UNIVERSITAT DE BARCELONA
FACULTAT DE MATEMATIQUES

# RADICAL D'UN TREILLI RESIDUE*

by

JOSEP PLA I CARRERA
CARLES RAFELS I PALLAROLA



PRE–PRINT Nº 41

MARÇ-1986

RADICAL D'UN TREILLI RESIDUE*

Josep Pla i Carrera

Carles Rafels i Pallarola

ABSTARCT

*We present some relations between the spectre (maximal) of a residuated lattice and the residuated lattice of its regulars elements.*

*We note the characteritzation found for the radical of a residuated lattice via the radical of the residuated lattice of the regulars elements.*

*Finally, this last result is applied in the study of the simplicity and semi-simplicity of a residuated lattice.*

## 0. Introduction.

L'objectif principal de cet article c'est de caractériser le radical d'un treilli residué par l'usage du radical du treilli resudué des éléments réguliers du treilli.

Il faut deux marches pour atteindre ce but:

1. démontrer l'existence d'un epimorphisme réticulaire entre le spectre d'un treilli residué et le spectre du treilli residué de ses éléments réguliers (&1);
2. démontrer l'existence d'une bijection entre les respectifs spectres maximeaux (&2).

La bijection établie en &2 nous permetra de demontrer que le radical d'un t.r. c'est l'ensemble des éléments tels que leur double negation ést un élément du radical du t.r. des éléments réguliers. Ce resultat est d'intérêt parce qu'il transporte le calcul des éléments du radical d'un t.r. au connaissance des éléments du radical d'un t.r. oû la negation est une involution et, en plus, il satisfait les lois de de Morgan.



* Cet article a été accepté et lu dans le COLLOQUE DE LOGIQUE 85, REUNION EUROPÉENNE de l'Associattion for Symbolic Logic. Paris 1985.

En conséquence nous pouvons faire une étude de la semplicité et de la semi-simplicité d'un t.r.. En particulier, nous trouvons une caracterization par la quelle le radical d'un t.r. est le filtre implicatif des éléments denses, resultat d'una claire interpretation si le t.r. inicial est une algèbre de Heyting.

Cet article est la continuation de [6] que, avec [5], [8] et [7], nous donne les propriétés nécessaires pour suivre commodement notre exposer.

Il faut reconnaitre l'inspiration duea l'article [3] , oú NEWITZ travaille la meme sorte de qüestions avec les inf-treillis residués.

## 1. Spectre d'un treilli residué.

Soit $\langle A,\star,\rightarrow,\wedge,\vee,0,1\rangle$ un treilli residué (cf. [3], p.2). Definissons une application

$$\phi_{\neg\neg} : A \longrightarrow A, \qquad x \longmapsto \phi_{\neg\neg}(x) = \neg\neg x = (x \rightarrow 0) \rightarrow 0.$$

Les éléments fixes de $\phi_{\neg\neg}$ s'appellent <u>éléments réguliers</u> et Rg (A) est l'ensemble des éléments réguliers de A. Dans [6] on demontre que $\langle Rg(A), ., \rightarrow, \cap, +, 0, 1\rangle$ , oú $x.y = \neg\neg(x\star y)$ et $x+y = \neg\neg(x\vee y)$, a une structure de treilli residué que nous appelerons <u>treilli residué des éléments réguliers</u>. Les structures

$Spec(A) = \langle \mathcal{D}(A), \cap, \vee_A, \{1\}, A\rangle$ et

$Spec(Rg(A)) = \langle \mathcal{D}(Rg(A)), \cap, \vee_{Rg(A)}, \{1\}, Rg(A)\rangle$

representent les treillis bornés formés par les filtres implicatifs des respectifs treillis residués i nous les appelerons <u>spectres</u>.

En plus, on á $D_A = \phi_{\neg\neg}^{-1}(\{1\}) \in \mathcal{D}(A)$ que appelerons le <u>filtre implicatif des éléments denses</u>.

Soit $X \subseteq A$; désignons par $D_A(X)$ le filtre implicatif engendré par X en A (et aussi $D_{Rg(A)}(Y)$, oú $Y \subseteq Rg(A)$.)

<u>1.1. Proposition</u>. Si $D \in \mathcal{D}(A)$, alors $D \cap Rg(A) \in \mathcal{D}(Rg(A))$. ::

<u>1.2. Proposition</u>. Soit $X \subseteq A$ tel que $\phi_{\neg\neg}(X) \subseteq X$. Alors:

$$D_{Rg(A)}(X \cap Rg(A)) = D_A(X) \cap Rg(A).$$

Démonstration: nous pouvons supposer que $X \neq \emptyset$ parce que, pour $X=\emptyset$, le théoreme est trivial.

Si $y \in D_{Rg(A)}(X \cap Rg(A))$ par le théoreme de la deduction complete (tdc) (cf. [5], prop.6,p.11) existent $x_1,\dots,x_n \in X \cap Rg(A)$, $k < \omega$, et $n_1,\dots,n_k < \omega$ tels que

$$x_1^{\lceil n_1 \rceil} . \dots . x_k^{\lceil n_k \rceil} \leq y,$$

oú $x_i^{\lceil n_i \rceil} = x_i . \overset{n_i}{\dots} . x_i$ [$i=1,\dots,k$] et, en plus, $y \in Rg(A)$. Alors on a facilement

$$x_1^{n_1} * \dots * x_k^{n_k} \leq x_1^{\lceil n_1 \rceil} . \dots . x_k^{\lceil n_k \rceil} \leq y,$$

oú $x_i^{n_i} = x_i * \overset{n_i}{\dots} * x_i$ $(i=1,\dots,k)$; d'oú, par le tdc, $y \in D_A(X)$ et alors

$$y \in D_A(X) \cap Rg(A).$$

Soit $y \in D_A(X) \cap Rg(A)$. Per le tdc, on connait l'existence de $x_1,\dots,x_k \in X$, $n_1,\dots,n_k$, $k < \omega$ avec

$$x_1^{n_1} * \dots * x_k^{n_k} \leq y \quad \text{et} \quad y \in Rg(A);$$

alors:

$$\neg\neg(x_1^{n_1} * \dots * x_k^{n_k}) \leq \neg\neg y = y$$

ou bien:

$$\neg\neg((\neg\neg x_1)^{n_1} * \dots * (\neg\neg x_k)^{n_k}) \leq y.$$

En plus, comme $x_1,\dots,x_k \in X$ et $\phi_{\neg\neg}(X) \subseteq X$ nous aurons: $\neg\neg x_1,\dots,\neg\neg x_k \in X \cap Rg(A)$; de cela. nous deduissons:

$$(\neg\neg x_1)^{\lceil n_1 \rceil} * \dots * (\neg\neg x_k)^{\lceil n_k \rceil} \leq \neg\neg((\neg\neg x_1)^{n_1} * \dots * (\neg\neg x_k)^{n_k}) \leq y$$

et par le tdc:

$$y \in D_{Rg(A)}(X \cap Rg(A)).$$ ::

1.3. Corol.laire. Si $X \subseteq Rg(A)$, alors $D_{Rg(A)}(X) = D_A(X) \cap Rg(A)$. ::

1.4. Corol.laire. Si $D \in \mathcal{D}(Rg(A))$, on a: $D = D_A(D) \cap Rg(A)$. ::

Les resultats donnés dessus nous faciliterons de voir que l'application

$$\Theta : \langle \mathcal{D}(A), \cap, \vee_A, \{1\}, A \rangle \longrightarrow \langle \mathcal{D}(Rg(A)), \cap, \vee_{Rg(A)}, \{1\}, Rg(A) \rangle$$

definie par: $\Theta(D) = D \cap Rg(A)$ est un epimorphisme reticulaire.

**1.5. Théorème.** L'application $\Theta$ est un epimorphisme réticulaire.

Démonstration: Par 1.1 et 1.3 l'application $\Theta$ est bien definie et est une application 'sur'. C'est facile de voir que $\Theta(\{1\}) = \{1\}$, $\Theta(A) = Rg(A)$ et $\Theta$ est morphisme de l'intersection de filtres implicatifs. Manque, donc, de voir que elle est morphisme de l'operation de suprem; c'est-à-dire:

$$\Theta(D_1 \vee_A D_2) = \Theta(D_1) \vee_{Rg(A)} \Theta(D_2).$$

Soient $D_1, D_2 \in \mathcal{D}(A)$. Alors $\phi_{\neg\neg}(D_1 \cup D_2) \subseteq D_1 \cup D_2$ et, par 1.2 avec $X = D_1 \cup D_2$, nous avons:

$$\Theta(D_1 \vee_A D_2) = (D_1 \vee_A D_2) \cap Rg(A) = D_A(D_1 \cup D_2) \cap Rg(A) \underset{(1.2)}{=}$$
$$= D_{Rg(A)}((D_1 \cup D_2) \cap Rg(A)) = D_{Rg(A)}((D_1 \cap Rg(A)) \cup (D_2 \cap Rg(A)) =$$
$$= D_{Rg(A)}(D_1 \cap Rg(A)) \vee_{Rg(A)} (D_{Rg(A)}(D_2 \cap Rg(A)) =$$
$$= (D_A(D_1) \cap Rg(A)) \vee_{Rg(A)} (D_A(D_2) \cap Rg(A)) = \Theta(D_1) \vee_{Rg(A)} \Theta(D_2). \qquad ::$$

**1.6. Corol.laire.** i) $\operatorname{Ker} \Theta = \{ D \in \mathcal{D}(A) : D \subseteq D_A \}$;
ii) $\mathcal{D}(A)/_{\operatorname{Ker} \Theta} \simeq \mathcal{D}(Rg(A))$.

Seulement il faut noter que $D \cap Rg(A) = \{1\}$ si et seulement si $D \subseteq D_A$, oú $D_A$ est le systeme deductif des éléments denses. ::

**1.7. Théorème.** Pour tout $D^i \in \mathcal{D}_{Rg}(A)$ on a:

$$\Theta^{-1}(\{D^i\}) = [D_A(D^i), \phi_{\neg\neg}^{-1}(D^i)] \subseteq \mathcal{D}(A).$$

Démonstration: il est immédiat que $\phi_{\neg\neg}^{-1}(D^i)$ appartienne à $\mathcal{D}(A)$ parce que $\phi_{\neg\neg}$ est un morphisme d'ordre et de l'operation produit. Si nous faisons $X = D^i$ en 1.2., nous obtenons que $D_A(D^i) \in \Theta^{-1}(\{D^i\})$ et, finalement, que

$$\phi_{\neg\neg}^{-1}(D^i) \in \Theta^{-1}(\{D^i\}).$$

Soit maintenant, donc, un $D \in \mathcal{D}(A)$ tel que $D \cap Rg(A) = D^i$ et voyons que $D \in [D_A(D^i), \phi_{\neg\neg}^{-1}(D^i)]$:

- si $t \in D$, alors $\neg\neg t \in D \cap Rg(A) = D^i$; d'oú: $t \in \phi_{\neg\neg}^{-1}(D^i)$;
- si $t \in D_A(D^i)$, par le tdc, nous savons qu'il existent $x_1, \ldots, x_k \in D^i$ et $n_1, \ldots, n_k, k < \omega$ tels que

$$x_1^{n_1} * \cdots * x_k^{n_k} \leq t.$$

Mais, comme que $x_j \in D^i = D \cap Rg(A)$ pour tout $j \in \{1, \ldots, k\}$, $x_1^{n_1} * \cdots * x_k^{n_k} \in D$

et $t \in D$.

De i) et ii) nous obtenons que $\Theta^{-1}(\{D^i\}) \subseteq [D_A(D^i), \phi_{\neg\neg}^{-1}(D^i)]$.

L'autre inclusion est trivial. ::

1.8. Proposition. Pour tout $X \subseteq Rg(A)$ nous avons: $D_A(D_{Rg(A)}(X)) = D_A(X)$. ::

## 2. Spectre maximal et radical.

Nous designerons par Spec Max (A) ou par Spec Max (Rg(A)) l'ensemble de tous les filtres implicatifs réguliers maximeaux des reticles respectifs. Par Rad (A) et Rad (Rg(A)) les respectifs radicaux, c'est-à-dire, l'intersection de tous les filtres implicatifs maximeaux respectifs.

2.1. Proposition. 1. $\Theta(D_i) = D_i \cap Rg(A) \in$ Spec Max (Rg(A)) pour tout $D_i \in$ Spec Max (A);

2. $\phi_{\neg\neg}^{-1}(D^i) \in$ Spec Max (A) pour tout $D^i \in$ Spec Max (Rg(A)).

Démonstration: 1. Soit $D_i \in$ Spec Max (A) et supposons l'existence d'un $D \in \mathcal{D}(Rg(A))$ tel que $\Theta(D_i) \subsetneq D$; alors il existe un $x \in D$ tel que $x \notin \Theta(D_i)$. Mais, comme que $x \in Rg(A)$, nous savons que $x \notin D_i$. Mais $D_i$ est un filtre implicatif maximal de A et alors (cf [5]) il existe un $n < \omega$ tel que $\neg x^n = x^n \to 0 \in D_i$; de plus, on a que $x^n \to 0 \in Rg(A)$; d'oû nous obtenons que

$$x^n \to 0 \in \Theta(D_i) \subsetneq D,$$

et alors $x^n \to 0 \in D$. Par modus ponens nous avons que $0 \in D$. De tout cela en resultera que, si $D_i \in$ Spec Max (A), $\Theta(D_i) \in$ Spec Max (Rg(A)).

2. Soit $D \in \mathcal{D}(A)$ tel que $\phi_{\neg\neg}^{-1}(D^i) \subsetneq D$, oû $D^i \in$ Spec Max (Rg(A)). Alors nous avons:

$$D^i = \phi_{\neg\neg}^{-1}(D^i) \cap Rg(A) \subseteq D \cap Rg(A),$$

d'oû, par la maximalité du filtre implicatif $D^i$, nous obtenons:

$$D \cap Rg(A) = D^i \quad \text{ou bien} \quad D \cap Rg(A) = Rg(A).$$

La derniêre egalité nous conduira vers $D = A$, parce que $0 \in D$; la premiêre, nous dira que $D \in \Theta^{-1}(\{D^i\})$ et par le th.1.7 nous obtiendrons que $D = \phi_{\neg\neg}^{-1}(D_i)$. De tout cela il en resultera que, si $D^i \in$ Spec Max (Rg(A)), $\phi_{\neg\neg}^{-1}(D^i) \in$ Spec Max (A). ::

2.2. Théoreme. L'application $\Theta$: Spec Max (A) $\longrightarrow$ Spec Max (Rg(A)),

$$D \longmapsto \Theta(D) = D \cap Rg(A)$$

est bijective , oû $\Theta^{-1} = \phi_{11}^{-1}|_{\text{Spec Max (Rg(A))}}$.

Démonstration: Il faut suelement bien applier la proposition 2.1. pour voir que les anterieurs applications sont bien definies et que leurs compositions nous donnent les applications identitées. ::

2.3. Corol.laire. Les ensembles Spec Max (A) et Spec Max (Rg(A)) ont le même cardinal.

2.4. Corol.laire. Rad (A) $\cap$ Rg(A) = Rad (Rg(A)).

Démonstration: Rad (Rg(A)) = $\bigcap \{D^i : D^i \in$ Spec Max (Rg(A))$\}$ =

= $\bigcap \{D_i \cap Rg(A) : D_i \in$ Spec Max (A)$\}$ = Rad (A) $\cap$ Rg(A). ::

2.5. Corol.laire. Rad (A) = $\phi_{11}^{-1}$(Rad (Rg(A)).

Démonstration: Rad (A) = $\bigcap \{D_i : D_i \in$ Spec Max (A)$\}$ =

= $\bigcap \{\phi_{11}^{-1}(D^i) : D^i \in$ Spec Max (Rg(A))$\}$ = $\phi_{11}^{-1}$(Rad (Rg(A))). ::

2.6. Corol.laire. Rad (Rg(A)) = $\phi_{11}$(Rad (A)).

Démonstration: Il faut seulement le corol.laire anterieur et le fait que $\phi_{11}$ est sur. ::

3. Semplicité et semi-simplicité d'un treilli residué.

Nous applierons maintenant les resultats anterieurs pour donner certaines caracterizations de la semplicité et de la semi-simplicité des treillis residués A et Rg(A).

3.1. Proposition. Sont equvalents:

1. $\langle A, *, \rightarrow, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ est un treilli residué simple (c'est-à-dire: avec duex congruences seulement);
2. $\langle Rg(A), ., \rightarrow, \cap, +, o, 1 \rangle$ est un treilli residué simple et les éléments denses de A se reduissent a l'unité (c'est-a-dire: $D_A = \{1\}$. ).

Démonstration: C'est une conséqüence immediate des resultats anterieurs, si on observe que le filtre implicatif des éléments denses est contenu toujours dans le radical du reticle A. ::

La condition $D_A = \{1\}$ est indépendente de la condition de simplicité du treilli $\langle Rg(A), \cdot, \rightarrow, \wedge, +, 0, 1 \rangle$, comme nous montre l'exemple suivant:

$$\begin{array}{c} 1 \\ | \\ a \\ | \\ b \\ | \\ 0 \end{array}$$

| $\rightarrow$ | 1 | a | b | 0 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | a | b | 0 |
| a | 1 | 1 | a | 0 |
| b | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

| * | 1 | a | b | 0 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | a | b | 0 |
| a | a | b | b | 0 |
| b | b | b | b | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Le treilli $Rg(A) = \{0,1\}$ et pour tant est un t.r. simple, mais $D_A = [b,1]$.

On a une équivalence semblable por la semi-simplicité:

<u>3.2.</u> <u>Proposition.</u> Sont equivalents:

1. $\langle A, *, \rightarrow, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ est un treilli residué semi-simple (c'est-a-dire: Rad $(A) = \{1\}$);
2. $\langle Rg(A), \cdot, \rightarrow, \cap, +, 0, 1 \rangle$ est un treilli residué semi-simple et le filtre implicatif des éléments denses de A se reduisse a l'élément unité, $D_A = \{1\}$. ::

<u>3.3.</u> <u>Proposition.</u> Ils sont equivalents:

1. $\langle Rg(A), \cdot, \rightarrow, \cap, +, 0, 1 \rangle$ est un t.r. semi-simple;
2. Rad $(A) = D_A$. ::

De la proposition 3.3 nous n'obtenons un resultat assez connu de les algèbres de Heyting:

<u>3.4.</u> <u>Corol.laire.</u> Si $\langle A, *, \rightarrow, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ est un algèbre de Heyting, alors Rad $(A) = D_A$. ::

<u>3.5.</u> <u>Corol.laire.</u> Ils sont equivalents:

1. $\langle Rg(A), \cdot, \rightarrow, \cap, +, 0, 1 \rangle$ est un t.r. simple;
2. Spec Max $(A) = \{D_A\}$. ::

## Références


1 BLYTH, T.S. et JANOWITZ, M.F.: "Residuation theory". Inter. Series Monographs in pure in applied Math., vol. 102. Pergamon Press (1972).

2 FONT, J.M, RODRÍGUEZ, A.J.: "Notas sobre el significado lógico de ciertas estructuras residuales elementales" Pub. Mat. U.A.B., 20 (1980), pp. 83-86.

3 NEMITZ, W.C.: "Implicative semi-lattices". T.A.M.S., 117, 1965, pp. 128-142.

4 PLA, J.: "Alguns aspectes actuals de lògica algebraica" P.U.A.B., 12, 1979.

5 RAFELS, C. : "Estructures lògic-algebraiques d'ideals d'un anell abelià unitari". Tesi doctoral 1985. Universitat de Barcelona.

6 RAFELS, C.: "Elements regulars d'un reticle residuat". Actes IV Congr. de Logica catalana. Barcelona 1985.

7 WARD, M et DILWORTH, R.P.: "Residuated lattices" T.A.M.S., 45, 1939, pp. 335-354.

8 ZLATŎS, P.: "Two levelled logic and model theory". Col.loquia Math. Soc. Jànos Bolyai, 1979, pp. 825-879.



Josep Pla i Carrera
Dpt. D'Estadística Matemàtica,
Universitat de Barcelona.
Gran Via de les Corts Catalanes,585.
Barcelona 08007, SPAIN.

Carles Rafels i Pallarola
Dpt. d'Assegurances i Matemàtiques,
Universitat de Barcelona.
Avda. Diagonal, 684.
Barcelona 08028, SPAIN.

publicacions edicions universitat de barcelona
Dipòsit Legal B.: 9.887-1986
BARCELONA-1986