MATEMÁTICAS

UNA RENOVACIÓN METODOLÓGICA

JOSEP GASCÓN
JOSEP M. LAMARCA

PRIMER CURSO
DE ENSEÑANZAS
MEDIAS / BUP

MATERIAL DEL ALUMNO
III. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

PPU

MATEMÁTICAS

UNA RENOVACIÓN METODOLÓGICA

ice
Institut de Ciències de l'Educació
Universitat de Barcelona

MATEMÁTICAS

UNA RENOVACIÓN METODOLÓGICA

JOSEP GASCÓN
JOSEP M. LAMARCA

MATERIAL DEL ALUMNO
III. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

PPU
Barcelona, 1988

Primera edición, 1988

Promociones y Publicaciones Universitarias, S.A.
Marqués de Campo Sagrado, 16
08015 BARCELONA

Diseño y maquetación: Carles M. Riu

I.S.B.N.: 84-7665-149-X (Obra completa)
84-7665-230-5 (Vol. 3)
Depósito legal: B-4373-88

Imprime: Limpergraf, S.A. Calle del Río, 17. Nave 3. RIPOLLET (Barcelona)

A l'Anna, en Josep i la Marta

ÍNDICE

CARACTERÍSTICAS GENERALES

La obra que presentamos aquí es fruto de la investigación que el GRUP ARESTA (adscrito al I. C. E. de la U. B.) ha desarrollado entre 1982 y 1986.

Consta de cuatro «Didácticas»:

1. CÁLCULO ARITMÉTICO
2. ÁLGEBRA
3. PROBLEMAS DE PLANTEO
4. PROBLEMAS DE CONTAR

cada una de las cuales contiene:

- *Guía del profesor*
- *Material del alumno*

La *Metodología Didáctica* que propone tiene las siguientes características:

A) *Diferenciación*

Se lleva a cabo a través de las siguientes etapas:

— *Predicción del rendimiento* realizada en base a los conocimientos y capacidades iniciales del alumno.
— *Elaboración de tres grupos de habilidad* para cada «Didáctica».
— *Planificación de otros niveles de aprendizaje* además del nivel mínimo común.
— *Diversificación de la instrucción.*
— *Individualización* en el marco del aprendizaje en el aula.

B) *Aprendizaje heurístico*

— Enfatiza el *dominio de procedimientos* (simbolización, abstracción, generalización, utilización de la analogía, ...) frente a la mera *adquisición de contenidos.*

— Persigue, además, el dominio de sistemas estructurados de procedimientos que se interpretan como *métodos generales de Resolución de Problemas.*

C) *Motivación intrínseca*

Se da gran importancia a la motivación que surge del propio aprendizaje (la *pulsión cognoscitiva*) para superar las meras motivaciones utilitarias.

D) *Evaluación interna*

Cada «Didáctica» dispone de instrumentos que pretenden *cuantificar el progreso del alumno* tanto respecto a la adquisición de contenidos como al dominio de procedimientos. Asimismo se dan herramientas para cuantificar el *grado de eficacia de la enseñanza* tomando el grupo-clase como unidad de tratamiento.

GUÍA DEL PROFESOR

Contiene cinco capítulos. En el primero se desarrollan los principios generales de la *Metodología Diferenciada y Heurística*, así como la manera concreta de ponerla en práctica. Se exponen también los *resultados obtenidos* durante el curso 85-86 con una muestra de 342 alumnos.

Los cuatro capítulos restantes tratan respectivamente de cada una de las «Didácticas» citadas y contienen:

— Caracterización del aprendizaje específico y objetivos de la «Didáctica».
— Procedimientos propios de la «Didáctica» y contenidos sobre los que operan (unos y otros son inseparables a lo largo del aprendizaje).
— Descripción del Material del alumno.
— Diseño de la instrucción, donde se sugieren las actividades de aprendizaje en el aula y la forma de utilizar los diferentes materiales.
— Instrumentos de evaluación interna, que incluye modelos concretos de pruebas, así como criterios para obtener e interpretar un índice de eficacia de la «Didáctica».

MATERIAL DEL ALUMNO

1. *CÁLCULO ARITMÉTICO*

Se distinguen tres aspectos relacionados entre sí:

— *Técnicas de Cálculo*

- Se distribuyen en *tres niveles de dificultad.*
- Se potencian especialmente los *procedimientos de transformación* de unas expresiones en otras siguiendo unas reglas concretas.
- Se efectúa, simultáneamente, un *Análisis de Errores* que se cometen en los procedimientos de transformación, explicitándose las causas que los originan.

— *Detección de Errores*

Pretende desarrollar la operación mental *«Evaluar»*, entendida como *juicio* o *crítica*, a fin de educar la *capacidad de autocrítica* del alumno.

— *Resolución de Problemas de Cálculo Aritmético*

Persigue potenciar el aprendizaje de *estrategias de resolución* que permitan seleccionar las técnicas de cálculo adecuadas en cada caso y establecer el orden de aplicación de las mismas.

2. *ÁLGEBRA*

En esta «Didáctica» se potencia una amplia gama de procedimientos que operan sobre un sistema conceptual extraordinariamente rico, centrado en el concepto de función:

— *Procedimientos complejos* como los involucrados en la traducción recíproca entre los tres aspectos del lenguaje matemático (simbólico, figurativo y semántico).

— *Habilidades intelectuales primarias*, cuyo desarrollo es imprescindible para acceder a los citados procedimientos complejos.
— *Sistemas estructurados de procedimientos complejos* destinados a resolver determinadas clases de problemas que, en este caso, son de cálculo algebraico.

Los contenidos sobre los que operan dichos procedimientos se desarrollan en cinco capítulos:

— Funciones entre números reales.
— Proporcionalidad y Rectas.
— Funciones cuadráticas y Parábolas.
— Polinomios.
— Cálculo Algebraico.

3. *PROBLEMAS DE PLANTEO*

El objetivo de esta «Didáctica» consiste en que el alumno adquiera la capacidad de *traducir al lenguaje algebraico el enunciado de un problema.*

El aprendizaje se fundamenta en la *asimilación de un método general de resolución* que se materializa en un sistema estructurado de reglas «heurísticas» (en el sentido de no algorítmicas) llamada «*Directriz*».

La instrucción se lleva a cabo en dos etapas que se desarrollan paralelamente:

— *Etapa de ejemplificación*, en la cual el profesor empieza mostrando las operaciones más elementales en que descompone el proceso de traducción al lenguaje algebraico. Progresivamente, y *razonando en voz alta*, pone en práctica el método general de resolución.
— *Etapa de entrenamiento*. En ella el profesor utiliza el *método de interrogación progresiva* descrito por Polya.

A lo largo de la instrucción se dedica una atención especial a los alumnos con dificultades para conseguir que cada uno *resuelva por sí mismo un problema*, punto clave de la *motivación intrínseca*.

4. *PROBLEMAS DE CONTAR*

Se distribuye la instrucción en *tres fases* que se corresponden, básicamente, con la «evolución natural» del aprendizaje de los métodos de resolución de los problemas de contar:

— *1.ª Fase:* Se resuelven *problemas simples directos* utilizando exclusivamente *esquemas figurativos.*

— *2.ª Fase:* Se analizan las *propiedades formales de los grupos de símbolos* que representan los «objetos» a contar. A partir de este análisis se introducen los conceptos clásicos de *Combinatoria.*
Se pretende que el alumno asimile un Algoritmo de Resolución de Problemas Simples directos, así como un método de resolución de *problemas simples inversos.*

— *3.ª Fase:* Se pone el énfasis en los *problemas compuestos* descomponibles en una cadena de problemas simples. Para estos problemas se da una Directriz no algorítmica que también puede utilizarse en la resolución de problemas compuestos más complejos.

En cada una de las fases, la metodología didáctica es similar: consta de una *etapa de ejemplificación* y otra de *entrenamiento*, no totalmente separadas, y cuyas características son similares a las de Problemas de Planteo.

I. PROBLEMAS DE PLANTEO

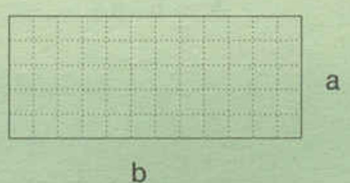
PREDIDÁCTICA N.° 0

ÁREAS DE CUADRILÁTEROS Y TRIÁNGULOS

1. *El rectángulo*

Es un cuadrilátero que tiene los cuatro ángulos rectos. Su área se obtiene multiplicando la longitud de la base «b» por la longitud de la altura «a».

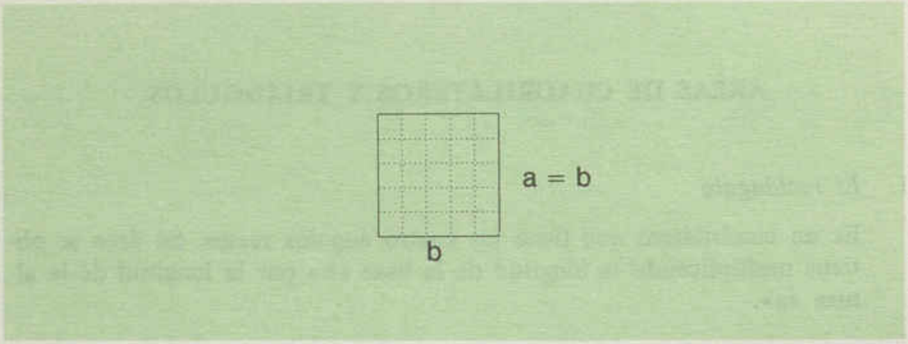
$$A = b \cdot a$$



2. *El cuadrado*

Es un rectángulo que tiene los cuatro lados iguales. Su área se obtiene multiplicando la base «b» por la altura «a» que, en este caso, son iguales.

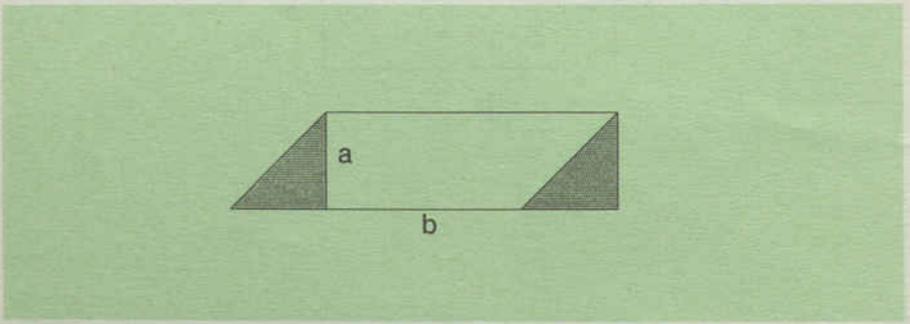
$$A = b \cdot b = b^2$$



3. *El paralelogramo*

Es un cuadrilátero que tiene los lados paralelos (e iguales) dos a dos. Su área es la misma que la de un rectángulo que tiene la misma base y la misma altura.

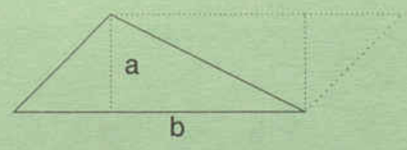
$$A = b \cdot a$$



4. *El triángulo*

Es un polígono cualquiera de tres lados. Su área es la mitad del área de un paralelogramo que tiene la misma base y la misma altura.

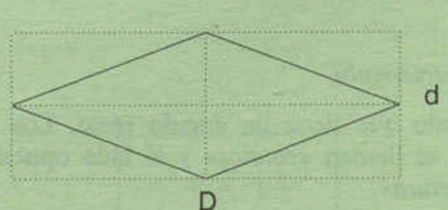
$$A = \frac{b \cdot a}{2}$$



5. *El rombo*

Es un paralelogramo que tiene los cuatro lados iguales. Para calcular su área podría utilizarse la fórmula de los paralelogramos, pero es más fácil darse cuenta de que el área del rombo es la mitad del área de un rectángulo cuyas dimensiones sean las diagonales «d» y «D» del rombo.

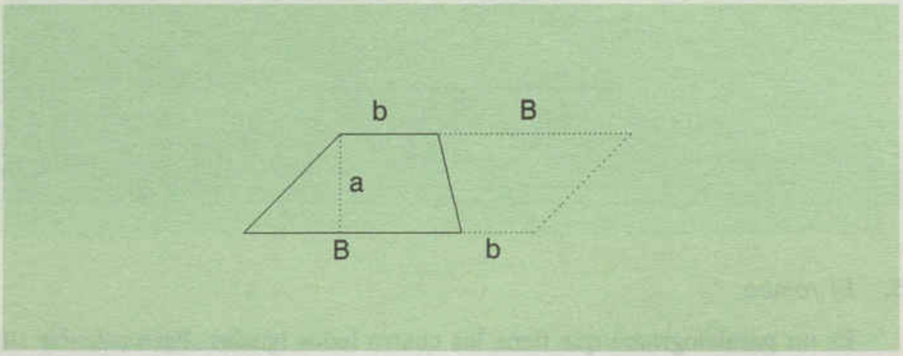
$$A = \frac{d \cdot D}{2}$$



6. *El trapecio*

Es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos que se llaman «bases». Su área es la mitad del área de un paralelogramo que tiene la misma altura que el trapecio y una base que es la suma de las dos bases del trapecio.

$$A = \left(\frac{B + b}{2} \right) \cdot a$$

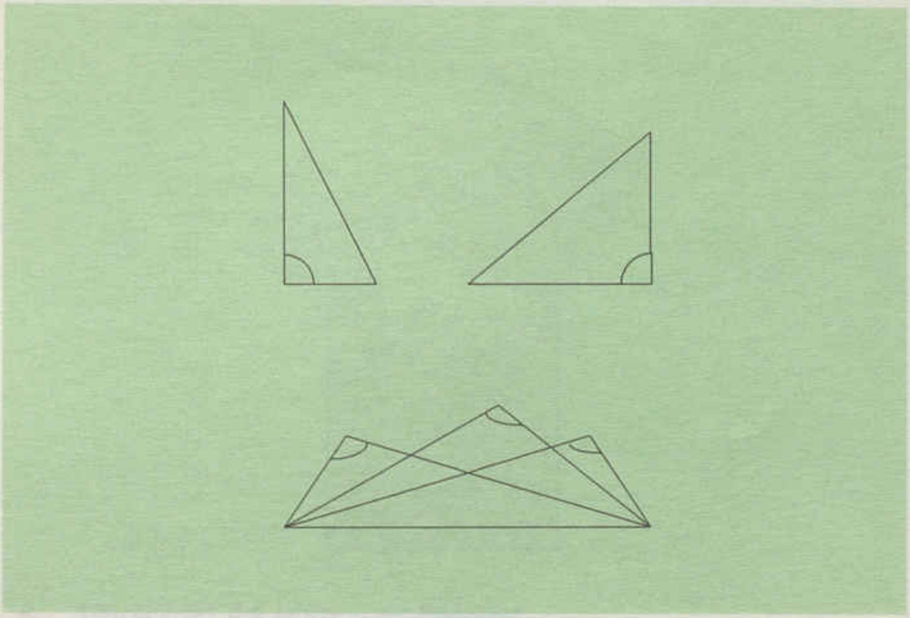


TEOREMA DE PITÁGORAS

1. *El triángulo rectángulo*

Es un triángulo que tiene un ángulo recto. Los lados que forman el ángulo recto, se llaman «*catetos*» y el lado opuesto al ángulo recto se llama «*hipotenusa*».

Mientras que la hipotenusa es siempre el lado mayor, los catetos pueden ser iguales entre sí o bien distintos.

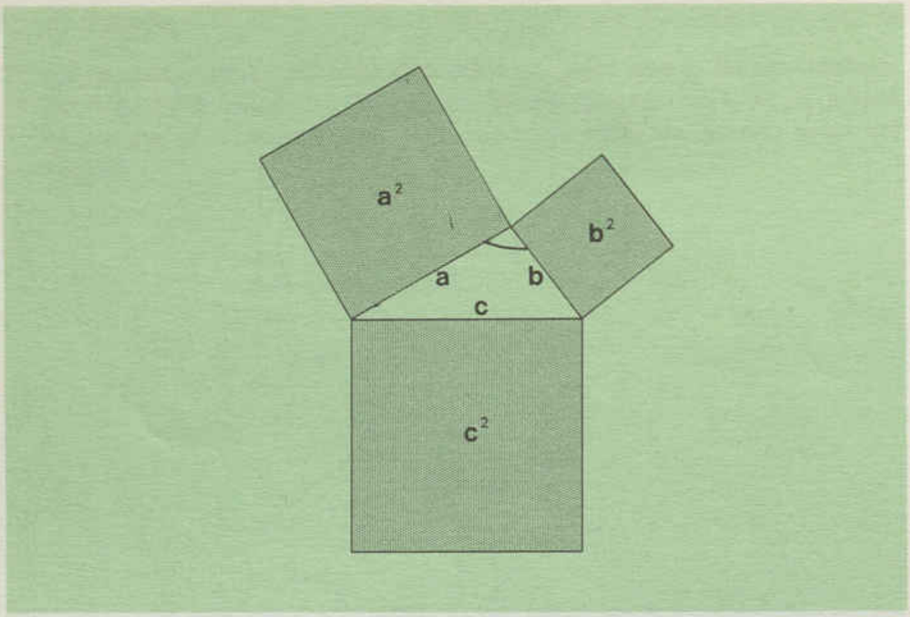


2. *Relación entre los catetos y la hipotenusa*

Es lo que se llama «*Teorema de Pitágoras*» y dice: «En un triángulo rectángulo, la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.»

Con símbolos se expresa:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$



3. *Demostración del Teorema de Pitágoras*

Si los catetos son «a» y «b», y la hipotenusa es «c», se construyen dos cuadrados: uno de lado a + b y, en su interior, otro de lado «c».

El área del cuadrado total puede expresarse:

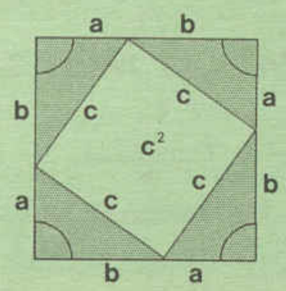
$$A = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

y descomponiéndolo en un cuadrado (c^2) más dos rectángulos (2ab), resulta:

$$A = c^2 + 2ab$$

Igualando ambas expresiones, tenemos:

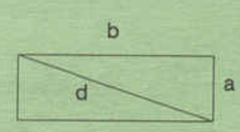
$$a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$



4. *Aplicaciones del teorema de Pitágoras*

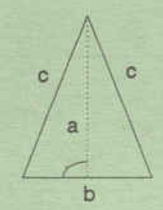
4.1. Al *rectángulo*

$$d^2 = a^2 + b^2$$



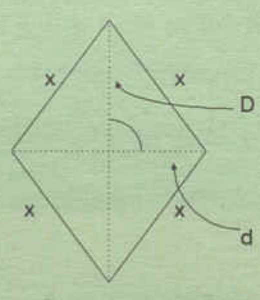
4.2. Al *triángulo isósceles*

$$c^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2} \right)^2$$



4.3. Al *rombo*

$$x^2 = \left(\frac{D}{2} \right)^2 + \left(\frac{d}{2} \right)^2$$



PREDIDÁCTICA N.° 1

ESCRIBE, EN LENGUAJE ALGEBRAICO, LA CANTIDAD QUE SE ESPECIFICA EN CADA CASO:

1. En un cesto tenemos 3x manzanas. Expresa *el número de manzanas que hay en un segundo cesto,* sabiendo que:

   a) Hay 12 manzanas menos que en el primer cesto __________

   b) Hay 7 veces más manzanas que en el primer cesto __________

   c) Hay la sexta parte de las manzanas del primer cesto __________

   d) La razón entre el número de manzanas del segundo cesto y el número de manzanas del primero es 5/7 __________

   e) En total hay 285 manzanas __________

2. *Expresa un número* sabiendo que:

   a) Consta de x decenas y 3 unidades __________

   b) Excede en 5 unidades a la raíz cuadrada de x __________

   c) Al dividirlo por x, se obtiene un cociente igual a 3 y un resto igual a 4 __________

   d) Es igual a la mitad del cubo de x __________

   e) Es igual al cuadrado del triple de x menos el triple del cuadrado de x __________

3. *Expresa la edad que tenía un hombre hace x años*, sabiendo que:

a) Su edad dentro de 5 años será de 22 años ____________

b) Hace 3 años tenía 20 años ____________

c) Su edad actual es igual a

$$\frac{3}{2} \cdot x$$ ____________

4. Sabiendo que el precio de 1 kg de arroz es de x ptas y el de 1 kg de patatas es 23 ptas más barato, *expresa*:

a) *El coste* de 5 kg de arroz y 7 kg de patatas ____________

b) *El coste* de medio kg de arroz y 3/4 kg de patatas ____________

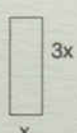
c) *El coste* de 8 kg de arroz y 12 kg de patatas, si nos hacen un descuento de 5 ptas por kg de cada tipo ____________

d) *El coste* de 1 kg de cada clase ____________

e) *El coste* de 100 kg de cada clase, si nos los venden a mitad de precio ____________

5. *Expresa el perímetro y el área* de un rectángulo de base x, sabiendo que:

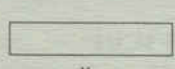
a) La altura es el triple de la base



P = ____________

A = ____________

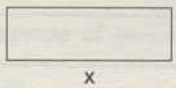
b) La base es 5 cms mayor que la altura



P = ____________

A = ____________

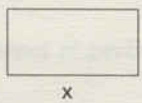
c) La razón entre la altura y la base es 5/7



P = ____________________

A = ____________________

d) La base es el doble de la altura



P = ____________________

A = ____________________

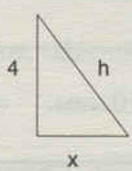
e) Es un cuadrado

P = ____________________

A = ____________________

6. En un triángulo rectángulo uno de los catetos mide x centímetros:

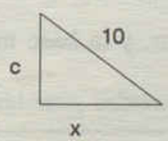
a) *Expresa la hipotenusa,* sabiendo que el otro cateto mide 4 cms



$h^2 =$ ____________________

$h =$ ____________________

b) *Expresa el otro cateto,* sabiendo que la hipotenusa mide 10 cms



$c^2 =$ ____________________

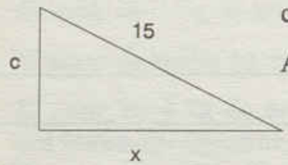
$c =$ ____________________

c) *Expresa el perímetro,* sabiendo que el otro cateto mide 7 cms

h = ____________________

P = ____________________

d) *Expresa el área,* sabiendo que la hipotenusa mide 15 cms



c = ____________________

A = ____________________

7. *Expresa el área de un trapecio cuya* base menor mide x cms, sabiendo que:

   a) La base mayor mide 2x cms y la altura 3 cms

      A = ____________________

   b) La altura y la base mayor miden ambas 10 cms

      A = ____________________

   c) La base mayor mide (x + 5) cms y la altura 7 cms

      A = ____________________

   d) La altura mide la mitad de la base menor, y la base mayor mide el triple de la base menor

      A = ____________________

8. El lado desigual de un *triángulo isósceles* mide x cms:

a) *Expresa el perímetro*, si cada uno de los lados iguales mide 7 cms

P = ______________________________

b) *Expresa el área*, si la altura mide (x + 3) cms

A = ______________________________

c) *Expresa el perímetro* si cada uno de los lados iguales mide

$$\frac{4}{3} \cdot x$$

P = ______________________________

d) *Expresa el área* si la altura es el triple de la base

A = ______________________________

9. En un concierto hay x personas. *Expresa el número de*:

a) Mujeres, sabiendo que es el 53 % del total

M = ______________________________

b) Niños, sabiendo que es el 7 % del total

N = ______________________________

c) Japoneses, sabiendo que es 1/9 del total

J = ______________________________

d) Críticos, sabiendo que es el 0,05 % del total

C = ______________________________

e) Catalanes, sabiendo que son los 4/5 del total

Cat = ______________________________

10. En un establecimiento hacen el 12 % de descuento en todos los artículos. *Expresa lo que pagaré por un artículo* que marca:

a) P.V.P. 7.500 ptas pagaré: ______________

b) P.V.P. 100.000 ptas pagaré: ______________

c) P.V.P. 100 ptas pagaré: ______________

d) P.V.P. 200 ptas pagaré: ______________

e) P.V.P. x ptas pagaré: ______________

PREDIDÁCTICA N.º 2

DESIGNA EN CADA CASO *UNA CANTIDAD* QUE PUEDA EXPRESARSE ALGEBRAICAMENTE UTILIZANDO TODAS LAS CANTIDADES DADAS.

EXPRESA DICHA CANTIDAD EN LENGUAJE ALGEBRAICO.

1. Dos personas tienen 96 pesetas en total y la primera tiene $25 + x/2$ pesetas.

   CANTIDAD =

2. Compramos 18 kg de metal a un precio de $\frac{4}{9} \cdot x$ pesetas el kg.

   CANTIDAD =

3. Antonio tiene $7x + 2$ cuadernos y a Juan le faltan 5 para tener el triple de los cuadernos que tiene Antonio.

   CANTIDAD =

4. Compramos un televisor cuyo PVP es de 97.500 pesetas, pero por pagarlo al contado nos hacen un descuento del x %.

   CANTIDAD =

5. La edad actual de Pedro es de $x + 4$ años. Hace 4 años su hermano Luis tenía el doble de la edad que Pedro tenía entonces.

   CANTIDAD =

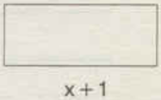
6. Tenía x litros de vino. Me bebí la mitad y regalé 1/3 del resto.

   CANTIDAD =

7. La base de un rectángulo mide $x + 1$ metros y la altura mide la mitad.

   CANTIDAD =

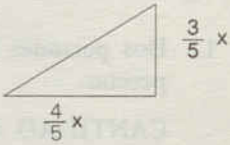
   CANTIDAD =



8. En un triángulo rectángulo, uno de los catetos mide $\frac{3}{5}$ x y el otro $\frac{4}{5}$ x.

   CANTIDAD =

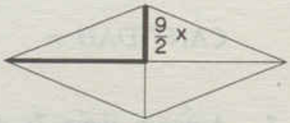
   CANTIDAD =



9. Las semidiagonales de un rombo miden $9 \cdot x/2$ y $6 \cdot x$ respectivamente.

   CANTIDAD =

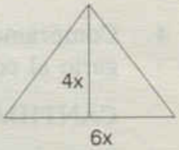
   CANTIDAD =



10. En un triángulo isósceles, el lado desigual mide 6x y la altura correspondiente mide 4x.

    CANTIDAD =

    CANTIDAD =



PREDIDÁCTICA N.° 3

BUSCA EN CADA CASO UNA *CANTIDAD QUE PUEDA EXPRESARSE DE DOS MANERAS DIFERENTES* Y *ESCRIBE* LA CORRESPONDIENTE *IGUALDAD.*

1. Dos chicas coleccionan sellos. Una de ellas tiene 7x sellos y la otra 28. Sabemos que en total han coleccionado 49 sellos.

   CANTIDAD:

2. En un cesto hay 108 manzanas y en otro cesto $12 + x$ manzanas. Se sabe que en el primero hay 3x manzanas menos que en el segundo.

   CANTIDAD:

3. Un niño tiene actualmente x años y su padre 4x. Dentro de 24 años el padre tendrá el doble de la edad de su hijo.

   CANTIDAD:

4. Al dividir $x + 1$ entre 187 obtenemos un cociente igual a $(x - 2)$ y un resto igual a 7.

   CANTIDAD:

5. Un comerciante compra 85 ovejas a x pesetas cada una y las vende por un precio total de 150.000 ptas, obteniendo un beneficio total de 70.000 ptas.

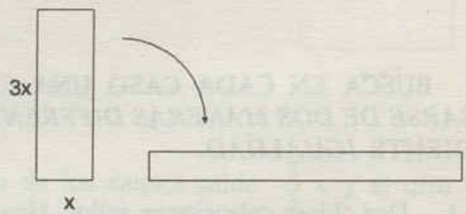
   CANTIDAD:

6. Tenía x pesetas, gasté la tercera parte en el cine y 150 pesetas en un refresco. Me ha sobrado la mitad del dinero que tenía al principio.

CANTIDAD:

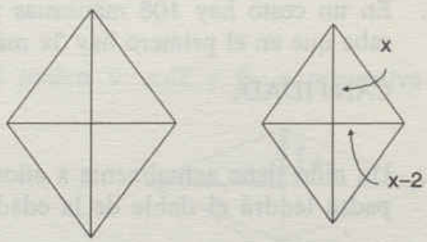
7. Un rectángulo tiene una base de x cms y una altura de 3x cms. Si la base disminuye en 1 cm y la altura aumenta 5 cms, el área no varía.

CANTIDAD:



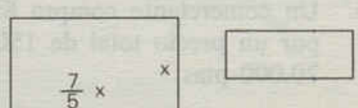
8. Las diagonales de un rombo miden respectivamente (x + 2) y (x + 5), y las del otro rombo, semejante al primero, miden (x − 2) y x.

CANTIDAD:



9. Las dimensiones de un rectángulo son x y $\frac{7}{5} \cdot x$. Si disminuimos cada lado en 4 cms, el nuevo perímetro resulta ser igual a 1/3 del antiguo perímetro.

CANTIDAD:



10. La suma de los cuadrados de dos números enteros consecutivos x, x + 1 es 60 unidades menor que el cuadrado de la suma de dichos números.

CANTIDAD:

DIRECTRIZ

1. *LEE* el problema con mucha atención, *RESPETANDO* los signos de puntuación.

   VUELVE A LEERLO hasta que seas capaz de explicarlo con tus propias palabras.

2. *DIBUJA* cualquier figura que intervenga y *DESTACA* en ella los *DATOS*.
   RAZONA SOBRE LA FIGURA en todo lo que sigue.

3. ¿Qué pide el problema? *ESCRIBE* cada una de las *CANTIDADES QUE PIDE* y *ASÍGNALES* un símbolo diferente a cada una. (Serán, probablemente, las *INCÓGNITAS*.)

4. *COMPRUEBA* que estas incógnitas pueden tomar valores numéricos; de lo contrario *DEBES CAMBIARLAS* porque están mal expresadas.

5. Si hay una figura, *COMPLÉTALA* añadiéndole las incógnitas.

6. *ESCRIBE LAS CONDICIONES* sin olvidar que en cada una de ellas *DEBE FIGURAR* la locución «*ES IGUAL A*» separando los dos miembros de la condición.

7. *DEBES ENCONTRAR EL MISMO NÚMERO DE CONDICIONES QUE DE INCÓGNITAS.*

   Si falta una condición, *BUSCA* un teorema, ley o fórmula adecuada.

Si falta una incógnita, *UTILIZA COMO TAL* una cantidad de valor desconocido.

8. *COMPARA* las condiciones que tú has escrito con el enunciado del problema.

9. *DESCOMPÓN* cada miembro de cada condición en partes más simples que puedas traducir al lenguaje algebraico. *UTILIZA EN LA TRADUCCIÓN* los datos y los símbolos que representan a las incógnitas. *NO INVENTES* ningún símbolo nuevo.

10. Cada condición se traduce en una ecuación. *CONVIERTE* cada miembro de cada condición en un miembro de la correspondiente ecuación.

11. *COMPRUEBA* si has escrito correctamente las ecuaciones; para ello *REALIZA LA TRADUCCIÓN INVERSA* (del lenguaje algebraico al castellano).

12. *RESUELVE* la ecuación o el sistema de ecuaciones resultante.

13. *COMPRUEBA POR ESCRITO* que cada solución (o sus componentes) verifica las ecuaciones planteadas. Si no es así, *REPITE* los cálculos desde el principio.

14. *RESPONDE POR ESCRITO* a las siguientes preguntas:

    a) ¿Cuántas soluciones del problema has obtenido? ¿Cuáles son?

    b) ¿Alguna de las soluciones obtenidas no tiene sentido? ¿Por qué?

    c) Cada solución con sentido ¿cumple las condiciones que impone el *enunciado*? Si no es así, *ASEGÚRATE* de que has comprendido el problema (puntos 1 al 8) y *REPITE EL PLANTEO* (puntos 9 al 11).

NORMAS PARA USAR CORRECTAMENTE LA DIRECTRIZ

1. En la primera lectura asegúrate de que entiendes todas las palabras y todas las *expresiones significativas* del enunciado.

   En la segunda lectura debes perseguir una *comprensión global* del enunciado.

   En la tercera, por fin, debes *fijarte en los detalles.*

2. *Dibuja con claridad.* Utiliza, a ser posible, escuadra y cartabón y no hagas la figura tan pequeña que no pueda completarse cómodamente con los datos y las incógnitas.

3. Una *INCÓGNITA* es una *cantidad de valor desconocido,* pedida por el problema o necesaria para calcular alguna cantidad que pide el problema. En cualquier caso *toda incónita debe aparecer,* por lo menos, *en una condición.*

4. Como que una *incógnita es una cantidad* (de una cierta magnitud) debe poder tomar valores numéricos. Fíjate en los siguientes ejemplos:

NO SON INCÓGNITAS	*PUEDEN SER INCÓGNITAS*
«La primera clase de vino»	«Precio de un litro de la primera clase de vino»
«Dimensiones del rectángulo»	«Longitud de la base del rectángulo»
«La edad de los dos hermanos»	«Edad *actual* del hermano menor»

6. Una *CONDICIÓN* es una igualdad entre *dos cantidades de la misma magnitud* en una de las cuales, por lo menos, interviene alguna incógnita. No la confundas con un *DATO* que es una igualdad entre dos cantidades en las que *no interviene ninguna incógnita.*

7. En los problemas de geometría suelen haber *condiciones ocultas*, como por ejemplo: Teorema de Pitágoras, Fórmula del Área, Fórmula del Perímetro, Proporcionalidad de lados entre polígonos semejantes, etc.

   Aparte de las condiciones ocultas, suele haber *tantas condiciones como frases principales*, las cuales se distinguen por ser *frases con sentido completo* que pueden reformularse de manera que contengan la locución *«es igual a»*.

   Dos frases principales suelen estar separadas por un punto, un punto y coma o bien mediante la conjunción «y».

   Si falta una incógnita, pregúntate *¿qué cantidad podría pedir el problema* (y no pide) de acuerdo con las condiciones? Debe ser una cantidad de valor desconocido *que figure en alguna de las condiciones.*

8. Asegúrate de que las condiciones que tú has escrito *tienen sentido* (léelas imparcialmente) y *no cambian el significado del problema.*

9. Es posible que uno de los dos miembros de una condición sea *simple*, es decir, que pueda expresarse directamente en lenguaje algebraico.

   Si un miembro de una condición no es simple, *quizás debas reformularlo antes de descomponerlo* en partes simples (traducibles directamente).

10. Recuerda que cada *condición* es una *igualdad entre dos formas diferentes de expresar una misma cantidad* de cierta magnitud. Por lo tanto los dos miembros de una condición deben representar la misma cantidad y *deben medirse en el mismo tipo de unidades* (metros, años, pesetas, centímetros cuadrados, ...).

11 Sin mirar el enunciado y *utilizando el significado de las incógnitas,* traduce cada ecuación del lenguaje algebraico al castellano. Ten en cuenta el *significado de los paréntesis* y *la jerarquía de las operaciones.* Mediante esta traducción inversa *debes obtener de nuevo las condiciones.*

14. Una *SOLUCIÓN DEL PROBLEMA* tiene tantas *componentes* (cada componente es un número) como incógnitas tiene el problema.
Una solución *no tiene sentido* cuando contradice la naturaleza de las magnitudes que intervienen en las incógnitas. Por ejemplo, hay magnitudes que no pueden ser negativas (edad, peso, longitud, área, volumen, densidad, tiempo empleado, etc.), otras no pueden ser números no enteros (número de niños, número de botijos, número de partidas ganadas, número de saludos, etc.) y otras, por fin, deben cumplir otras restricciones (año de nacimiento, temperatura ambiental, velocidad de un corredor de fondo, número de hermanos, etc.).

17. Sin duda es conocido y manejado el significado de las incógnitas, traduce cada condición del lenguaje algebraico al castellano. Pon en juego el significado de las palabras y la prioridad de las operaciones. Mediante esta traducción inversa debes obtener de nuevo las condiciones.

18. Una SOLUCIÓN DEL PROBLEMA es una lista ordenada en la que cada componente es un número (una incógnita) en el problema.
Una solución no tiene sentido cuando contradice la naturaleza de las magnitudes que intervienen en los incidentes. Por ejemplo, hay magnitudes que no pueden ser negativas (edad, masa, longitud, área, volumen, densidad, tiempo empleado, etc.), otras no pueden ser sino enteros (número de niños, número de lentejas, número de partidas ganadas, número de soldados, etc.) y otras, por fin, tienen siempre otras restricciones (año de nacimiento, temperatura ambiente, velocidad de un corredor de fondo, número de hermanos, etc.).

LISTAS DE PROBLEMAS

LISTAS DE GRADO DE DIFICULTAD UNO

LISTA 10

101. El tiempo que debe tardarse en resolver este problema se descompone del modo siguiente: 1/4 del total en *leerlo y comprenderlo*, 1/3 del total en *analizar las condiciones y plantearlo*, 2 minutos para *resolver las ecuaciones* planteadas y un tiempo para *evaluar la resolución realizada* que debe ser igual al empleado en la primera fase. ¿Cuánto tiempo debe emplearse en total?

102. Un padre dijo a su hijo: «Hace un año, yo tenía el triple de tu edad, y dentro de 13 años no tendré más que el doble.» ¿Cuál es la edad actual de cada uno?

103 (G). Busca las dimensiones de un campo de fútbol rectangular de 6.630 metros cuadrados de área y 334 metros de perímetro.

104. Un campesino compra 5 kg de patatas y 3 kg de melocotones por 510 pts. En otra ocasión compra 2 kg de melocotones a cambio de 2 kg de patatas y 180 pts. ¿Cuántas veces es más caro el kg de melocotones que el kg de patatas?

105. En un número de dos cifras, la cifra de las decenas es la mitad de la cifra de las unidades. Si invertimos el orden de las cifras, obtenemos otro número que es 27 unidades mayor que el primero. Halla este número.

106. Existe un número tal que si calculamos la raíz cuadrada positiva después de restarle 2 unidades, obtenemos el mismo resultado que si le restamos dos unidades y a continuación lo dividimos por 5. Halla dicho número.

107 (G). Calcula la diagonal de un rectángulo sabiendo que la base y la altura difieren en 5 metros y que el perímetro mide 70 metros.

108. La diferencia entre dos números es 565. Dividiendo el mayor por el menor resulta un cociente igual a 5 y un resto igual a 85. Calcula los dos números.

109. El año en que nació el matemático Isaac Newton (siglo XVII) está representado por un número de cuatro cifras cuya suma es 13, siendo la cifra de las decenas doble que la de las unidades. ¿En qué año nació Newton?

110 (G). Calcula el área de un triángulo isósceles sabiendo que su perímetro mide 32 cms. y su lado desigual mide 12 cms.

LISTA 11

111. En una clase hay tres secciones; la primera comprende la tercera parte de los alumnos, la segunda la cuarta parte, y la tercera, 20 alumnos. Halla el número total de alumnos de la clase.

112. Un padre tiene el quíntuplo de la edad de su hijo. Dentro de 6 años sólo tendrá el triple. ¿Qué edad tienen ahora cada uno de ellos?

113 (G). Una puerta rectangular tiene una superficie de 300 dm^2 y un perímetro de 74 dm. Calcula, en metros, las dimensiones de la puerta.

114. En un almacén pago 31.000 pts para comprar 4 sillas y 3 mesas. ¿Cuál es el precio de una silla y de una mesa, sabiendo que 4 mesas cuestan 3.000 pts más que 10 sillas?

115. Halla un número compuesto de dos cifras, sabiendo que la suma de éstas es 6, y que la diferencia entre dicho número y el que resulta al invertir el orden de sus cifras es 18.

116. Busca un número tal que al sumarle su raíz cuadrada positiva se obtenga por resultado 182.

117 (G). La diagonal de un rectángulo mide 40 metros. Calcula la base y la altura sabiendo que el perímetro mide 112 metros.

118. El producto de dos números es igual a 814, y al hacer la división euclídea se obtiene un cociente de 6 y un resto de 8. Calcula dichos números.

119. El filósofo anarquista Mijail Aléksandrovitch Bakunín nació en el siglo XIX. El año de nacimiento se representa por un número de cuatro cifras cuya suma es 14. Se sabe, además, que la cifra de las unidades es el cuádruplo de la cifra de las decenas. ¿En qué año nació Bakunín?

120 (G). El perímetro de un triángulo isósceles es 16 dm, y la altura 4 dm. Averigua las longitudes de los lados de dicho triángulo.

LISTA 12

121. La tercera parte de los alumnos de una clase han obtenido la calificación de *muy deficiente*, y la quinta parte la de *insuficiente*. Sabiendo que el resto (14 alumnos) han *aprobado*, calcula el número total de alumnos de la clase.

122. Un padre tiene 41 años y su hijo 14. ¿Cuántos años hace que el padre tenía cuatro veces la edad de su hijo?

123 (G). Calcula las dimensiones de un rectángulo sabiendo que la base es los 2/7 del perímetro y que el área es igual a 108 metros cuadrados.

124. Para pagar una cuenta de 2.400 pts se entregan 9 libras y 15 dólares, recibiendo 75 pts de vuelta. Para pagar otra cuenta de 3.200 pts se entregan 9 dólares, 15 libras y 35 pts. ¿A qué cambio, en pesetas, se han cotizado libras y dólares?

125. En un número de dos cifras, la cifra de las decenas es tres veces mayor (el triple) que la cifra de las unidades. Si invertimos el orden de las cifras, obtenemos otro número que es 54 unidades menor que el primero. Busca este número.

126. Busca un número cuya raíz cuadrada positiva es tres unidades menor que la cuarta parte del mismo.

127 (G). Halla la diagonal de un rectángulo cuyo perímetro es 84 cms, sabiendo que la base es los 4/3 de la altura.

128. La suma de dos números es 469. Al realizar la división euclídea del

mayor por el menor se obtiene un resto de 19 y un cociente de 5. Calcula los dos números.

129. Miguel de Cervantes Saavedra nació en el siglo XVI. El año de su nacimiento se representa por un número de cuatro cifras cuya suma es 17. Se sabe, además, que la cifra de las unidades es tres unidades mayor que la cifra de las decenas. ¿En qué año nació Cervantes?

130 (G). Calcula el perímetro de un triángulo isósceles sabiendo que su área mide 12 cms cuadrados y su lado desigual mide 6 cms.

LISTA 13

131. En una exposición de coches, la quinta parte son rojos, la cuarta parte son azules y la mitad blancos. Calcula cuántos coches hay en total sabiendo que sólo hay 50 coches que no son ni rojos, ni azules ni blancos.

132. Hace 4 años la edad de un padre era el cuádruplo de la de su hijo, pero dentro de 10 años la edad del padre no será más que el doble de la del hijo. ¿Cuál es la edad actual de cada uno de ellos?

133 (G). Una hoja de papel (rectangular) tiene una superficie de 726 cm^2 y su perímetro es el quíntuplo de la base de la hoja. Calcula sus dimensiones.

134. Para comprar 10 lápices y 40 bolígrafos entrego 1.200 pts y me devuelven 50. Un compañero compra 20 lápices y 32 bolígrafos y le cobran 80 pts más que a otro que compra 68 lápices. ¿Cuál es el precio de cada lápiz y de cada bolígrafo?

135. Halla un número de dos cifras sabiendo que la suma de éstas es 14, y que si se invierte el orden de las mismas, resulta otro número 36 unidades menor que el primero.

136. Existe un número tal que si extraemos la raíz cuadrada positiva después de sumarle 5 unidades, obtenemos el mismo resultado que si le restamos 3 unidades y después lo dividimos entre 7.

137 (G). Halla las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro es de 34 m, y cuya diagonal mide 13 metros.

138. La razón entre dos números es 17/5 y al realizar la división euclídea del mayor entre el menor, se obtiene un cociente de 3 y un resto de 24. Calcúlalos.

139. La suma de las 4 cifras del año que nació I. Kant (s. XVIII) es 14, siendo la cifra de las unidades doble de la de las decenas. ¿En qué año nació Kant?

140 (G). El lado desigual de un triángulo isósceles mide 48 m, y el área es de 768 m^2. Calcula el perímetro del triángulo.

LISTA 14

141. Un millonario reparte su fortuna de la manera siguiente: la mitad a su hijo mayor, la tercera parte al segundo y 350 millones al menor. ¿A cuánto asciende la fortuna?

142. Las edades de dos niños suman 16 años y dentro de un año la edad de uno será el doble de la del otro. ¿Cuáles son sus edades?

143 (G). Un campo rectangular de 2.100 m^2 de área tiene un perímetro que es el triple de la base. Calcula sus dimensiones.

144. En un supermercado el coste de 7 kgs de manzanas y 5 kgs de peras es el mismo que el coste de 15 kgs de manzanas, mientras que 4 kgs de manzanas y 6 kgs de peras cuestan 680 pts. ¿Cuál es el precio de cada una de estas frutas?

145. Halla un número de dos cifras, sabiendo que la cifra de las decenas es doble de las cifras de las unidades, y que, si se invierte el orden, el número resultante es 18 unidades menor que el primero.

146. La décima parte de un número es igual al número que se obtiene si se le extrae la raíz cuadrada positiva después de sumarle 24 unidades. ¿Cuál es el número original?

147 (G). Calcula la diagonal de un rectángulo sabiendo que el área es de 228 m^2 y que los lados difieren en 7 metros.

148. Busca dos números que están en la razón de 25 a 8, y que al realizar la división euclídea se obtiene un cociente de 3 y un resto de 13.

149. Albert Einstein, uno de los científicos más grandes de la humanidad, nació en el siglo XIX. El año de su nacimiento se representa por un número de 4 cifras cuya suma es 25, siendo la cifra de las decenas dos unidades menor que la cifra de las unidades. ¿En qué año nació Einstein?

150 (G). El perímetro de un triángulo isósceles es de 32 m y la altura relativa al lado desigual mide 8 m. Calcula el área.

LISTAS DE GRADO DE DIFICULTAD DOS

LISTA 20

201. Reparte 564 pts entre dos personas, de modo que la primera sólo reciba monedas de peseta, la segunda sólo reciba monedas de duro y ambas reciban la misma cantidad de monedas.

202. El número que indicará la edad de un niño dentro de 3 años será un cuadrado perfecto, y hace 3 años su edad era precisamente la raíz cuadrada de este número. ¿Qué edad tiene el niño actualmente?

203 (G). Calcula el perímetro de un rombo, sabiendo que el área es de 1920 cm^2 y una diagonal mide 96 cms.

204. Un cacharrero compró cierto número de botijos por 629 pts, se le rompen 3 y vende cada uno de los restantes en 4 pts más de lo que le había costado, ganando así un total de 85 pts. ¿Cuántos botijos compró?

205. Un padre quiere dejar a sus hijos fortunas proporcionales a sus edades. Al mayor le deja 39 millones y 600 acciones, mientras que al menor le deja 200 acciones y 57 millones. Calcula el valor de cada acción, sabiendo que las edades respectivas de sus hijos son 7 y 9 años.

206. Si un millón de votantes de la izquierda hubiesen votado a la derecha, las dos coaliciones hubiesen tenido el mismo número de votos. Pero si, por el contrario, un millón de votantes de la derecha hubiesen votado a la izquierda, ésta hubiera tenido el triple de votos que aquélla. ¿Cuántos votos ha tenido cada coalición?

207 (G). La diferencia entre las diagonales de un rombo es de 2 mts, y entre las de otro rombo semejante, de 6 mets. Calcula las diagonales del menor, sabiendo que las áreas difieren en 192 metros cuadrados.

208. Una vasija llena de agua pesa 14 kgs. Si quitáramos el 75 % del agua que contiene sólo pesaría 5 kgs. Calcula el peso de la vasija vacía.

209. El coste normal de 7 libretas y 6 libros iguales es de 5.950 pts. Pero el día del libro pago únicamente 4.550 pts al realizar dicha compra porque me hacen el 20 % de descuento en las libretas y el 25 % en los libros. ¿Cuál es el precio normal de cada libreta y de cada libro?

210 (G). Uniendo los puntos medios de los lados de un rectángulo obtenemos un rombo. Calcula los dos perímetros sabiendo que el área del rectángulo es de 192 m^2 y que la razón entre la altura del rectángulo y el lado del rombo es 6/5.

LISTA 21

211. Un campo de 121.200 m^2 se divide en parcelas de dos tipos: de Hectómetro cuadrado (= 10.000 m^2) y de Decámetro cuadrado (= 100 m^2), de manera que hay el mismo número de parcelas de cada tipo. Se entregan todas las parcelas grandes a un gigante y todas las pequeñas a un enano, ¿cuántos m^2 recibe cada uno?

212. El número que indicaba la edad de un niño hace 7 años es tal que al elevarlo al cuadrado se obtiene la edad que tendrá dentro de 5 años. ¿Qué edad tiene el niño actualmente?

213 (G). Calcula el área de un rombo sabiendo que el perímetro es de 104 cms y una diagonal mide 20 cms.

214. Un chaval quiere repartir caramelos entre sus amigos, pero calcula que para entregar 8 caramelos a cada uno le faltan 6 caramelos. Encuentra 6 caramelos más y al repartirlos observa que se han marchado 2 amigos, así que le tocan 9 caramelos a cada uno y todavía le sobra un caramelo. ¿Cuántos caramelos tenía al principio?

215. Un colono tiene dos jornaleros que ganan lo mismo. Por 50 días de trabajo paga a uno 2.300 pts y 4 medidas de trigo. Por 68 días de trabajo paga al otro 2.852 pts y 8,2 medidas de trigo. ¿Cuánto vale la medida de trigo?

216. Una mula y un asno trasportaban una carga de varios cientos de kgs.

El asno dijo a la mula: «Si yo tomase 100 kgs de tu carga, llevaría el mismo peso que tú.» La mula respondió: «Sí, pero si tú me dieses 100 kgs de la tuya, yo iría tres veces más cargada que tú.» ¿Cuántos cientos de kgs llevaba cada uno?

217 (G). Tenemos dos rombos semejantes cuyas áreas difieren en 525 cms^2; sabiendo que las diagonales de uno difieren en 3 cm, y las del otro en 12 cms, calcula las diagonales del mayor.

218. Un tonel lleno de vino pesa 125 kgs. Si quitamos 1/3 del vino que contiene sólo pesa 95 kgs. Calcula el peso del tonel vacío.

219. El coste de 50 kgs de un artículo y 80 kgs de otro es de 6.610 pts, pero como que nos hacen un 20 % de descuento en el primero y un 10 % en el segundo, sólo pagamos 5.624 pts. ¿Cuáles son los precios primitivos?

220 (G). Uniendo los puntos medios de los lados de un rectángulo obtenemos un rombo de perímetro 40 m; sabiendo que la razón entre la altura y la base del rectángulo es 3/4, calcula las dos áreas.

LISTA 22

221. Pagué 118 pts en monedas de duro y de una peseta. Si el total de monedas fue 54, ¿cuántas monedas de cada clase he entregado?

222. El número que indicará mi edad dentro de dos años es un cuadrado perfecto, y hace 28 años mi edad era exactamente la raíz cuadrada de ese número. ¿Qué edad tengo actualmente?

223 (G). Calcula las diagonales de un rombo sabiendo que el área es de 120 cms^2 y el perímetro es de 52 cms.

224. Un anticuario compra cierta cantidad de monedas aparentemente iguales por un total de 29.900 pts. Como que 8 monedas resultan ser falsas, vende las restantes en 1.200 pts más (cada una) de lo que le habían costado, ganando así un total de 7.600 pts. ¿A qué precio compró cada moneda?

225. Una inmobiliaria compra solares para edificar. Por 3 hectáreas paga

16 millones y 2 pisos. Por 7 hectáreas paga 28 millones y 7 pisos. ¿A cuánto paga la hectárea?

226. Dice Pablo a Emilio: «Si me das 40 pts, tendré 28 veces más dinero que tú.» «Dame 95 pts —repuso Emilio— y los dos tendremos la misma cantidad de dinero.» ¿Cuánto tiene cada uno?

227 (G). Calcula las diagonales de un rombo, sabiendo que difieren en 2 m y que las diagonales de otro rombo semejante, cuya área es 360 m^2 mayor, difieren en 8 m.

228. Un camión cargado pesa 25,5 toneladas. Si quitamos el 75 % de la carga el peso se reduce a 12 toneladas. ¿Cuánto pesa el camión vacío?

229. El coste de 3 televisores y 2 vídeos es de 490.000 pts; pero como que nos hacen un 10 % de descuento en los televisores y un 15 % en los vídeos, pagamos únicamente 430.000 pts. ¿Cuál era el precio primitivo de cada artículo?

230 (G). Uniendo los puntos medios de los lados de un rectángulo obtenemos un rombo. Calcula los dos perímetros sabiendo que el área del rectángulo es de 432 cm^2, y que la razón entre el lado del rombo y la altura del rectángulo es 5/6.

LISTAS DE GRADO DE DIFICULTAD TRES

LISTA 30

301. Un comerciante tiene dos clases de vino. Mezclándolos en la relación 1 a 3 obtiene una mezcla de 71,25 pts el litro, y mezclándolos en la relación 3 a 2, obtiene una mezcla de 80 pts el litro. Calcula el precio del litro de cada clase.

302. Un hombre le dijo a su hijo: «Cuando transcurra la tercera parte de los años que yo tengo, tú tendrás la mitad de mi edad actual.» «Sí —contestó el hijo— pero hace sólo 4 años, tu edad era 11 veces la mía.» Calcula la edad actual del hijo.

303 (G). Los perímetros de dos rectángulos semejantes difieren en 8 m y las alturas en 1 m. Sabiendo que la base del menor es 4 metros mayor que su altura, calcula sus dimensiones.

304. Tres ciudades A, B y C, no están situadas en línea recta. Si se va de A hacia B, pasando por C, se recorren 27 kms. Si se va de B hacia C, pasando por A, 35 kms y desde A hacia C pasando por B, 32 kms. ¿Cuáles son las dos ciudades más próximas?

305. Un chico dispone de monedas iguales que tiene colocadas en varias filas de igual número de monedas cada una. Si las distribuyera en dos filas menos, cada fila tendría 4 monedas más; pero si las colocara en 6 filas más, debería suprimir 4 monedas de cada fila. ¿Cuántas monedas tiene?

306. Un chico y su padre pasean juntos. Después de recorrer un largo camino, el hijo ha dado 1.000 pasos más que su padre. Sabiendo que la longitud del paso del hijo es los 2/3 de la longitud del paso del padre, calcula cuántos pasos da el hijo.

307 (G). El lado desigual de un triángulo isósceles es los 2/3 de cada uno de los lados iguales. Si incrementásemos en 3 cms cada uno de los lados iguales, sin cambiar el lado desigual, el nuevo perímetro sería los 5/4 del actual. ¿Cuánto miden los lados actualmente?

308 (G). El área de un rectángulo es de 192 cm^2 y la diferencia entre el semiperímetro y la diagonal es de 8 cms. Calcula la diagonal del rectángulo.

309. Un grupo de amigos cenan juntos, y a la hora de pagar la cuenta resulta que tres de ellos no tienen dinero, por lo que cada uno de los restantes debe pagar 160 pts más de lo que les correspondía. Sabiendo que la cuenta ascendía a 14.400 pts, calcula el número total de amigos que han cenado.

310 (G). La razón entre las bases de dos rectángulos equivalentes (misma área) es 4/5. La base de uno es 7 m mayor que la altura, mientras que la base del otro es sólo 2 m mayor que la altura. Calcula las dimensiones del primero.

LISTA 31

311. Calcula la cantidad de agua que hay que mezclar con 224 litros de vino de 16 pts el litro, para rebajar el precio a 13,5 pts el litro.

312. Juan le dijo a Pedro: «Cuando transcurra la mitad de los años que yo tengo, tú tendrás el doble de mi edad actual.» «Sí —contestó Pedro— pero hace 15 años mi edad era 4 veces mayor que la tuya.» Calcula la edad actual de Juan.

313 (G). Las bases de dos rectángulos semejantes difieren en 3 m y las alturas en 1 m. Calcula las dimensiones del menor de los rectángulos sabiendo que las áreas se diferencian en 15 m^2.

314. Juan, Pedro y Antonio desean conocer lo que pesan, pero sólo disponen de una balanza que no funciona cuando el peso es inferior a 100 kgs. Para resolver esta dificultad se les ocurre pesarse de dos en dos y obtienen los siguientes pesos: Juan y Pedro 143 kgs, Pedro y Antonio 141 kgs, Juan y Antonio 148 kgs. ¿Cuánto pesa el más delgado?

315. En la preparación de un espectáculo se dispone de un determinado número de sillas que se colocan en filas de igual número de sillas cada una. Si ponemos 3 sillas más en cada fila habrá que eliminar 2 filas, pero si, por el contrario, ponemos 2 sillas menos en cada fila, deberemos añadir 2 filas más. ¿De cuántas sillas disponemos?

316. Una niña y su padre pasean juntos. Acabado el paseo la niña calcula que su padre ha dado 1.500 pasos menos que ella. Si la longitud del paso del padre es los 4/3 de la longitud del paso de la niña, calcula cuántos pasos ha dado el padre.

317 (G). Cada uno de los lados iguales de un triángulo isósceles es 5 cms mayor que el lado desigual. Si se duplicaran los lados iguales sin cambiar el desigual, el nuevo perímetro sería los 9/5 del actual. ¿Cuánto miden los lados actualmente?

318 (G). Calcula la diagonal de un rectángulo de 972 m^2 de área, sabiendo que el semiperímetro excede en 18 m a dicha diagonal.

319. Una herencia de 405.000 pts había de repartirse entre cierto número de herederos. Tres de ellos son excluidos; por lo cual, la parte que corresponde a cada uno de los restantes se ve aumentada en 22.500 pesetas. ¿Cuántos herederos había primeramente?

320 (G). Las bases de dos rectángulos equivalentes (misma área) difieren en 2 m y sus alturas en 1 m. Sabiendo que la razón entre la base y la altura del rectángulo que tiene mayor altura es 5/3, calcula las dimensiones de uno de ellos.

LISTA DE PROBLEMAS MÁS FÁCILES

01. Un millonario reparte su fortuna de la manera siguiente: la mitad a su hijo mayor, la tercera parte al segundo, y el resto al hijo menor. Calcula cuánto recibe el hijo menor sabiendo que el segundo recibe 120 millones de dólares.

02. Un padre dijo a su hijo: «Dentro de 2 años, yo tendré 6 veces la edad que tú tenías hace 3 años.» ¿Cuál es la edad actual del padre si el hijo tiene ocho años?

03. Calcula el perímetro de un campo de fútbol rectangular de 6.510 m^2 de área, sabiendo que un lado mide 105 m.

04. Un campesino compra 5 kgs de patatas y 3 kgs de melocotones por 510 pts. En otra ocasión compra 2 kgs de melocotones a cambio de 2 kgs de patatas y 180 pts. Sabiendo que 1 kg de melocotones vale 120 pts, calcula cuántas veces es más caro que un kilo de patatas.

05. En un número de dos cifras, la de las decenas es igual a 8. Calcula la diferencia entre ese número y el que se obtiene al invertir el orden de las cifras, sabiendo que la suma de éstas es 13.

06. Busca un número cuya raíz cuadrada positiva es tres unidades mayor que la cuarta parte de 80.

07. Calcula lad iagonal de un rectángulo sabiendo que la base mide 36 m y el perímetro 102.

08. Al realizar la división euclídea entre dos números se obtiene un cociente de 7 y un resto de 14. Calcula el número mayor sabiendo que el menor es 123.

09. Un compañero tuyo nació en un año que se representa por un número de 4 cifras cuya suma es 19. Se sabe, además, que las cifras de las de-

cenas y las unidades difieren entre sí 5 unidades. ¿En qué año nació tu compañero?

10. El perímetro de un triángulo isósceles es de 48 cms y el lado desigual mide 18 cms. Calcula el área.

LISTA DE PROBLEMAS MÁS DIFÍCILES

1. Dos campesinas llevaban en total 100 huevos al mercado. Una vez vendidos todos los huevos las dos obtuvieron la misma cantidad de dinero. La primera mujer dijo a la segunda: «Si yo hubiera traído tantos huevos como tú, habría obtenido 15 monedas.» La otra le contestó: «Y si yo hubiese vendido los que tú traías, hubiese obtenido 6 + 2/3 monedas.» ¿Cuántos huevos llevaba cada una? (Euler.)

2. Un padre muere dejando muchos hijos. En su testamento especifica:

   «El hijo mayor debe recibir 100 coronas más la décima parte del resto.
   »El segundo debe recibir 200 coronas más la décima parte del resto.
   »El tercero debe recibir 300 coronas más la décima parte del resto.
   »El cuarto debe recibir 400 coronas más la décima parte del resto...»

   Y así sucesivamente hasta el último de los hijos. Al final de la repartición descubrieron que la fortuna del padre se había repartido en partes iguales entre los hijos. ¿Cuántos hijos había? (Euler.)

3. Tres jugadores convienen en que el que pierda una partida pagará a los otros dos una cantidad igual a la que cada uno de ellos tenga en ese instante. Después de perder sucesivamente una partida cada uno, resulta que cada cual tiene 16 pts. ¿Cuánto tenía cada uno al empezar a jugar? (Euler.)

4. Sabiendo que el área de un triángulo isósceles es de 480 m^2 y su perímetro de 128 m, calcula la longitud de la altura correspondiente al lado desigual.

5. Halla dos números diferentes de cero tales que su suma, su producto y la diferencia de sus cuadrados sean iguales entre sí.

6. Existe un número entero tal que al sumarle 100 se obtiene un cuadrado perfecto y al sumarle 168 se obtiene otro cuadrado perfecto. ¿Cuál es este número?

7. Busca 3 números reales que estén en *progresión aritmética* y formen *«tríada pitagórica»*. ¿Cuántas soluciones tiene este problema? ¿Sabrías escribirlas todas?

8. Busca 3 números reales que estén en *progresión gemétrica* y constituyan una *«tríada pitagórica»*. De nuevo la solución de este problema no es única. ¿Serías capaz de escribir la solución general? (Aparecerá el inverso del número «áureo».)

9. Se considera un triángulo isósceles inscrito en una circunferencia. Llamemos «d» a la longitud del diámetro de la circunferencia, «b» a la longitud del lado desigual del triángulo y «a» a la longitud de cada uno de los lados iguales. Escribe la *ecuación que relaciona* «a», «b» y «d». (Esta ecuación debe permitir calcular cualquiera de las tres longitudes si las otras dos son conocidas.)

10. Dadas dos fracciones *cualesquiera* a/b y c/d, ¿es *siempre* posible transformar la primera en una equivalente a la segunda sin más que sumarle un *mismo número* al numerador y al denominador?

11. Un comerciante tiene dos variedades de vino; el precio de la primera es de «a» pts el litro y el precio de la segunda es de «b» pts el litro. Desea hacer «c» litros de una mezcla que cueste «d» pts el litro. ¿Cuántos litros de cada tipo debe utilizar? *Interpreta el resultado* en los casos particulares: $a = b$, $a = d$ y $b = d$.

12. Busca la longitud «a» de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, suponiendo que conoces el área «A» y el semiperímetro «s». (Newton.)

    Indicación: DEBES EXPRESAR UNA MISMA CANTIDAD DE DOS MANERAS DIFERENTES. El resultado, sorprendente, es:

$$a = s - A/s$$

II. PROBLEMAS DE CONTAR

Directriz (1) de problemas simples

1. ¿Qué objetos se trata de contar?

2. Describe con palabras, esquemáticamente, por lo menos *tres de estos objetos.*

3. Representa cada uno de estos objetos mediante un *grupo de símbolos* (letras, números, o letras con subíndices).

4. Escribe la *LISTA COMPLETA* de estos símbolos.

5. Escribe un par de *grupos de símbolos* y explica los *objetos que representan.*

6. Para saber cuántos objetos hay vamos a *construir un «árbol»*:

   — *Empieza* poniendo, en la *primera columna (vertical),* todos los símbolos que pueden figurar en primer lugar dentro del grupo de símbolos.
   — *Conecta cada uno de ellos* con todos los símbolos que *pueden* figurar en segundo lugar.
   — *Repite la operación* hasta terminar el árbol (si es pequeño), o hasta que descubras la *ley de crecimiento del árbol,* de manera que puedas contar cuántas ramas tendría al final.
   — Cada *rama del árbol* debe representar uno de los objetos a contar; pero puede suceder que:

   A) Algunas ramas no representen *ninguno* de los objetos a contar. Debes suprimirlas.
   B) Varias ramas representen *el mismo* objeto. Debes *«podar» el árbol.*

7. Si los datos del problema son números elevados, *puedes rebajarlos* para ver cómo se resuelve el problema, y luego volver a los datos iniciales.

8. Intenta *recordar algún problema* anterior *semejante* al actual, y aplica el mismo método de resolución.

Lista de problemas simples (I)

1. ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con las cifras 2, 4, 6, 8?
2. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden elegir 5 personas entre 8 para formar el cinco inicial de un equipo de baloncesto? (Se supone que cualquier persona puede jugar indistintamente en cualquier demarcación.)
3. ¿De cuántas maneras distintas se pueden reordenar las letras de la palabra «*libro*»? ¿Y las de la palabra «*matemática*»?
4. Al comenzar una reunión, 10 personas se saludan entre sí. ¿Cuántos apretones de manos se darán?
5. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar 6 personas en fila? ¿Y en círculo?
6. ¿Cuántas palabras (con o sin sentido) de dos letras distintas se pueden formar utilizando únicamente las cinco vocales?
7. En las cabinas de teléfonos hay una cerradura con 4 discos numerados del cero al nueve. ¿Cuántas claves diferentes se pueden formar?
8. ¿Cuántas rectas se pueden trazar que pasen por dos vértices cualesquiera de un hexágono regular dado de antemano?
9. ¿De cuántas maneras pueden sentarse 4 personas en una fila de 8 asientos? ¿Y 8 personas en una fila de 4 asientos?
10. Cinco equipos de fútbol-sala juegan un campeonato «todos contra todos»:

    A) En campo neutral.
    B) A doble vuelta (un partido en cada campo).

    ¿Cuántos partidos se celebrarán en cada caso?
11. ¿Cuántos números de 5 cifras se pueden formar con 2 sietes y 3 ochos?
12. Se lanza un dado 5 veces. ¿Cuántos «resultados» se pueden obtener? (Por ejemplo, 5, 6, 4, 4, 1, podría ser uno de tales resultados.)

Predidáctica de problemas de contar

1. Para cada uno de los siguientes «*objetos*» escribe: un *grupo de símbolos* que lo represente, la *lista completa de símbolos* que pueden utilizarse en cada caso y los correspondientes números «m» *(número total de símbolos diferentes)* y «n» *(número de símbolos, repetidos o no, que forman cada grupo)*:

		Grupo	*Lista completa*
a)	Manera de sentarse 5 personas en un banco de 5 lugares	ADECB (n = 5)	A,B,C,D,E (m = 5)
b)	Quiniela de 6 partidos	1XX212 (n = 6)	1,X,2 (m = 3)
c)	Número de 5 cifras distintas	47896 (n = 5)	(m =)
d)	Saludo, en una reunión de 7 personas	(n =)	A,B,C,D,E,F,G, (m =)
e)	Collar formado por 4 diamantes idénticos y 3 esmeraldas idénticas	(n =)	D,E (m =)
f)	Diagonal de un hexágono	(n =)	A,B,C,D,E,F (m =)
g)	Clasificación final en un campeonato en el que participan 8 equipos	(n =)	1,2,3,4,5,6,7,8 (m =)
h)	Resultado que se obtiene al lanzar 3 dados	(n =)	(m =)
i)	Número de 7 cifras, formado por dos nueves y 5 ochos	(n =)	(m =)
j)	Manera de subir al pódium en una final olímpica (10 finalistas)	(n =)	A,B,C,D,E,F,G,H,I,J (m =)

2. Escribe, en cada caso, un *grupo de símbolos que tenga dos o más símbolos repetidos*, indicando el «objeto» que dicho grupo representa:

	Grupo con repetición	*«Objeto» que representa dicho grupo*
a)	DEBBA	La persona «D» se sienta en el lugar 1.º, la persona «E» en el 2.º, la persona «B» en el 3.º y en el 4.º (?) y la persona «A» en el 5.º. **NO PUEDE HABER REPETICIÓN**.
b)	2X2112	Se pronostica que en el primer partido ganará el equipo visitante, en el segundo partido habrá empate, etc. **SÍ PUEDE HABER REPETICIÓN**.
c)	77853	No es un número de cinco cifras distintas, luego __________
d)	AA	La persona «A» se saluda a sí misma __________
e)	DDDEEDE	__________
f)		Es la diagonal que une el vértice «C» con el vértice «C», luego __________
g)		El equipo «5» ha quedado clasificado a la vez, en 3.ª y 7.ª posición, __________
h)		Dos cincos y un cuatro. Es un resultado posible al lanzar tres dados, luego __________
i)		__________
j)	HFF	El atleta «H» ha ganado la medalla de oro, __________

3. Escribe, en cada caso, dos grupos de símbolos que *se diferencien únicamente en la posición de un par de símbolos (diferentes)*. Explica si embos grupos representan «objetos» diferentes o no.

Par de grupos	*¿Representan «objetos» diferentes?*
a) ADECB y AEDCB **SÍ QUE IMPORTA EL ORDEN**	**SÍ**, porque en el primer caso la persona «D» se sienta en el 2.º lugar y la persona «E» en el lugar 3.º, mientras que en el segundo caso (grupo AEDCB) estas personas se sientan al revés.
b) 112XX2 y 112XX1 **SÍ QUE IMPORTA EL ORDEN**	**SÍ**, porque ______
d) BD y DB	*No*, porque ambos grupos representan el mismo saludo entre las personas «B» y «D». Luego, en este caso *NO IMPORTA EL ORDEN.*
c)	______
e) DDDDEEE y DDDEDEE	______
f) CF y FC	______
g)	______
h) 236 y 632	______
i)	______
j) AEGIJHFBCD y AEGIJDFBCH	______

4. En los casos en que *SÍ PUEDE HABER REPETICIÓN*, investiga si la repetición es *LIBRE* (pueden repetirse libremente los símbolos dentro

de cada grupo) o *IDÉNTICA* (el número de veces que se repite cada símbolo dentro de cada grupo es siempre el mismo). Compruébalo escribiendo unos cuantos grupos.

b) 111111, 2222XX, XXXXXX, 12X12X, XXXXX2 — *REPETICIÓN LIBRE*

e) DDDDEEE, DEDEDED, EEDDEDD, EDDDEDE — *REPETICIÓN IDÉNTICA*

h) ________________ ________________

i) ________________ ________________

5. Aplica el «*ALGORITMO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SIMPLES*» para decidir cómo se llaman los grupos en cada caso.

   a) Como que NO PUEDE HABER REPETICIÓN, SÍ QUE IMPORTA EL ORDEN y m = n, son *PERMUTACIONES*

   b) Como que SÍ PUEDE HABER REPETICIÓN y ésta es LIBRE, son ________________

   c) ________________

   d) ________________

   e) ________________

   f) ________________

   g) ________________

   h) ________________

   i) ________________

   j) ________________

6. Escribe la fórmula correspondiente y calcula el número de grupos de símbolos (es decir de «objetos») que pueden construirse en cada caso.

a) $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ maneras de sentarse 5 personas en un banco de 5 lugares.

b) __________ quinielas de 6 partidos

c) __________

d) __________ saludos posibles

e) __________ collares distintos

f) __________

g) __________

h) __________ resultados posibles

i) __________

j) __________

Enunciados de los ejemplos de problemas simples

1. ¿Cuántas quinielas pueden hacerse? (Se consideran solamente columnas de catorce partidos y apuestas sencillas.)

2. Averiguar de cuántas maneras pueden sentarse:

   A) Cinco personas en:

      a) Tres asientos en fila.
      b) Cinco asientos en fila.
      c) Cinco asientos en círculo.

   B) Tres personas en cinco asientos en fila.

3. ¿De cuántas maneras se pueden repartir 3 premios iguales entre 5 personas, de forma que a cada una de ellas le toque un premio como máximo?

4. Averiguar cuántos números de 6 cifras es posible escribir de forma que, en cada uno de ellos, figuren exactamente 2 unos, 3 doses y 1 tres.

5. En una reunión hay 8 amigos. ¿Cuántos grupos de 3 amigos pueden conversar?

6. ¿Cuántos brazaletes (con cierre) se pueden confeccionar utilizando, en cada uno de ellos, exactamente 1 perla, 3 rubíes, 4 topacios y 2 diamantes?

7. ¿Cuántos lados tiene un polígono de 35 diagonales?

8. ¿Cuántos números de 5 cifras distintas se pueden escribir con las cifras 0, 1, 3, 5, 7, 8 y 9? (No cuentan los que empiezan por cero.) ¿Cuántos de ellos terminan en 89? ¿Y cuántos de ellos son múltiplos de cuatro?

9. Se quiere construir un código secreto utilizando unos cuantos símbolos, de forma que sea posible escribir 40.320 palabras de modo que aparezcan todos los símbolos en cada una de ellas. ¿Cuántos símbolos es necesario definir en total?

10. ¿Cuántas familias puede haber con seis hijos? (Se considera que no es lo mismo ser el mayor, con cinco hermanas pequeñas, que el menor, con cinco hermanas mayores.)

Introducción de los conceptos de combinatoria

● Nos proponemos pasar del análisis *figurativo* sintetizado en la *DIRECTRIZ (1) DE PROBLEMAS SIMPLES*, a un análisis *más formal* de las propiedades de los *grupos de símbolos* construidos.

Para ello retomaremos los mismos ejemplos 1, 2, 3 y 4 en el punto inmediatamente anterior a la construcción del esquema en árbol (punto 5 de dicha DIRECTRIZ) y se realizarán las preguntas sintetizadas en la *DIRECTRIZ (2) DE PROBLEMAS SIMPLES (directos)*, que culmina en el *ALGORITMO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SIMPLES*. De esta forma introduciremos los conceptos usuales en COMBINATORIA.

Ejemplo 1

¿Cuántas quinielas pueden hacerse? (Se consideran solamente columnas de catorce partidos y apuestas sencillas.)

Análisis cuantitativo:

11111111111222	— Disponemos de m = 3 SÍMBOLOS DISTINTOS
111111xxx222x1	
xxxxxx22211111	— *Cada grupo* está formado por n = 14 SÍMBOLOS (REPETIDOS O NO)
222xxx111112x1	
...	— El número total de grupos de símbolos era igual a 3^{14}
	— *FÓRMULA GENERAL*: m^n

Análisis cualitativo:

Los grupos se construyen con *REPETICIÓN LIBRE* de los símbolos dentro de cada grupo; además, IMPORTA EL ORDEN, puesto que al intercambiar dos símbolos distintos el nuevo grupo representa un objeto diferente.

* ESTOS GRUPOS SE LLAMAN **VARIACIONES CON REPETICIÓN**, y su número se expresa por la fórmula:

$$VR_{m,\,n} = m^n$$

Ejemplo 2 A)a)

Averiguar de cuántas maneras pueden sentarse cinco personas en tres asientos en fila.

Análisis cuantitativo:

1.ª2.ª3.ª — Disponemos de m = 5 SÍMBOLOS DISTINTOS
5.ª4.ª1.ª — *Cada grupo* está formado por n = 3 SÍMBOLOS (que, en
4.ª3.ª2.ª este caso, son distintos)
2.ª4.ª1.ª — El número total de grupos era igual a $5 \times 4 \times 3$
... — *FÓRMULA GENERAL*: $m \times (m - 1) \times (m - 2) \times \ldots$
(En total, *n factores*)

Análisis cualitativo:

En un grupo **NO PUEDE HABER REPETICIÓN** de símbolos y **SÍ QUE IMPORTA EL ORDEN** de los símbolos dentro del grupo, puesto que al intercambiar dos símbolos el nuevo grupo representa un objeto a contar distinto.

* ESTOS GRUPOS SE LLAMAN **VARIACIONES**, y su número se expresa por la fórmula:

$$V_{m,n} = m \times (m - 1) \times (m - 2) \times \ldots$$

(En total, *n factores*) ($m \geqslant n$).

Ejemplo 2 A)b)

Averiguar de cuántas maneras pueden sentarse cinco personas en cinco asientos en fila.

Análisis cuantitativo:

1.ª2.ª3.ª4.ª5.ª — Disponemos de m = 5 SÍMBOLOS DISTINTOS

3.ª2.ª4.ª5.ª1.ª	— *Cada grupo* está formado por n = 5 SÍMBOLOS (que, en este caso, son distintos)
2.ª3.ª1.ª5.ª4.ª	
5.ª4.ª2.ª1.ª3.ª	— El número total de grupos era igual a 5 × 4 × 3 × 2 × 1 = 5! (Cinco factorial)
	— *FÓRMULA GENERAL:* m × (m − 1) × (m − 2) × × ... × 3 × 2 × 1 = m!

Análisis cualitativo:

— En un grupo ____

____

____

* Se trata, pues, de VARIACIONES; pero, como que m = n, ESTOS GRUPOS RECIBEN EL NOMBRE ESPECIAL DE **PERMUTACIONES**, y su número se expresa por la fórmula:

$$P_m = m \times (m - 1) \times (m - 2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1 = m! \quad \text{(m factorial)}$$

Ejemplo 3

¿De cuántas maneras se pueden repartir 3 premios iguales entre 5 personas, de forma que a cada una de ellas le toque un premio como máximo?

Análisis cuantitativo:

1.ª2.ª3.ª	— Disponemos de m = 5 SÍMBOLOS DISTINTOS
1.ª2.ª4.ª	— *Cada grupo* está formado por n = 3 SÍMBOLOS (que, en este caso, son distintos)
2.ª3.ª4.ª	
2.ª4.ª5.ª	— El número total de grupos era igual a
...	$\dfrac{5 \times 4 \times 3}{3!}$

— *FÓRMULA GENERAL:*

$$\frac{m \times (m-1) \times (m-2) \times \dots}{n!}$$

(en total, *n* factores)

Análisis cualitativo:

En un grupo *NO PUEDE HABER REPETICIÓN* de símbolos y *NO IMPORTA EL ORDEN DE LOS SÍMBOLOS* dentro del grupo, puesto que al intercámbiar dos símbolos, el nuevo grupo representa *el mismo* objeto a contar.

* ESTOS GRUPOS SE LLAMAN **COMBINACIONES**, y su número se expresa por la fórmula:

$$C_{m,\,n} = \binom{m}{n} = \frac{m \times (m-1) \times (m-2) \times \dots}{n!}$$

(en total, *n* factores) ($m \geqslant n$).

Ejemplo 4

Averiguar cuántos números de 6 cifras es posible escribir de forma que, en cada uno de ellos, figuren exactamente 2 unos, 3 doses y 1 tres.

Análisis cuantitativo:

322211 — Disponemos de m = 3 SÍMBOLOS DISTINTOS
112223 — *Cada grupo* está formado por n = 6 SÍMBOLOS (algunos de
121232 los cuales, en este caso, se repiten)
223112 — El número total de grupos era igual a
...

$$\frac{6!}{3! \times 2! \times 1!}$$

— *FÓRMULA GENERAL:*

$$\frac{n!}{a! \times b! \times c!}$$

con $a + b + c = n$ (si $m = 3$)

Análisis cualitativo:

En un grupo *SÍ PUEDE HABER REPETICIÓN* de símbolos, pero esta repetición *no* es libre; por el contrario, forzosamente, en cada grupo, tiene que repetirse exactamente $a = 3$ veces el símbolo «2», $b = 2$ veces el símbolo «1» y $c = 1$ vez el símbolo «3».

Por otra parte, SÍ QUE IMPORTA EL ORDEN, puesto que al intercambiar dos símbolos distintos el nuevo grupo representa un objeto a contar distinto.

* ESTOS GRUPOS SE LLAMAN **PERMUTACIONES CON REPETICIÓN**, y su número se expresa por la fórmula:

$$PR_n^{a,\,b,\,c} = \frac{n!}{a! \times b! \times c!}$$

con $a + b + c = n$ (para $m = 3$). Siendo:

a = Número de veces que se repite el 1.^{er} símbolo en cada grupo
b = Número de veces que se repite el 2.^{o} símbolo en cada grupo
c = Número de veces que se repite el 3.^{er} símbolo en cada grupo

Directriz (2) de problemas simples

I. PROBLEMAS DIRECTOS

1. ¿Qué objetos se trata de contar?
2. Describe con palabras, esquemáticamente, por lo menos *tres de estos objetos.*
3. Representa cada uno de estos objetos mediante un *grupo de símbolos* (letras, números, o letras con subíndices).
4. Escribe la *LISTA COMPLETA* de estos símbolos.
5. Escribe un par de *grupos de símbolos* y explica los *objetos que representan.*
6. ¿De *CUÁNTOS SÍMBOLOS DISTINTOS DISPONES* para formar estos grupos de símbolos? Denotaremos por «*m*» a dicho número.
7. ¿Por *CUÁNTOS SÍMBOLOS (repetidos o no) ESTÁ FORMADO CADA UNO* de los grupos de símbolos? Denotaremos por «*n*» a dicho número.

   Debes comprender y *memorizar* el esquema adjunto.

II. PROBLEMAS INVERSOS

Sabemos que un problema de contar es **INVERSO** cuando, después de traducirlo al lenguaje simbólico, observamos que el *número de objetos* (o grupos de símbolos) *es conocido* (es un dato), mientras que el *número de símbolos (puede ser «m» o bien «n») es desconocido* (es la incógnita).

1. *Escribe el enunciado de un problema directo* obtenido tomando como dato (valor numérico conocido) lo que era la incógnita, y como incógnita lo que antes era un dato (el número de grupos de símbolos).

2. *Resuelve el problema que tú has enunciado*, detallando el proceso que sigues.

3. *Designa por «x» la incógnita del problema inverso.* Escribe la igualdad *(análoga a la escrita para el problema directo)* que relaciona «x» con los datos del problema inverso. *Obtendrás una ecuación* cuya resolución te dará el valor de la «x».

4. *Comprueba* que este valor es coherente con el enunciado del problema.

Normas para usar la directriz (2)

1. Escribe *con precisión* los objetos que se trata de contar. Fíjate bien en *lo que pide* el problema.

2. Para describirlos debes hacer un esfuerzo por *imaginar* la situación planteada por el problema. Por ejemplo, puedes suponer que tú eres el «protagonista» y que debes, efectivamente, repartir los premios, confeccionar los collares, etc.

   Por otra parte, en ciertos casos puede ser necesario describir más de tres objetos (pero no menos).

3. *Escoge con cuidado* los símbolos que vas a utilizar; así, en ocasiones es preferible utilizar números, en otras, letras, o letras con subíndices. (Por ejemplo, C_1, C_2, ..., C_{24} para indicar 1.ª consonante, 2.ª consonante, ..., 24.ª consonante.)

4. Asegúrate de que escribes *todos los símbolos* que te pueden servir para representar los objetos. *Cuenta* cuántos hay.

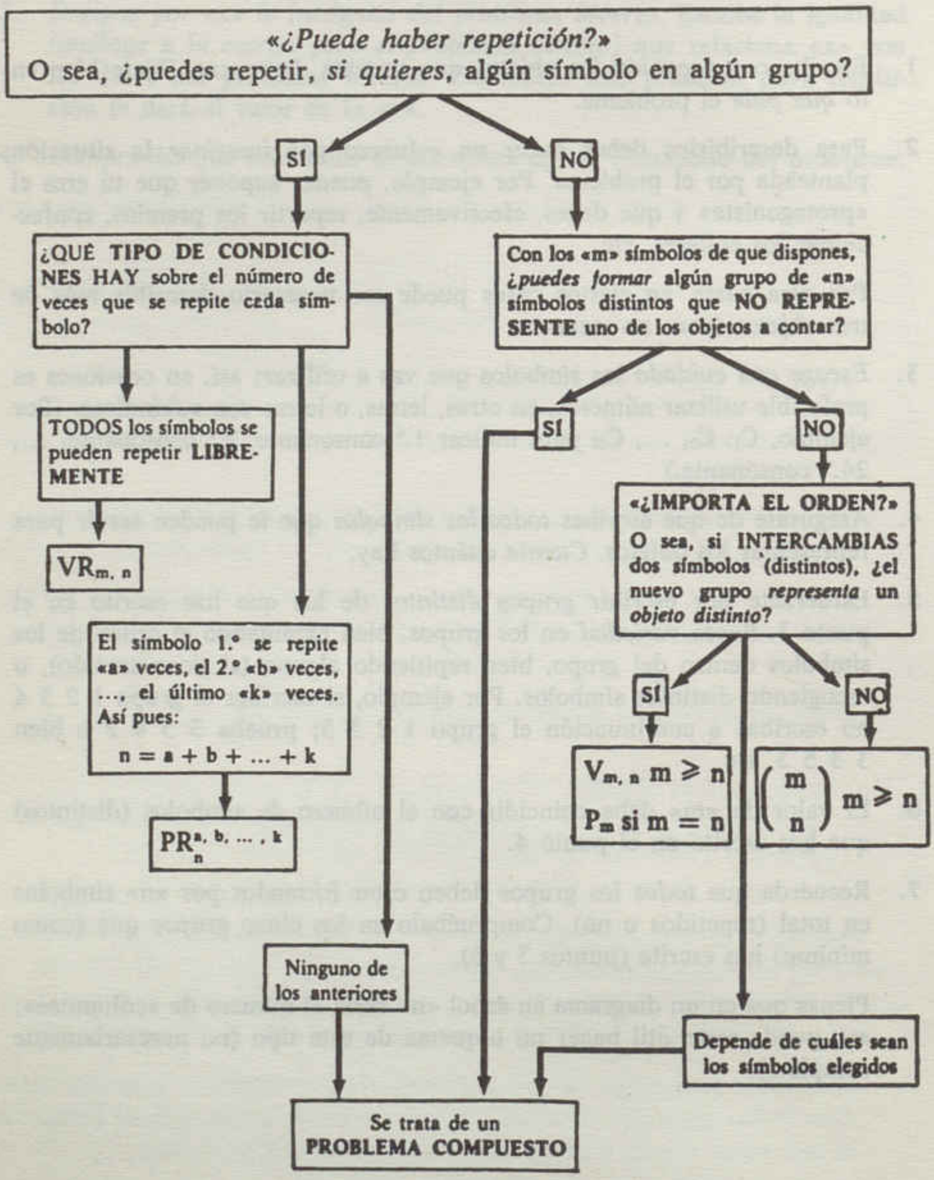
5. Esfuérzate por escribir grupos *distintos* de los que has escrito en el punto 3. Busca *variedad* en los grupos, bien cambiando el orden de los símbolos dentro del grupo, bien repitiendo alguno (si tiene sentido), o escogiendo distintos símbolos. Por ejemplo, si escribes el grupo 1 2 3 4 no escribas a continuación el grupo 1 2 3 5; prueba 3 5 4 2 o bien 3 3 5 3, etc.

6. El valor de «m» debe coincidir con el número de símbolos (distintos) que has escrito en el punto 4.

7. Recuerda que *todos* los grupos deben estar formados por «n» símbolos en total (repetidos o no). Compruébalo en los cinco grupos que (como mínimo) has escrito (puntos 3 y 5).

   Piensa que en un diagrama en árbol «n» sería el número de «columnas»; así, puede serte útil hacer un esquema de este tipo (no necesariamente completo).

ALGORITMO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SIMPLES



Observaciones a tener en cuenta en la utilización del algoritmo

1. En el caso de las VARIACIONES CON REPETICIÓN, al igual que en el de las VARIACIONES, *no intervienen todos los símbolos en cada grupo.*

2. En el caso de las PERMUTACIONES CON REPETICIÓN, al igual que en el de las PERMUTACIONES, *sí que intervienen todos los símbolos en cada grupo.*

3. El caso en que NO IMPORTA EL ORDEN pero SÍ PUEDE HABER REPETICIÓN *no está contemplado explícitamente en el esquema algorítmico.* Se le considera un problema compuesto.

4. Hazte las preguntas *CON TODO RIGOR.* Piensa que las simplificaciones excesivas pueden confundir; ello es especialmente cierto para la pregunta: «¿IMPORTA EL ORDEN?»

5. Por consiguiente, NO UTILICES el ALGORITMO sin antes haber contestado con atención las preguntas formuladas en la DIRECTRIZ (2).

   Fíjate, además, en que mientras que la *distinción entre la «m» y la «n»* no es especialmente problemática en los casos en los que no puede haber repetición, dado que siempre tiene que ser $m \geqslant n$, hay que ser *muy cuidadoso* para no confundirlas en el caso de las VARIACIONES CON REPETICIÓN, puesto que en ocasiones es $m \geqslant n$ y en otras es $m \leqslant n$.

6. En las preguntas «¿PUEDE HABER REPETICIÓN?» y *¿puedes formar* algún grupo de «n» símbolos distintos que *NO REPRESENTE* uno de los objetos a contar?, debes *esforzarte en intentar realmente* repetir algún símbolo, o formar alguno de tales grupos.

7. Aunque en una primera etapa no te aparecerán PROBLEMAS COMPUESTOS acostúmbrate a no saltarte pasos a la hora de utilizar el ALGORITMO, y responde TODAS las preguntas (en el orden indicado) que en él se te formulan.

Lista de problemas simples (II)

1. Un test está formado por 25 preguntas, cada una de las cuales admite tres respuestas alternativas. ¿De cuántas formas distintas se puede resolver el test?

2. ¿De cuántas maneras es posible repartir 4 premios distintos (por ejemplo, un libro, un bolígrafo, un balón y una bufanda) entre 40 alumnos, si a cada uno sólo le puede corresponder uno de estos premios como máximo?

3. Cinco amigos se sortean el sentarse o quedarse de pie en un sofá de tres asientos. ¿Cuántos «tríos afortunados» se pueden obtener?

4. ¿Cuántos brazaletes (con cierre) de 7 piezas se pueden construir, si se dispone del número suficiente de piezas de colores azul, blanco y rojo?

5. ¿Cuántos collares (con cierre) se pueden confeccionar de forma que cada uno de ellos esté formado por 5 perlas, 6 topacios y 8 diamantes?

6. Veinte alumnos de un centro escolar se reparten tres premios distintos: una guitarra, una bicicleta y una máquina de escribir. ¿De cuántas maneras distintas puede hacerse la repartición, si a un mismo alumno le puede corresponder más de un premio?

7. ¿Cuántos números de 6 cifras distintas se pueden escribir utilizando las cifras 1, 2, 3, 4, 7 y 9? Si dichos números se ordenan de menor a mayor, ¿cuál ocupará el lugar 3 6 1? ¿Y qué lugar ocupará el número 7 1 3 2 4 9?

8. ¿Cuántos números de 4 cifras distintas se pueden escribir utilizando las cifras 1, 2, 3, 4, 5 y 6? ¿Cuántos de ellos empiezan por 31?

9. En un plano hay 10 rectas tales que no hay ningún par que sean paralelas ni concurren tres en un mismo punto (es decir, dos cualesquiera de ellas determinan un único punto, distinto para cada par). ¿En cuántos puntos se cortan?

10. Una hormiga inteligente cruza un tablero de ajedrez desde un extremo hasta el opuesto, caminando sobre las líneas de separación de las casillas. ¿Cuántos caminos distintos (de 16 tramos) puede recorrer?

11. ¿Cuántos números de 4 cifras se pueden escribir utilizando las cifras 1, 2, 3, 5, 7 y 9? ¿Cuántos de ellos son pares?

12. En un puesto de mando, y para transmitir señales, se encuentran tres astas alineadas y de diferentes longitudes. Se dispone de 7 banderas, de colores distintos; ¿cuántas señales se pueden hacer, utilizando 3 banderas?

13. ¿De cuántas formas se pueden alinear 9 signos $+$ y 5 signos $-$?

14. ¿Cuántos productos de tres factores se pueden calcular con los números primos 2, 3, 5, 7 y 11?

15. ¿Cuántos números capicúas hay de 5, 6 y 7 cifras? (Se considera, para simplificar, que el número 0 2 3 3 2 0 es un capicúa de *seis* cifras.)

16. ¿Cuántas banderas de 7 franjas se pueden confeccionar, de forma que haya 3 franjas amarillas, 2 franjas rojas y 2 franjas verdes?

17. En un plano hay 10 puntos tales que no hay grupos de tres en línea recta. ¿Cuántos triángulos determinan?

    Fijado un punto cualquiera, llamémosle P_1, ¿cuántos triángulos tienen el punto P_1 como vértice?

18. Un partido de fútbol termina con el resultado de 6-4. ¿De cuántas maneras posibles se puede haber modificado el marcador? (El resultado inicial se considera de 0-0.)

19. En un instituto hay 45 profesores. La Junta Directiva está formada por el director, el vicedirector, el jefe de estudios, el secretario, el ayudante del jefe de estudios y el vicesecretario. ¿Cuántas juntas directivas distintas se pueden formar?

20. En una línea de ferrocarril hay 8 estaciones (incluidas las terminales). Si en cada billete va impreso el nombre de la estación de partida seguido del de la llegada, ¿cuántos billetes distintos deben imprimirse? Si, además, en cada billete figura el precio del viaje (por ej., proporcional a la distancia), ¿cuántos precios distintos habrá, si las distancias entre dos pueblos cualesquiera son distintas?

Lista de problemas simples inversos

1. Averiguar el número de personas que se pueden sentar en fila de 362.880 maneras distintas.
2. ¿Cuántos vértices tiene un polígono de 170 diagonales?
3. En un plano hay rectas tales que no hay dos que sean paralelas ni tampoco concurren tres en un mismo punto. Sabiendo que se cortan en 66 puntos, ¿cuántas rectas hay?
4. Un conjunto tiene 28 subconjuntos de 2 elementos. ¿Cuántos tiene de 3?
5. En una estantería se colocan varios libros distintos de todas las formas posibles. ¿Cuántos libros hay, si el número de colocaciones posibles es de 5.040?
6. Se dispone de cierto número de cifras distintas (ninguna de las cuales es el cero); con ellas se forman un total de 343 números de 3 cifras (iguales o no). ¿De cuántas cifras distintas disponíamos?
7. ¿Cuántas letras distintas son necesarias para poder formar un total de 72 palabras de dos letras diferentes cada una?
8. En un parque natural de montaña están distribuidas varias cabañas para el uso de los guardas forestales. Todas las cabañas están comunicadas por caminos entre sí, de forma que, en total, hay 36 caminos (se sobreentiende que cada camino comunica dos cabañas directamente, sin pasar por una tercera). ¿Cuántas cabañas hay?
9. Con unos cuantos faros se pueden emitir señales luminosas de colores verde y rojo. Si una señal consta del conjunto de todos los faros encendidos simultáneamente, averiguar de cuántos faros se dispone, si se pueden emitir 64 señales distintas en total.
10. Con siete letras distintas se pueden formar 210 palabras (con o sin sentido) en las cuales intervienen siempre el mismo número de letras (distintas todas ellas). ¿Cuál es dicho número?

Enunciados de los ejemplos de problemas compuestos

1. En una unidad militar hay 10 capitanes, 20 tenientes, 30 sargentos y 60 cabos. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar un grupo de 2 capitanes, 5 tenientes, 10 sargentos y 20 cabos?

2. A) Si se hacen todas las quinielas posibles, ¿cuántos «treces» y cuántos «doces» habrá?

   B) ¿Cuántas quinielas hay con 8 variantes exactamente?

3. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 12 cartas entre dos jugadores, de forma que cada uno de ellos reciba exactamente 4 cartas?

4. Con las letras V W X Y Z A E I O, averiguar el número de palabras de cinco letras (iguales o no) que se pueden formar, de manera que haya, exactamente, dos letras «W».

   ¿Y cuántas poseen, exactamente, una letra «X» y una letra «I»?

5. ¿De cuántas maneras es posible alinear 10 de las doce cartas de un palo de una baraja española, con la condición de que siempre estén seleccionadas las tres figuras, y que, además, éstas se consideren equivalentes?

6. Averiguar el número de maneras de repartir 8 pelotas de tenis iguales entre cinco muchachos, de forma que todos reciban, al menos, una pelota.

Directriz de problemas compuestos

Según el ALGORITMO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SIMPLES, hay tres casos en los que un *problema de contar es compuesto*:

1.er caso: Cuando puede haber repetición de símbolos, pero de forma que la repetición *no es libre (VR) ni tampoco idéntica en todos los grupos (PR).*

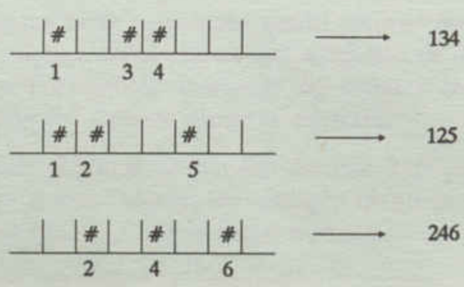
2.º caso: Cuando, sin haber repetición de símbolos en ningún grupo, resulta que *no todos los grupos son admisibles* (ya que pueden formarse grupos que NO representan objetos a contar).

3.er caso: Cuando, sin haber repetición de símbolos y siendo admisibles todos los grupos, *no se pueda determinar si importa o no el orden* (pues depende del particular par de símbolos que se intercambie).

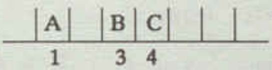
En cualquier caso, ante un PROBLEMA COMPUESTO:

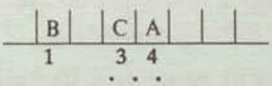
1. Busca, en cada grupo de símbolos, un *subgrupo* HOMOGÉNEO, es decir, un *subgrupo* dentro del cual no se presente ninguno de estos tres casos. Es práctico empezar buscando un *subgrupo* en el que no se produzca precisamente el mismo caso.

2. Cuenta las *posiciones diferentes* que pueden ocupar los símbolos del *subgrupo* HOMOGÉNEO dentro del grupo. Se trata siempre de COMBINACIONES. Este número puede ser igual a *uno* (en el caso en que los símbolos del *subgrupo* tengan una *posición fija* dentro del grupo).

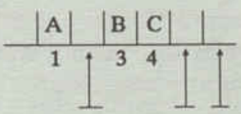


3. Para *una determinada posición* de los símbolos del *subgrupo* (por ejemplo, para la posición 134), cuenta, utilizando el ALGORITMO, de *cuántas maneras puedes rellenar las correspondientes casillas.*





4. Calcula de cuántas maneras posibles pueden *rellenarse las casillas dejadas en blanco,* una vez fijado, en una posición dada, uno de los subgrupos HOMOGÉNEOS. Ten en cuenta que éste es un nuevo problema de contar que, a su vez, *puede ser compuesto*; en tal caso, vuelve al punto 1.



5. El número de «objetos» que tienes que contar será, pues, igual al *producto de los números* que se van obteniendo a lo largo del proceso.

Lista de problemas de contar

1. En un grupo hay 12 chicos y 10 chicas. ¿Cuántos equipos de 2 chicos y 3 muchachas se pueden formar?

2. Utilizando exclusivamente las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7, cuántos números, comprendidos entre 2.000 y 5.000, se pueden formar, de forma que cada uno posea 4 cifras distintas?

3. A) ¿Cuántos números de seis cifras hay que tengan exactamente dos 7? (Descuéntense los que empiezan por cero.)
   B) ¿Y si, en lugar de haber exactamente dos 7, hubiesen un 3 y un 8 exactamente?

4. Se quieren distribuir 12 bolas distintas en 4 cajas, de forma que haya 3 bolas en cada caja. ¿De cuántas maneras distintas se puede efectuar esta distribución?

5. Disponemos de varios libros, todos ellos distintos, que pueden agruparse en tres tamaños; queremos ordenarlos en una estantería de todas las maneras posibles, pero de forma que estén juntos los del mismo tamaño. ¿De cuántas formas lo podemos hacer, si hay 7 libros grandes, 5 libros medianos y 4 libros pequeños?

6. Un escalador quiere conquistar cinco picos de distintas altitudes durante la estación veraniega. Aunque lo lógico sería empezar a escalar el pico de menor altitud y terminar con el más alto, resulta que, como que cada montaña ofrece unas dificultades especiales no determinadas precisamente por su altitud, dicho procedimiento no es necesariamente el más adecuado. ¿De cuántas maneras puede conquistar todos los picos?

7. En cierta clínica hay 8 médicos y 20 enfermeras; si hacen guardia, por turno, 2 médicos y 11 enfermeras, ¿cuántas guardias se pueden hacer?

8. Con las 5 vocales y con 12 consonantes dadas, averiguar el número de palabras de 5 letras distintas que se pueden formar, de manera que haya 2 vocales y 3 consonantes.

9. De una baraja de 52 cartas, cuántos juegos de 5 cartas se pueden dar, de forma que en cada uno haya exactamente 2 ases?

10. Margarita posee dos anillos (uno de oro y el otro de plata); desea colocárselos en sus dedos de todas las formas posibles, pero sin utilizar ni el pulgar ni el índice (por razones obvias). ¿Cuántos días transcurrirán antes de tener que repetir exactamente la colocación de los anillos del primer día? Su hermana Montserrat se entera de la decisión de su hermana cinco días más tarde y le parece una buena idea; sin embargo, desea no tener que repetir la colocación de sus distintos anillos hasta el año siguiente. ¿Cuántos anillos deberá poseer?
¿Cuánto tiempo transcurriría hasta que las dos hermanas tuvieran que repetir exactamente la misma colocación conjuntamente?

11. Nueve turistas quieren distribuirse en tres habitaciones con capacidades para 2, 3 y 4 personas respectivamente. ¿De cuántas maneras lo pueden hacer?

12. En un autocar de 20 plazas (incluida la del conductor) viajan 10 personas, de las cuales sólo cuatro saben conducirlo. ¿De cuántas formas se pueden colocar los viajeros?

13. Una niña ha dibujado un velero de forma que en el casco hay tres franjas horizontales, y la vela tiene dos secciones separadas por el palo mayor. Quiere pintarlo de todas las maneras posibles, pero con las siguientes limitaciones: para cada sección de la vela únicamente puede utilizar los colores blanco, negro y gris (por ejemplo, toda la vela blanca); y además, para cada franja del casco sólo puede emplear los colores azul, rojo, verde y marrón (por ejemplo, todo rojo). ¿Tardará mucho en pintarlos todos si pinta un barco cada día?

14. Una firma comercial tiene por costumbre regalar corbatas el día 29 de febrero de cada año bisiesto para hacer propaganda. Estas corbatas, sin embargo, no se pueden elegir, sino que van envueltas en estuches cerrados especiales. Un cliente asiduo posee 8 de tales corbatas, tres de las cuales, desgraciadamente, son iguales. ¿De cuántas maneras las puede colgar en su armario si suponemos que, a tal fin, se encuentran en él 8 colgadores adecuados puestos en fila?

15. En el juego del dominó ¿cuántas elecciones de 7 fichas se pueden hacer en las que intervenga el doble seis? ¿Y de forma que haya dos dobles? ¿Cuántos juegos diferentes se pueden repartir entre 4 jugadores (se recuerda que hay 28 fichas en total)?

16. Con las cifras 1, 3, 5, 7 y las letras A, E, U, P, S se quieren formar

códigos de 4 números distintos y 3 letras (no necesariamente distintas). ¿Cuántos hay?

¿Y si queremos que los códigos estén formados por 3 números (no necesariamente distintos) y 2 letras (iguales o no)?

17. En un cesto hay 20 higos, 5 de los cuales están podridos. ¿De cuántas formas se pueden elegir 15 higos, 3 de los cuales son malos?

18. En cierto almacén hay dos puestos de encargado (de la misma categoría) y 10 de dependiente en distintas secciones (vestido masculino, vestido femenino, calzado, ferretería, juguetes, mobiliario, electrodomésticos, objetos de regalo, discos y librería).

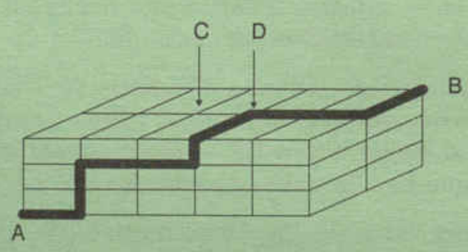
De los 15 empleados que hay, todos pueden ocupar las plazas de dependiente, pero sólo 4 las de encargado. ¿Cuántos turnos diferentes puede haber?

Se supone que, aunque los dependientes son también todos de la misma categoría, las secciones a las que pueden ir destinados son preferidos por los empleados en distintos grados (por ej., es más pesado atender a la sección de calzado que a la de mobiliario), por lo que no es lo mismo estar destinado a una sección que a otra.

19. Con las cifras 2, 4, 1, 3 y 5, ¿cuántos números de cuatro cifras se pueden formar, de manera que sean impares y mayores que 2.000?

20. ¿Cuántos caminos van del punto A al punto B? Son válidos los caminos que tienen tramos interiores. Además, todos los tramos de un camino cualquiera deben acercarnos al punto B.

¿Cuántos de estos caminos pasan por el punto C?
¿Cuántos de los caminos que van de A hacia B no contienen el tramo CD?



Lista de problemas más difíciles

1. ¿De cuántas maneras se pueden colocar 7 chicos y 7 chicas para bailar una sardana?

2. Sin utilizar el cero, ¿cuántos números de 5 cifras se pueden formar, de manera que haya 2 cifras pares y 3 impares?

3. Con las letras de la palabra ROBLE, ¿cuántas palabras se pueden formar de manera que las 2 vocales estén separadas?

4. Se dispone de 16 juguetes de los cuales hay que seleccionar 12, de forma que dos de ellos determinados (por ejemplo, el balón y la raqueta) no se escojan juntos. ¿De cuántas maneras se puede realizar esta selección?

5. ¿De cuántas maneras es posible repartir 5 premios distintos entre 3 personas, de forma que todas reciban por lo menos un premio?

6. Con 3 vocales y las consonantes B, C y D, ¿cuántas palabras de 6 letras distintas se pueden formar, de modo que no haya ni dos vocales juntas ni dos consonantes juntas?

7. Se tienen 4 banderas rojas, una verde, una azul y una negra. ¿Cuántas señales se pueden hacer con 4 banderas, si se colocan en otros tantos mástiles de diferentes longitudes?

8. Se dispone de una balanza con pesos de 100 gramos, 200 gramos, 400 gramos, 500 gramos y de 1 kilogramo. ¿Cuántas pesadas distintas se pueden realizar?

9. En una carrera participan 7 atletas del equipo «A» y 10 del equipo «B». De cuántas maneras pueden llegar a la meta todos ellos si:

   a) Los dos primeros son del equipo «A».
   b) Dos de los tres primeros son del equipo «A».
   c) Al menos uno de los tres primeros es del equipo «A».

10. ¿De cuántas maneras es posible repartir 10 caramelos iguales entre 5 niños de forma que todos reciban, por lo menos, un caramelo?

11. Con las letras A E G H J ¿cuántas palabras de 5 letras se pueden formar, de manera que haya 2 vocales y 3 consonantes?

12. ¿De cuántas maneras pueden repartirse 7 regalos distintos entre 5 personas de forma que una de ellas reciba por lo menos 2 regalos y el resto exactamente uno?

13. Sabiendo que el número 9 se descompone en suma de tres sumandos no mayores que seis (enteros y positivos) de tantas maneras como el número 10, ¿cómo se puede explicar el hecho de que, si se juega con tres dados, se obtiene la suma 10 con más frecuencia que la suma 9?

14. ¿Cuántas palabras de 5 letras distintas se pueden formar de manera que haya 2 vocales y 3 consonantes, pero que las dos vocales no estén juntas? (Tómense 24 consonantes y 5 vocales para formar estas palabras.)

Este volumen forma parte de la obra:

MATEMÁTICAS
Una renovación metodológica

que consta de dos tipos de materiales:

MATERIAL DEL ALUMNO

Vol. I. Cálculo Aritmético
Técnicas de Cálculo
Detección de Errores
Problemas de Cálculo Aritmético

Vol. II. Álgebra
Funciones entre números reales
Proporcionalidad y Rectas
Funciones cuadráticas y Parábolas
Polinomios
Cálculo Algebraico

Vol. III. Resolución de problemas
Problemas de Planteo
Problemas de Contar

GUÍA DEL PROFESOR

Metodología Diferenciada y Heurística
Çalculo Aritmético
Álgebra
Problemas de Planteo
Problemas de Contar

ice
Institut de Ciències de l'Educació
Universitat de Barcelona