UNIVERSITAT DE BARCELONA

SOBRE UNA CLASE DE SISTEMAS HAMILTONIANOS INTEGRABLES EN EL SENTIDO DE JACOBI

by

Rafael Ramírez and *Natalia Sadovskaia*

AMS Subject Classification: 70D99, 70F25, 70K40.

Mathematics Preprint Series No. 81
June 1990

SOBRE UNA CLASE DE SISTEMAS HAMILTONIANOS INTEGRABLES EN EL SENTIDO DE JACOBI

Rafael Ramírez,
Departamento de Matemática Aplicada y Análisis, Universidad de Barcelona.
Natalia Sadovskaia,
Departamento de Matemática Aplicada I, Universidad Politécnica de Cataluña.

Se estudia el sistema hamiltoniano que tiene como invariante la función

$$F = |\text{grad} f|^2 |p|^2 - (\text{grad} f \cdot p) - 2\theta(x).$$

Se analiza la integrabilidad de los sistemas hamiltonianos con H:

1) $H = \sum_k \frac{p_k^2}{2} - 1/2 \, \frac{\psi(f)}{\sum \beta_k^2 x_k^2}$,

en la subvariedad

$$\{f = \sum \beta_k x_k^2 = 1\}.$$

2) $H = \sum_k \frac{1}{2}(\dot{x}_k^2 - \dot{y}_k^2) + e^{x_{k+1} - x_n} \cos(y_{k+1} - y_k)$.

1. Introducción. Sea dado el campo vectorial hamiltoniano Z_H que genera las ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{x}^k = \dfrac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k = -\partial_k H \, , \ k = \overline{1, N} \, , \end{cases} \tag{1.1}$$

donde $H = 1/2 \, G^{-1}(p,p) - U(x) \equiv 1/2|p|^2 - U(x)$, las cuales pueden representarse de la forma

$$\nabla_v v = \text{grad} U \, , \tag{1.2}$$

donde $v \in \chi(X)$ es el campo vectorial de velocidades, $\chi(X)$ es el álgebra de Lie de los campos vectoriales en la variedad diferenciable X (espacio de configuración), ∇ es la aplicación (conexión riemanniana):

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(X) \times \chi(X) &\to \chi(X)\,, \\ (W, V) \quad &\longrightarrow \quad \nabla_W V\,, \end{aligned}$$

que es $\mathbb{R}$ lineal con respecto a V y $C^\infty(X)$ con respecto a W y además cumple que

$$\begin{cases} \nabla_W G(V_1, V_2) = 0 \\ \nabla_W V_1 - \nabla_{V_1} W = [W, V_1] \end{cases} \qquad \forall\, W, V_1, V_2 \in \chi(X),$$

nos interesa primeramente establecer las condiciones bajo las cuáles la función $F \in C^\infty(T(X))$:

$$F = G(\xi,\xi)G(v,v) - [G(\xi,v)]^2 - 2\theta(x) \equiv |\xi|^2|v|^2 - (\xi \cdot v)^2 - 2\theta(X)\,,$$

es invariante a lo largo de las soluciones de (1.2).

Aplicando los resultados expuestos en [1], obtenemos que

$$\nabla_k g_{nm} + \nabla_n g_{mk} + \nabla_m g_{kn} = 0\,, \tag{1.3}$$

$$\partial_k \theta - |\xi|^2 \partial_k U + G(\xi, \mathrm{grad} U)\xi_k = 0 \qquad (1.4),$$

donde $g_{nm} = |\xi|^2 G_{nm} - \xi_n \xi_m$, $\xi_n = \sum_m G_{nm}\xi^m$, estas igualdades se obtinen de la relación,

$$\dot{F} = \nabla_v g(v,v) - 2\big[v(\theta) - g(v, \mathrm{grad} U)\big] = 0 \qquad (1.5),$$

que se debe cumplir para cualquier v.

Considerando que (1.5) se puede representar como sigue

$$\begin{cases} \dot{F} = \dot{\psi} - \big[\nabla_v \xi(v) + \xi(\mathrm{grad} U\big]\xi(v), \\ \psi = |\xi|^2(U + h) - \theta,\ \dot{h} = 0\,, \end{cases}$$

entonces se tiene la siguiente

Consecuencia 1.1. En la subvariedad $\{\xi(v) = 0\}$ la función F es integral primera del campo Z_H si y sólo si se cumple

$$\begin{cases} \theta = \|\xi\|^2(U + h) + \psi \\ \dot{\psi} = 0\,. \end{cases} \tag{1.6}$$

En [1] se estudiaron las ecuaciones (1.3), (1.4). Se demostró que se cumplen si y sólo si el espacio $V_N = (X, G)$ es equidistante es decir,

$$\begin{cases} \nabla_V \xi(W) = \phi G(V, W) \qquad \forall V, W \in \chi(X),\ \phi \in C^\infty(X) \\ \xi = df\,, \end{cases} \tag{1.7}$$

y las funciones U y θ son tales que

$$\begin{cases} \theta = |\mathrm{grad} f|^2 (U + h(f)) + \psi\,, \\ \mathrm{grad}\psi = \left\{\mathrm{grad}|^2 h'_f - 2(U + h(f))\phi\right\} \mathrm{grad} f \equiv \lambda \mathrm{grad} f\,, \\ \mathrm{grad} f(\theta) = 0\,,\ \dot{f} = 0\,. \end{cases} \tag{1.8}$$

En base a las igualdades

$$\begin{cases} \mathrm{grad}(|\mathrm{grad} f|^2) = 2\phi \mathrm{grad} f\,, \\ \Delta f \equiv \dfrac{\partial_k \left(G^{nk} \sqrt{|G|} \partial_k f\right)}{\sqrt{|G|}} = \phi \delta\,, \end{cases} \tag{1.9}$$

donde $|G| = \det G$, $\delta = \sum_{k,n} G^{kn} G_{kn}$, de (1.8) resulta que

$$\begin{cases} \theta = |\mathrm{grad} f|^2 \big(U + h(f)\big) + \psi(f) \\ \mathrm{grad} f(\theta) = 0\,, \end{cases} \tag{1.10}$$

donde $\psi(f) = \int \lambda(f) df$, $\dot{\psi} = 0$.

La función F puede representarse de varias maneras, en las que cabe destacar las siguientes

$$\begin{cases} F = \sum\limits_{k,j} M_{kj} M^{kj} - 2\theta(x) \\ M_{kj} = \xi_k p_j - \xi_j p_k,\ M^{kj} = \sum\limits_{n,m} G^{kn} G^{jm} M_{nm} \equiv G^{kn} G^{jm} M_{nm}\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} F = g(v, v) - 2\theta(x)\,, \\ g(v, v) = |\xi|^2 - [G(\xi, v)]^2\,. \end{cases}$$

Si se cumple (1.7) y ϕ es tal que

$$\begin{cases} \phi = \phi(f)\,, \\ \phi'(f) \neq 0\,, \end{cases}$$

entonces, considerando que

$$\begin{cases} \xi\big(R(V_1,V_2)W\big) = \phi'_f\Big(\xi(V_1)G(W,V_2) - \xi(V_2)G(W,V_1)\Big)\,, \\ R(V_1,V_2)W = \nabla_{V_1}\nabla_{V_2}W - \nabla_{V_2}\nabla_{V_1}W - \nabla_{[V_1,V_2]}W\,, \end{cases} \tag{1.11}$$

obtenemos

$$F = \frac{1}{\phi'_f}\xi\big(R(v,\mathrm{grad}f)v\big) - 2\theta(x)\,,\ \xi = df\,,$$

y finalmente si la función θ es tal que

$$2\theta = \sum \beta_k\alpha_k\,, \tag{1.12}$$

entonces se tiene la siguiente representación

$$F = \sum \beta_k F_k \qquad (1.13),$$

donde

$$\begin{cases} F_k = \alpha_k + \sum\limits_{j\neq k} \dfrac{M_{kj}M^{kj}}{\beta_x - \beta_j} \\ \sum \alpha_k = \sum F_k\,, \end{cases} \tag{1.14}$$

a $\beta_1,\ldots,\beta_N$ son ciertas funciones.

El objetivo del siguiente apartado es de estudiar la representación (1.13).

2. Sobre las funciones (1.14).

Nos interesará sólo el caso cuando $\xi_1,\ldots,\xi_N$ son tales que

$$\xi_k = \partial_k f\,.$$

Introduzcamos la matriz $\mathbb{F}$ con elementos (F^k_j) :

$$\begin{cases} F^k_j = \nu^k\nu_j + \sum\limits_{n\neq k}^{n\neq j} M^{kn}M_{jn}\,\dfrac{(\beta_k + \beta_j - 2\beta_n)}{(-\beta_n + \beta_k)(-\beta_n + \beta_j)}\,,\ k\neq j \\ F^k_k = \nu^k\cdot\nu_k + \sum\limits_{n\neq k} \dfrac{M^{kn}M_{kn}}{\beta_k - \beta_n}\,. \end{cases} \tag{2.1}$$

Vamos a estudiar estas funciones en el caso cuando el espacio $V_N = (X,G)$ es pseudoeuclidiano, es decir

$$G_{kk} = A_k(x^k),\ G_{kj} = 0,\ \phi = \phi_0\,,$$

por tanto [1]

$$f=\sum_k \int \sqrt{|A_k|}r_k\,dx_k,\; r_k=\phi_0\int\sqrt{|A_k|}dx_k+c_k \qquad (2.2).$$

Haciendo el cambio de coordenadas correspondiente se pueden las funciones F_k^k, escribir como sigue

$$F_k^k\equiv F_k=\alpha_k+\sum_{n\neq k}\frac{\left(\partial_k f p_n-\partial_n f p_k\right)^2}{\beta_k-\beta_n}. \qquad (2.3)$$

Teorema: Las funciones (2.3) son involutivas si se cumple que

$$\begin{cases}\{\alpha_k,\alpha_j\}=0 & (2.4),\\ \{\alpha_k,F_j\}+\{F_k,\alpha_j\}=0 & (2.5),\\ \sum\dfrac{M_{nk}M_{sk}M_{ns}\Big(\partial^2_{ss}f(\beta_k-\beta_n)+\partial^2_{kk}f\cdot(\beta_n-\beta_s)+\partial^2_{nn}F(\beta_s-\beta_k)\Big)}{(\beta_s-\beta_k)(\beta_n-\beta_s)(\beta_k-\beta_n)} & \end{cases}$$

(2.6).

La prueba se logra después de ciertos cálculos.

Evidentemente que (2.6) se cumple en particular si la función f es tal que

$$(\beta_k-\beta_n)\partial^2_{ss}f+(\beta_n-\beta_s)\partial^2_{kk}f+(\beta_s-\beta_k)\partial^2_{nn}f=0 \qquad (2.7).$$

Consecuencia 2.1. Las condiciones (2.4), (2.5) se cumplen

$$\begin{cases}\text{i)} & \partial_k\alpha_k=\partial_k f\,,\quad \dfrac{\partial\alpha_k}{\partial p_j}=0; \qquad k,j=\overline{1,N},\\ \text{ii)} & \dfrac{\partial\alpha_k}{\partial p_k}=p_k\,,\qquad \partial_j\alpha_k=0, \qquad k,j=\overline{1,N}.\end{cases} \qquad (2.9)$$

Después de ciertos cálculos, aplicando lo expuesto, se demuestra el siguiente

Teorema 2.1. Sean H, $F_1,\ldots,F_N,f$ tales que

$$\begin{cases}H=\sum\dfrac{p_k^2}{2}-1/2\,\dfrac{\psi(f)}{\sum\beta_k^2x_k^2}\,,\\ F_k=-2h(f)\beta_kx_k^2+\sum\limits_{k\neq n}\dfrac{\left(\beta_kx_kp_n-\beta_nx_np_k\right)^2}{\beta_k-\beta_n}\,,\\ f=\sum\beta_kx_k^2=1\,.\end{cases} \qquad (2.10)$$

Entonces se cumple que

$$\{H, F_k\} = 0\,,$$

$$\{F_k, F_j\} = 0\,,$$

$$\begin{cases} \sum F_k = -2h(f)\cdot f\,, \\ \sum F_k\beta_k = F\,. \end{cases}$$

Por consiguiente el campo vectorial Z_H es completamente integrable en la subvariedad

$$\{\sum \beta_k x_k^2 = 1\}\,.$$

3. Sobre la función F en los espacios riemannianos equidistantes.

En base a lo expuesto se deduce que la función U y la matriz G:

$$\begin{cases} U = -h(f) + \dfrac{\theta - \int \lambda(f)df}{|\mathrm{grad} f|^2} & (3.1), \\ |\mathrm{grad} f|^2 = 2\int \phi(f)df & (3.2) \\ (\nabla_v df)(W) = G(v,W)\phi(f)\,, \end{cases}$$

La función θ, como hemos notado, es solución de la ecuación

$$\mathrm{grad} f(\theta) = 0\,. \tag{3.3}$$

Daremos, previamente, algunos aspectos geométricos de los espacios equidistantes.

Considerando que se cumple (1.9), entonces la función Ω :

$$\begin{cases} \Omega = \displaystyle\int \frac{df}{|\mathrm{grad} f|^N} \\ \mathrm{grad}\Omega = \dfrac{\mathrm{grad} f}{|\mathrm{grad} f|^N}\,, \end{cases}$$

satisface la ecuación

$$\Delta\Omega = \frac{\partial_k\left(G^{kn}\sqrt{|G|}\partial_n\Omega\right)}{\sqrt{|G|}} = 0, \quad |G| = \det(G).$$

Si la función ϕ :

$$\phi = \frac{f^m}{2(m+1)}\,, \qquad m \neq -1$$

entonces en la subvariedad $\{\dot{f} = 0\}$ se tiene que

$$F = f^{m+1} H \,, \tag{3.3}$$

si en (1.10) se cumple que

$$\psi(f) + f^{(m+1)} h(f) = 0 \,.$$

En el caso particular cuando V_N es de curvatura constante, entonces

$$\phi = \frac{R}{N(N-1)} f + \text{const.} \tag{3.4}$$

El campo de curvatura en los espacios equidistantes satisface la ecuación

$$df\big(R(V_1, V_2)W\big) = d\phi(V_1) G(V_2, W) - d\phi(V_2) G(V_1, W) \,. \tag{3.5}$$

Analizaremos los siguientes casos:

i) $f = \sum x_k^2 \,, \quad \phi = 2,$

ii) $f = \sum \beta_k x_k^2 \,, \quad \phi = 2 \,,$

iii) $f = \sum \beta_k x_k \,, \quad \phi = 0 \,.$

Si suponer que $f = \sum x_k^2$, entonces de (3.1) - (3.3) se deduce que

$$G_{kk} = 1, \quad G_{kj} = 0; \quad k \neq j \,,$$

$$\begin{cases} \theta = \theta\Big(\dfrac{x_1}{x_N}, \dots, \dfrac{x_{N-1}}{x_N}\Big) \,, \\ U = \dfrac{\theta\Big(\frac{x_1}{x_N}, \dots, \frac{x_{N-1}}{x_N}\Big)}{2f} - \dfrac{\int \lambda(f) df}{2f} - h(f) \,. \end{cases} \tag{3.6}$$

La función F en tal caso se puede representar de la forma (1.12), en particular si se tiene que

$$\begin{cases} \alpha_k = x_k^2 \\ \beta_k = \dfrac{\beta_k^0}{\sum x_k^2} \,, \quad \theta = \dfrac{1}{2} \sum \dfrac{\beta_k^0 x_n^2}{f} \,, \end{cases}$$

entonces

$$\begin{cases} F_k = x_k^2 + \displaystyle\sum_{n \neq k} \frac{\big(x_k p_n - x_n p_k\big)^2}{\beta_k - \beta_n} \\ \sum \beta_k F_k = F \\ \sum F_k = f \,. \end{cases}$$

En base a lo expuesto más arriba se deduce que el sistema dado, conocido como de Neumann, es completamente integrable [2].

En el caso cuando $f = \sum \beta_k x_k^2$, $\phi = 2$, se deduce que

$$G_{kk} = \beta_k\,, \quad G_{kj} = 0\,, \quad k \neq j\,,$$

$$\begin{cases} \theta = \theta\left(\frac{x_1}{x_N}, \ldots, \frac{x_{N-1}}{x_N}\right), & |\mathrm{grad} f|^2 = 2f \\ U = \dfrac{\theta\left(\frac{x_1}{x_N}, \ldots, \frac{x_{N-1}}{x_n}\right)}{2f} - \dfrac{\int \lambda(f) df}{2f} - h(f)\,. \end{cases} \tag{2.7}$$

Las funciones (2.3) en este caso toman la forma

$$F_k = \beta_k x_k^2 + \sum \frac{1}{\beta_k \beta_n} \frac{\left(\partial_n f p_k - \partial_k f p_n\right)^2}{\beta_k - \beta_n}\,,$$

si la función θ es tal que

$$\theta = \frac{\sum \tau_k^0 \beta_k x_k^2}{\sum \beta_k x_k^2}\,, \quad \tau_k = \frac{\tau_k^0}{\sum \beta_k x_k^2}\,.$$

En base a lo expuesto se deduce la integrabilidad de este sistema, que llamaremos de Mak–Kin y Trubovich.

Esta situación se puede ilustrar en el caso simple, cuando $N = 3$. Supongamos que se tiene un punto que se mueve por la hoja superior de hyperboloide

$$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1,\ x_1 > 0\,,$$

con energía $2T = -\left(\dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2 - \dot{x}_3^2\right)$ y bajo la acción de fuerza con potencial

$$U = \frac{\varepsilon\left(x_2^2 - x_3^2\right)}{x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}\,.$$

En coordenadas oriesféricas

$$\begin{cases} x_1 = chr + q^2/2\,e^r \\ x_2 = shr - q^2/2e^r \\ x_3 = e^r q\,, \end{cases}$$

se tiene que

$$T = 1/2\left(\dot{r}^2 + e^{2r}\dot{q}^2\right), \quad U = \varepsilon shr\left(shr - q^2 e^r\right),$$

por tanto

$$H_\varepsilon = 1/2(p_r^2 + e^{2r}p_q^2) - \varepsilon sh\, r(shr - q^2 e^r)\,.$$

El campo Z_{H_ε} es completamente integrable, como se desprende de lo expuesto más arriba, como lo es también el campo Z_{H_0}, con H_0 :

$$H_0 = 1/2(p_r^2 + e^{-2r}p_q^2) = 1/2(p_r^2 + e^{-2r}\alpha^2)\,, \quad \alpha^2 = p_q^2 = \text{const.}$$

que se puede interpretar como el modelo de Tod no cerrado cuando $N = 2$ [4].

Supongamos que en (2.7) $\theta = 0$, entonces $U = U(f)$. Definamos las funciones (2.3) como sigue

$$F_k = p_k^2 + \sum \frac{\left(x_k p_j - x_j p_k\right)^2}{\beta_j - \beta_k}\,,$$

$$\begin{cases} \sum F_k = \sum p_k^2\,, \\ \sum \beta_k^{-1} F_k = \sum \beta_k^{-1} p_k^2 + F\,, \\ F = f \sum \beta_k^{-1} p_k^2 - 1/2\dot{f}^2\,, \\ f = \sum \beta_k^{-1} x_k^2 = 1\,. \end{cases}$$

Basándonos en lo expuesto se prueba la integrabilidad y en este caso, que es conocido como sistema de Jacobi [2].

Finalmente hacemos notar que si $U = \dfrac{\nu}{|\text{grad} f|}$ y el espacio V_N es equidistante con $\phi = \phi(f)$, entonces las ecuaciones (1.2) toman la forma

$$\nabla_v v = \frac{\phi(f)\nu}{|\text{grad} f|^{3/2}} \cdot \text{grad} f\,.$$

Como se demostró en [1], en tal caso se tiene que se cumplen las igualdades

$$\begin{aligned} &\nabla_v M(W,V) = 0 \qquad \forall W,V \in \chi(X) \\ &\nabla_v \gamma = 0\,, \end{aligned}$$

donde $M(W,V) = df(W)p(V) - df(V)p(W)$, $\gamma \in \chi(X)$ y tiene los siguientes componentes:

$$\gamma^k = G^{kn}\Big(M_{nj}\dot{x}^j - \nu\frac{\partial_n f}{|\text{grad} f|}\Big)\,,$$

$$\begin{cases} G\Big(\gamma + \dfrac{\nu\,\text{grad} f}{|\text{grad} f|}\,,\ \text{grad} f\Big) = F \\ G(\gamma,\gamma) = \nu^2 + HF\,. \end{cases}$$

En el caso particular cuando $\phi = 1$, $f = \sum x_k^2$ se obtiene el modelo de Kepler no perturbado con F :

$$F = (x\dot{y} - y\dot{x})^2 + (x\dot{z} - z\dot{x})^2 + (y\dot{z} - z\dot{y})^2 \ ,$$

y el campo γ coincide con el de Laplace–Runge–Lenz.

3. Estudio del caso cuando $f = \sum \beta_k x_k$, $\phi = 0$.

Como se desprende de (1.11) si $\phi = 0$ entonces el espacio V_N equidistante es pseudoeuclidiano, por tanto de (2.2) resulta que

$$f = \sum c_k \int \sqrt{|A_k|} dx^k, \quad |\mathrm{grad} f|^2 = \sum_k c_k^2 \ , \tag{3.1}$$

donde $c_1, \ldots, c_N$ son constantes arbitrarias. Por consiguiente, bajo tales restricciones, siempre podemos suponer que

$$\begin{cases} G_{kk} = \varepsilon_k, \ G_{kj} = 0 \, , \\ f = \sum \beta_k x_k, \ \beta_k \equiv c_k \ , \end{cases} \tag{3.2}$$

donde ε_k puede ser $+1$ ó -1

Consecuencia 3.1. En la subvariedad

$$\{f = \sum \beta_k x_k = 0\}$$

las soluciones de la ecuación

$$\sum \beta_k \partial_k \theta = 0$$

se pueden representar como sigue

$$\theta = \theta_1(r) + \theta_2\big(\beta_2 x_1 - \beta_1 x_2, \, \beta_3 x_2 - \beta_2 x_3, \ldots, \beta_1 x_N - \beta_N x_1\big) \tag{3.3}$$

La función F y el hamiltoniano H por lo tanto toman la forma

$$\begin{cases} F = \sum_k \left[\dfrac{d}{dt}(\beta_k x_{k+1} - \beta_{k+1} x_k) \right]^2 - \theta_2\big(\beta_2 x_1 - \beta_1 x_2, \ldots, \big) - \theta_1(r) \\ \dot{x}_{N+1} = x_1, \ \beta_{N+1} \equiv \beta_1 \\ H = \dfrac{1}{2} \sum \dfrac{p_k^2}{\varepsilon_k} - \dfrac{1}{\sum \beta_k^2} \Big[\theta_1(r) + \theta_2(\beta_2 x_1 - \beta_1 x_2, \ldots,) \Big] - U_0\big(\sum \beta_k x_k\big) \ , \end{cases} \tag{3.4}$$

Como casos particulares importantes cabe anotar los siguientes:

1) Sistema de Kepler no perturbado $(\theta_2 = 0\,,\ \theta_1 = \frac{\mu}{r})$

$$
\begin{aligned}
H &= 1/2\sum_k p_k^2 - \frac{\mu}{r}\,, \\
F &= \left[\frac{d}{dt}(\beta_1 y - \beta_2 x)\right]^2 + \left[\frac{d}{dt}(\beta_3 x - \beta_1 z)\right]^2 + \left[\frac{d}{dt}(\beta_2 z - \beta_3 y)\right]^2 - \frac{\mu}{r}\,,
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{cases}
\beta_1 = y\dot{z} - z\dot{y}\,, \\
\beta_2 = z\dot{x} - x\dot{z} \\
\beta_3 = \dot{y}x - \dot{x}y\,.
\end{cases}
$$

Se puede comprobar la igualdad

$$
\sum_{k=1}^{3}\left[\frac{d}{dt}(\beta_k x_{k+1} - \beta_{k+1}x_k)\right]^2 - \frac{\mu}{r} = \sum\left(x_k\dot{x}_{k+1} - x_{k+1}\dot{x}_k\right)^2,\ x_4 \equiv x_1\,,
$$

2) Cadena de Tod

$$
\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \sum_k \exp(x_k - x_{k+1}), \quad x_{N+1} = x_1\,.
$$

3) Sistema de Calodgero

$$
\begin{aligned}
\theta_1 &= 0, \\
\theta_2 &= a\sum\frac{1}{(x_k - x_{k+1})^2}\,, \quad x_{N+1} = x_1, \quad a = \text{const.}\,.
\end{aligned}
$$

4) Sistema de Moser–Calodgero [2]

$$
\begin{aligned}
\theta_1 &= 0 \\
\theta_2 &= \sum \mathfrak{P}(x_k - x_{k+1})\,,
\end{aligned}
$$

donde $\mathfrak{P}$–función de Weirstrass

5) El sistema analizado en particular en [2]

$$
\begin{cases}
\theta_1 = \dfrac{a^2}{e}r^2 \\
\theta_2 = b\sum\dfrac{1}{(x_k - x_{k+1})^2}\,,
\end{cases}
$$

6) La cadena de Tod no cerrada [3]

$$\begin{cases} \theta_1 = 0 \\ \theta_2 = \sum_{j=1}^{N-1} g_j^2 \exp 2(q_j - q_{j+1}) \ , \end{cases}$$

7) Otro sistema particular es el siguiente [1]

i) $$H = \sum \Big(\frac{p_k^2}{2\beta_k} - \frac{\beta_k\beta_{k+1}(\beta_{k+1} + \beta_k)}{(x_k - x_{k+1})^2} \Big) - (a \sum_j \beta_j) r^2, \quad a = \text{const.} \ ,$$

si $G_{kk} = \beta_k$, $G_{k_j} = 0$, $h = + \sum \beta_k \sum \beta_j \beta_{j+1}$,

ii) $$H = \sum \frac{p_k^2}{2} - \frac{\big(\beta_k \beta_{k+1}\big)^2}{\big(x_k - x_{k+1}\big)^2} - a^2 \big(\sum \beta_k\big)^2 r^2 \ ,$$

$$h = \sum \beta_k \sum \beta_j \beta_{j+1}, \quad G_{kk} = 1, \quad G_{kj} = 0 \ .$$

Como se puede observar la función

$$S = \sum \beta_k \beta_{k+1} \ell_n |x_k - x_{k+1}| + \sum \beta_k a r^2 - \sum \beta_k \sum \beta_{j+1} \beta_j t \ ,$$

es tal que

$$H\Big(x, \frac{\partial s}{\partial x}\Big) = \sum_n \beta_n \sum \beta_{j+1} \beta_j \ .$$

Finalmente, como caso particular de (3.4) se pueden incluir el sistema con H :

$$H_1 = \frac{1}{2} \sum \Big(\dot{x}_k^2 - \dot{y}_k^2 + 2e^{x_{k+1} - x_k} \cos(y_{k+1} - y_k) \Big) \ ,$$

o

$$H_2 = \frac{1}{2} \sum \Big(2\dot{x}_k \dot{y}_x + 2e^{x_{n+1} - x_n} \operatorname{sen}(y_{k+1} - y_k) \Big) \ ,$$

que estudiaremos a continuación.

4. Sobre la integrabilidad del sistema hamiltoniano con H_1 :

$$H_1 = \frac{1}{2} \sum \Big(\dot{x}_k^2 - \dot{y}_k^2 + 2e^{x_{k+1} - x_k} \cos(y_{k+1} - y_k) \Big) \qquad (4.1).$$

Previamente haremos algunas acotaciones relacionadas con la representación de Lax.

En el estudio y construcción de sistemas hamiltonianos completamente integrables juega un papel fundamental la representación de las ecuaciones de movimiento en la forma de Lax [5].

$$\frac{d}{dt}L = [L, A] \equiv LA - AL \qquad (4.2).$$

Para nuestros objetivos nos será de interés el caso cuando las matrices L y A :

$$\begin{cases} L = L_1 + i\,L_2, \quad i = \sqrt{-1}\,, \\ A = A_1 + i\,A_2\,. \end{cases} \qquad (4.3)$$

De (4.2) obtenemos que

$$\begin{cases} spL = sp(L_1) + i\,spL_2 = c_{11} + i\,c_{12}\,, \\ spL^2 = sp(L_1^2 - L_2^2) + i\,(2sp(L_1L_2 + L_2L_1) = c_{21} + i\,c_{22}\,; \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ sp(L^k) = spRe(L^k) + i\,sp(ImL^k) = c_{k1} + i\,c_{k2}\,. \end{cases} \qquad (4.4)$$

Como ilustración puede servir el sistema de Calodgero, para el cual se tiene que [2]

$$\begin{cases} L_1 = \operatorname{diag}(y_1, \ldots, y_n) \\ L_2 = (L_{2kj}), \end{cases} , \quad L_{2kj} = \begin{cases} \dfrac{1}{x_k - x_j} & \text{si} \quad k \neq j \\ 0 & k = j \end{cases}$$

Las relaciones (4.4) se escriben como sigue

$$\begin{cases} spL = spL_1 = \sum y_k = c_{11}\,, \\ spL^2 = \sum y_k^2 + 2\sum_k \dfrac{1}{(x_k - x_{k+1})^2} = H = c_{21}\,, \\ sp(L_1L_2 + L_2L_1) = 0\,, \\ \vdots \quad . \end{cases}$$

Pasaremos al estudio del caso cuando L_1, L_2, A_1, A_2 son tales que

$$L_1 = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 & \\ \alpha_1 & \gamma_2 & \alpha_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \gamma_3 & \alpha_3 & 0 & \ldots \end{pmatrix}, \; L_2 = \begin{pmatrix} \nu_1 & \beta_1 & 0 & 0 & \ldots & \\ \beta_1 & \nu_2 & \beta_2 & 0 & \ldots & \\ 0 & \beta_2 & \nu_3 & \beta_3 & 0 & \ldots \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 & 0 & \ldots & \\ -\alpha_1 & 0 & \alpha_2 & 0 & \ldots & \\ 0 & -\alpha_2 & 0 & \alpha_3 & 0 & \ldots \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & 0 & \ldots \\ -\beta_1 & 0 & \beta_2 & \\ 0 & -\beta_2 & 0 & \end{pmatrix},$$

por consiguiente

$$\begin{cases} sp(L_1) = \sum_j \gamma_j = c_{11},\ spL_2 = \sum \nu_j = c_{12}\ , \\ sp(L_1^2 - L_2^2) = \sum \left(\gamma_j^2 - \nu_j^2\right) + 2\sum \left(\alpha_j^2 - \beta_j^2\right) = H_1 = c_{21}\ , \\ sp(L_1L_2 + L_2L_1) = \sum 2\gamma_j\nu_j + 2\sum \beta_j\alpha_j = H_2 = c_{22}\ , \\ \vdots \quad . \end{cases} \tag{4.5}$$

De las ecuaciones (4.2) deducimos que

$$\begin{cases} 2\dot{\alpha}_n = \alpha_n(\gamma_{n+1} - \gamma_n) - \beta_n(\nu_{n+1} - \nu_n) \\ 2\dot{\beta}_n = \alpha_n(\nu_{n+1} - \nu_n) - \beta_n(\gamma_{n+1} - \gamma_n)\ , \end{cases} \tag{4.6}$$

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_n = \alpha_n^2 - \alpha_{n-1}^2 - (\beta_n^2 - \beta_{n-1}^2) \\ \dot{\nu}_n = 2\alpha_n\beta_n - 2\alpha_{n-1}\beta_{n-1}\ . \end{cases} \tag{4.7}$$

Teorema 4.1. El sistema hamiltoniano con H_1 dado por la fórmula (4.1) es completamente integrable.

Demostración. Las ecuaciones de movimiento del sistema dado en este caso son las siguientes

$$\begin{cases} \ddot{x}_k = e^{x_{k+1}-x_k}\cos(y_{k+1} - y_k) - e^{x_k - x_{k_1}}\cos(y_k - y_{k_1}) \\ \ddot{y}_k = -e^{x_{k+1}-x_k}\operatorname{sen}(y_{k+1} - y_k) + e^{x_k - x_{k-1}}\operatorname{sen}(y_k - y_{k-1})\ . \end{cases} \tag{4.8}$$

Supongamos que en (4.6), (4.7)

$$\alpha_n = e^{\frac{x_{k+1}-x_k}{2}}\cos\left(\frac{y_{k+1} - y_k}{2}\right), \quad \beta_n = e^{\frac{x_{k+1}-x_k}{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{y_{k+1} - y_k}{2}\right)\ ,$$

por tanto

$$\gamma_n = \dot{x}_n,\ \nu_n = \dot{y}_n\ .$$

Colocando estas expresiones en (4.7) obtenemos que

$$\begin{cases} \ddot{x}_n = e^{x_{k+1}-x_k}\left(\cos^2\left(\frac{y_{k+1}-y_k}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{y_{k+1}-y_k}{2}\right)\right) - e^{x_k - x_{k-1}}\left(\cos^2\left(\frac{y_k - y_{k-1}}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{y_k - y_{k-1}}{2}\right)\right) \\ \ddot{y}_n = 2e^{x_{k+1}-x_k}\cos\left(\frac{y_{k+1}-y_k}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{y_{k+1}-y_k}{2} - 2e^{x_k - x_{k-1}}\cos\left(\frac{y_k - y_{k-1}}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{y_k - y_{k+1}}{2}\right)\ , \end{cases}$$

que evidentemente coinciden con (4.8) con lo que se demuestra la afirmación.

Las ecuaciones (4.8) también describen el comportamiento del sistema hamiltoniano con $H_2 = \frac{1}{2}\sum\left(2\dot{x}_j\dot{y}_j + 2e^{x_{k+1}-x_k}\operatorname{sen}(y_{k+1}-y_k)\right)$.

Consecuencia 4.1. El sistema descrito coincide con el Tod en la subvariedad

$$\left\{y_1 = y_2 = \ldots = y_N = 0\right\} .$$

En forma análoga puede ser estudiado el sistema con H :

$$H = \sum_{k=1}^{N}\left[\left(\dot{x}_k^2 - \dot{y}_k^2\right) + \frac{(x_{k+1}-x_k)^2 - (y_{k+1}-y_k)^2}{\left((x_{k+1}-x_n)^2 + (y_{k+1}-y_k)^2\right)^2}\right] ,$$

que coincide con el de Calodgero en la subvariedad

$$\left\{y_1 = y_2 = \ldots = y_N = 0\right\}.$$

Introduzcamos las siguientes designaciones

$$Z_k = x_k + i\,y_k\,, \quad i = \sqrt{-1}\,,$$

$$\begin{cases} p_k = \dot{x}_k,\ q_k = \dot{y}_k \\ P_k = p_k + i\,q_k\,, \quad k = \overline{1,N}\,, \end{cases}$$

$$F(Z_1,\ldots,Z_N) = U\big(x_1,x_2,\ldots,x_N,y_1,\ldots,y_N\big) + i\,v\big(x_1,\ldots,x_N,y_1,\ldots,y_N\big)\ ,$$

$$\begin{cases} H = H_1 + i\,H_2 \\ H_1 = \sum\limits_k \left(p_k^2 - q_k^2\right) + U(x_1,\ldots,x_N,y_1,\ldots,y_N)\ , \\ H_2 = \sum\limits_k 2p_kq_k + v\big(x_1,\ldots,x_N,y_1,\ldots,y_N\big)\ , \end{cases}$$

Teorema: Sea F función holomorfa en $D \subset \mathbb{C}^N$, entonces las ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{q}_k = \dfrac{\partial v}{\partial x_k}\,, \\ \dot{p}_k = \dfrac{\partial v}{\partial y_k}\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{p}_k = \dfrac{\partial U}{\partial x_k} \\ \dot{q}_k = -\dfrac{\partial U}{\partial y_k}\,, \end{cases} \quad k = \overline{1,N}\,,$$

coinciden.

La prueba se deduce de las igualdades de Cauchy–Riemann [5]. Como casos particulares se pueden citar los siguientes

1) $$\begin{cases} F = \sum e^{Z_{k+1}-Z_k} \quad \text{(cadena de Tod compleja)} \\ U = e^{x_{k+1}-x_k}\cos(y_{k+1}-y_k)\,, \quad v = e^{x_{k+1}-\text{sen}}\operatorname{sen}(y_{k+1}-y_k)\ , \end{cases}$$

2) $F = \sum \frac{1}{(Z_{k+1} - Z_n)^2}$ (sistema de Calodgero complejo)

$$U = \sum \frac{(x_{k+1} - x_k)^2 - (y_{k+1} - y_k)^2}{\left((x_{k+1} - x_n)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2\right)^2} ; \quad v = -\sum \frac{2(x_{k+1} - x_k)(y_{k+1} - y_k)}{\left((x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2\right)^2} ,$$

3) $$F = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{(Z_{k+1} - Z_k)^2} + \sum_{m,n} \left[\frac{1}{(Z_{k+1} - Z_k - \Omega_{mn})^2} - \frac{1}{\Omega^2_{mnk}} \right] \right) ,$$

(sistema de Moser–Calodgero complejo)

$U = Re(F), \quad v = Im(F)$,

donde F es la función de Weirstrass.

Se puede probar que el sistema con hamiltoniano H_1 es completamente integrable en estos tres casos y su restricción en subvariedad

$$\{y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0\} ,$$

coincide con los sistemas clásicos.

En el caso general se tiene que las funciones U y v son tales que

$$\begin{cases} U = Re \displaystyle\int_{\partial D} F(\zeta)\omega(\zeta, Z) , \\ v = Im \displaystyle\int_{\partial D} F(\zeta)\omega(\zeta, Z) , \end{cases}$$

donde

$$F(Z) = \int_{\partial D} F(\zeta)\omega(\zeta, Z) ,$$

es la representación de Martinelli–Bochner [5].

Nota. Los resultados expuestos pueden ser aplicados a casos más generales, como se demuestra en [6].

Bibilografía

1. Rafael Ramírez, Natalia Sadovskaia, Preprint, Universidad de Oriente, Núcleo Sucre, Venezuela, 1987.
2. J. Moser, Sobre ciertos aspectos de los sistemas hamiltonianos completamente integrables, "Uspieji matematicheskij nauk", Tomo 36, ed. 5, 1981 (Moscú).
3. M. Olshaneski, A. Perelomov. La cadena de Tod como sistema reducido. Matemática y física teórica, Tomo 45, N.° 1, 1980 (Moscú).
4. V. Arnold, S. Novikov, y otros, Sistemas dinámicos–4, VINITI, 1985 (Moscú).
5. B. Shabat. Introducción al análisis complejo. Ed. Nauka, Moscú, 1969.
6. Rafael Ramírez. Sobre una clase de sistemas hamiltonianos completamente integrables (dado a publicarse).