GRAU en MATEMÀTIQUES
GRAU en ADMINISTRACIÓ I DIRECCIÓ D'EMPRESES

Treball final de grau

Model de Hotelling

Claudia Ortega Bertran

Directors: **Dr. Xavier Jarque**
Dept. de Matemàtiques i Informàtica
Dr. Josep Maria Izquierdo
Dept. de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial

Barcelona, Juny 2019
Versió 20 de juny de 2019

Resum

Harold Hotelling (1895-1973) va ser un estadístic americà i un important teòric de l'economia. Va obtenir un doctorat en Matemàtiques a Princeton el 1924 i va començar com a professor associat de la Universitat de Stanford fins que es va mudar a l'Universitat de Columbia el 1931. No va ser fins el 1946 que va exercir com a professor d'Estadística Matemàtica a la Universitat de Carolina del Nord en Chapel Hill. La seva major contribució va ser en el camp de la competència monopolística.

Harold Hotelling va desenvolupar en el seu artícle *Stability of Competition* el 1929, el que es coneix avui en dia com el *model de Hotelling* o model de ciutat lineal, el que va contribuir en gran mesura al camp de la diferenciació del producte. En aquest model Hotelling va introduir nocions d'equilibri de localització en un duopoli. El model de Hotelling va ser una font d'inspiració per una gran quantitat de literatura que no només es limita a la teoria de l'organització industrial sinó també en altres ciències, com la política, ja que algunes de les seves conclusions es poden aplicar directament a aquestes matèries.

El present treball pren com a base l'article *Stability of Competition* de Hotelling amb l'objectiu principal d'analitzar el model i les posteriors revisions d'aquest. S'estudia el model en un espai unidimensional (tal i com el va definir H.Hotelling). Finalment, a la segona part del treball, es desenvolupa el model per un espai bidimensional.

Abstract

Harold Hotelling (1895-1973) was an American statistician and an important theoretician of the economy. He earned a PhD in Mathematics from Princeton in 1924 and began as an associate professor at Stanford University until he moved to Columbia University in 1931. It was not until 1946 that he served as professor of Mathematical Statistics at the University of North Carolina at Chapel Hill. His greatest contribution was in the field of monopoly competition.

Harold Hotelling developed in his article *Stability of Competition* in 1929, what is known today as the *Hotelling model* or linear city model, which contributed greatly to the field of the differentiation of the product. In this Hotelling model he introduced notions of the equilibrium of location in a duopoly. The Hotelling model was a source of inspiration for a large amount of literature that is not only limited to the theory of industrial organization but also in other sciences, such as politics, since some of its conclusions can be applied directly to these matters.

This paper is based on Hotelling article *Stability of Competition* with the main objective of analyzing the model and its subsequent revisions. The model is studied in a one-dimensional space (as defined by H.Hotelling). Finally, in the second part of the paper, the model is developed for a two-dimensional space.

2010 Mathematics Subject Classification. 91A40, 91A80

Agraïments

M'agradaria agrair als doctors Xavier Jarque i Josep Maria Izquierdo per la dedicació, el suport, l'orientació i la confiança d'acompanyar-me durant la trajectòria del present treball. M'agradaria agrair també a totes les persones que m'han acompanyat, el seu suport ha estat essencial durant tot aquest període. Gràcies.

Índex

Capítol 1

Introducció

Ens podriem preguntar de quina manera el resultat de la competència entre les empreses d'un mateix sector depèn de les característiques de la demanda, de la naturalesa de les funcions de costos de les empreses o del nombre d'empreses. Podriem preguntar-nos també si una reducció del nombre d'empreses genera un resultat menys desitjable. Per respondre aquestes qüestions necessitem un model sobre la interacció entre les empreses que competeixen pel negoci dels consumidors. S'han desenvolupat múltiples models al llarg de la història entre els quals destacarem els models bàsics de Cournot i Bertrand.

A principis del segle XIX, el filòsof i matèmatic francés Antoine A. Cournot va presentar el seu model d'oligopoli a *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*[1].

En el seu model, considera un únic bé produit per n empreses, un bé estandaritzat, homogeni. El cost de l'empresa i de produir q_i unitats del bé és $C_i(q_i)$, on C_i és una funció creixent (l'augment de les unitats produïdes implica un augment del cost de producció). Totes les unitats produïdes són venudes, independentment de a qui, a un mateix preu, determinat per la demanda del bé i la producció total de les empreses. Si la producció total és Q on $Q = q_1 + ... + q_n$, aleshores el preu del mercat ve donat per la funció $P(Q) = P(q_1, ..., q_n)$; P s'anomena *funció inversa de la demanda*. Suposem que es tracta d'un bé *normal*, és a dir, que la funció P és una funció decreixent; si la producció total de les empreses augmenta, aleshores el preu disminueix. Per tant, la funció que indica els beneficis de l'empresa i és de la forma:

$$\pi_i(q_1, ..., q_n) = q_i P(q_1, ..., q_n) - C_i(q_i).$$

Suposarem per simplificar que la funció inversa de la demanda és de la forma: $P(q_1, ..., q_n) = a - Q$ on $a > 0$ i $C_i(q_i) = cq_i$ on c és el cost marginal de producció. El benefici de l'empresa i depen doncs, no només de la quantitat q_i produïda per l'empresa, sino també per les quantitats produïdes per les altres empreses. Donades les produccions de les altres empreses $(q_j)_{j \neq i}$, l'empresa i ajusta la seva producció q_i per tal de maximitzar la seva funció de benefici. Aquest valor s'obté diferenciant π_i, de manera que:

$$P(q_1, ..., 1_n) + \frac{\partial P(q_1, ..., q_n)}{\partial q_i} - \frac{\partial C_i}{\partial q_i} = 0.$$

[1] *Rearches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth* és el llibre publicat el 1838 per Antoine A.Cournot en el qual es refereix a investigacions sobre els principis matemàtics de la teoria de la riquesa.

El sistema lineal de n incògnites que inclou les n equacions anteriors (una per a cada empresa) determina la quantitat q_i que hauria de produir cada empresa per maximitzar el seu benefici tenint en compte que les altres empreses també reaccionen de la mateixa manera. Es tracta d'un procés dinàmic on les empreses van ajustant les seves quantitats segons la reacció que tinguin la resta d'empreses, fins a convergir a unes quantitats que són les solucions del sistema plantejat. Aquestes quantitats $(q_1^*, ..., q_n^*)$ són les que anomenem *equilibri de Cournot.*

Cournot va presentar la idea d'equilibri però no és fins l'aparició de John F. Nash que no és va formalitzar i es va veure l'equilibri de Cournot com un equilibri d'un joc no cooperatiu.

Quasi cinquanta anys després de Cournot, un matemàtic francès, Joseph Bertrand (1883), va oferir un punt de vista diferent sobre la competència entre empreses sobre la mateix hipòtesi de competència imperfecta. Bertrand va fer una crítica a Cournot al·legant que era més natural pensar que les empreses competeixen per fixar el preu en comptes de la quantitat a produir. Aquesta petita diferència va ser suficient per canviar completament el caràcter de l'equilibri de mercat.

El model es tracta amb més claredat si ens centrem únicament en dues empreses, simplement simplifiquem la idea d'oligopoli estudiant el duopoli.

En el duopoli de Bertrand, dues empreses produeixen un bé homogeni, cada empresa té un cost marginal de c, és a dir, per produir q_i unitats el cost és de $C_i(q_i) = cq_i$. No hi ha costos fixes.

Utilitza la següent hipòtesi: si les empreses posen diferents preus, aleshores els consumidors adquiriran el bé a l'empresa que fixi un preu més baix; en canvi, si les dues empreses estableixen el mateix preu aleshores compartiran el total de la demanda. Per tant, l'empresa que tingui el preu més elevat, no tindrà demanda del seu bé i doncs no produirà. La funció de demanda del mercat és lineal i decreixent en el preu, s'expressa com $Q(min(p_1, p_2)) = a - min(p_1, p_2)$ on $a \geq min(p_1, p_2)$.

Així, el benefici de cada empresa depèn del preu del seu competidor tant com del seu. La funció de benefici de l'empresa 1 és: (la funció de benefici de l'empresa 2 és anàloga):

$$\pi_1(p_1, p_2) = \begin{cases} (p_1 - c)(a - p_1) \text{ si } & p_1 < p_2 \\ \frac{1}{2}(p_1 - c)(a - p_1) \text{ si } & p_1 = p_2 \\ 0 \text{ si } & p_1 > p_2. \end{cases}$$

Observem que els beneficis són positius quan el preu excedeix el cost marginal, de forma que cada empresa restringirà els preus a $p_i \geq c$.

L'equilibri del mercat es donaria quan fixat un preu de l'oponent l'empresa està precisament fixant el preu que maximitza els seus beneficis. Com que les funcions de benefici són discontínues, no podem fer servir el mateix procediment per determinar l'equilibri de Cournot (derivant i resolent el sistema lineal). Notem que com l'empresa amb el preu més baix s'apodera del total del mercat, les empreses tenen incentius per disminuir el preu (per sota del seu competidor). Aquesta competència fa que en l'equilibri les dues empreses fixin el preu igual al cost marginal i obtinguin un benefici nul.

En el model de Bertrand, el preu coincideix amb el cost marginal per la competència només entre dues empreses. Això és sorprenent i contrasta amb el que passa en el model

Cournot, on la diferència entre preu i cost marginal disminueix només a mesura que augmenta el nombre d'empreses del mercat.

Com hem vist fins ara, amb els models de Cournot i Bertrand, la teoria econòmica es basava en trobar un equilibri entre empreses competidores tenint en compte que el producte era un producte homogeni i estandaritzat. No va ser fins el 1929, que Harold Hotelling va considerar afegir una diferenciació del producte, va preguntar-se sobre l'existència d'un grup de consumidors els quals continuaven comprant a una empresa tot i les diferències de preus que pogués haver entre els seus competidors. Aquesta lleialtat pot venir per varis motius: la proximitat a casa, la manera de fer de l'empresa, les preferències i gustos del consumidors, etc.

En aquest treball veurem el model que desenvolupa Hotelling sobre aquesta idea en un article publicat el 1929 anomenat *Stability in Competition*, exposarem les rectificacions del seu model de la mà de C.d'Aspremont (1979, [3]), J.Jaskold Gabzewicz (1979, [3]) i J-F.Thisse (1979, [3]) que es van generar anys després. Per tal de facilitar el model es simplifica força la matemàtica implicada i doncs, el model s'allunya una mica de la realitat, es treballa en un espai unidimensional. En la part final del treball, agafarem el model base i l'estudiarem en un espai bidimensional per tal d'introduir altres variables que ens facin que el model s'acosti més als comportaments reals tant dels consumidors com de les empreses. Obtindrem resultats que sorprenen en comparació al model unidimensional.

Capítol 2

Preliminars

L'objectiu d'aquest treball és veure i entendre el model de Hotelling i les seves rectificacions posteriors i extendre el model per tal què s'apropi més a situacions reals. Per això definirem alguns conceptes previs que utilitzarem al llarg del treball.

2.1 Conceptes bàsics de Teoria de Jocs

La teoria de Jocs és una àrea de la matemàtica aplicada que utilitza diversos models per analitzar una situació de presa de decisions interdependent, és a dir, una decisió que té en compte la interacció i la influència de les decisions dels agents entre sí.

Algunes idees de la teoria de jocs es remunten al segle XVIII, però la majoria del desenvolupament de la teoria va començar el 1920 amb el treball del matemàtic Émile Borel (1871-1956) i John von Neumann (1903-1957)[1]. A principis del 1950, John F.Nash va desenvolupar un concepte clau que és el de *d'equilibri* i va iniciar l'estudi de la teoria de jocs de la negociació. Després del treball de Nash, els models de la teoria de Jocs van ser utilitzats en la teoria econòmica i la ciència política.

El pensament estratègic apareix fonamentalment quan hi ha interacció amb altres individus, és a dir, s'utilitza l'estratègia per prendre la decisió que ens beneficiarà més tenint en compte les decisions que els altres puguin prendre. Diem que quan penses abans d'actuar estàs sent racional, per tant, podem dir que la teoria de jocs és la ciència del comportament racional en una situació interactiva i interdependent.

Existeixen moltes aplicacions de la teoria de jocs com per exemple: empreses que competeixen per atraure més consumidors, partits polítics que competeixen pels vots dels ciutadants, membres d'un jurat que han de decidir un veredicte, etc.

Un model d'interacció entre responsables de la presa de decisions és el que anomenem *Joc no cooperatiu* (entenem per no cooperatiu que les decisions no es prenen coordinadament, és a dir, no hi ha acords vinculants entre els jugadors). Ens referim als responsables de la presa de decisions com a *jugadors*, cada jugador té un conjunt de possibles *accions* i unes *preferències* sobre els possibles resultats. En aquest treball suposarem que els jugadors tenen informació completa, és a dir, sabem qui són els jugadors, quines accions poden prendre i quines són les preferències. El model captura la interacció entre els jugadors

[1]El 1944 va publicar el llibre *Theory of games and economic behavior* on s'establien les bases de la teoria de jocs.

mostrant com es veu afectat el resultat de cada jugador per les accions dels altres. Si formalitzem aquesta definició tenim:

Definició 2.1.1. Un **joc no cooperatiu (amb informació completa)** en forma estratègica consisteix en:

- Un conjunt de *jugadors*, $N = \{1, ..., n\}$.
- Un conjunt de *regles* que delimiten les possibles accions i estratègies posteriors.
- Per cada jugador, unes *preferències* sobre els resultats fruit de la combinació entre accions o estratègies.

Podem aplicar aquest model en un rang molt ampli de situacions, el més comú i el que ens referirem el llarg del treball és el següent: els *jugadors* seran empreses, les *preferències* es basaran en els beneficis de cada empresa i les *regles* es determinaran quan expliquem el model a tractar.

Distingim entre dos tipus de jocs no cooperatius:

- Simultanis: Aquells on les accions o estratègies s'han de prendre de forma simultània, és a dir, un jugador no sap la decisió que han près els altres. L'estratègia consisteix en prendre una acció pel que el concepte entre acció i estratègia es confon.
- Seqüencials: Aquells on els jugadors van escollint accions durant el temps de joc, podent transmetre aquesta informació a la resta d'agents de manera total o parcial. L'estratègia consisteix en planificar totes les accions que s'emprendran en el desenvolupament del joc.

El concepte més important en la teoria de jocs és la noció d'*estratègia*. A partir d'aquest en deriven d'altres com els que esmentem a continuació.

Donat un joc, denotem S_i com *l'espai d'estratègies* (també anomenat *conjunt d'estratègies*) d'un jugador i, és el conjunt que comprèn cada possible estratègia del jugador. Així doncs, $s_i \in S_i$ és una estratègia d'un jugador i. Un *perfil d'estratègia* és un vector d'estratègies, una per cada jugador. Per exemple, suposem que estem estudiant un joc de n jugadors, aleshores el perfil d'estratègia vindrà donat per $s = (s_1, ..., s_n)$ on s_i és l'estratègia del jugador $i \in \{1, ..., n\}$. Notem abans que donat $s = (s_1, ..., s_i, ..., s_n)$ definirem $s_{-i} = (s_1, ...s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_n)$.

Un cop establerta l'estratègia de cada jugador o perfil d'estratègies, tal i com hem vist abans, les preferències reflexen els resultats de les accions i aquests resultats es poden representar (ja que parlem de beneficis) mitjançant una funció d'utilitat cardinal. En el cas d'empreses, farem coincidir la funció d'utilitat amb la funció de benefici. Per tant, veiem que la *funció d'utilitat* d'un jugador és l'element que relaciona les estratègies de tots els jugadors amb la utilitat que n'obté.

Definim la *funció d'utilitat* com $u_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$ que assigna a cada perfil d'estratègies s la utilitat[2] que obté el jugador i resultat de combinar estratègies del perfil.

[2]La utilitat ve donada per una funció que determina una relació d'ordre, de manera que:

$$\text{El jugador } i \text{ prefereix } z \text{ abans que a } z' \Longleftrightarrow \forall z, z' \in Z, u_i(z) > u_i(z').$$

A part del concepte d'estratègia, els dos conceptes més bàsics de la teoria de la interacció estratègica son: *dominància* i *millor resposta.*

Definició 2.1.2. Una estratègia s_i d'un jugador i és **estrictament dominada** si existeix una altra estratègia $z_i \in S_i$ tal que $u_i(z_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$, per tota estratègia s_{-i} dels altres jugadors.

El comportament més simple i convincent d'un jugador és no utilitzar una estratègia dominada, no seria racional ja que utilitzant una altra estratègia obtindirem un resultat superior.

Sembla raonable pensar que les persones racionals s'abstinguin d'utilitzar estratègies dominades. La dominància estricta és un concepte descriptiu però només és l'inici del desenvolupament de la teoria del comportament. En efecte, en molts jocs, els jugadors tenen més d'una estratègia no dominada pel que no poden prendre una decisió utilitzant aquest criteri[3]. De fet, s'ha d'explorar el procés de decisió quan aquesta situació apareix.

En els jocs, és prudent formular-se una opinió sobre el comportament dels altres jugadors abans de decidir la teva propia estratègia. És a dir, si es creu que l'altre jugador prendrà una decisió X, aleshores, s'escollirà l'estratègia que maximitzi el teu resultat. Aquest procediment, aquesta estratègia és la que anomenem *millor resposta.*

Anem a definir formalment el concepte de *millor resposta.*

Definició 2.1.3. Suposem que un jugador i creu $s_{-i} \in S_{-i}$ sobre les estratègies dels altres jugadors. L'estratègia $s_i \in S_i$ del jugador i és la **millor resposta** a s_{-i} si $u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i})$ per qualsevol $s'_i \in S_i$.

En un joc finit[4], cada creença s_{-i} sobre el comportament dels altres jugadors té almenys una millor resposta. Per cada creença s_{-i} del jugador i, denotem el conjunt de millors respostes com $BR_i(s_{-i})$.

2.2 Equilibri de Nash

En la teoria racional de la presa de decisions, cada jugador escull la millor acció possible. Quan parlem de jocs aquesta millor decisió depèn, en general, de les accions dels altres jugadors. Per tant, per prendre una decisió s'han de tenir en compte les accions que poden escollir els altres jugadors.

John F. Nash[5] va definir un concepte d'*equilibri* pels jocs. Ho va fer capturant la interpendència del joc, és a dir, tenint en compte els punts de vista de tots els jugadors i no de forma individualitzada.

Un perfil d'estratègia és un equilibri de Nash si, i només si, cada estratègia de cada jugador és una millor resposta sobre les estratègies dels altres, és a dir, si cap jugador té incentius unilaterals per canviar l'estratègia escollida. Formalitzant la definició,

[3] En el cas en el que el jugador tingui una estratègia que domina estrictament a la resta, és fàcil pensar que utilitzant aquesta estratègia obtindrà el millor resultat. Aquest és un cas molt extremista ja que a la realitat és complicat tenir una estratègia estrictament dominant

[4] Entenem com a joc finit a un joc que té un número finit de jugadors i un número finit d'estratègies.

[5] John F. Nash, nascut 1928, va ser un matemàtic nord-americà. Va guanyar el premi Nobel l'any 1994 per les seves aportacions a la teoria de jocs i al procés de negociació. Va introduir el concepte d'equilibri en la seva tesi doctoral el 1950, veure John F. Nash [8].

Definició 2.2.1. Un perfil d'estratègia $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S$ és un **equilibri de Nash** si i només si, $s_i \in BR_i(s_{-i})$ per cada jugador i. Això és, per cada jugador $i \in N$, $u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i})$ per cada $s_i' \in S_i$.

Per tant, quan es troben en equilibri, cada jugador maximitza els seus beneficis tenint en compte les estratègies dels altres.

L'equilibri de Nash és un concepte estàtic, contràriament als conceptes d'equilibri dels models de Cournot i Bertrand on l'equilibri es basava en un procés d'ajust dinàmic.

És important poder afirmar l'existència d'equilibri, és per això que enunciem el següent teorema. És un teorema que dóna un resultat d'existència d'equilibri sobre unes certes hipòtesis en jocs amb un continu d'estratègies, és a dir, en jocs en els que hi ha un número infinit d'estratègies.

Teorema 2.2.2. ***(Debreu, Glicksberg, Fan)*** *Considerem un joc en forma estratègica* $< N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} >$ [6] *tal que per a cada* $i \in N$*:*

- S_i *és compacte i convex;*
- $u_i(s_i, s_{-i})$ *és continua en* s_{-i}*;*
- $u_i(s_i, s_{-i})$ *és continua i còncava en* s_i*.*

Aleshores existeix un equilibri de Nash.

Per a entendre el teorema, necessitem definir el concepte de funció còncava. Suposem que S és un conjunt convex. Llavors una funció $f : S \to \Re$ és **còncava** si per $\forall x, y \in S$ i $\forall \lambda \in [0, 1]$, tenim que:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

Més endavant veurem un altre teorema d'existència per al model de Hotelling que desenvoluparem amb més detall en el treball.

2.3 Equilibri en jocs seqüencials

Hem diferenciat dos tipus de jocs cooperatius: els simultànis i els seqüencials. Pel que fa als jocs simultànis s'entén que representa situacions on l'ordre en què juguen els jugadors no té cap rellevància, ja que tots prenen una decisió al mateix moment.

En canvi, els jocs seqüencials incorporen com a element que descriu la situació de presa de decisions l'ordre temporal en què aquestes decisions es produeixen. La definició de joc seqüencial és més complexa que la d'un joc simultàni, perquè a més d'especificar en quin ordre juguen els jugadors, cal indicar, per a cada jugador, quines decisions observa dels jugadors que han jugat abans. El concepte d'estratègia és també més difícil i requereix la definició d'acció.

Definició 2.3.1. Una *acció* d'un jugador en un joc seqüencial és una possible decisió en un moment determinat del desenvolupament del joc.

[6] Recordem que N representa el nombre de jugadors, S_i el conjunt d'estratègies del jugador i i u_i és la funció d'utilitat de cada jugador i.

Definició 2.3.2. Una *estratègia* d'un jugador preveu quina acció emprendrà a cada eventual instant del desenvolupament del joc on el jugador li toca prendre una decisió.

La combinació d'**estratègies** per part dels **jugadors** donarà lloc a una seqüència de decisions (o història del joc) i comportarà una **utilitat al jugador**. Així d'aquesta manera (jugadors, estratègies i utilitats) tindrem definit el joc seqüencial en la seva forma estratègica.

El concepte d'equilibri s'aplica de la mateixa manera que a un joc estàtic. És aquella combinació d'estratègies on cap jugador té un incentiu unilateral a canviar d'estratègia. Entre aquests equilibris destaca l'equilibri perfecte en subjocs.

Definició 2.3.3. Un *subjoc* d'un joc seqüencial Γ és el que queda per desenvolupar del joc després d'una seqüència (o història) prèvia de decisions h dels jugadors. El denotarem per $\Gamma_{|h}$.

Donada una estratègia d'un jugador i un subjoc parlem de l'estratègia restringida al subjoc com la part de l'estratègia (de les accions) que s'aplica o s'implementa dins del subjoc.

Definició 2.3.4. Un **equilibri perfecte en subjocs** d'un joc seqüencial Γ és un equilibri de Nash S^* del joc Γ tal que per a tot subjoc $\Gamma_{|h}$ de Γ, el perfil d'estratègies restringides al subjoc $S^*_{|h}$ és equilibri del subjoc $\Gamma_{|h}$.

A tot joc seqüencial hi ha almenys un equilibri perfecte en subjocs. Una manera de determinar-lo és utilitzant el **mètode d'inducció cap enrere**.

La inducció cap enrere és un procediment que comença la resolució a l'etapa final del problema. Trobada la millor solució en el moment final, se substitueix la part final del problema per la seva solució i això fa que la penúltima etapa es pugui considerar com l'etapa final. Es segueix el procediment fins a arribar a l'etapa inicial.

Tota estratègia seleccionada aplicant la inducció cap enrere és un equilibri de Nash.

La inducció cap enrere identifica aquells equilibris de Nash del joc consistents en la premissa que els jugadors són racionals.

Capítol 3

Model de Hotelling

Els models de Cournot i Bertrand semblen no tenir molt en compte l'existència d'un grup de clients d'una empresa els quals continuen comprant el seu producte tot i la diferència de preus amb els seus competidors[1].

H.Hotelling (Vegeu [5]) menciona que els autors anteriors a ell com Cournot ([5]), Amoroso ([5]) i Edgeworth ([5]) ignoraven el grau de variació dels clients d'una empresa quan aquesta augmenta el preu del seu producte. Aquests, suposaven que els consumidors compraven a l'empresa que tenia el preu més baix. Això portava a una certa inestablitat en els resultats ja que consideraven que la quantitat venuda venia donada per una funció continua respecte la diferència de preus, però aquesta funció continua va en contra de què en un mercat només pot haver un sol preu i això només és vàlid si el producte és totalment estandaritzat.

Hotelling ([5]) constata que si una empresa augmenta considerablement el preu del seu producte, perd un nínxol de mercat però no perd absolutament tot el negoci dels consumidors. Això es pot deure a varies raons com: la proximitat, la reputació, etc.

3.1 Presentació del model

Per analitzar que la demanda d'un producte no depen només el preu sinó també d'altres factors, com pot ser la proximitat al punt de venda, H.Hotelling (en el seu article *Stability of Competition*) proposa un model seqüencial amb dues empreses [2] que consta de dues etapes.

En la primera etapa, cada empresa escull simultàniament una localització. En la segona etapa, donades aquestes localitzacions escollides, cada empresa ha de triar simultàniament un preu.

Per tant, en la forma estratègica, es defineix el joc seqüencial següent:

- *Jugadors* : Dues empreses, A i B, $N = \{A, B\}$ on $|N| = 2$.
- *Estratègies* : Les estratègies venen definides per escollir una localització en la prime-

[1] Fins el 1929 que H.Hotelling va publicar l'article, no havia sigut un tema preocupant a tenir-se en compte, exceptuant de l'economista italià *Piero Scraffa*.

[2] Es consideren únicament dues empreses ja que suposa uns costos fixos molt elevats pels quals només puguin operar dues empreses en el mercat.

ra etapa i un preu en una segona etapa que depèn d'aquestes localitzacions escollides.

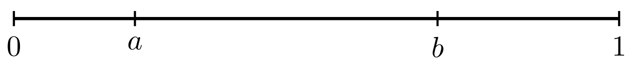
- *Preferències* : Les preferències de cada jugador venen donades per les seves funcions de benefici (que depèn dels preus de cada empresa i com a conseqüència depèn també de les localitzacions). Considerarem que el cost de producció d'ambdues empreses és de zero, i per tant les funcions de benefici estaran donades pel producte entre el preu i la demanda de cada empresa.

El model tracta de trobar una solució òptima d'aquest joc, un equilibri perfecte en subjocs. Per determinar-lo primer se situa en la segona etapa, donades un parell de localitzacions qualssevol, busca el parell de preus que fan màxim els beneficis, és a dir, el parell de preus d'equilibri. Aleshores utilitzant el mètode d'inducció endarrera, se situa en la primera etapa i anticipant el parell de preus d'equilibri per a cada situació de localització, s'estudia quin parell de localitzacions maximitzaran els beneficis de cada empresa.

3.2 Desenvolupament del model

Considerem el mercat d'un producte homogeni com una regió extensa, és a dir, considerem que els consumidors estan distribuits en el segment[3] $[0, l]$, on l és una constant que, sense pèrdua de generalitat podem simplificar i considerar $l = 1$. Suposem a més, que els consumidors es distribueixen uniformement al llarg del segment (podriem entendre-ho com que cada consumidor se situa en una posició en un carrer principal d'un poble/ciutat) i que cada consumidor consumeix una unitat de producte per unitat de temps. Suposem també que cada comprador té un cost de transport de c per unitat de distància que s'assumeix que és lineal. L'objectiu del consumidor és minimitzar el preu final, és a dir, el preu de compra del bé i el cost del transport.

Definim a com la distància des de 0 fins on se situa l'empresa A i b com la distància des de 0 fins on se situa l'empresa B. Sense pèrdua de generalitat, tenim que $0 \leq a \leq b \leq 1$, assumim que a és la que està més a prop de l'origen. Per tant la distància[4] entre ambues empreses ve donada per : $d(a, b) = |b - a|$.



Denotem el preu de producte de l'empresa A com p_A, el de l'empresa B com p_B i q_A i q_B que representen la demanda de cada empresa respectivament.

Una vegada definides totes les variables necessàries, comencem amb el desenvolupament del model.

Suposem que les empreses ja han triat la seva localització a i b i que ens trobem en la segona etapa del model. En aquesta etapa volem determinar els preus per les dues

[3]H.Hotelling en el seu article *Stability of Competition*, utilitza una nomenclatura diferent a la que s'utilitza. La diferència es troba en què Hotelling consiera que la distància definida com a b és la distància que hi ha entre l'extrem final mentre que nosaltres utilitzem la distància definida com a b com la distància entre l'extrem inicial que correspon a 0 fins la posició. Veiem que el canvi es pot realitzar sense problema ja que existeix un difeomorfisme ϕ :(a, b) $\rightarrow (a, l - b)$ i el determinant d'aquest difeomorfisme és $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

[4]Considerem la distància euclídea a $\Re$.

empreses que maximitzin els seus beneficis tenint en compte el preu fixat per l'altra empresa, és a dir, els preus d'equilibri.

Per fer-ho, necessitem conèixer la funció de benefici de cada empresa que com hem mencionat tenen uns costos de producció de zero. Així doncs la funció de benefici de cada empresa vindrà donada per: $\pi_A^{a,b} = p_A q_A$ i $\pi_B^{a,b} = p_B q_B$. Anem a determinar quina serà la quantitat venuda per cada empresa (la demanda de cada empresa). La demanda de cada empresa vindrà donada per tots aquells consumidors que els hi surti més a compte comprar a l'empresa en qüestió; per calcular-la considerem el consumidor *indiferent.* El consumidor indiferent és aquell que li és igual comprar a l'empresa A que a l'empresa B ja que el preu final és el mateix. Aquest separa la demanda de cada empresa (separa el segment $[0, 1]$ en dos trossos), els consumidors que quedin a l'esquerra formaran part de la demanda de l'empresa A mentre que els de la dreta formaran part de la demanda de l'empresa B. En el cas que hi hagi més d'un consumidor indiferent les dues empreses es repartiran la demanda compresa entre el segment on es localitzin tots els indiferents. Per tant, un consumidor $x \in [0, 1]$ serà indiferent si es compleix:

$$cd(x, a) + p_A = cd(x, b) + p_B \Leftrightarrow c|x - a| + p_A = c|x - b| + p_B.$$

Hem d'analitzar tres casos:

i). En cas que $0 \leq x \leq a$, aleshores $|x - a| = a - x$ i $|x - b| = b - x$ per definició del valor absolut i doncs,

$$c(a - x) + p_A = c(b - x) + p_B \Rightarrow ca + p_A = cb + p_B.$$

Observem que donats uns certs p_A i p_B que compleixin que $p_A - p_B = c(b - a)$ ens trobem que tots els consumidors situats entre $[0, a]$ són consumidors indiferents i per tant l'empresa A i l'empresa B es repartiran la demanda compresa entre $[0, a]$.

En el cas que no es complís la igualtat, podriem afirmar que no existix cap consumidor indiferent entre $[0, a]$.

ii). En cas que $a \leq x \leq b$, aleshores $|x-a| = x-a$ i $|x-b| = b-x$ i doncs el consumidor indiferent compleix:

$$c(x - a) + p_A = c(b - x) + p_B \Rightarrow x = \frac{p_B - p_A}{2c} + \frac{a + b}{2}.$$

iii). En cas que $b \leq x \leq 1$, aleshores $|x - a| = x - a$ i $|x - b| = x - b$ i doncs, obtenim una expressió semblant al primer cas,

$$c(x - a) + p_A = c(x - b) + p_B \Rightarrow -ca + p_A = -cb + p_B \Rightarrow p_A - p_B = -c(b - a).$$

Si donats uns p_A i p_B determinats, es compleix la igualtat, aleshores tots els consumidors entre $[b, 1]$ seran consumidors indiferents i per tant les empreses compartiran la demanda.

En el cas que no es compleixi la igualtat, no és possible que el consumidor indiferent se situï entre $[b, 1]$.

Una vegada examinades les conseqüències en què el consumidor indiferent es situi a diferents trams, anem a veure aleshores les funcions de demanda q_i per $i = A, B$ de cada empresa. Considerem l'empresa A; necessitem també diferenciar casos:

- Suposem que $p_A - p_B = c(b-a)$. Com hem observat en els casos anteriors, això significaria que les dues empreses compartirien demanda dels consumidors situats entre $[0,a]$ i doncs $q_A = \frac{1}{2}a$. En el cas de l'empresa B, $q_B = (1 + \frac{1}{2}a)$.

- Suposem que $p_A - p_B = -c(b-a)$. Fent el mateix raonament, les dues empreses compartiran la demanda dels consumidors situats entre $[b,1]$. Per tant la demanda vindrà donada $q_A = b + \frac{1}{2}(1-b) = \frac{1}{2}(b+1)$. En el cas de l'empresa B, $q_B = \frac{1}{2}$.

- Suposem que $p_A > p_B + c(b-a)$ això significarà que per qualsevol consumidor li serà més barat anar a comprar a l'empresa B encara que s'hagi de desplaçar més ja que el preu de l'empresa B més el cost del transport entre ambdues empreses és inferior al preu de l'empresa A. Per tant, tots els consumidors compraran a B i la demanda de A serà nul·la, $q_A = 0$. En el cas de l'empresa B doncs, $q_B = 1$.

- Suposem que $p_A < p_B - c(b-a)$. Estem en el cas contrari, per qualsevol consumidor serà més barat comprar a l'empresa A i doncs s'endurà tot el negoci dels consumidors, $q_A = 1$. D'aquesta manera, la demanda de l'empresa B serà nul·la, $q_B = 0$.

- Suposem que $|p_A - p_B| < c(b-a)$, aleshores $q_A = a + d(a,x)$, la demanda seran tots els consumidors situats entre $[0,a]$ i els consumidors des de a fins al consumidor indiferent. Per tant, $q_A = a + d(a,x) = a + x - a = x$. Per a l'empresa B llavors tenim, $q_B = d(x,b) + (1-b) = b - x + 1 - b = 1 - x$.

Per tant, una vegada ja tenim definides les demandes de cada empresa, podem definir les funcions de benefici $\pi_i^{a,b} = p_i q_i$ per $i = A, B$ com,

$$\pi_A^{a,b}(p_A,p_B) = \begin{cases} p_A & \text{si} \quad p_A < p_B - c(b-a) \\ \frac{1}{2}(b+1)p_A & \text{si} \quad p_A = p_B - c(b-a) \\ \frac{(a+b)p_A}{2} + \frac{p_A p_B}{2c} - \frac{1}{2c}p_A^2 & \text{si} \quad |p_A - p_B| < c(b-a) \\ \frac{1}{2}a p_A & \text{si} \quad p_A = p_B + c(b-a) \\ 0 & \text{si} \quad p_A > p_B + c(b-a) \end{cases}$$

$$\pi_B^{a,b}(p_A,p_B) = \begin{cases} p_B & \text{si} \quad p_B < p_A - c(b-a) \\ (1+\frac{1}{2}a)p_B & \text{si} \quad p_B = p_A - c(b-a) \\ p_B - \frac{(a+b)p_B}{2} + \frac{p_A p_B}{2c} - \frac{1}{2c}p_B^2 & \text{si} \quad |p_A - p_B| < c(b-a) \\ \frac{1}{2}b p_B & \text{si} \quad p_B = p_A + c(b-a) \\ 0 & \text{si} \quad p_B > p_A + c(b-a) \end{cases}$$

A continuació representarem qualitativament la funció de benefici de l'empresa A per il·lustrar de forma gràfica que la funció és discontínua en un únic punt rellevant [5]. La gràfica mostra com varia el benefici $\pi_A^{a,b}$ en funció del preu p_A, considerem que p_B és constant, es pot veure que el punt de discontinuïtat correspon al punt on $p_A = p_B - c(b-a)$ que és on a l'augmentar lleugerament el preu de A es passarà a repartir-se la demanda en comptes de quedar-se-la tota.

Com ja hem comentat, volem buscar els preus d'equilibri en la segona etapa del model. Per fer-ho, determinarem les millors respostes. El preu de l'empresa A, p_A, és la *millor*

[5] Existeix un altre punt de discontinuitat quan $p_A = p_B + c(b-a)$, es tracta d'una discontinuitat evitable, però aquesta no és rellevant pel nostre anàlisi.

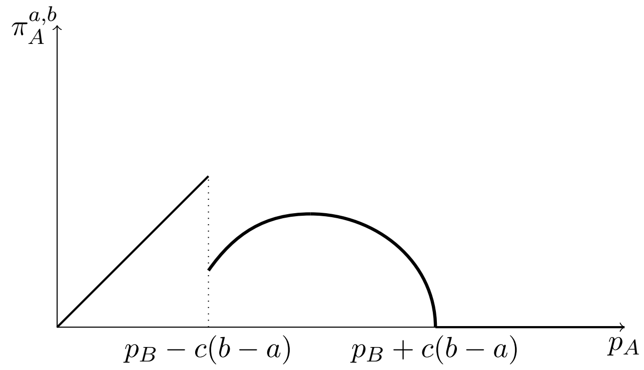


Figura 3.1: Funció de Benefici de l'empresa A

resposta contra el preu de l'empresa B, quan fixat un p_B, la funció $\pi_A(\cdot, p_B)$ sigui màxima per tot $[0, \infty)$. La millor resposta de l'empresa B es defineix de forma anàloga. Per tant, l'equilibri de Nash en aquesta segona etapa és el parell $(p_A^*,\ p_B^*)$ de manera que p_A^* és la millor resposta contra p_B^* i viceversa. Obtenim aquest parell de preus diferenciant les funcions de benefici. Abans de fer-ho, necessitem el lema següent:

Lema 3.2.1. *Sigui $a < b$, si existeix un punt d'equilibri, aquest ha de satisfer que $|p_A - p_B| < c(b-a)$.*

Demostració. Hem de veure que qualsevol punt d'equilibri ha de satisfer la següent condició $\left|p_A^* - p_B^*\right| < c(b-a)$, és a dir, que a l'equilibri, la diferència entre els preus de les dues empreses ha de ser inferior al cost del transport per la distància entre ambdues localitzacions ja que és on competeixen pel negoci dels consumidors.

Ho farem per absurd. Suposem primer que (p_A^*, p_B^*) és un punt d'equilibri però $\left|p_A^* - p_B^*\right| > c(b-a)$, aleshores el venedor que tingui el preu més elevat obtindrà un benefici nul i podria obtenir guanys igualant el preu final de l'altra empresa (disminuint el preu). Per tant, tindrà incentius en disminuir el preu i doncs aquest fet contradiu que (p_A^*, p_B^*) sigui un punt d'equilibri.

Suposem ara que $\left|p_A^* - p_B^*\right| = c(b-a)$ i sigui $p_A^* > p_B^*$ (podem suposar-ho ja que $b - a \neq 0 \Rightarrow c(b-a) \neq 0)$[6], tenim $p_A^* - p_B^* = c(b-a)$. Si $p_B^* = 0$, aleshores el benefici de l'empresa B és zero i obtindria guanys posant un preu inferior a $p_A^* + c(b-a)$. Si $p_B^* > 0$, l'empresa B disposaria només d'una fracció del mercat, és a dir, $q_B < 1$, aleshores disminuint lleugerament el preu podria obtenir tot el mercat, això significa que tindria incentius de disminuir el preu.

En qualsevol cas, arribem a una contradicció. Per tant, qualsevol punt d'equilibri ha de complir $\left|p_A^* - p_B^*\right| < c(b-a)$. □

Reprenent l'argument, del lema anterior traiem que l'equilibri es trobarà quan $|p_A - p_B| < c(b-a)$. Això ens indica en quina part de la funció de benefici ens hem de fixar i quina és la part que hem de diferenciar.

Donat un p_B qualsevol, considerem $\frac{\partial \pi_A}{\partial p_A} = 0$ i donat un p_A qualsevol, considerem $\frac{\partial \pi_B}{\partial p_B} = 0$. Obtenim un sistema lineal:[7]

[6] Prenem aquest cas com exemple, podriem haver agafat el cas contrari en el que $p_B^* > p_A^*$, és anàleg

[7] El càlcul més detallat el trobem a l'annex.

$$p_A = \frac{1}{2}(p_B + c(a+b)) \quad \text{i} \quad p_B = c + \frac{p_A}{2} - \frac{c(a+b)}{2}$$

Resolent aquest sistema obtenim el candidat a parell de preus d'equilibri; aquest és:

$$p_A^* = \frac{c}{3}(2 + a + b), \tag{3.2.1}$$

$$p_B^* = \frac{c}{3}(4 - a - b). \tag{3.2.2}$$

Aquest parell de preus serien els candidats a preus d'equilibri. Hotelling, en el seu article *Stability of Competition*, va definir els preus anteriors com els preus d'equilibri. En canvi, la discontinuïtat de les funcions de benefici ens porta a veure que no existeix aquest equilibri tal i com van apuntar C.D'Aspremont, J.Jaskold Gabszewicz i J.-F.Thiese en la modificació posterior del model.

Sigui p_B el preu de l'empresa B fixat, anem a analitzar els beneficis de l'empresa A. Els preus d'equilibri es troben quan $|p_A - p_B| < c(b-a)$, però donat $\forall\epsilon > 0$, si disminuïm una miqueta el preu, $p_A < p_B - c(b-a) - \epsilon$ aleshores l'empresa A s'endurà tot el negoci del mercat pel que llavors existeix un incentiu en disminuir el preu i contradiu el concepte d'equilibri.

Aquest fet ens porta a deduir que el model que va proposar Hotelling, no permet arribar a les conclusions que proposa ja que no podem afirmar l'existència de preus d'equilibri en la segona etapa. D'aquí traiem que si no tenim equilibri en la segona etapa no podem dir res de la primera.

Tot i així, Hotelling passa per sobre aquest problema de la discontinuitat de les funcions i justifica l'existència de l'equilibri perfecte en subjocs amb el següent argument.

Una vegada tenim el parell de preus d'equilibri que maximitzen el benefici d'ambdues empreses donat un parell de localitzacions qualssevol (a, b), veiem quin és el parell de localitzacions que maximitzen el benefici. El que estem fent és, mitjançant el mètode d'inducció endarrera, buscar l'equilibri en la primera etapa.

Per fer-ho, com que és un joc seqüencial, substituïm els preus en l'equilibri obtinguts en la funció de benefici de cada empresa i aleshores ens fixem quina és la tendència de les diferencials respecte a i b respectivament, per determinar la tendència de les localitzacions.Els càlculs més detallats els trobem a l'annex.

$$\frac{\partial \pi_A}{\partial a} = \frac{c}{9}(2 + a + b) > 0; \forall a, b \in [0, 1],$$

$$\frac{\partial \pi_B}{\partial b} = \frac{c}{9}(-4 + a + b) < 0; \quad \text{ja que max(a+b)=2 per } \forall a, b, \in [0, 1].$$

Per tant, observem que existeix una tendència de l'empresa A a anar cap a la dreta i de l'empresa B a anar cap a l'esquerra, pel que la tendència és que les dues s'apropin entre elles. Això és el que es coneix com a *Principi de la Mínima Diferenciació.* A més, com són productes homogenis si la tendència és apropar-se entre elles, cada vegada més els preus aniràn disminuint (ho podem observar tal i com s'han definit els preus d'equilibri) pel que s'entrarà en guerra de preus, això indica que no hi ha diferenciació entre productes. [8]

[8] Utilitzant la notació que va utilitzar Hotelling, es pot arribar a afirmar que la tendència és concentrar-se al centre del mercat mentre que amb la nostra notació no podem. Aquesta diferència és causada al no existir equilibri en la primera etapa.

3.3 Revisió del model de Hotelling

El 1979 es va publicar una rectificació del model de Hotelling (proposada per C.D'Aspremont, J.Jaskold Gabszewicz i J.-F.Thiese [3]). En aquest article, es va demostrar que el *Principi de la Diferenciació Mínima* el qual es referia Hotelling no era vàlid. En aquest apartat, veurem una matització i una modificació del model original.

En primer lloc, veurem que, al contrari del que Hotelling afirmava, no es pot dir res sobre la tendència dels venedors a concentrar-se al centre del mercat, ja que no existeix una solució d'equilibri de preus en el cas que els dos venedors no estiguin suficientment lluny l'un de l'altre.

En segon lloc, a diferència del model de Hotelling on els costos són lineals, considerarem una versió modificada on considerarem costos quadràtics. En aquesta versió modificada veurem que existeix una solució d'equilibri de preus en qualsevol punt i que hi ha una tendència per part dels dos venedors a maximitzar la seva diferenciació pel que això seria un contraexemple dels resultats de Hotelling.

3.3.1 Existència de l'equilibri amb costos lineals

Referent al primer punt, en la següent proposició, es tractarà el problema de l'existència d'un equilibri per cada parell de localització a i b. Més específicament, es fixaran unes condicions necessàries i suficients sobre a i b per tal que aquest equilibri existeixi i es calcularan els punts d'equilibri.

Proposició 3.3.1. *Sigui $(a, b) \in [0, 1]$, per $a = b$, l'únic punt d'equilibri és el donat per $p_A^* = p_B^* = 0$. Per $a < b$, hi ha un punt d'equilibri si, i només si,*

$$(2 + a + b)^2 \geq 12(2 + a - 2b) \tag{3.3.1}$$

$$(4 - a - b)^2 \geq 12(1 + 2a - b) \tag{3.3.2}$$

i, quan aquest existeix, el punt d'equilibri és únic i està determinat per: [9]

$$p_A^* = \frac{c}{3}(2 + a + b) \quad i \quad p_B^* = \frac{c}{3}(4 - a - b)$$

Demostració. Veiem primer el cas que $a = b$, observem que és immediat. Si $a = b$ significa que els dos venedors es localitzen en el mateix lloc, i per tant el que tingui el preu més baix s'endu tot el mercat i hi ha una tendència doncs a disminuir els preus i a entrar en una guerra de preus. La única solució d'equilibri és doncs quan $p_A^* = p_B^* = 0$.

Considerem ara que $a < b$. Anem a demostrar una implicació. Suposem que existeix un punt d'equilibri. Pel lema 3.2.1, sabem que si existeix un punt d'equilibri, aquest ha de satisfer $|p_A^* - p_B^*| < c(b - a)$, és a dir, que en l'equilibri, la diferència entre els preus de les dues empreses ha de ser inferior al cost del transport per la distància entre ambdues localitzacions ja que és on competeixen pel negoci dels consumidors.

Com a conseqüència d'aquesta condició, per cada punt d'equilibri (p_A^*, p_B^*), p_A^* ha de maximitzar $\pi_A(p_A, p_B^*)$ en l'interval obert $(p_B^* - c(b-a), p_B^* + c(b-a))$, i similar per p_B^*. El càlcul de maximitzar les dues funcions de benefici ja l'hem realitzat en l'apartat anterior i hem extret que els punts d'equilibri són els que exposem en l'enunciat de la proposició.

[9] Aquest parell de preus han estat calculats en l'apartat anterior de manera que si existia un punt d'equilibri, aquest havia de ser el parell de preus exposat.

En efecte, donades a i b, sabem que el benefici d'A en els preus d'equilibri ($\pi_A(p_A^*, p_B^*)$) és superior al benefici que obtindria l'empresa si fixés un preu inferior pel qual s'endugués tot el negoci dels consumidors (és a dir com hem vist en les funcions de benefici, en el cas de l'empresa A, un preu inferior a $p_B - c(b-a)$). Això és $\forall\epsilon > 0$:

$$\pi_A(p_A^*, p_B^*) = \frac{c}{18}(2+a+b)^2 \geq \pi_A(p_B^* - c(b-a) - \epsilon, p_B^*) = p_B^* - c(b-a) - \epsilon \Rightarrow$$
$$\frac{c}{18}(2+a+b)^2 \geq p_B^* - c(b-a) \geq p_B^* - c(b-a) - \epsilon \Rightarrow$$
$$\frac{c}{18}(2+a+b)^2 \geq \frac{c}{3}(4-a-b) - c(b-a) \Rightarrow$$
$$(2+a+b)^2 \geq 12(2+a-2b)$$

$$\pi_B(p_A^*, p_B^*) = \frac{c}{18}(4-a-b)^2 \geq \pi_B(p_A^*, p_A^* - c(b-a) - \epsilon) = p_A^* - c(b-a) - \epsilon \Rightarrow$$
$$\frac{c}{18}(4-a-b)^2 \geq p_A^* - c(b-a) \geq p_A^* - c(b-a) - \epsilon \Rightarrow$$
$$\frac{c}{18}(4-a-b)^2 \geq \frac{c}{3}(2+a+b) - c(b-a) \Rightarrow$$
$$(4-a-b)^2 \geq 12(1+2a-b)$$

Per tant, hem provat una implicació, anem a veure el recíproc.

Suposem que les condicions (3.3.1) i (3.3.2) són certes i volem veure que exiteix un punt d'equilibri. Si existeix l'equilibri aquest és l'exposat a l'enunciat de la proposició.

És suficient veure que per (3.3.1) i (3.3.2) es compleix $|p_A^* - p_B^*| < c(b-a)$ pel lema 3.2.1. Subtituint els possibles preus d'equilibri, suposats certs per hipòtesi, completariem la demostració de la proposició. □

Notem que si considerem localitzacions simètriques al voltant del centre (és a dir, $a = 1-b$), aleshores de les dues condicions que acabem de veure necessàries, es pot reduir que:

$$(2+1-b+b)^2 \geq 12(2+1-b-2b) \Rightarrow$$
$$9 \geq 12(3-3b) \Rightarrow b \geq \frac{3}{4}$$

Això és que $b \geq \frac{3}{4}$ i com a conseqüència $a \leq \frac{1}{4}$. En altres paraules, els duopolistes s'han de localitzar fora dels quartils per aconseguir una solució d'equilibri en preus.

Amb aquest resultat, s'ha demostrat que no existeix una solució d'equilibri en el cas que les dues empreses es localitzin al centre del mercat.

Fins aquí hem vist, que en el cas que Hotelling proposa, que és el cas en el que els costos són lineals, l'existència i unicitat dels preus d'equilibri només estan garantits quan es compleixen les condicions que hem vist en la proposició anterior.

Representem qualitativament a la figura (3.2) la funció de benefici de l'empresa A en el cas on si que podem garantir l'existència d'equilibri, és a dir, quan es compleixen les condicions exposades sobre a i b.

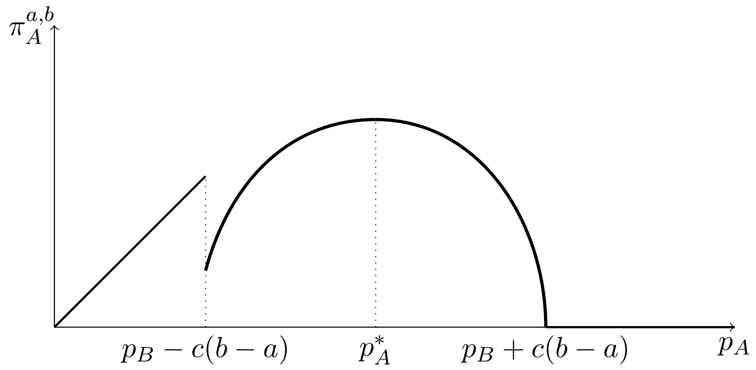


Figura 3.2: Funció de Benefici de l'empresa A

Observem a la figura (3.2) que el preu d'equilibri coincideix amb el màxim de la funció. En canvi, si les condicions no es complissin, és a dir en el cas inicial que proposa Hotelling representat en la figura 3.1, el màxim de la funció no es troba en l'interval $[p_B - c(b-a), p_B + c(b-a)]$. Així veiem de forma gràfica que en el cas inicial de Hotelling, no existeix cap parell de preus en equilibri.

3.3.2 Model de Hotelling amb costos quadràtics

Tenint en compte el resultat anterior, veurem ara doncs, la segona rectificació que com hem presentat a l'inici del capítol tracta sobre una versió modificada de l'exemple de Hotelling. Els autors C.D'Aspremont, J-F.Thisse i J.Jaskold (1979, veure [3]) mostren un cas en el que les conseqüències que Hotelling proposa es compleixen sense cap condició. Considerem una lleugera modificació en la qual existeix una solució d'equilibri de preus per *cada* parell de localitzacions (a, b) obtinguts, en comptes de considerar un cost de transport lineal, es considera que aquest cost és quadràtic respecte la distància, és a dir, per cada distància y, el cost de transport ve donat per cy^2. Sota aquest supòsit, es repetirà el desenvolupament fet pel model de Hotelling.

Sigui (a, b) un parell de localitzacions qualssevol, anem a obtenir els preus que maximitzen el benefici d'ambdues empreses. Com hem vist en el model de Hotelling, primer necessitem saber les funcions de demanda de cada empresa. Per fer-ho, analitzem on se situaria el consumidor indiferent[10]. Denotem la posició que ocupa el consumidor indiferent com a x.

Observem que com que els costos de transport són quadràtics aleshores $d(a, x) = d(x, a) \Leftrightarrow (a-x)^2 = (x-a)^2$. Per tant, en aquest cas no és necessari analitzar casos ja que en tots és simètric. Sigui x la posició del consumidor indiferent,

$$c(a-x)^2 + p_A = c(b-x)^2 + p_B \Leftrightarrow ca^2 - 2cax + cx^2 + p_A = cb^2 - 2bcx + cx^2 + p_B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2acx + 2bxc = p_B - p_A + c(b^2 - a^2) \Leftrightarrow x = \frac{p_B - p_A}{2c(b-a)} + \frac{b+a}{2}$$

Per tant, al contrari del cas de costos lineals, existeix la possibilitat de què el consumidor indiferent se situï entre $[0, a]$, $[a, b]$ i $[b, 1]$. La demanda de cada empresa donat cada cas serà la següent:

[10] Recordem que el consumidor indiferent és el que li suposa el mateix preu final (el preu del producte més el cost del transport) comprar a l'empresa A que a l'empresa B.

i). En cas que $0 \leq x \leq a$, la demanda de l'empresa A vindria donada $\hat{q}_A = d(0,x) = x$ i la demanda de l'empresa B vindria donada per $\hat{q_B} = d(x,b) + (1-b) = b - x + 1 - b = 1 - x$.

ii). En cas que $a \leq x \leq b$, la demanda és: $\hat{q_A} = a + d(x,a) = a + x - a = x$ i $\hat{q_B} = d(x,b) + 1 - b = 1 - x$.

iii). En cas que $b \leq x \leq 1$, la demanda serà doncs: $\hat{q_A} = b + d(b,x) = b + x - b = x$ i $\hat{q_B} = d(x,1) = 1 - x$.

Hem vist que, en qualsevol cas, $\hat{q_A} = x$ i $\hat{q_B} = 1 - x$. Però, no podem afirmar que siguin exactament les funcions de demanda ja que hauriem de diferenciar els casos en què:

- L'empresa A s'endu tot el negoci dels consumidors, aquest cas,

$$\frac{p_B - p_A}{2c(b-a)} + \frac{b+a}{2} > 1 \Leftrightarrow \frac{p_B - p_A}{2c(b-a)} > 1 - \frac{b+a}{2} \Leftrightarrow p_B - p_A > c[2(b-a) - (b^2 - a^2)]$$

- L'empresa B s'emporta tota la demanda (és a dir, l'empresa A té una demanda nula), aquest cas,

$$\frac{p_B - p_A}{2c(b-a)} + \frac{b+a}{2} < 0 \Leftrightarrow \frac{p_B - p_A}{2c(b-a)} < -\frac{b+a}{2} \Leftrightarrow p_B - p_A < c(a^2 - b^2)$$

- Les dues empreses comparteixen la demanda dels consumidors quan:

$$0 \leq \frac{p_B - p_A}{2c(b-a)} + \frac{b+a}{2} \leq 1 \Leftrightarrow c[2(b-a) - (b^2 - a^2)] \leq p_B - p_A \leq c(a^2 - b^2)$$

Per tant, expresarem les funcions de benefici de forma:

$$\pi_A^{a,b}(p_A, p_B) = \begin{cases} p_A & \text{si} \quad p_B - p_A > c[2(b-a) - (b^2 - a^2)] \\ (\frac{p_A - p_B}{2c(b-a)} + \frac{b-a}{2})p_A & \text{si} \quad c[2(b-a) - (b^2 - a^2)] \leq p_B - p_A \leq c(a^2 - b^2) \\ 0 & \text{si} \quad p_B - p_A < c(a^2 - b^2) \end{cases}$$

$$\pi_B^{a,b}(p_A, p_B) = \begin{cases} p_B & \text{si} \quad p_B - p_A < c(b^2 - a^2) \\ (1 - \frac{p_A - p_B}{2c(b-a)} + \frac{b-a}{2})p_B & \text{si} \quad c(b^2 - a^2) \leq p_B - p_A \leq c[2(b-a) - (b^2 - a^2)] \\ 0 & \text{si} \quad p_B - p_A > c[2(b-a) - (b^2 - a^2)] \end{cases}$$

És fàcil veure que el punt d'equilibri estarà quan comparteixin la demanda, ja que de l'altra forma una empresa obtindria un benefici nul i disminuint una mica el preu tindria guanys. Així, buscarem els punts d'equilibri diferenciant les funcions per la part on comparteixen la demanda i resoldrem el sistema lineal que es planteja. El parell de preus d'equilibri que maximitzen els beneficis són: [11]

$$p_A^* = \frac{c}{3}(b-a)[2+a+b],$$

[11] Els càlculs detallats es troben a l'annex.

$$p_B^* = \frac{c}{3}(b-a)[4-a-b].$$

Aquest parell de preus és l'únic punt d'equilibri de Nash per dos localitzacions fixades a i b i és cert sense cap condició en els paràmetres de localització.

Una vegada tenim els preus d'equilibri per un parell de localitzacions donades, anem a veure quina tendència tenen les variables de localització per maximitzar el benefici. Ho veiem subtituint els preus trobats a la funció de benefici i diferenciant la funció respecte a i b respectivament.

En aquest cas, $\frac{\partial \pi_A}{\partial a} < 0$ i per tant tendeix cap a l'esquerra mentre que $\frac{\partial \pi_B}{\partial b} > 0$ i doncs tendeix cap a la dreta. Això significa que ambdues localitzacions tendeixen a allunyar-se. Cada venedor guanya més avantatge si es mou el més lluny possible de l'altre. Es pot resumir afirmant que les empreses tendeixen a diferenciar-se.

Aquest exemple suggereix que *El Principi Mínim de Diferenciació* no es vàlid ja que hem plantejat un exemple en el que les empreses tendeixen a allunyar-se.

Capítol 4

Competència en un espai bidimensional

La majoria d'anàlisis del posicionament estratègic d'un producte es suposa en un espai de característiques unidimensional. Clarament, aquest supòsit es basa en una facilitat matemàtica. Però si s'observa, per exemple a les zones urbanes de la vida real, rarament trobem ciutats llargues i estretes, és a dir, unidimensionals. És per això, que es planteja estudiar una situació en què el model unidimensional derivi en el cas de diverses dimensions.

En aquest apartat estudiarem el cas bidimensional, ens basarem en els estudis previs publicats el 1990 per Takatoshi Tabuchi (Vegem en l'article [9]) i el 1998 per Andreas Irmen i Jacques-F Thisse (Vegem l'article en [1]). Tabuchi tracta, entre altres temes, el cas bidimensional del model de Hotelling i A.Irmen i J-F Thisse tracten el cas de múltiples característiques.

En un espai unidimensional, s'ha provat que existeix el principi de màxima diferenciació, és a dir, que les empreses tendeixen a separar-se i col·locar-se fora dels quartils que és el que hem vist en l'apartat anterior. Però, s'ha de demostrar si això és cert en un espai bidimensional.

4.1 Presentació del model bidimensional

El model bidimensional que es proposa segueix el model de Hotelling vist fins ara per tant tindrem les mateixes hipòtesis. Se suposa un mercat en el que competeixen dues empreses, es tracta d'un model seqüencial que està compost per dues etapes, en una primera etapa les empreses trien simultàniament una localització, en aquest cas, la localització ve donada per dues coordenades d'$\Re^2$. En la segona etapa, donada la localització escollida, trien simultàniament també un preu. Es treballa amb costos quadràtics.

L'objectiu del model és maximitzar el benefici de cadascuna de les empreses tenint en compte l'estratègia de l'altra. Per fer-ho, s'utilitza el mètode d'inducció endarrera en el que primer s'avalua la segona etapa en la que donades dues localitzacions qualssevol, es busca el parell de preus que maximitzen els beneficis de les dues empreses, és a dir, el parell de preus d'equilibri. Una vegada s'observa que existeix aquest equilibri de preus, s'estudia la primera etapa i substituint els preus d'equilibri podem obtenir un parell de localitzacions que seràn les millors pel que fa a benefici de les empreses.

4.2 Model bidimensional

Considerem un mercat en el que competeixen dues empreses, un mercat que està distribuit en el quadrat $[0, l]$x$[0, l]$ on l és una constant; sense pèrdua de generalitat podem suposar $l = 1$, per tant treballem en un espai $C = [0, 1]$x$[0, 1]$. Considerem que els consumidors es distribueixen uniformement dins de C i que cada consumidor consumeix únicament una unitat de producte.

A diferència del model unidimensional, en el qual centràvem la decisió del consumidor en el preu final del producte, que el definíem com la suma entre el preu del producte i el cost del transport, en aquest cas considerem la utilitat del consumidor. Això és, sigui $z \in C$ un consumidor qualsevol, la seva funció d'utilitat vindrà donada per la funció $U_i(z)$ on $i = A, B$, de manera que el consumidor que compra a A té una utilitat de (per a comprar en l'empresa B, l'expressió és similar):

$$U_A(z) = S - p_A - \sum_{k=1}^{2} t_k(z_k - a_k)^2$$

on S denota l'excedent brut del consumidor z per comprar a qualsevol variant (A o B) i p_A representa el preu del producte de l'empresa A (de forma anàloga, p_B denota el preu de l'empresa B).

En aquest model tenim en compte dues característiques en el mercat, la primera és la representada per la primera coordenada i la segona per la segona coordenada. Suposarem que cada característica té un pes diferent en el mercat i aquest pes el denotem com a t_1 per la primera característica i t_2 per la segona.

Ens situem a la segona etapa, en la que hem de trobar el parell de preus d'equilibri. Per tant, siguin a i b dues localitzacions donades de manera que $a = (a_1, a_2) \in C$ és la posició de l'empresa A i $b = (b_1, b_2) \in C$ és la posició de l'empresa B. Definim p_A i p_B com els preus del producte de l'empresa A i B respectivament.

Assumirem sense pèrdua de generalitat que $b \geq a$, és a dir, cada component de b és major que a. [1]

Abans d'entrar en l'estudi del parell de preus d'equilibri, és necessari assegurar-se l'existència i unicitat d'aquests per cada parell de localitzacions. Andrew Caplin i Barry Nalebuff (Veure ([2])) van identificar dues condicions sota les quals es pot garantir l'existència i l'unicitat dels preus d'equilibri. L'existència depèn de la funció d'utilitat i la distribució dels consumidors mentre que la unicitat depèn exclusivament de la distribució dels consumidors. Com que la funció d'utilitat que utilitzem és un cas especial de la que consideren Caplin i Nalebuff (Supòsit 1 pàg. 29) i la distribució uniforme és ρ-còncava (Supòsit 2 pàg.30), aleshores existeix un equilibri de preus per a cada parell de localitzacions (Teorema 2 pàg.39). A més, com que la distribució uniforme és també log-còncava aleshores implica que aquest parell de preus d'equilibri és únic (Proposició 6 pàg.42). En la pròxima secció, donarem els detalls de les condicions que Caplin i Nalebuff determinen.

Continuem doncs amb la determinació d'aquest parell de preus d'equilibri, de la mateixa manera que hem fet en el cas unidimensional, necessitem saber les funcions de demanda de cada empresa i per això utilitzarem la posició del consumidor indiferent, que

[1] Podem assumir sense pèrdua de generalitat que $b \geq a$ ja que donats dos punts a, b qualsevols, podriem veure el quadrat $[0, 1]$x$[0, 1]$ prenent un punt d'origen diferent a l'inicial de manera que això es compleixi.

serà aquell que té la mateixa utilitat quan compra a A que quan compra a B. Suposem que el consumidor indiferent se situa a $(x, y) \in C$, aleshores es compleix:

$$p_A + t_1(a_1 - x)^2 + t_2(a_2 - y)^2 = p_B + t_1(b_1 - x)^2 + t_2(b_2 - y)^2.$$

Observem que és sempre una recta:

$$\begin{aligned} p_A + t_1(a_1 - x)^2 + t_2(a_2 - y)^2 = p_B + t_1(b_1 - x)^2 + t_2(b_2 - y)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2yt_2(b_2 - a_2) = 2xt_2(a_1 - b_1) + p_B - p_A + t_1(b_1^2 - a_1^2) + t_2(b_2^2 - a_2^2) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y = \frac{t_1(a_1 - b_1)}{t_2(b_2 - a_2)}x + \frac{p_B - p_A + t_1(b_1^2 - a_1^2) + t_2(b_2^2 - a_2^2)}{2t_2(b_2 - a_2)}. \end{aligned}$$

Podem suposar sense pèrdua de generalitat que les característiques estan ordenades tal que $t_2(b_2 - a_2) \geq t_1(b_1 - a_1)$. En aquest cas, direm que la segona característica és *dominant*, mentre que l'altra doncs és una característica *dominada*. Ens podem trobar en dos casos:

i). La segona característica *domina dèbilment* quan:

$$t_2(b_2 - a_2) \geq t_1(b_1 - a_1).$$

ii). La segona característica *domina estrictament* quan:

$$t_2(b_2 - a_2) > t_1(b_1 - a_1). \tag{4.2.1}$$

Observem que la condició de dominància depèn del pes de cada característica però també de les localitzacions, per tant, observem que es manté en el cas que els pesos que els hi donem a les característiques siguin els mateixos.

Definim q_A com la funció de demanda de A. Podem afirmar que $q_B = 1 - q_A$, per tant, les funcions de benefici de cada empresa ve donada per $\pi_A = p_A q_A$ i $\pi_B = p_B q_B = p_B(1 - q_A)$.

La demanda de A (per exemple ja que per l'empresa B és anàleg) està definida per la massa de consumidors que prefereixen comprar en A, és a dir,

$$q_A = \int_{C_1} \mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

on $C_1 = \{(x, y) \in C | p_A + t_1(a_1 - x)^2 + t_2(a_2 - y)^2 \leq p_B + t_1(b_1 - x)^2 + t_2(b_2 - y)^2\}$.

Resolem la integral, però primer veiem que:

$$\begin{aligned} p_A + t_1(a_1 - x)^2 + t_2(a_2 - y)^2 \leq p_B + t_1(b_1 - x)^2 + t_2(b_2 - y)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y \leq \frac{t_1(a_1 - b_1)}{t_2(b_2 - a_2)}x + \frac{p_B - p_A + t_1(b_1^2 - a_1^2) + t_2(b_2^2 - a_2^2)}{2t_2(b_2 - a_2)}. \end{aligned}$$

Cal mencionar que expressem la inequació en funció de y ja que hem determinat que la característica dominant és la segona característica, és a dir, la que correspon a la segona coordenada. En el cas contrari expressariem l'inequació en funció de x i calculariem la posterior integral utilitzant aquesta condició. [2]

Per tant,

$$q_A = \int_{C_1} \mathrm{d}y\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^1 \int_0^{\frac{t_1(a_1-b_1)}{t_2(b_2-a_2)}x+\frac{p_B-p_A+t_1(b_1^2-a_1^2)+t_2(b_2^2-a_2^2)}{2t_2(b_2-a_2)}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \frac{t_1(a_1-b_1)}{t_2(b_2-a_2)}x + \frac{p_B-p_A+t_1(b_1^2-a_1^2)+t_2(b_2^2-a_2^2)}{2t_2(b_2-a_2)}\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{t_1(a_1-b_1)}{2t_2(b_2-a_2)} + \frac{p_B-p_A+t_1(b_1^2-a_1^2)+t_2(b_2^2-a_2^2)}{2t_2(b_2-a_2)}.$$

Aquesta expressió representa la demanda de A en l'interval:

$$p_A \in [p_B + \sum_{k=1}^{2} t_k(b_k^2-a_k^2) - 2t_2(b_2-a_2), p_B + \sum_{k=1}^{2} t_k(b_k^2-a_k^2) - 2t_1(b_1-a_1)]. \quad (4.2.2)$$

Aquest interval representa el domini de definició de la integral plantejada. Els límits de l'interval s'obtenen quan la recta del consumidor indiferent toca un vèrtex de $[0,1]$x$[0,1]$ des de dalt o des de baix, i això és, quan $(x,y) = (0,1)$ o bé quan $(x,y) = (1,0)$.

D'aquesta manera obtenim la funció de demanda de l'empresa A a l'interval (4.2.2) i conseqüentment de l'empresa B. [3]

Utilitzant la funció de demanda calculada en el domini (4.2.2), tenim que les funcions de benefici de cada empresa són:

$$\pi_A = p_A q_A = p_A \frac{p_B - p_A - t_1(b_1-a_1) + t_1(b_1^2-a_1^2) + t_2(b_2^2-a_2^2)}{2t_2(b_2-a_2)},$$
$$\pi_B = p_B q_B = p_B(1-q_A) = p_B \frac{2t_2(b_2-a_2) + t_1(b_1-a_1) - p_B + p_A - t_1(b_1^2-a_1^2) - t_2(b_2^2-a_2^2)}{2t_2(b_2-a_2)}.$$

Estem buscant un parell de preus p_A i p_B que maximitzin el benefici de cadascuna de les empreses tenint en compte l'estratègia de l'altre. Així doncs, diferenciem $\frac{\partial \pi_A}{\partial p_A} = 0$ i $\frac{\partial \pi_B}{\partial p_B} = 0$. D'aquí obtenim el següent sistema:

$$p_A = \frac{p_B - t_1(b_1-a_1) + t_1(b_1^2-a_1^2) + t_2(b_2^2-a_2^2)}{2},$$
$$p_B = \frac{p_A + 2t_2(b_2-a_2) + t_1(b_1-a_1) - t_1(b_1^2-a_1^2) - t_2(b_2^2-a_2^2)}{2}.$$

Tal com obteniem en el cas unidimensional, tenim un sistema que, si el resolem, obtenim els preus d'equilibri:

[2] Cal destacar el perquè s'expressa en funció de la segona coordenada ja que a l'hora de calcular la funció de benefici, aquesta canviaria de manera que el denominador estaria expressat en funció de variables relacionades amb la característica dominant.

[3] Podriem deduir que la demanda de l'empresa A ve donada per una funció a trossos on diferenciem el cas en què la demanda és nul·la (quan p_A és molt elevat) o el cas en què s'endú tota la demanda (quan p_A és molt petit).

$$p_A^* = \frac{2t_2(b_2 - a_2) - t_1(b_1 - a_1) + t_1(b_1^2 - a_1^2) + t_2(b_2^2 - a_2^2)}{3}, \tag{4.2.3}$$

$$p_B^* = \frac{4t_2(b_2 - a_2) + t_1(b_1 - a_1) - t_1(b_1^2 - a_1^2) - t_2(b_2^2 - a_2^2)}{3}. \tag{4.2.4}$$

Aquests preus defineixen un equilibri al llarg de l'interval donat en (4.2.2) pel qual sorgeixen les funcions de demanda. Per això, p_A^* ha de ser més petit o igual que el límit superior de l'interval, pel qual es té si i només si

$$4t_1(b_1 - a_1) - 2t_2(b_2 - a_2) \leq \sum_{k=1}^{2} t_k(b_k^2 - a_k^2). \tag{4.2.5}$$

Similarment, p_A^* ha de ser més gran o igual que el límit inferior de l'interval i això es té si i només si

$$4t_2(b_2 - a_2) - 2t_1(b_1 - a_1) \geq \sum_{k=1}^{2} t_k(b_k^2 - a_k^2). \tag{4.2.6}$$

Les mateixes condicions s'obtenen per p_B. Per tant, (p_A^*, p_B^*) és l'únic equilibri sempre que les localitzacions pertanyin al domini determinat per les condicions (4.2.5) i (4.2.6). Aquest domini és no degenerat si i només si (4.2.1) es compleix, és a dir, el domini determinat per les condicions només existeix quan estem en el cas de dominància estricta.

Hem observat que (p_A^*, p_B^*) és un equilibri local de preus en la segona etapa. Diem que l'equilibri és local ja que està definit en (4.2.2) i les localitzacions estan restringides a (4.2.5) i (4.2.6). Aplicant el mètode d'inducció endarrera, anem a la primera etapa i, utilitzant aquest parell de preus, anem a veure quin és el punt d'equilibri en les localitzacions.

Per fer-ho, tal i com hem fet en el cas unidimensional, substituim el parell de preus d'equilibri (3.2.1) i (3.2.2) en la funció de benefici de cada empresa i obtenim:

$$\begin{aligned}\pi_A(p_A^*, p_B^*) &= p_A^* \frac{2t_2(b_2 - a_2) - t_1(b_1 - a_1) + t_1(b_1^2 - a_1^2) + t_2(b_2^2 - a_2^2)}{6t_2(b_2 - a_2)} = \\ &= \frac{(2t_2(b_2 - a_2) - t_1(b_1 - a_1) + t_1(b_1^2 - a_1^2) + t_2(b_2^2 - a_2^2))^2}{18t_2(b_2 - a_2)}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_B(p_A^*, p_B^*) &= p_B^* \frac{4t_2(b_2 - a_2) + t_1(b_1 - a_1) - t_1(b_1^2 - a_1^2) - t_2(b_2^2 - a_2^2)}{6t_2(b_2 - a_2)} = \\ &= \frac{(4t_2(b_2 - a_2) + t_1(b_1 - a_1) - t_1(b_1^2 - a_1^2) - t_2(b_2^2 - a_2^2))^2}{18(b_2 - a_2)}.\end{aligned}$$

A continuació, derivem les funcions respecte la característica dominada, en el nostre cas la característica dominada és la primera, per tant derivem la funció de benefici de l'empresa A respecte a_1 i la funció de benefici de l'empresa B respecte b_1. Volem trobar el valor pel qual a_1 i b_1 maximitzen el benefici d'A i B respectivament, per tant igualarem aquesta derivada a zero. Això és:

Per facilitar la lectura, denominem $P = 2t_2(b_2 - a_2) - t_1(b_1 - a_1) + t_1(b_1^2 - a_1^2) + t_2(b_2^2 - a_2^2)$

$$\frac{\partial \pi_A}{\partial a_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{P(t_1 - 2t_1 a_1)}{18t_2(b_2 - a_2)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(t_1 - 2t_1a_1) = 0 \Leftrightarrow Pt_1(1 - 2a_1) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2a_1 = 0 \Leftrightarrow a_1 = \frac{1}{2}$$

Observem que, per **qualsevol localització de** $b = (b_1, b_2)$, $a_1 = \frac{1}{2}$. La derivada serà zero quan $a_1 = \frac{1}{2}$ independentment de la decisió de l'empresa B, és a dir, d'on es localitzi l'empresa B.

Apliquem el mateix raonament per l'empresa B, de manera que sigui $Q = 4t_2(b_2 - a_2) + t_1(b_1 - a_1) - t_1(b_1^2 - a_1^2) - t_2(b_2^2 - a_2^2)$, tenim:

$$\frac{\partial \pi_B}{\partial b_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{Q(t_1 - 2t_1b_1)}{18t_2(b_2 - a_2)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Q(t_1 - 2t_1b_1) = 0 \Leftrightarrow Qt_1(1 - 2b_1) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2b_1 = 0 \Leftrightarrow b_1 = \frac{1}{2}$$

De la mateixa manera obtenim que per **qualsevol localització de** $a = (a_1, a_2)$, llavors $b_1 = \frac{1}{2}$.

Això significa que una mínima diferenciació en la característica no dominant ha de produir-se en l'equilibri.

Volem demostrar ara, com ho vam fer en el cas unidimensional, que existeix una màxima diferenciació en aquest cas de la característica dominant, la segona característica. Per veure-ho, seguim el mateix procediment, agafem la funció de benefici de l'empresa A en un primer cas i derivem en funcio de a_2.

$$\frac{\partial \pi_A}{\partial a_2} = \frac{P(-4t_2(b_2 - a_2) - 4t_2a_2(b_2 - a_2) + P)}{18t_2(b_2 - a_2)^2} = \frac{P(P - 4t_2(1 + a_2)(b_2 - a_2))}{18t_2(b_2 - a_2)^2}$$

Perquè existeixi aquesta màxima diferenciació, s'ha de veure que $\frac{\partial \pi_A}{\partial a_2} \leq 0$ per $\forall a_i, b_i$ on $i = 1, 2$. Això és:

$$P(P - 4t_2(1 + a_2)(b_2 - a_2)) \leq 0 \Leftrightarrow P - 4t_2(1 + a_2)(b_2 - a_2) \leq 0$$

$$2t_2(b_2 - a_2) - t_1(b_1 - a_1) + t_1(b_1^2 - a_1^2) + t_2(b_2^2 - a_2^2) - 4t_2(1 + a_2)(b_2 - a_2) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$t_1(b_1 - a_1)(b_1 + a_1 - 1) \leq t_2(b_2 - a_2)(2 - b_2 + 3a_2)$$

Com que hem suposat la dominància estricta de manera que, $t_2(b_2 - a_2) > t_1(b_1 - a_1)$, és suficient veure que es manté el següent:

$$t_1(b_1 - a_1)(-1 + b_1 + a_1) \leq t_1(b_1 - a_1)(2 - b_2 + 3a_2) \Leftrightarrow t_1(b_1 - a_1)(b_1 + a_1 + b_2 - 3(1 + a_2)) \leq 0$$

De fet, aquesta expressió sempre es compleix ja que $t_1(b_1 - a_1) \geq 0$ i $b_1 + a_1 + b_2 \leq 3$ per definició de $b_1, a_1, b_2 \in [0, 1]$.

Això ens diu que, pel que fa a la segona coordenada l'empresa A tendirà a allunyar-se, és a dir, tendirà a diferenciar-se en la segona característica. La millor resposta de l'empresa A per qualsevol localització de l'empresa B és $a^* = (\frac{1}{2}, 0)$. De manera similar, podem obtenir que la millor resposta per l'empresa B donada una localització qualsevol de A és $b^* = (\frac{1}{2}, 1)$.

Aquesta configuració mostra a l'equilibri una diferenciació màxima de la característica dominant i una diferenciació mínima de la característica dominada.

En altres paraules, existeix un equilibri de Nash en les localitzacions on les empreses escullen diferenciar els seus productes només a la característica dominant mentre que seleccionen una posició central per l'altra característica.

Utilitzant els preus d'equilibri locals que hem obtingut (4.2.3) i (4.2.4), el corresponent equilibri local de preus serà $p_A^* = p_B^* = t_2$. Això indica sorprenentment que el nivell de preus depèn del pes que li donem a la característica dominant. Intuïtivament podem concloure que els productes són homogenis en termes de la característica dominada.

Podem relacionar els resultats que hem obtingut en aquest cas bidimensional amb els que Hotelling obté en el cas unidimensional. En el cas unidimensional que presenta Hotelling on els costos són lineals, es verifica que existeix una solució d'equilibri quan les localitzacions estan restringides per unes condicions que s'estableixen en la posterior revisió del model. En el cas bidimensional, tenim un resultat similar ja que existeix un equilibri local de preus quan les localitzacions compleixen unes restriccions.

En canvi, una diferència rellevant entre el cas unidimensional i bidimensional és que en el cas unidimensional obtenim un equilibri global de preus tant en el cas de costos lineals com quadràtics (que són els dos casos analitzats en el treball). En canvi, en el cas bidimensional, l'equilibri de preus que s'obté és local.

4.3 Existència i unicitat de l'equilibri de preus

Andrew Caplin i Barry Nalebuff van publicar un article el 1991 en el qual tractaven l'existència i l'unicitat de l'equilibri ([2]). En aquesta secció, mostrarem el perquè el model de Hotelling amb costos quadràtics entra dins del teorema que garanteix l'existència i l'unicitat segons els autors.

Teorema. ***(A.Caplin i B.Nalebuff, Theorem 2 pàg.39)*** *Sota el supòsit 1 i el supòsit 2 existeix un equilibri de Nash.*

Supòsit 1 (Assumption 1 pàg.29): La funció d'utilitat definida com:

$$U_A(z) = S - p_A - \sum_{k=1}^{2} t_k(z_k - a_k)^2$$

és una funció lineal en la interacció entre z i a i, a més a més, la funció $g(m) = m$ on $m = S - p_A$ és una funció còncava i estrictament creixent per la variable m. L'interès en què sigui lineal només en la part en la que hi ha una interacció entre z i a es deu a què a l'hora de fer el càlcul de la demanda, necessita que aquesta sigui contínua i això implica que quan es realitza el càlcul previ del consumidor indiferent, aquests han de formar una varietat lineal (en el nostre cas, una recta).

Per a definir el segon supòsit, necessitem una definició prèvia.

Definició 4.3.1. Sigui $\rho \in [-\infty, \infty]$ i sigui $f(z)$ la funció de densitat una funció no-negativa i definida a un conjunt convex B, direm que f és ρ-còncava si $\forall z_0, z_1 \in B$,

$$f((1-\lambda)z_0 + \lambda z_1) \geq [(1-\lambda)f(z_0)^\rho + \lambda f(z_1)^\rho]^{\frac{1}{\rho}} \qquad 0 \leq \lambda \leq 1$$

En el nostre cas, la funció de densitat és $f(z) = 1$ ja que es treballa amb una distribució uniforme.

*Supòsit 2 (**Assumption 2 pàg.30**)*: La funció de densitat $f(z)$ és ρ-còncava.

Necessita aquesta condició ja que en el cas que els consumidors estiguin distribuits d'una forma irregular, de manera que la funció de densitat no fós còncava, aleshores podria generar discontinuïtats a la funció de demanda i doncs no es garantitzaria l'existència de l'equilibri.

A més a més, si afegim la condició que la funció de densitat en comptes de ser ρ-còncava, sigui *log*-còncava aleshores l'equilibri de Nash és únic (**Proposition 6 pàg.42**). És fàcil veure que el nostre cas està dins d'aquesta condició ja que tractem amb una distribució uniforme dels consumidors.

Fins aquí hem vist que en el model de Hotelling amb costos quadràtics es pot garantir l'existència i unicitat de l'equilibri.

Capítol 5

Conclusions

El fet d'haver estudiat simultàniament dos graus diferents sempre m'ha portat a intentar buscar la connexió entre ells. Durant el període universitari he anat descobrint els punts en comú entre les matemàtiques i l'economia i l'empresa. La relació més directa pot ser l'ús del càlcul i l'àlgebra en l'economia, en concret, en la búsqueda de punts d'equilibri en el mercat o en l'explicació del comportament de diferents funcions econòmiques, com pot ser la funció de demanda. És així com vaig descobrir que la Teoria de Jocs era una branca del coneixement que relacionava molt bé les dues matèries.

Ha sigut interessant veure la connexió que existeix entre la Teoria de Jocs i problemes que poden sorgir a la vida real. En el model, s'estudia un problema molt comú que es pot solucionar aplicant arguments concrets de la teoria de Jocs i és sorprenent ja que s'obtenen resultats molt específics.

Les principals dificultats amb les que m'he trobat durant la realització del treball, han estat entendre com els autors de varis teoremes utilitzats gestionen les hipòtesis en les quals treballen i traslladar la idea intuïtiva a les corresponents justificacions analítiques i detallades. Sobretot, el que més m'ha preocupat és poder transmetre amb claredat la idea del model incloent tots els detalls més tècnics. Les eines que he utilitzat han estat, bàsicament, els tres articles principals mencionats al llarg del treball (Veure [5], [3] i [1]), aquests han sigut un simple esquelet ja que a l'utilitzar una interpretació diferent de les variables del model, aquest s'havia de reescriure i reinterpretar.

Es tracta d'un tema molt extens, nosaltres ens hem centrat en l'equilibri en la competència bidimensional, però hi ha moltes altres vessants interessants a estudiar derivades del model, com per exemple ens podríem preguntar si es pot afirmar l'existència d'equilibri global o seria interessant atacar el problema d'existència de l'equilibri sense fer ús dels teoremes generals, ja que a vegades no queda suficientment clara l'aplicació. En concret, també hi poden haver molts aspectes derivats del treball, com per exemple què passaria si li donéssim el mateix pes a totes les característiques, entre d'altres. L'elaboració d'aquest treball m'ha ajudat a comprendre millor el llenguatge entre la modelització econòmica i la matemàtica.

Gràcies al desenvolupament d'aquest treball he descobert que la forma de pensar i comportar-se de la societat està més a prop de les Matemàtiques del que podria semblar en un primer moment.

Bibliografia

[1] A. Irmen i J.-F. Thisse, *Competition in Multi-characteristics Spaces: Hotelling Was Almost Right*, CEPR Discussion Paper N^o 1446 (1998).

[2] A. Caplin and B. Nalebuff, *Agregation and Imperfect Competition: On the Existence of Equilibrium*, Econometrica **59** (1991), 25-59.

[3] C.d'Aspremont, J.J. Gabszewicz i J.-F. Thisse *On Hotelling's "Stability in Competition"*, Econometrica **47** (1979), 1145-1150.

[4] G.A.Jehle, P.J. Reny, *Advanced Microeconomic theory*, Finantial Times Prentice Hall (2011).

[5] H.Hotelling, *Stability in Competition*, The Economic Journal **39** (1929), 41-57.

[6] J. Watson, *An introduction to Game Theory*, W.W.Norton Company (2008).

[7] M.J. Osborne, *An introduction to Game Theory*, Oxford University Press (2004).

[8] J.F. Nash, *Equilibrium points in n-person games*, National Academy of Sciences **36** (1950), 48-49.

[9] T. Tabuchi, *Two-stage two-dimensional spatial competition between two firms*, Regional Science and Urban Economics **24** (1994), 207-227.

[10] X. Martinez-Giralt, *Organització industrial: Comportament estratègic i competència*, Universitat Autònoma de Barcelona (2006).

Annex

Detalls del càlcul dels preus d'equilibri

Diferenciem les funcions de benefici:

$$\frac{\partial \pi_A}{\partial p_A} = \frac{p_B}{2c} - \frac{2p_A}{2c} + \frac{a+b}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{p_A}{c} = \frac{p_B}{2c} + \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow p_A = \frac{p_B}{2} + \frac{c(a+b)}{2}$$

$$\frac{\partial \pi_B}{\partial p_B} = 1 - \frac{2p_B}{2c} + \frac{p_A}{2c} - \frac{a+b}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{p_B}{c} = 1 + \frac{p_A}{2c} - \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow p_B = c + \frac{p_A}{2} - \frac{c(a+b)}{2}$$

Resolem el sistema lineal resultant:

$$p_A = \frac{1}{2}(p_B + c(a+b))$$

$$p_B = c + \frac{p_A}{2} - \frac{c(a+b)}{2}$$

$$p_B = c + \frac{1}{2}(\frac{p_B}{2} + \frac{c(a+b)}{2}) - \frac{c(a+b)}{2} \Leftrightarrow p_B - \frac{p_B}{4} = c(1 - \frac{a+b}{4}) \Leftrightarrow$$

$$\frac{3p_B}{4} = c - \frac{c(a+b)}{4} \Leftrightarrow p_B = \frac{c}{3}(4-a-b)$$

$$p_A = \frac{c}{6}(4-a-b) + \frac{c}{2}(a+b) \Leftrightarrow p_A = \frac{c}{3}(2+a+b)$$

Detalls dels càlculs de la diferenciació respecte *a* i *b*

$$\frac{\partial \pi_A}{\partial a} = \frac{1}{2c}(\frac{c^2}{3^2}(4-a-b) - \frac{c^2}{3^2}(2+a+b)) - \frac{1}{2c}\frac{2c}{3}(2+a+b)\frac{c}{3} + \frac{c}{6}(a+b+2+a+b) =$$

$$= \frac{c}{9}(1-a-b) - \frac{c}{9}(2+a+b) + \frac{c}{3}(1+a+b) = \frac{c}{3}(\frac{2}{3} + \frac{a}{3} + \frac{b}{3}) = \frac{c}{9}(2+a+b)$$

$$\frac{\partial \pi_B}{\partial b} = \frac{-c}{3} - \frac{1}{2c}\frac{2c}{3}(4-a-b)\frac{-c}{3} + \frac{c}{9}(1-a-b) - \frac{c}{6}(-a-b+4-a-b) = \frac{c}{3}(\frac{-4}{3} + \frac{a}{3} + \frac{b}{3}) = \frac{c}{9}(-4+a+b)$$

Detalls de la derivació i la solució del sistema lineal en el cas quadràtic

$$\frac{\partial \pi_A}{\partial p_A} = \frac{p_B}{2c(b-a)} - \frac{p_A}{c(b-a)} + \frac{b+a}{2} = 0 \Leftrightarrow p_A = \frac{p_B}{2} + \frac{c}{2}(b^2-a^2)$$

$$\frac{\partial \pi_B}{\partial p_B} = 1 + \frac{p_A}{2c(b-a)} - \frac{p_B}{c(b-a)} - \frac{b+a}{2} = 0 \Leftrightarrow p_B = c(b-a) + \frac{p_A}{2} - \frac{c}{2}(b^2-a^2)$$

$$p_A = \frac{p_B}{2} + \frac{c}{2}(b^2-a^2)$$
$$p_B = c(b-a) + \frac{p_A}{2} - \frac{c}{2}(b^2-a^2)$$

$$p_B = c(b-a) + \frac{p_B}{4} + \frac{c}{4}(b^2-a^2) - \frac{c}{2}(b^2-a^2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{3p_B}{4} = c(b-a) - \frac{c}{4}(b^2-a^2) \Leftrightarrow p_B = \frac{c}{3}(b-a)[4-a-b]$$
$$p_A = \frac{c}{6}(b-a)[4-a-b] + \frac{c}{2}(b-a)(b+a) \Leftrightarrow p_A = \frac{c}{3}(b-a)[2+a+b]$$