la modelización de los precios se ha realizado asumiendo la hipótesis de que siguen un Movimiento Geométrico Browniano. Para ello, hemos trabajado con los datos históricos hasta finales de 2017 y se ha modelizado el camino que seguirían los activos en los siguientes 259 días sucesivos de cotización. Hemos escogido este número de días para favorecer la posterior comparación con los resultados reales, con el fin de confirmar la viabilidad de los resultados obtenidos. A pesar de que se ha simulado todo el camino, para el caso que nos ocupa, encontrar $S(T)$, sólo necesitaremos el último valor, de manera que la modelización sigue la siguiente estructura:



El precio en $S(0)$ se corresponde con el último precio del que se dispone información para cada activo, es decir, el precio a 29 de diciembre de 2017. A partir de aquí, el precio final de cada activo a finales de 2018, $S(T)$, se calcula mediante las siguientes expresiones, como se demuestra en el apartado 5.1.2 del presente texto:

$$S_1(T) = S_1(0) \exp\left(\left(r_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)T + \sigma_1 W_1(T)\right)$$

$$S_2(T) = S_2(0) \exp\left(\left(r_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2\right)T + \sigma_2\left(\rho W_1(T) + \sqrt{1 - \rho^2}W_2(T)\right)\right),$$

donde:

r_i = rendimiento diario medio para cada activo, calculado a partir de información histórica, tal y como se indica en el análisis de los datos.

σ^2 = varianza diaria media para cada activo, calculada a partir de información histórica tal y como se indica en el análisis de los datos.

$W(T)$ = variable aleatoria con distribución normal de media 0 y varianza T.

ρ = correlación entre los dos activos

$T = 1, 2, 3, \dots, 259$

A la práctica, el método seguido ha sido simular 100.000 escenarios distintos, en los cuales se calculan 259 realizaciones de $W(T)$ en cada uno, que posteriormente se acumulan formando un camino browniano para cada escenario. A partir de aquí, se ha calculado el precio del índice de renta fija y del bono en cada instante T , siguiendo las expresiones anteriores. En la *Figura 10* podemos observar las trayectorias que ha seguido el precio de los activos en 100 escenarios distintos.

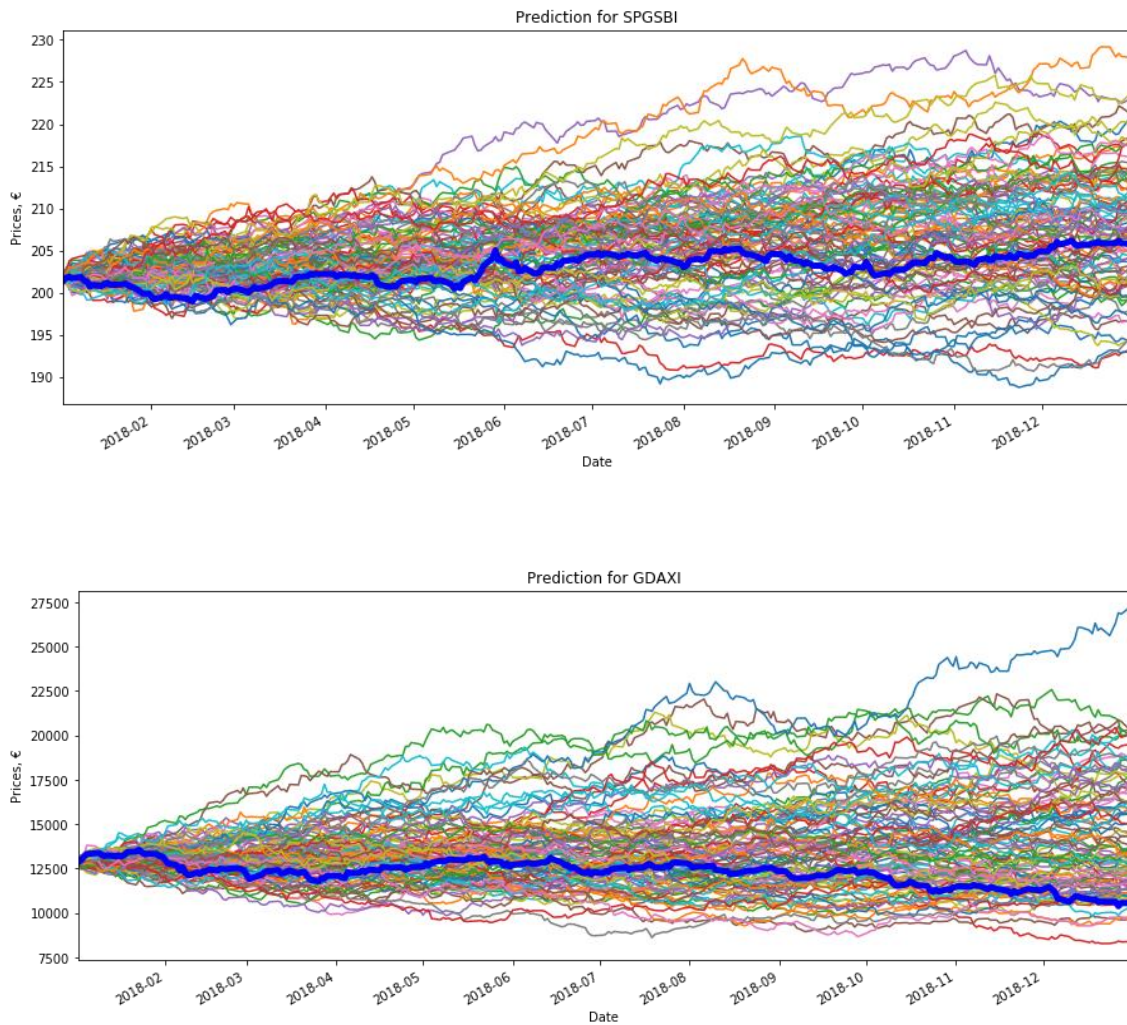


Figura 10. Modelización de la trayectoria de los precios de los activos a través del GBM, para 100 escenarios distintos, y comparación con la trayectoria real de los precios (Fuente: Elaboración propia)

La línea gruesa azul representa la trayectoria real que han seguido cada uno de los activos. Aunque en ambos casos se encuentra dentro de nuestras trayectorias posibles, podemos comprobar que la predicción para el caso del bono es mucho más acertada, ya que se sitúa cerca de la media de las trayectorias graficadas. En cualquier caso, el valor esperado del precio de cada activo en $T=259$, se ha obtenido como la media de este valor en cada uno de los escenarios. Si lo comparamos con el valor real después de 259 de cotización, podemos ver el resultado en la siguiente tabla:

	Predicción	Valor real
SPGSBI	207,69	205,84
GDAXI	14259,54	10558,96

Como podemos observar, la predicción para el SPGSBI ha sido casi perfecta, mientras que en el caso del índice GDAXI no ha sido muy acertada. Es muy probable que la tendencia decreciente que ha experimentado en el año de ejercicio no haya sido captada por el browniano, ya que los datos históricos hasta el momento indicaban que continuaría la tendencia creciente.

Para hacernos una mayor idea de la calidad de las predicciones realizadas, podemos proceder a calcular el error cuadrático medio haciendo uso de la siguiente expresión:

$$ECM = \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n \hat{Y}_i - Y_i)^2,$$

donde \hat{Y}_i representa el valor medio que toman los activos en cada momento modelizado, y Y_i es el valor real observado.

Los resultados obtenidos han sido los siguientes:

	ECM
SPGSBI	4,86
GDAXI	2786057,25

Como se puede observar, el ECM de la renta fija es muy reducido, por lo que podemos concluir que la modelización mediante el movimiento browniano ha sido acertada. Por otro lado, el ECM del Índice GDAXI es muy elevado, y refleja que el comportamiento de este activo no se corresponde con la dinámica del movimiento browniano, y lo mejor sería buscar métodos alternativos de predicción. No obstante, como el objetivo del presente texto no es obtener predicciones de los valores de los activos, procedemos a continuar con el análisis haciendo uso de los resultados obtenidos.

A partir de la obtención de $S(T)$, nos disponemos a calcular el rendimiento esperado para el ejercicio 2018, que introduciremos posteriormente en la optimización. Para ello, mediante la expresión del rendimiento logarítmico anunciada anteriormente analizamos la variación entre $S(T)$ y $S(0)$, obteniendo los siguientes rendimientos anuales esperados.

	$r_{i,t}$
SPGSBI	2,77%
GDAXI	7,94%

8. Optimización de la cartera y análisis de resultados

Una vez obtenidas las predicciones para el precio de los activos durante el próximo año, se procede a la optimización de la cartera. Para ello, hemos procedido de dos formas distintas. En primer lugar, se ha realizado la optimización mediante el uso de un módulo específico en Python que permite la optimización de funciones con restricciones, en concreto, se ha utilizado la función *minimize* incluida en el paquete *scipy.optimize*. Se han probado diversos escenarios, en los cuales varía el nivel del CSO establecido en la restricción, para ver cómo afecta a los resultados. En segundo lugar, se ha procedido a replicar esta optimización a través del método de Monte Carlo, para comprobar que los resultados obtenidos con anterioridad son coherentes.

Los resultados obtenidos han sido los siguientes:

CSO < X	WSPGSBI	WGDAXI	r_p	σ_p	Sharpe
200	0,97	0,03	2,91%	3,52%	0,82
400	0,95	0,05	3,05%	3,29%	0,93
600	0,92	0,08	3,19%	3,13%	1,01
800	0,89	0,11	3,33%	3,09%	1,08
1000	0,87	0,13	3,47%	3,15%	1,1007
1200	0,86	0,14	3,49%	3,17%	1.1011
10000+	0,86	0,14	3,49%	3,17%	1.1011

Como podemos observar, cuanto mayor es la restricción a nivel de CSO, menor es el porcentaje destinado a la renta variable y, en consecuencia, menor es la Ratio de Sharpe. Evidentemente, donde se fija el nivel de restricción es un elemento clave en la optimización de la cartera y será subjetivo en función de la situación de la compañía. No obstante, sucede algo muy interesante y es que, a partir de que la restricción sea aproximadamente $P[\text{CSO} < 1200]$, los resultados no varían. Evidentemente, éste sería el óptimo real del problema, si no fijáramos restricción alguna, ya que el CSO no supera nunca ese valor con probabilidad 95%. Por tanto, si la compañía estuviera en disposición de asumir una carga de capital de este nivel, destinaría un 86% a renta fija y el resto a renta variable para obtener una cartera con la mayor Ratio de Sharpe. En ese caso, el peso de las acciones representaría un valor significativamente mayor que el que se destina de media en el mercado español, como se ha visto anteriormente. Este hecho, podría indicar que las compañías de este sector son especialmente adversas al riesgo. Por último, procedemos a graficar la curva eficiente de Markowitz en la *Figura 11*, y a localizar dónde se situaría la cartera óptima sin la restricción del CSO; es decir, aquella que sitúa el 14% a renta variable.

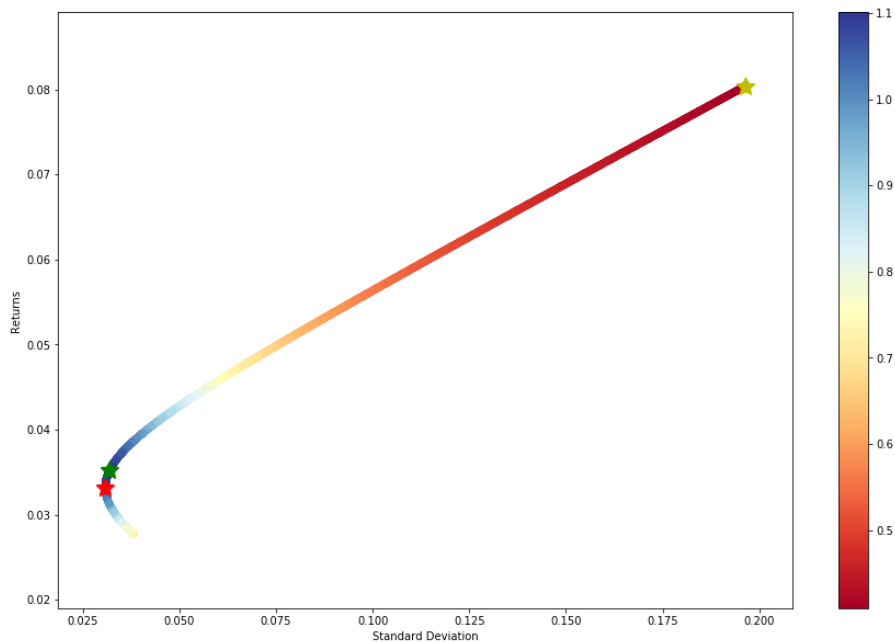


Figura 11. Localización de las carteras óptimas en la frontera eficiente de Markowitz (Fuente: Elaboración propia)

En concreto, la cartera con mayor ratio de Sharpe es la representada por la estrella de color verde, situada muy cerca de la cartera con menor desviación estándar, que es la marcada con una estrella roja. Por tanto, podemos observar que la utilización de esta medida para encontrar el óptimo provoca que, en nuestro caso, tenga mucha más importancia la baja volatilidad que la posibilidad de un mayor rendimiento. De hecho, la cartera con más rendimiento es la marcada con una estrella amarilla y se sitúa en la parte más al noreste de la curva, donde los rendimientos y la desviación estándar son más elevados.

Por otro lado, podemos comprobar los resultados que habría obtenido la compañía al final del año si hubiese localizado sus activos de manera que invirtiera el 86% en bonos alemanes y el resto en renta variable. En tal caso, los resultados obtenidos usando los datos reales para la cotización de los activos habrían sido los siguientes:

W _{SPGSBI}	W _{GDAXI}	r_p	σ_p	Sharpe
0,86	0,14	-0,9%	2,69%	-0,33

Como podemos comprobar, los resultados habrían sido desalentadores, obteniendo una rentabilidad de la cartera y Ratio de Sharpe negativas. Esto es debido a que el índice GDAXI cayó durante el ejercicio análisis de estudio y, como hemos visto previamente, la modelización del comportamiento de este activo no había sido acertada. En este caso, por tanto, lo ideal habría sido invertir la totalidad de la cartera en renta fija, ya que para este caso en particular se había mantenido con rentabilidad positiva y volatilidad baja.

Por último, si en lugar de haber realizado la optimización mediante el uso del valor modelizado de los activos, nos hubiésemos limitado a la maximización de la Ratio de Sharpe en base a la observación de los datos históricos, los resultados obtenidos en base a los datos reales serían los siguientes:

W_{SPGSBI}	W_{GDAXI}	r_p	σ_p	<i>Sharpe</i>
0,87	0,13	-0,69%	2,62%	-0,26

Como se puede observar, en este caso el peso de la renta variable sobre el total de la cartera supone un 1% menos que en la optimización realizada con anterioridad. Esto provoca que los resultados obtenidos en cuanto a rentabilidad y Ratio de Sharpe sean ligeramente mejores a los anteriores.

Con esto, podemos deducir que basarse en la predicción de los precios mediante modelos adecuados puede ser un mejor método de optimización que el puramente clásico, en el que solo se usan valores históricos. Sin embargo, es importante que la capacidad de predicción del modelo sea buena y en este caso no ha sido así, ya que la dinámica del Índice GDAXI no ha sido captada de forma correcta. Por estos motivos, el esfuerzo de la modelización de precios no habría sido rentable en este caso, ya que los resultados habrían sido peores que basándonos puramente en los datos históricos.

9. Conclusiones

Tras la realización de este trabajo, es preciso extraer algunas conclusiones que ayuden a sintetizar la información obtenida. En primer lugar, podemos afirmar que el uso de procesos estocásticos brownianos no es idóneo en la modelización de los precios de los activos, especialmente en aquellos que presentan mayor volatilidad, como ha sido el caso del Índice GDAXI. Sorprendentemente, la modelización del valor del Índice de renta fija alemana ha sido mucho más preciso, debido a que su volatilidad es muy reducida y, por tanto, su comportamiento es fácilmente predecible y está muy controlado por las autoridades europeas.

En segundo lugar, cabe destacar que, aunque por poco, la optimización obtenida haciendo uso de los precios modelizados ha sido ligeramente peor que la realizada mediante el uso de información puramente histórica. Este resultado es interesante, ya que demuestra que en este caso el esfuerzo extra realizado en la predicción no habría arrojado resultados positivos, y lo idóneo habría sido basarse en el historial de los rendimientos. No obstante, mediante el uso de herramientas más adecuadas para la modelización de las dinámicas de los activos se podrían conseguir resultados más precisos. En la actualidad, existe un gran abanico de técnicas, muchas de ellas basadas en el *machine learning*, que pueden cubrir esta demanda, aunque lamentablemente hayan quedado fuera del alcance de este trabajo.

En tercer lugar, cabe destacar la evolución imprevista que ha seguido la renta variable durante el período de estudio, en el cual ha experimentado una tendencia decreciente. Al inicio del trabajo, se ha puesto énfasis en la posibilidad de aumentar la colocación de renta variable en las carteras de inversión, debido a que los tipos de la renta fija están muy bajos y el mercado asegurador había sufrido una caída en el retorno de sus inversiones durante los últimos años. Sin embargo, y como hemos visto, esta decisión no es nada fácil ya que estos activos son muy volátiles y, aunque la posibilidad de obtener un mayor retorno exista, también es posible perder mucho más, como en el caso práctico analizado. Es por ello que las entidades aseguradoras son tan conservadoras con sus inversiones, ya que debido a la actividad que realizan, no pueden permitirse tanta incertidumbre de mercado. Además, como hemos comprobado, las restricciones de Solvencia II pueden afectar notablemente a la localización de la cartera de activos, ya que esta normativa tiene muy presente los riesgos existentes.

Por último, cabe destacar que se ha demostrado que es posible incluir restricciones de capital en la optimización de carteras, obteniendo resultados lógicos que pueden ser de utilidad en determinadas fases del proceso de toma de decisiones en materia de inversiones. Además, en este caso, por razones de simplicidad se ha optado por asumir determinadas hipótesis que han llevado a la renta variable a ser la única en generar carga de capital, ya que los bonos gubernamentales de estados miembros, entre otros, no se tienen en cuenta para el cálculo del CSO. No obstante, sería posible ampliar el ámbito de estudio en función de las inversiones de cada compañía, estudiando el impacto de localizar su cartera de inversiones a otros activos como bonos corporativos, inmuebles, fondos de inversión, derivados, etc. En estos casos, se debería analizar a nivel normativo la carga de capital que se genera y cómo puede reproducirse en expresiones que puedan incluirse en una optimización.

En definitiva, pese a la simpleza de algunas de las hipótesis planteadas, en el presente trabajo se ha demostrado que existen grandes necesidades en cuanto a maximización del rendimiento de las inversiones en el sector asegurador. En este sentido, los métodos de optimización pueden ser una buena solución, aunque convendría explorar otras opciones que permitieran obtener resultados más acertados. Además, es posible mantener en perspectiva los requerimientos de capital de Solvencia II a medida que se forma la cartera de inversiones, dando lugar así a un análisis muy completo, en el que se tienen en cuenta los riesgos de mercado desde el análisis técnico, así como normativo.

III. ANEXOS

Anexo I. Código utilizado

In []:

```
#modulos necesarios
import pandas as pd
import numpy as np
from pandas_datareader import data as wb
import matplotlib.pyplot as plt
from pandas.plotting import register_matplotlib_converters
register_matplotlib_converters()
import numpy.linalg
from sklearn.metrics import mean_squared_error
from sklearn.metrics import mean_absolute_error
import scipy.optimize as sco
from scipy import stats
```

In []:

```
start_date = '2009-11-30'
end_date = '2017-12-31'
pred_end_date = '2018-12-31'
```

In []:

```
tickers = ['SPGSBI', 'GDAXI']
```

In []:

```
#importar datos reales para posterior backup test
pricescheck = pd.read_excel('C:/Users/ericl/Google Drive/MÁSTER CAF/TFM/germanbondequit
y_check.xlsx')
pricescheck = pricescheck.set_index('Date')
pricescheck.tail()
```

In []:

```
#importar datos reales para el problema de optimización
portfolio = pd.read_excel('C:/Users/ericl/Google Drive/MÁSTER CAF/TFM/germanbondequity_
cut.xlsx')
portfolio = portfolio.set_index('Date')
portfolio.tail()
```

6. ANÁLISIS DE LOS DATOS

In []:

```
#grafico de la evolucion de los precios
(portfolio / portfolio.iloc[0] * 100).plot(figsize = (15,6))
plt.title('Prices evolution')

plt.show()
```

In []:

```
#calculo de los rendimientos
returns = np.log(portfolio / portfolio.shift(1)).dropna()
returns
```

In []:

```
#gráfico de Los rendimientos
plt.figure(figsize=(14, 7))
for c in returns.columns.values:
    plt.plot(returns.index, returns[c], lw=1.5, alpha=0.8,label=c)
plt.title('Portfolio returns')
plt.legend(loc='upper right', fontsize=12)
plt.ylabel('daily returns')
plt.show()
```

In []:

```
#rendimientos medios
mean_returns = returns.mean()
mean_returns
```

In []:

```
#rendimientos medios anuales
annual_av_returns = returns.mean() * 250
annual_av_returns
```

In []:

```
#varianzas
variances = returns.var()
variances
```

In []:

```
#varianzas anuales
annual_variances = returns.var() * 250
annual_variances
```

In []:

```
#covarianzas
cov = returns.cov()
cov
```

In []:

```
#covarianzas anuales
cov_annual = returns.cov() * 250
cov_annual
```

In []:

```
#matriz de correlaciones
corr_matrix = returns.corr()
corr_matrix
```

7. MODELIZACIÓN DE LOS PRECIOS

In []:

```
#Parametros GBM
So = portfolio.iloc[-1]
dt = 1
T = 258
N = T / dt #prediccion de 259 dias
t = np.arange(1, int(N) + 1)
mu = returns.mean() #r
sigma = np.std(returns)
scen_size = 100000
rho = corr_matrix['GDAXI'][0]
```

In []:

```
#Primer GBM
np.random.seed(22)
b1 = {str(scen): np.random.normal(0, 1, int(N)) for scen in range(1, scen_size + 1)} #1
00000 array con 259 N(0,1)
W1 = {str(scen): b1[str(scen)].cumsum() for scen in range(1, scen_size + 1)} #acumular
Lo anterior, camino browniano
```

In []:

```
#Segundo GBM
np.random.seed(24)
b2 = {str(scen): np.random.normal(0, 1, int(N)) for scen in range(1, scen_size + 1)} #1
00000 array con 259 N(0,1)
W2 = {str(scen): b2[str(scen)].cumsum() for scen in range(1, scen_size + 1)} #acumular
Lo anterior, camino browniano
```

In []:

```
drift_bond = (mu['SPGSBI'] - 0.5 * sigma['SPGSBI']**2) * t
diffusion_bond = {str(scen): sigma['SPGSBI'] * W1[str(scen)] for scen in range(1, scen_
size + 1)}
```

In []:

```
drift_equity = (mu['GDAXI'] - 0.5* sigma['GDAXI']**2) * t
diffusion_equity = {str(scen): sigma['GDAXI'] * (rho * W1[str(scen)] + np.sqrt(1-rho**2
) * W2[str(scen)]
) for scen in range(1, scen_size + 1)}
```

In []:

```
#Precios SPGSBI
S_bond = np.array([So['SPGSBI'] * np.exp(drift_bond + diffusion_bond[str(scen)]) for sc
en in range(1, scen_size + 1)])
S_bond = np.hstack((np.array([[So['SPGSBI']] for scen in range(scen_size)]), S_bond)) #
add So to the beginning series
```

In []:

```
#Precios GDAXI
S_equity = np.array([So['GDAXI'] * np.exp(drift_equity + diffusion_equity[str(scen)]) f
or scen in range(1, scen_size + 1)])
S_equity = np.hstack((np.array([[So['GDAXI']] for scen in range(scen_size)]), S_equity
)) # add So to the beginning series
```

In []:

```
# Dataframe para Los precios SPGSBI
Preds_df_bond = pd.DataFrame(S_bond.swapaxes(0, 1)[: , :])
Preds_df_bond.index = pricheck.index
Preds_df_bond.tail()
```

In []:

```
# Dataframe para Los precios GDAXI
Preds_df_equity = pd.DataFrame(S_equity.swapaxes(0, 1)[: , :])
Preds_df_equity.index = pricheck.index
Preds_df_equity.tail()
```

In []:

```
#Grafico precios SPGSBI modelizados
plt.figure(figsize = (15, 6))

for i in range(100):
    plt.title('Prediction for SPGSBI')
    plt.plot(Preds_df_bond[i])
    plt.ylabel('Prices, €')
    plt.xlabel('Prediction Days')

pricheck['SPGSBI'].plot(lw=5, alpha=1,color='b')
plt.show()
```

In []:

```
#Grafico precios GDAXI modelizados
plt.figure(figsize = (15, 6))

for i in range(100):
    plt.title('Prediction for GDAXI')
    plt.plot(Preds_df_equity[i])
    plt.ylabel('Prices, €')
    plt.xlabel('Prediction Days')

pricheck['GDAXI'].plot(lw=5, alpha=1,color='b')
plt.show()
```

Cálculo MSE

In []:

```
#MSE SPGSBI
mse_bond = mean_squared_error(pricheck['SPGSBI'],Preds_df_bond.mean(axis=1))
mse_bond
```

In []:

```
#MSE GDAXI
mse_equity = mean_squared_error(pricheck['GDAXI'],Preds_df_equity.mean(axis=1))
mse_equity
```

Precios esperados

In []:

```
ST_bond = np.array(Preds_df_bond.tail(1)).mean()
print('Expected bond price in ',pred_end_date, '=', ST_bond)
```

In []:

```
ST_equity = np.array(Preds_df_equity.tail(1)).mean()
print('Expected equity price in ',pred_end_date, '=', ST_equity)
```

In []:

```
finalprices = np.array(Preds_df_equity.tail(1))
finalprices
```

In []:

```
pricescheck.tail(1)
```

Rendimientos de los precios modelizados

In []:

```
#Dataframe rendimientos GDAXI
r_equity = np.log(Preds_df_equity / Preds_df_equity.shift(1)).mean(axis=1)
r_equity = pd.DataFrame(r_equity)
r_equity.rename(columns={0:'GDAXI'}, inplace=True)
#Rendimiento medio anual GDAXI
r_equity_mean = r_equity.mean() * 259
r_equity_mean
```

In []:

```
#Dataframe rendimientos SPGSBI
r_bond = np.log(Preds_df_bond / Preds_df_bond.shift(1)).mean(axis=1)
r_bond = pd.DataFrame(r_bond)
r_bond.rename(columns={0:'SPGSBI'}, inplace=True)
#Rendimiento medio anual SPGSBI
r_bond_mean = r_bond.mean() * 259
r_bond_mean
```

Checks

In []:

```
# chequear si este rendimiento es lo mismo que la media de los rendimientos de los 100.000
(mu-.5*sigma**2)*T
```

In []:

```
var_equity = r_equity.var() * 259
var_equity
```

In []:

```
var_bond = r_bond.var() * 259
var_bond
```

In []:

```
df_returns = pd.concat([r_bond, r_equity],axis=1)
df_returns
```

In []:

```
one_bond = np.log(Preds_df_bond / Preds_df_bond.shift(1))[0]
one_bond = pd.DataFrame(one_bond)
one_bond.rename(columns={0:'SPGSBI'}, inplace=True)

one_equity = np.log(Preds_df_equity/Preds_df_equity.shift(1))[0]
one_equity = pd.DataFrame(one_equity)
one_equity.rename(columns={0:'GDAXI'}, inplace=True)
```

In []:

```
one = pd.concat([one_bond,one_equity.reindex(one_bond.index)],axis=1)
cov = one.cov()
```

In []:

```
# check correlaciones
corr = df_returns.corr()
corr
```

8. OPTIMIZACIÓN DE LA CARTERA Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

In []:

```
#rendimientos anuales
mean_returns = [float(r_bond_mean), float(r_equity_mean)]
mean_returns
```

In []:

```
#Ajuste simetrico
index = wb.DataReader('^GDAXI', data_source = 'yahoo', start = '2004-12-31', end= '2018-12-31')['Adj Close']
equity_last_price = ST_equity
index_last_price = float(index.iloc[-1])
index_average = float(index.iloc[-750:].mean())
```

MONTE CARLO

In []:

```
def portfolio_perf(weights, mean_returns, cov, rf):
    portfolio_return = np.sum(mean_returns * weights)
    portfolio_std = np.sqrt(np.dot(weights.T, np.dot(cov, weights))) * np.sqrt(259)
    sharpe_ratio = (portfolio_return - rf) / portfolio_std
    sa = 0.5 * (((index_last_price - index_average) / index_average) - 0.08)
    for i in finalprices:
        scr = (weights[1] * 0.39 * i + sa)
    return portfolio_return, portfolio_std, sharpe_ratio, scr

def monte_carlo_simulation(num_portfolios, mean_returns, cov, rf):
    results_matrix = np.zeros((len(mean_returns)+4, num_portfolios))
    for i in range(num_portfolios):
        weights = np.random.random(len(mean_returns))
        weights /= np.sum(weights)
        portfolio_return, portfolio_std, sharpe_ratio, scr = portfolio_perf(weights, mean_returns, cov, rf)
        results_matrix[0,i] = portfolio_return
        results_matrix[1,i] = portfolio_std
        results_matrix[2,i] = sharpe_ratio
        results_matrix[3,i] = len(scr[scr<1000])/len(scr)
        for j in range(len(weights)):
            results_matrix[j+4,i] = weights[j]

    results_df = pd.DataFrame(results_matrix.T, columns=['ret', 'stdev', 'sharpe', 'scr'] +
    [ticker for ticker in tickers])

    return results_df
```

In []:

```
num_portfolios = 100000
rf = 0.0
np.random.seed( 30 )

results_frame = monte_carlo_simulation(num_portfolios, mean_returns, cov, rf)
```

In []:

```
result_frame = results_frame.sort_values(by=['sharpe'], ascending=False).reset_index(drop=True)
```

In []:

```
def optimum_portfolio(alpha):
    for index, row in result_frame.iterrows():
        if row['scr'] >= alpha:
            result = pd.DataFrame(row).T
            break
    return result
```

In []:

```
#Resultado  
alpha = 0.95  
optimum_portfolio(alpha)
```

In []:

```
#Gráfico curva ef  
#Portfolio con menor desv  
min_std = results_frame.iloc[results_frame['stdev'].idxmin()]  
#Portfolio con mayor Sharpe que cumple CSO  
max_sharpe_scr = result_frame.loc[73]  
max_return = results_frame.iloc[results_frame['ret'].idxmax()]  
  
plt.subplots(figsize=(15,10))  
plt.scatter(results_frame.stdev, results_frame.ret, c=results_frame.sharpe, cmap='RdYlBu')  
plt.xlabel('Standard Deviation')  
plt.ylabel('Returns')  
plt.colorbar()  
  
plt.scatter(min_std[1], min_std[0], marker=(5,1,0), color='r', s=300)  
plt.scatter(max_sharpe_scr[1], max_sharpe_scr[0], marker=(5,1,0), color='g', s=300)  
plt.scatter(max_return[1], max_return[0], marker=(5,1,0), color='y', s=300)  
plt.show()
```

Optimización con Scipy

In []:

```
mean_returns  
rf = .0  
sa = 0.5 * (((index_last_price - index_average) / index_average) - 0.08)
```

In []:

```
def calc_neg_sharpe(weights, mean_returns, cov, rf):
    portfolio_return = np.sum(mean_returns * weights)
    portfolio_std = np.sqrt(np.dot(weights.T, np.dot(cov, weights)))
    sharpe_ratio = (portfolio_return - rf) / portfolio_std
    return -sharpe_ratio

def constraint1(x):
    return np.sum(x) - 1

def constraint2(x):
    scr = (x[1] * 0.39 * finalprices + sa)
    prob = len(scr[scr<1000])/scr.size
    return prob - 0.95

con1 = {'type':'eq','fun':constraint1}
con2 = {'type':'ineq','fun':constraint2}
cons = (con1,con2)

x0_bound = (0.0,1.0)
x1_bound = (0.0,1.0)
bounds = (x0_bound, x1_bound)

arguments = (mean_returns, cov, rf)

#optimization

def max_sharpe_scr(mean_returns, cov, rf):
    result = sco.minimize(calc_neg_sharpe, x0 = np.array([0.5, 0.5]), args=arguments,method='SLSQP', bounds=bounds,
                        constraints=cons)
    return result

opt_max_sharpe_scr = max_sharpe_scr(mean_returns, cov, rf)
```

In []:

```
result_weights = pd.DataFrame([round(x,2) for x in opt_max_sharpe_scr['x']],index=tickers).T
result_weights
```

Resultados con precios reales

In []:

```
result_weights = np.array([0.88,0.12])
```

In []:

```
realr = np.log(pricescheck/pricescheck.shift(1)).dropna()
r_mean_returns = realr.mean() * 259
r_cov = realr.cov() * 259

print (r_mean_returns,r_cov)
```

In []:

```
real_portfolio_return = np.sum(r_mean_returns * result_weights)
real_portfolio_std = np.sqrt(np.dot(result_weights.T, np.dot(r_cov, result_weights)))
real_sharpe_ratio = (real_portfolio_return - rf) / real_portfolio_std
print (real_portfolio_return,real_portfolio_std,real_sharpe_ratio)
```

Optimización con valores históricos

In []:

```
mean_returns = returns.mean() * 259
cov = returns.cov() * 259
rf = .0
print (mean_returns,cov)
```

In []:

```
def calc_neg_sharpe(weights, mean_returns, cov, rf):
    portfolio_return = np.sum(mean_returns * weights)
    portfolio_std = np.sqrt(np.dot(weights.T, np.dot(cov, weights)))
    sharpe_ratio = (portfolio_return - rf) / portfolio_std
    return -sharpe_ratio

def constraint1(x):
    return np.sum(x) - 1

def constraint2(x):
    scr = (x[1] * 0.39 * finalprices + sa)
    prob = len(scr[scr<1000])/scr.size
    return prob - 0.95

con1 = {'type':'eq','fun':constraint1}
con2 = {'type':'ineq','fun':constraint2}
cons = (con1,con2)

x0_bound = (0.0,1.0)
x1_bound = (0.0,1.0)
bounds = (x0_bound, x1_bound)

arguments = (mean_returns, cov, rf)

#optimizacion

def max_sharpe_scr(mean_returns, cov, rf):
    result = sco.minimize(calc_neg_sharpe, x0 = np.array([0.5, 0.5]), args=arguments,method='SLSQP', bounds=bounds,
                        constraints=cons)
    return result

opt_max_sharpe_scr = max_sharpe_scr(mean_returns, cov, rf)
```

In []:

```
result_weights = pd.DataFrame([round(x,2) for x in opt_max_sharpe_scr['x']],index=tickers).T
result_weights
```

In []:

```
result_weights = np.array([0.87,0.13])
```

In []:

```
real_portfolio_return = np.sum(r_mean_returns * result_weights)
real_portfolio_std = np.sqrt(np.dot(result_weights.T, np.dot(r_cov, result_weights)))
real_sharpe_ratio = (real_portfolio_return - rf) / real_portfolio_std
print (real_portfolio_return,real_portfolio_std,real_sharpe_ratio)
```

IV. BIBLIOGRAFÍA

- Birge, J. R., & Louveaux, F. (2011). Introduction to stochastic programming. *Springer Science & Business Media*.
- Black, F., & Litterman, R. (1992). Global portfolio optimization. *Financial analysts journal*, 48(5), 28-43.
- Boyle, P., Broadie, M., & Glasserman, P. (1997). Monte Carlo methods for security pricing. *Journal of economic dynamics and control*, 21(8-9), 1267-1321.
- Dembo, R., & Rosen, D. (1999). The practice of portfolio replication: A practical overview of forward and inverse problems. *Annals of Operations Research*, 85, 267-284.
- Diario Oficial de la Unión Europea (2009). *Directiva 2009/138/CE del Parlamento Europeo y del Consejo, de 25 de noviembre de 2009, sobre el seguro de vida, el acceso a la actividad de seguro y de reaseguro y su ejercicio (Solvencia II)*. Parlamento Europeo y Consejo de la Unión Europea.
- Diario Oficial de la Unión Europea (2014). *Reglamento Delegado (UE) 2015/35 de la Comisión, de 10 de octubre de 2014, por el que se completa la Directiva 2009/138/CE del Parlamento Europeo y del Consejo sobre el acceso a la actividad de seguro y de reaseguro y su ejercicio (Solvencia II)*. Parlamento Europeo y Consejo de la Unión Europea.
- Embrechts, P., Frey, R., & McNeil, A. (2005). Quantitative risk management. *Princeton Series in Finance, Princeton*, 10(4).
- Hull, J. (2006). *Options, futures, and other derivatives*. Pearson/Prentice Hall. Upper Saddle River, N.J. (Estados Unidos de América).
- Kraft, D. (1988). A software package for sequential quadratic programming. *Tech Rep DFVLR-FB 88-28, DLR German Aerospace Center—Institute for Flight Mechanics, Köln, Germany*
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The journal of finance*, 7(1), 77-91.
- Merton, R. (1969). Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case. *The Review of Economics and Statistics*, 51(3), 247-257.
- Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2000). Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of risk*, 2, 21-42.
- Servicio de Estudios de MAPFRE (2019), *El mercado español de seguros en 2018*, Madrid, Fundación MAPFRE.
- Sharpe, W. F. (1994). The sharpe ratio. *Journal of portfolio management*, 21(1), 49-58.