UNIVERSITAT DE BARCELONA

GRAU en MATEMÀTIQUES
GRAU en ADMINISTRACIÓ I DIRECCIÓ D'EMPRESES

Treball Final de Grau

Subhastes i disseny de mecanismes

Berta Serra Aguilera

Directors: **Dr. Xavier Jarque**
Dept. de Matemàtiques i Informàtica
Dr. Javier Martínez de Albéniz
Dept. de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial

Barcelona, Juny 2019

Resum

Les subhastes són una eina que s'utilitza per vendre objectes des de fa molt temps. Són útils, ja que els objectes es venen de forma competitiva. En aquest terreny W. S. Vickrey i J. Mirrlees van ser guardonats amb el Premi Nobel d'Economia l'any 1996 pels seus estudis de la teoria econòmica dels incentius en condicions d'informació asimètrica. D'altra banda, les subhastes es poden encabir en el camp dels mecanismes. L. Hurwicz, E. Maskin i R. Myerson van rebre el Premi Nobel d'Economia l'any 2007 per haver descrit els fonaments de la teoria del disseny de mecanismes.

En aquest projecte, estudiem la teoria de les subhastes d'un únic objecte amb valoracions privades, tant a primer preu com a segon preu. Com a resultat principal trobem el principi d'equivalència d'ingressos entre uns tipus de subhasta concrets. Posteriorment, s'analitzen extensions a subhastes amb preu de reserva.

Finalment, es desenvolupa la teoria del disseny de mecanismes. Es defineix en general què és un mecanisme i s'analitzen les subhastes des del punt de vista dels mecanismes. El principi de revelació permet expressar un mecanisme indirecte com un mecanisme directe. Hi ha diverses propietats dignes de ser mencionades com la compatibilitat amb els incentius o la racionalitat individual. Aquest treball finalitza amb la descripció d'un exemple amb el comerç bilateral.

Abstract

Auctions are a tool used from ancient times to sell objects. They are useful, since the objects are sold competitively, especially when the actual value is unknown by the seller. W. S. Vickrey and J. Mirrlees were awarded the Nobel Prize in Economics in 1996 for their studies of the economic theory of incentives in conditions of asymmetric information. On the other hand, auctions are found in the field of the mechanisms. L. Hurwicz, E. Maskin and R. Myerson received the Nobel Prize in Economics in 2007 for describing the foundations of mechanism design theory.

In this project, we study the theory of auctions of a single object with private valuations, both at first price and at second price. As a main result, we find the revenue equivalence principle concerning certain types of auction. After that we extend the study to auctions with a reservation price.

Finally, the theory of mechanism design is developed. We analyze what is a mechanism from a general point of view and then we study the auctions seen as mechanisms. The revelation principle allows to express an indirect mechanism as a direct mechanism. There are several properties worthy of being mentioned as compatibility with incentives or individual rationality. To finish this paper we describe an example of bilateral trade.

2010 Mathematics Subject Classification. 91A06, 91A10

Agraïments

Agraeixo als professors Xavier Jarque i Javier Martínez de Albéniz el temps i la dedicació destinades en aquest treball. Vull agrair a totes les persones que m'han fet companyia i suport durant tot aquest període. Gràcies.

"Go down deep enough into anything and you will find mathematics."

Dean Schlicter

Índex

Capítol 1

Introducció

Al 193 d.C., després de l'assassinat de l'Emperador Pertinax, la Guàrdia Pretoriana va decidir posar a la venda l'Imperi Romà, inclòs el rang d'emperador. La venda s'efectuà en termes de subhasta i la millor oferta que es va aconseguir va ser de 25.000 sestercis[1] per a cada membre de la Guàrdia. El guanyador fou Didius Julianus que va ser declarat emperador; tot i que només va ser-ho durant dos mesos perquè el van decapitar. (Vegeu Mennen, [11]).

Les subhastes s'han utilitzat des de l'antiguitat per vendre tot tipus d'objectes. Herodotus[2] declara que les subhastes ja s'utilitzaven a Babilònia l'any 500 a.C. Avui, la varietat i el valor dels objectes que es venen mitjançant una subhasta ha arribat a proporcions sorprenents. Per exemple, les obres d'art sempre s'han venut a cop de martell; però ara qualsevol tipus de producte com peix, tabac, flors, lingots d'or... també són venuts en subhastes. Les emissions de bons de l'Estat es fan mitjançant una subhasta. Als Estats Units, els valors a llarg termini es venen setmanalment en subhastes dirigides pel Departament del Tresor per finançar les necessitats d'endeutament per part del govern nord-americà. Segurament, l'ús més important de les subhastes ha estat facilitar el traspàs d'actius públics a mans privades -un fenomen mundialment estès durant els últims 20 anys. Aquests inclouen traspassos d'empreses industrials de l'Est d'Europa i de la Unió Soviètica. També podem afegir el transport públic a Gran Bretanya i Escandinàvia. Tradicionalment, els drets d'utilització de recursos naturals públics, com la fusta o els arrendaments de petroli a la costa, es venen en subhastes. Recentment, han esdevingut un fenomen mundial les subhastes de drets per utilitzar l'espectre electromagnètic de comunicació.

Finalment, el nombre de webs de subhastes *online* ha crescut molt així com, el valor i la diversitat dels objectes que es subhasten. En aquestes webs, els usuaris poden posar objectes a la venda sota les condicions bàsiques de subhasta.

La companyia *Alphabet* (*Google*) utilitza la subhasta com a mètode d'adjudicació d'anuncis publicitaris. No només es subhasta que aparegui un anunci concret, sinó també la posició que ocuparà. La subhasta comença quan un usuari realitza una cerca, el sistema de *Google Ads* busca els anuncis amb paraules clau que coincideixin amb la cerca. De tots els anuncis trobats, s'exclouen aquells que no siguin aptes (orientats a altres països, incompliment de polítiques). Dels anuncis restants, es mostren aquells que tinguin un rànking suficientment elevat. Aquest rànking és una combinació entre l'oferta, qualitat,

[1] Antiga moneda romana de plata que equivalia a 2 asos i mig de bronze.
[2] 484 a.C. - 425 a.C., historiador i geògraf grec.

context de la cerca, impacte... Cal destacar que l'oferta monetària més alta no té perquè obtenir una posició més alta, pels motius anteriors.[3]

La manera d'obtenir objectes mitjançant ofertes competitives no és res més que una subhasta, exceptuant el cas on els individus competeixen per aconseguir el dret de poder vendre els seus productes o serveis.[4] Els governs adjudiquen milions de dòlars utilitzant, quasi exclusivament, subhastes, però no són els únics que les utilitzen, aquesta pràctica està molt estesa en el sector empresarial. D'ara en endavant, entendrem que es tracta d'una subhasta si inclou un procés d'assignació mitjançant unes ofertes competitives. En aquest cas, el contracte es fa al menor postor.

El venedor d'un objecte acostuma a voler vendre'l al preu més alt que pugui obtenir. Quan el venedor té un objecte a vendre i diferents potencials compradors el seu objectiu és trobar el comprador que estigui disposat a pagar el preu més alt per l'objecte i arribar a un acord amb ell. Com que el venedor no pot conèixer les valoracions privades del potencials compradors, organitza una "competició" entre els potencials compradors per tal d'identificar el que tingui més predisposició a pagar per l'objecte. Aquesta "competició" és una subhasta i es dona perquè el mercat no té una manera "natural" d'assignació de preu.

Si busquem *subhasta* a l'*Enciclopèdia Catalana* [2] trobem cinc accepcions:

subhasta

1 *f.* Sistema de venda pública consistent a atorgar una cosa al millor postor, és a dir, a la persona que n'ofereix un preu més elevat.
2 *f.* Adjudicació al millor postor d'una obra a executar, de l'abast de provisions, etc.
3 *f.* DRET ADMINISTRATIU Sistema que utilitza l'administració per a adjudicar els contractes, concessions, arrendaments, aprofitament de béns comunals, serveis de recaptació i cobrament, etc., administratius als particulars que ofereixen condicions econòmiques més avantatjoses.
4 *f.* DRET PROCESSAL Venda pública que fa l'autoritat judicial dels béns embargats d'un deutor que hom adjudica al millor postor, per tal de satisfer amb el seu preu els creditors que l'han demanada.
5 *f.* **subhasta a la baixa** Subhasta en el qual el preu resta fixat en sentit descendent, és a dir, que les xifres que el subhastador proclama van de més a menys.

La paraula *subhasta* prové del llatí *sub hasta* que significa 'sota llança', perquè la venda del botí aconseguit en una guerra s'anunciava amb una llança. En anglès, s'anomena *auction* que prové del llatí *augere* que significa incrementar o augmentar. En altres idiomes es diu *subasta*, *enkantean*, *poxa*, *aux enchères*, *Versteigerung*, *vendita all'asta...*

Existeixen molts tipus de subhasta però, en aquest treball estudiem els que es mencionen a continuació (vegeu Gardner o Krishna, [4][9]).

- Subhastes dinàmiques: Els postors coneixen les ofertes de la competència, i poden modificar la seva oferta mentre la subhasta estigui oberta. Tipus més coneguts:

[3] Vegeu https://support.google.com/google-ads/answer/142918?hl=es-419.
[4] En aquests casos, no es competeix per aconseguir un objecte, sinó que es fa per tenir un espai (físic o virtual) des d'on poder vendre l'objecte.

i). Subhasta anglesa: Utilitza una dinàmica ascendent, és a dir, es parteix d'un preu de reserva a partir del qual es van presentant preus de forma ascendent. Formalment, podem imaginar-nos que els postors estan dins d'una sala on es van presentant les ofertes de forma creixent, en cas que un postor no accepti una oferta, surt de l'habitació. Per tant, guanya la subhasta el postor que es quedi sol a la sala.

ii). Subhasta holandesa: També coneguda com a subhasta a la baixa o inversa. Utilitza una dinàmica descendent, és a dir, es parteix d'un preu molt elevat a partir del qual es van presentant preus de forma descendent. Guanya el primer postor que accepta el preu.

- Subhastes en sobre tancat: Els postors presenten la seva oferta en sobres tancats, és a dir com si fossin ofertes simultànies. Tipus més coneguts:

  i). Subhasta de sobre tancat a primer preu: El postor que hagi presentat la major oferta guanya la subhasta i paga el preu ofert.

  ii). Subhasta de sobre tancat a segon preu: El postor que hagi presentat la major oferta, guanya la subhasta i paga el preu de la segona major oferta.

Una subhasta de *valoracions privades* és aquella on cada postor coneix el valor que té per ell l'objecte que es subhastarà i, a més, cap postor coneix amb certesa la valoració de la resta de postors sobre el mateix objecte. És per això que si valorem un objecte en x euros és indiferent posseir l'objecte que tenir aquests diners (x euros). El coneixement de les valoracions d'altres postors no afecta a la pròpia valoració. La pròpia valoració de l'objecte està relacionada amb l'oferta que farem en una subhasta. Això serà l'estratègia.

Suposem que existeixen valoracions privades quan es tracta de valoracions d'objectes d'ús o consum individuals. Per exemple el cas de quadres, segells, monedes, cotxes antics... Tot i així, si els postors basen les seves valoracions en el preu que aconseguiran en la revenda, no és una bona hipòtesi assumir que es tracta de valoracions privades.

Una subhasta de *valor comú* és aquella en la que el bé que es subhasta té el mateix valor per tots els postors, tot i que no se sap exactament quin és aquest valor. És per això que els postors obtenen diferents estimacions sobre el valor segons les fonts d'informació que utilitzin. En el cas que els postors coneguessin tota la informació, la valoració que en farien seria la mateixa per tots. Un exemple seria la concessió dels drets de perforació d'un pou de petroli.

Les subhastes s'utilitzen quan el venedor no està segur sobre el valor que els postors estan disposats a pagar per l'objecte que ell vol vendre. Si el venedor conegués exactament aquest valor, fixaria el preu tenint en compte el màxim d'aquests valors. La incertesa sobre les valoracions, tant per part del venedor com dels potencials compradors és una característica intrínseca de les subhastes.

Aquest projecte es centra en l'assignació competitiva d'un únic objecte amb valoració privada des del punt de vista de les subhastes i del disseny de mecanismes. S'estudia el seu funcionament des d'una vessant analítica i posteriorment s'expliquen els avantatges i inconvenients que té utilitzar un o altre sistema. És per això que, s'han dedicat una part a les subhastes i una altra al disseny de mecanismes.

Capítol 2

Preliminars

L'estudi de les subhastes i el disseny de mecanismes necessita d'unes eines formals que seran el llenguatge per descriure els enunciats i problemes. Aquest capítol desenvolupa els conceptes bàsics necessaris per tal d'assolir millor comprensió del text. Per fer-ho, utilitzarem nomenclatura i resultats propis de la teoria de jocs i d'estadístics d'ordre que es presenten a continuació.

2.1 Nocions de Teoria de Jocs

La *Teoria de Jocs* és una branca de les matemàtiques aplicades i de l'economia que analitza amb rigor la presa de decisions o conflictes d'interessos des d'un punt de vista estratègic. És a dir, estudia les decisions en les que per aconseguir que un individu tingui èxit, ha de tenir en compte les decisions de la resta d'agents que intervenen en aquella situació. El rigor utilitzat es basa en la hipòtesi de la racionalitat[1] per trobar resultats i comportaments esperats (vegeu Rafels, [14]).

El primer pas serà definir què és un joc i quins són els elements que el componen. Així doncs, presentem aquests elements que permeten introduir el lector al món de la teoria de jocs.

D'acord amb Gardner (vegeu Gardner, [4]), tots els jocs tenen uns elements comuns:

- Jugadors
- Normes/Regles
- Accions/Estratègies
- Resultat

Gràcies a aquests elements podem obtenir una definició de joc: un *joc* és qualsevol situació governada per normes amb un resultat ben definit on un cert nombre d'agents

[1]Els agents tenen una relació de preferència $\succeq$ sobre els resultats. Anomenem $\succ$ la relació de preferència estricta i $\sim$ la relació d'indiferència. La relació de preferència sobre les classes d'indiferència és una relació d'ordre total. Una relació de preferència $\succeq$ és racional si compleix:

i). Total: $\forall x, y \in X$, tenim $x \succeq y$, o bé, $y \succeq x$ (o totes dues).

ii). Transitiva: $\forall x, y, z \in X$, si $x \succeq y$ i $y \succeq z$, aleshores $x \succeq z$.

Vegeu Mas-Colell et al., [10].

interactuen estratègicament. Les normes indiquen les opcions que pot dur a terme un agent així com l'ordre d'actuació... La interacció estratègica es produeix quan el benefici, pagament o utilitat esperada d'un agent depèn tant de les seves accions com de les accions preses pels altres agents. Aquests agents, anomenats *jugadors*, són racionals i actuen d'acord a unes preferències sobre els resultats. Els jugadors formen un conjunt finit que denotarem per $N = \{1, ..., n\}$.

Els jocs no-cooperatius són aquells on no hi ha acords vinculants entre els jugadors. Distingim entre dos tipus:

- Simultanis. Aquells jocs on les accions o estratègies s'han de prendre de forma simultània, o equivalentment, un jugador no sap la decisió que han pres els altres agents.
- Seqüencials. Aquells jocs on els jugadors van escollint accions durant el temps de joc i poden transmetre aquesta informació a la resta d'agents de manera total o parcial. Això s'especifica a través dels conjunts d'informació, que agrupen els nodes d'un mateix jugador, i dels quals, el jugador no sap on és. Es distingeix entre informació perfecta i imperfecta, que expressa si els jugadors coneixen exactament on són quan han de jugar.

La informació que disposen els jugadors és important per saber les accions que poden dur a terme. Segons la informació que disposin els jugadors sobre el joc tenim:

i). Jocs amb informació completa: Aquells on tots els jugadors coneixen de ciència certa contra qui juguen, i quin és el joc que juguen.

ii). Jocs amb informació incompleta: Aquells on els jugadors desconeixen de ciència certa quin és el joc que juguen. En aquestes situacions els agents tenen creences sobre qui són els altres agents (expressades en forma probabilística).

Un conjunt complet d'accions que pot seguir un jugador en un joc s'anomena *estratègia*. Ens referim a que es tracta d'una completa especificació del comportament del jugador, és a dir, una estratègia defineix una acció per a cada situació possible del joc. Cada jugador escull una estratègia s_i que pertany al seu conjunt d'estratègies S_i, on $i \in N$. D'altra banda, un *perfil d'estratègies* és un vector d'estratègies, una per cada jugador. En un joc amb n jugadors, un perfil d'estratègies és un vector $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$, on $s_i \in S_i$ és l'estratègia escollida pel jugador i, $i \in N$. Diem S al conjunt de perfils d'estratègies i es defineix com $S = S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$.

Cal remarcar que els jugadors decideixen les accions que duen a terme durant el joc i aquestes determinen un resultat i conseqüentment una valoració. L'anàlisi d'un joc pressuposa analitzar quina és l'estratègia "encertada", donades les estratègies de la resta de jugadors.

Un cop establerta l'estratègia de cada jugador o perfil d'estratègies, els pagaments són valoracions numèriques dels resultats del joc. Per tant, veiem que la funció de pagaments d'un jugador és l'element que relaciona les estratègies de tots els jugadors amb la utilitat que n'obté. Per cada perfil d'estratègies tenim un resultat del joc associat a la valoració que en fa cada jugador a través de la funció de pagaments $u_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$. Per poder definir aquesta funció de pagaments, definirem prèviament la funció resultat del joc i la funció d'utilitat, ja que la funció de pagaments serà la composició d'aquestes dues.

Sigui Z el conjunt de resultats possibles del joc, la *funció resultat del joc* és la funció $g : S \longrightarrow Z$ que defineix per cada perfil d'estratègies $s \in S$ el resultat del joc $g(s) \in Z$.

Els jugadors, com hem dit, són racionals i actuen d'acord a unes preferències sobre els resultats. Aquestes preferències estableixen una relació d'ordre total sobre els resultats, que sota unes certes hipòtesis es poden representar per una funció d'utilitat.[2] La *funció d'utilitat* del jugador $i \in N$ és la funció $v_i : Z \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\text{El jugador } i \text{ prefereix } z \text{ abans que a } z' \iff \forall z, z' \in Z, v_i(z) > v_i(z').$$

Per tant, amb les dues funcions anteriors ja podem definir la funció de pagaments.

La *funció de pagaments* $u_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$ assigna a cada perfil d'estratègies s la utilitat del resultat que s'obté quan es duu a terme, és a dir, $u(s) = v(g(s))$. Per tant, la funció de pagaments s'obté composant la funció d'utilitat i la funció de resultats del joc. Així, la funció d'utilitat assigna el resultat obtingut d'una estratègia a uns pagaments.

Definició. Un joc en *forma normal* o *forma estratègica* consisteix en un conjunt de jugadors $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, un espai d'estratègies $S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ i una funció de pagaments $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$. S'acostuma a expressar en un triplet $G = (N, S, u)$.[3]

Per poder definir la dominància d'estratègies, necessitem ampliar la notació. Definim un perfil d'estratègies per tots els jugadors excepte el jugador $i \in N$ com s_{-i}, és a dir, $s_{-i} = (s_1, s_2, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_n)$. De la mateixa manera, anomenem S_{-i} al conjunt d'estratègies que inclou les estratègies de tots els jugadors excepte la de i, és a dir, $S_{-i} = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \ldots \times S_n$.

Definició (Estratègia dominant). Donat un joc $G = (N, S, u)$, una estratègia $s_i^* \in S_i$ pel jugador $i \in N$ serà una *estratègia estrictament dominant* si

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}), \quad \forall s_i \in S_i \setminus \{s_i^*\}, \forall s_{-i} \in S_{-i}.$$

[2] El teorema de Von Neumann i Morgestern (vegeu Von Neumann i Morgenstern, [18]) mostra que sota certs axiomes de comportament racional, hi ha una funció d'utilitat u que representa aquesta preferència, és a dir, que $L \succeq M$ si, i només si $u(L) \geq u(M)$ i llavors un subjecte que hagi d'escollir entre diferents alternatives amb un cert risc, triarà aquella que maximitzi el valor esperat de la utilitat. Notem que el subjecte té preferències no només sobre alternatives "certes", sinó també sobre alternatives que són formades per distribucions de probabilitats sobre alternatives certes.

Els axiomes són

- A1. Totalitat. Suposem que qualssevol individu té unes preferències ben definides. És a dir, siguin L, M dues alternatives aleshores $L \succ M, M \succ L$, o bé, $L \sim M$.
- A2. Transitivitat. S'assumeix que les preferències són consistents per qualssevol tres alternatives. És a dir, si $L \succ M$ i $M \succ N$, aleshores $L \succ N$. I de manera anàloga per $\sim$.
- A3. Continuïtat. S'assumeix que existeix un "punt d'inflexió"entre que una alternativa sigui millor o pitjor que una altra alternativa donada. És a dir, si $L \succeq M \succeq N$, aleshores existeix una probabilitat $p \in [0, 1]$ tal que $pL + (1 - p)N \sim M$.
- A4. Independència. S'assumeix que les preferències es mantenen encara que s'afegeixi una nova alternativa. És a dir, si $L \succeq M$, aleshores per qualsevol alternativa N i $p \in [0, 1]$, $pL + (1 - p)N \succeq pM + (1 - p)N$.

Un individu que compleixi els 4 axiomes es diu *VNM-racional.* El teorema diu:
Per qualsevol individu VNM-racional, existeix una funció u que assigna a cada alternativa A un nombre real $u(A)$, tal que per dues preferències $L \succ M \iff E(u(L)) > E(u(M))$, on

$$E(u(L)) = E(u(p_1 A_1 + \ldots + p_k A_k) = p_1 u(A_1) + \ldots + p_k u(A_k).$$

[3] La forma normal va ser definida per Von Neumann i Morgenstern (1944), [18].

Sempre que esculli aquesta estratègia obtindrà una utilitat més elevada que la resta d'estratègies, independentment de l'estratègia que triïn els altres. En cas que es compleixi $u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$ es diu que s_i^* és una estratègia *dèbilment dominant* (vegeu Watson, [19]).

2.2 Equilibri de Nash

Nash (1950) (vegeu Nash, [12]) en la seva tesi doctoral introdueix el concepte d'equilibri. Demostra que un resultat serà estable si es mira de forma global, és a dir, agafa perspectiva per mirar-se el joc des del punt de vista de tots els jugadors a la vegada i no de forma individualitzada.

Definició (**Equilibri de Nash).** Donat un joc $G = (N, S, u)$, diem que el perfil d'estratègies $s^* = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*) \in S$ és un equilibri de Nash si cap jugador té incentius unilaterals per canviar l'estratègia escollida. Per tant, per tot jugador $i \in N$,

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*), \quad \forall s_i \in S_i.$$

D'aquesta manera veiem que l'equilibri del joc és un punt estable de manera global, ja que cada jugador ofereix una millor resposta al que estan fent la resta de jugadors.

2.3 Jocs bayesians

El jocs bayesians pressuposen que els jugadors desconeixen amb exactitud les funcions de pagament de la resta de jugadors. Els jugadors no podran saber a quin joc s'enfronten ja que això dependrà de l'atzar, encara que tots els agents coneixen la llei de probabilitat que determina quin dels jocs es juga. A aquest tipus de situacions se les coneix com *jocs d'informació incompleta* i van ser analitzades per Harsanyi (1967-1968)[4] (vegeu Harsanyi, [5], [6] i [7]). Per aquest tipus de jocs, s'utilitza la noció d'*equilibri bayesià* (*de Nash*) com a concepte de solució. Harsanyi va convertir aquestes situacions d'informació incompleta en jocs seqüencials d'informació imperfecta (es poden representar en diagrama d'arbre). Cada jugador assigna una probabilitat a cada possible resultat, basada en la creença sobre la distribució dels tipus de jugadors. Aquesta creença pot variar a mesura que avança el joc per les accions que s'hagin dut a terme fins aquell moment gràcies a la regla de Bayes. Aquests jocs s'anomenen bayesians per l'anàlisi de les probabilitats associades al joc.

Descrivim el model de jocs bayesians estàtics,[5] seguint a *Pérez, Jimeno i Cerdá*, [13].

En un joc *bayesià* estàtic els jugadors formen el conjunt $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Cada jugador $i \in N$ té:

- Accions: $\{A_i\}_{i \in N}$. Recordem que es prenen decisions de forma simultània. Una acció del jugador $i \in N$ es diu $a_i \in A_i$.
- Tipus: $\{T_i\}_{i \in N}$. Cada jugador $i \in N$ pot tenir diferents tipus. El tipus del jugador es diu $t_i \in T_i$.

[4] John C. Harsanyi va ser guardonat amb el Premi Nobel d'Economia l'any 1994 conjuntament amb John F. Nash i Reinhard Selten per la seva anàlisi pionera dels "equilibris en la teoria de jocs no cooperatius".

[5] Els jugadors prenen decisions de manera simultània.

- Pagaments: $\{u_i\}_{i \in N}$. Una funció que proporciona la quantitat que haurà de rebre cada jugador.

- Conjectura p_i sobre els tipus dels altres jugadors.

Suposem que cada tipus $t_i \in T_i$ és una variable aleatòria que la distribució de probabilitat conjunta dels tipus prové de la funció $p(t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots, t_n)$ i que la conjectura p_i és una probabilitat condicionada donada per $p_i = p(t_{-i} \mid t_i)$ que depèn del tipus $t_i \in T_i$ del jugadors $i \in N$,[6] amb $t_i \in T_i$ el tipus efectiu. Finalment, la funció de pagaments de cada jugador depèn de les accions decidides i els tipus efectius de tots els jugadors, la denotem com

$$u_i(a_1, a_2 \ldots, a_n; t_1, t_2, \ldots, t_n).$$

Per tant, un joc bayesià estàtic el denotem com

$$\Gamma = \{N; A_1, A_2, \ldots, A_n; T_1, T_2, \ldots, T_n; p_1, p_2 \ldots, p_n; u_1, u_2, \ldots, u_n\},$$

on $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ és el conjunt de jugadors.

En un joc bayesià estàtic Γ una *estratègia pura* del jugador $i \in N$ és una regla de decisió que especifica una acció $a_i \in A_i$ per cada tipus $t_i \in T_i$, és a dir, una aplicació $s_i : T_i \longrightarrow A_i$ on a cada tipus t_i se li assigna una acció $a_i = s_i(t_i)$.

En el joc bayesià Γ i donat el perfil d'estratègies $s^* = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$:

i). Diem que l'estratègia $s_i^* \in S_i$ és una resposta òptima esperada del jugador $i \in N$ a la combinació $s_{-i}^* = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*)$ d'estratègies de la resta de jugadors, si per cadascun dels seus tipus $t_i \in T_i$, $s_i^*(t_i)$ és una solució del problema

$$\max_{a_i \in A_i} \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} p_i(t_{-i} \mid t_i) u_i(s_1^*(t_1), \ldots, s_{i-1}^*(t_{i-1}), a_i, s_{i+1}^*(t_{i+1}), \ldots, s_n^*(t_n); t_1, \ldots, t_n)$$

en la variable de decisió a_i.

ii). Diem que el perfil $s^* = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ és un *equilibri bayesià de Nash* en estratègies pures si per cada jugador $i \in N$ l'estratègia $s_i^* \in S_i$ és una resposta òptima esperada al perfil d'estratègies dels altres jugadors $s_{-i}^* = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n)$.

Més endavant es veurà que en el cas de les subhastes el tipus d'un jugador ve donat per la pròpia valoració.

2.4 Nocions d'estadístics d'ordre

Per tal d'analitzar les subhastes, a banda dels conceptes coneguts de variables aleatòries, funcions de distribució... necessitem introduir alguns conceptes específics relacionats amb probabilitats i estadística (vegeu Julià de Ferran, [8]).

A partir d'ara considerarem variables aleatòries absolutament contínues.

[6] El jugador $i \in N$ observa el seu tipus efectiu i forma una conjectura sobre els altres jugadors, $p_i(t_{-i} \mid t_i)$. El jugador forma la conjectura amb el seu tipus efectiu i la distribució *a priori*. Recordem que el jugador $i \in N$ només pot conèixer el seu tipus efectiu.

Siguin $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes associades a la funció de distribució F amb densitat f. Sigui $Y_1^{(n)}, Y_2^{(n)}, \ldots, Y_n^{(n)}$ la reordenació de les variables anteriors tal que $Y_1^{(n)} \geq Y_2^{(n)} \geq \ldots \geq Y_n^{(n)}$. Per tant, la variable aleatòria $Y_k^{(n)}$ és la que indica el k-èsim valor més gran d'una mostra. Denotem per $F_k^{(n)}$ la funció de distribució de $Y_k^{(n)}$, amb la corresponent funció de densitat $f_k^{(n)}$. A aquestes variables aleatòries ens hi referirem com a *estadístics d'ordre*.
Per tal de simplificar la notació, amb una mostra de n postors, posarem Y_k enlloc de $Y_k^{(n)}$, F_k enlloc de $F_k^{(n)}$ i f_k enlloc de $f_k^{(n)}$, si no hi ha possibilitat de confusió.

La distribució del màxim ordre estadístic, Y_1 és fàcil d'obtenir. Observem que $Y_1 \geq y$ és equivalent a $X_k \geq y \quad \forall k = 1, 2, \ldots, n$. Com que les variables X_k són independents i idènticament distribuïdes i tenen la mateixa funció de distribució, obtenim

$$F_1(y) = (F(y))^n \equiv F(y)^n.$$

La funció de densitat associada és

$$f_1(y) = nF(y)^{n-1}f(y).$$

Noti's que això pressuposa que hi ha n variables. Per recordar-ho, més endavant utilitzarem el superíndex (n).

Anem a veure quina és la distribució de l'estadístic de segon ordre Y_2.[7] Per tal que es doni $Y_2 \leq y$ s'ha de donar un dels dos casos:

i). Per tot $i \in N$, $X_i \leq y$.

ii). $\exists\, i^* \in N$ tal que $\forall k \in N$ tal que $k \neq i^*$ es compleixi $X_k \leq y$ i $X_{i^*} > y$.

D'aquí podem extreure la funció de distribució

$$F_2(y) = F(y)^n + nF(y)^{n-1}(1 - F(y))$$

on el primer sumand comprèn el cas i) i el segon sumand el cas ii). L'expressió anterior es pot reescriure com

$$F_2(y) = nF(y)^{n-1} - (n-1)F(y)^n.$$

La funció de densitat associada és

$$f_2(y) = n(n-1)(1 - F(y))F(y)^{n-2}f(y).$$

Si posem F_2 i f_2 en termes de F_1 i f_1 respectivament obtenim:

$$F_2^{(n)}(y) = nF(y)^{n-1} - (n-1)F(y)n = nF_1^{(n-1)}(y) - (n-1)F_1^{(n)}(y)$$

i

$$\begin{aligned} f_2^{(n)}(y) &= nf_1^{(n-1)}(y) - (n-1)f_1^{(n)}(y) = n(n-1)(1 - F(y))F(y)^{n-2}f(y) \\ &= n(1 - F(y))f_1^{(n-1)}(y). \end{aligned}$$

[7] Recordem que $Y_2^{(n)}$ denota la funció de distribució de les segones majors ofertes dels n postors.

Capítol 3

Subhastes amb valoracions privades

En aquest capítol s'analitzen subhastes on s'oferta un únic objecte indivisible a n postors, dels quals només un el comprarà. Tractarem subhastes en sobre tancat a primer o segon preu.

Analitzarem un model bàsic de subhasta i, a partir d'aquest, es discutiran algunes característiques que cal tenir en compte com ingressos, preus de reserva, eficiència i compromís. Aquests tipus de subhastes han estat estudiades en primer lloc per *W. S. Vickrey*[1] (1914-1996). Una bona referència d'aquest tema d'on seguirem la notació i el model bàsic és el llibre de *V. Krishna*, (2010).

Si s'analitzen les subhastes holandeses i les subhastes en sobre tancat a primer preu, s'observa que són molt similars i existeix una correspondència entre elles. Tant en una subhasta holandesa com en una subhasta de sobre tancat a primer preu, el postor decideix quina serà la seva postura i, un cop realitzada la subhasta, si resulta guanyador serà perquè la seva postura és la més gran i coneixerà el preu final (la seva oferta). Així, oferir una certa quantitat de diners en una subhasta de sobre tancat a primer preu es correspon a oferir la mateixa quantitat en una subhasta holandesa. El resultat obtingut serà el mateix pel comprador i el venedor.

D'altra banda, la subhasta anglesa i la subhasta de sobre tancat a segon preu també es corresponen però, en aquest cas, la correspondència no és tant clara. La subhasta anglesa dona informació sobre el moment en que els altres postors es retiren del joc. Per exemple, en una subhasta anglesa no és òptim mantenir-se dins de la subhasta quan el preu ha excedit la pròpia valoració (només s'aconseguiran pèrdues), ni tampoc retirar-se del joc abans que el preu assoleixi la pròpia valoració (rebutjant guanys potencials). Observi's que, en el cas de subhastes de sobre tancat a segon preu, no s'obté aquesta informació. Així, amb valoracions privades, la millor opció en una subhasta anglesa és mantenir-se dins del joc fins que el preu assoleixi la pròpia valoració. Veurem que en una subhasta de sobre tancat a segon preu, el millor que cada participant pot fer és dir la seva pròpia valoració.

[1]Premi Nobel d'Economia l'any 1996, *pels seus estudis de la teoria econòmica dels incentius en condicions d'informació asimètrica.*

3.1 Model bàsic

En aquest apartat analitzarem el model bàsic de subhasta de sobre tancat. Per això veurem, en primer lloc, l'anàlisi de la subhasta a segon preu.

Recordem que una subhasta de sobre tancat els postors presenten la seva oferta en sobres tancats, és a dir com si fossin ofertes simultànies.

Hi ha un únic objecte a subhastar i n potencials compradors (postors). El conjunt de postors es denota per $N = \{1, 2, ..., n\}$. Cada postor $i \in N$ assigna un valor a l'objecte i aquesta valoració s'obté d'una variable aleatòria, $X_i, i \in N$. Les variables aleatòries són independents i idènticament distribuïdes. Cada X_i pren valors en un cert interval de suport $[0, \omega]$ i la seva funció de distribució és F. Assumim que F admet una funció de densitat contínua f i assoleix valors en tot l'interval de suport, $[0, \omega] \subseteq [0, \infty)$. El postor $i \in N$ coneix el funcionament de la subhasta, la seva valoració $x_i \in X_i$ i que les valoracions de la resta de postors són independents i segueixen la funció de distribució F.

Direm que són postors *simètrics* si segueixen la mateixa funció de distribució de valoracions. És a dir, tots rebran la informació de la mateixa variable aleatòria que és de coneixement de tothom. La simetria es basa en l'anonimat; des de la perspectiva del venedor tots els potencials compradors són iguals. Els postors són neutrals al risc això fa que la seva utilitat es mesuri en el benefici que obtenen.[2]

Cada postor $i \in N$ rep una valoració privada $x_i \in [0, \omega]$ i una estratègia serà deduir quina serà l'oferta en la subhasta depenent de la valoració x_i. Una *estratègia* per un postor és una funció $\beta : [0, \omega] \longrightarrow \mathbb{R}$. Denotarem β^I l'estratègia en una subhasta de primer preu i β^{II} l'estratègia en una subhasta de segon preu. Des del punt de vista dels jocs bayesians, una estratègia dona una oferta per cada tipus o valoració privada x_i del jugador $i \in N$. A més, assumirem que cada postor i té recursos suficients per poder fer front a la seva oferta.

Subhastes a segon preu

Primer analitzarem el problema estratègic en subhastes de segon preu.

En una subhasta de sobre tancat a segon preu, cada postor $i \in N$ entrega un sobre tancat amb la seva oferta, b_i. Donades totes les ofertes, la funció de beneficis, Π_i, corresponent al postor i serà:

$$\Pi_i(b_i) = \begin{cases} x_i - \max_{j \neq i} b_j & \text{si } \; b_i > \max_{j \neq i} b_j, \\ 0 & \text{si } \; b_i < \max_{j \neq i} b_j, \\ \frac{1}{\#\{j \in N | b_j = b_i\}}(x_i - b_i) & \text{si } \; b_i = \max_{j \neq i} b_j. \end{cases}$$

Si $b_i > \max_{j \neq i} b_j$, el postor i guanya la subhasta i els beneficis corresponen a la diferència entre la seva valoració de l'objecte i el preu que ha de pagar (cal recordar que no és la seva oferta sinó la segona major). Si $b_i < \max_{j \neq i} b_j$, el postor no guanya la subhasta i per tant, no guanya res. Finalment, si $b_i = \max_{j \neq i} b_j$, trobem que existeix més d'una oferta màxima (empat); l'assignació de l'objecte es fa amb la mateixa probabilitat per tots els postors "guanyadors".

[2] Els individus neutrals al risc són persones que mostren indiferència entre la utilitat d'una renda segura i una d'incerta amb el mateix valor esperat.

Proposició 3.1. *En una subhasta de sobre tancat a segon preu, per a qualsevol postor, oferir seguint $\beta^{II}(x) = x$ és una estratègia dèbilment dominant.*

Demostració. Sense pèrdua de generalitat analitzarem la situació del postor $i \in N$, que té una valoració de $x_i \in X_i$. Considerem $p_i = \max_{j \in N \setminus \{i\}} b_j$ la millor oferta de la resta de postors. Anomenem z l'oferta del postor i i veurem que sempre és pitjor (dèbilment) que oferir x_i. Veurem els diferents casos.
Suposem que $z > x_i$. Pot passar:

- $p_i \geq z$, el postor i perd la subhasta, com ho faria oferint x_i.
- $z > p_i \geq x_i$, el postor i guanya la subhasta i obté unes pèrdues de $x_i - p_i \leq 0$. Si hagués ofert la seva valoració, x_i, hauria perdut la subhasta.
- $z > x_i > p_i$, el postor i guanya la subhasta i obté un benefici de $x_i - p_i$. En canvi, si hagués ofert x_i el seu benefici hauria estat el mateix.

Suposem que $x_i > z$. Pot passar:

- $p_i \geq x_i > z$, el postor i perd la subhasta, com hauria passat si hagués ofert x_i.
- $x_i > p_i \geq z$, el postor i perd la subhasta rebutjant possibles guanys potencials. En cas que hagués ofert x_i, hauria obtingut un benefici de $x_i - p_i$.
- $x_i > z > p_i$ el postor i guanya la subhasta i obté un benefici de $x_i - p_i$.

Per tant, el postor i maximitza el seu benefici quan $z = x_i$. □

De la proposició anterior es dedueix que els jugadors racionals utilitzaran una estratègia dèbilment dominant. El perfil d'estratègies en que tots els jugadors utilitzen $\beta^{II}(x) = x$ és un equilibri de Nash. Ho podem resumir en el següent corol·lari.

Corol·lari. *En una subhasta de sobre tancat a segon preu, oferir la pròpia valoració per tots els postors constitueix un equilibri de Nash.*

A partir d'ara considerem que tots els postors en subhastes de segon preu en sobre tancat segueixen l'estratègia igual a la seva valoració. A continuació, veurem quin és el pagament esperat per un postor.

Considerem la variable aleatòria que correspongui a la màxima valoració dels $N \setminus \{i\}$ postors, aquesta s'escriurà $Y_1 \equiv Y_1^{(n-1)}$.[3] Diem que G és la funció de distribució de la variable aleatòria Y_1. En una subhasta de segon preu, el pagament esperat pel postor $i \in N$ amb valoració $x \in X_i$, $m^{II}(x)$ es pot escriure com

$$\begin{aligned} m^{II}(x) &= Prob[\text{Guanyar}] \cdot E[\text{2na major oferta} \mid x \text{ és la major oferta}] \\ &= Prob[x \text{ és la major oferta}] \cdot E[\text{2na major valoració} \mid x \text{ és la major valoració}] \\ &= G(x) \cdot E[Y_1 \mid Y_1 < x]. \end{aligned} \tag{3.1}$$

És a dir, la probabilitat que x sigui la major oferta per l'esperança de la segona millor valoració si sabem que x és la major valoració. Noti's que el cas d'empat té una probabilitat 0, atès que la funció de distribució és contínua.

[3] Vegeu la secció 2.4.

Observem que a partir d'aquí podem veure quin és l'ingrés esperat del venedor obtingut gràcies al pagament del postor i, si ofereix x (la seva pròpia valoració), aquest correspon a l'esperança del pagament esperat. És a dir,

$$E[m^{II}(x)] = \int_0^w m^{II}(x)f(x)dx,$$

on $f(x)$ denota la funció de densitat de la variable aleatòria X_i. El guany esperat del comprador correspon a $E[x - m^{II}(x)]$.

Cal destacar que l'equilibri de Nash bayesià en una subhasta de sobre tancat a segon preu és eficient[4] perquè l'objecte sempre acaba en mans del jugador amb major valoració.

Veurem un exemple en el cas d'una variable aleatòria amb distribució uniforme.

Exemple 3.2 (Subhasta de sobre tancat a segon preu amb distribució uniforme)**.** Tenim n potencials compradors ($n \geq 2$) d'un quadre. Sigui v_i la valoració del postor $i \in N$, escollida de manera independent seguint una variable aleatòria uniforme entre 0 i 1000.

Calculem el pagament esperat del postor 1 amb valoració x. Recordem que la funció de distribució de la variable aleatòria és $F(x) = \frac{x}{1000}$, $\quad x \in [0, 1000]$, mentre que la funció de densitat és $f(x) = \frac{1}{1000}$.

$$\begin{aligned} m^{II}(x) &= G(x) \cdot E[Y_1 \mid Y_1 < x] \\ &= G(x) \cdot \frac{1}{G(x)} \int_0^x yg(y)dy = \int_0^x y(n-1)F(y)^{n-2}f(y)dy \\ &= \frac{n-1}{1000^{n-1}} \int_0^x y^{n-1}dy = \frac{n-1}{n1000^{n-1}}x^n \end{aligned}$$

Si $n = 2$ tenim $m^{II}(x) = \frac{x^2}{2000}$.

El venedor no es podrà apropiar de tot l'excedent ja que el jugador i paga la valoració del segon postor.

$$\begin{aligned} E[m^{II}(x)] &= \int_0^{1000} m^{II}(x)f(x)dx = \int_0^{1000} \frac{x^n(n-1)}{n1000^n}dx \\ &= \frac{n-1}{n1000^n} \int_0^{1000} x^n dx = \frac{(n-1)1000^{n+1}}{n(n+1)1000^n} = \frac{n-1}{n(n+1)}1000 \end{aligned}$$

Si $n = 2$ es compleix $E[m^{II}(x)] = \frac{1000}{6} = \frac{500}{3}$.

Subhastes a primer preu

Suposem una subhasta de primer preu on cada postor entrega un sobre tancat amb la seva oferta $b_i \in \mathbb{R}^+$. Donades totes les ofertes, la funció de beneficis corresponent al postor $i \in N$ correspon a:

$$\Pi_i(b_i) = \begin{cases} x_i - b_i & \text{si } b_i > \max_{j \neq i} b_j, \\ 0 & \text{si } b_i < \max_{j \neq i} b_j, \\ \frac{1}{\#\{j \in N | b_j = b_i\}}(x_i - b_i) & \text{si } b_i = \max_{j \neq i} b_j. \end{cases}$$

[4] Una subhasta és eficient si assigna l'objecte al postor amb valoració més gran.

Si $b_i > \max_{j \neq i} b_j$, el postor i guanya la subhasta i els beneficis corresponen a la diferència entre la seva valoració de l'objecte i el preu que ha de pagar (el preu que ofereix). Si $b_i < \max_{j \neq i} b_j$, el postor no guanya la subhasta, per tant, no s'enduu res. I si $b_i = \max_{j \neq i} b_j$, trobem que existeix més d'una oferta màxima. L'assignació de l'objecte es fa amb la mateixa probabilitat per tots els postors "guanyadors"(empat).

Clarament, cap postor realitzarà una oferta igual a la seva valoració, ja que aleshores, el seu benefici seria igual a 0. Si es fixa el comportament de *n - 1* postors, el postor restant s'enfronta a una situació simple: com més elevada sigui la seva oferta, més probabilitats tindrà de guanyar la subhasta; mentre que, com més baixa sigui l'oferta, menys probabilitats tindrà de guanyar la subhasta.

Anem a trobar les estratègies d'equilibri (bayesià) simètric, on tots els postors segueixen la mateixa estratègia $\beta^I \equiv \beta$. A més, suposarem que l'estratègia β és una funció estrictament creixent i derivable. L'objectiu és determinar l'oferta òptima, b_i, del postor $i \in N$ que té una valoració $x \in X_i$.

L'òptima b_i no podrà ser mai $b_i > \beta(\omega)$, ja que, tot i que sempre s'obtingui l'objecte, aquest s'obté amb un sobrepreu que es podria estalviar. Així, l'oferta òptima estarà en $b_i \leq \beta(\omega)$. Cal observar que tot postor amb valoració nul·la, és a dir, igual a 0 de l'objecte, no realitzarà cap oferta, ja que en qualsevol cas obtindria pèrdues. Com a conseqüència, es compleix que $\beta(0) = 0$. A més, $\beta(x) \leq x$, ja que oferir més seria irracional.

El postor $i \in N$ guanyarà la subhasta si té una postura superior a la resta de postors, és a dir, quan $b_i \geq \max_{j \neq i} b_j$. Cal recordar que en cas que $b_i = \max_{j \neq i} b_j$ l'assignació de l'objecte es realitza amb igualtat de probabilitats. Clarament, $\max_{j \neq i} \beta(x_j) = \beta(\max_{j \neq i} x_j) = \beta(Y_1)$,[5] ja que β és creixent. Per tant, tal i com s'ha indicat abans, el postor $i \in N$ guanya la subhasta quan $b_i \geq \max_{j \neq i} b_j$ que és equivalent a $b_i \geq \beta(Y_1)$, equivalentment, $\beta^{-1}(b_i) \geq Y_1$.

D'aquesta manera, els beneficis esperats pel postor $i \in N$ oferint $b = b_i$ són:

$$\text{Beneficis}(b) = G(\beta^{-1}(b))(x - b).$$

Com que s'està buscant l'òptima b, s'haurà de maximitzar respecte aquesta variable, per tant, aplicarem les condicions de primer ordre.

$$\frac{g(\beta^{-1}(b))}{\beta'(\beta^{-1}(b))}(x - b) - G(\beta^{-1}(b)) = 0, \tag{3.2}$$

on g és la funció de densitat de la variable aleatòria Y_1. Atès que $b = \beta(x)$, l'equació (3.2) es pot reescriure com

$$G(x)\beta'(x) + g(x)\beta(x) = xg(x),$$

d'on surt

$$\frac{d}{dx}(G(x)\beta(x)) = xg(x).$$

L'expressió anterior és una equació diferencial ordinària de primer grau. Sabem que $\beta(0) = 0$. Per tant,

$$\beta(x) = \frac{1}{G(x)} \int_0^x tg(t)dt = E[Y_1 \mid Y_1 < x].$$

Aquesta és l'expressió de l'estratègia òptima per un postor amb valoració x, $\beta(x)$.

[5] Vegeu la Secció 2.4.

Proposició 3.3. *En una subhasta a primer preu, les estratègies en equilibri simètric vénen donades per*

$$\beta^I(x) = E[Y_1 \mid Y_1 < x], \tag{3.3}$$

on Y_1 és la variable aleatòria del màxim de les ofertes independents dels $n-1$ postors restants.

Demostració. Anem a veure que seguir l'estratègia donada per (3.3) és òptim pel jugador $i \in N$.
Per construcció β^I és una funció estrictament creixent i derivable. Sabem que les ofertes que pot fer el jugador i estan entre 0 i $\beta^I(\omega)$.

Veurem que si ofereix una quantitat b, diferent a la que correspon per β ($\equiv \beta^I$), resulta un guany inferior. Si ofereix b, aquesta quantitat correspon a un postor amb valoració z, és a dir, $\beta(z) = b$. Els beneficis esperats pel postor i si oferta $\beta(z) = b$ quan la seva valoració és $x \in X_i$ són:

$$\begin{aligned}
\Pi(b, x) &= G(z)[x - b] = G(z)[x - \beta(z)] \\
&= G(z)x - G(z)E[Y_1 \mid Y_1 < z] = G(z)x - \int_0^z yg(y)dy \\
&= G(z)x - \big[yG(y)\big]_0^z - \int_0^z G(y)dy = G(z)(x - z) + \int_0^z G(y)dy,
\end{aligned}$$

on hem integrat per parts.
En particular si ofereix $z = x$, llavors $b = \beta(x)$ i tindríem

$$\Pi(\beta(x), x) = G(x)(x - x) + \int_0^x G(y)dy = \int_0^x G(y)dy.$$

Aleshores la diferència entre els beneficis esperats si el postor i ofereix x o z serà

$$\Pi(\beta(x), x) - \Pi(\beta(z), x) = G(z)(z - x) - \int_x^z G(y)dy \geq 0,$$

independentment de x i z.

Això significa que tant si es fa una oferta més gran com més petita que la pròpia valoració, s'obtindrà una quantitat menor a la que es podria arribar a aconseguir. És per això que un postor amb valoració x només si oferta $\beta(x)$ guanya el màxim possible. Per tant, β és una estratègia d'equilibri simètric. □

L'estratègia en equilibri simètric es pot expressar com:

$$\begin{aligned}
\beta^I(x) &= E[Y_1 \mid Y_1 < x] = \frac{1}{G(x)} \int_0^x yg(y)dy \\
&= \frac{1}{G(x)} \left(xG(x) - \int_0^x G(y)dy \right) = x - \int_0^x \frac{G(y)}{G(x)}dy.
\end{aligned}$$

Això mostra que l'oferta és menor a la valoració x. Atès que

$$\frac{G(y)}{G(x)} = \left[\frac{F(y)}{F(x)}\right]^{n-1} \geq 0,$$

la quantitat en la que cal "afaitar"depèn del nombre de jugadors; a mesura que n augmenta, el quocient tendeix a 0 per $y \in [0, x)$. Per tant, a mesura que el nombre de postors augmenta, l'oferta d'equilibri $\beta^I(x)$ tendeix a x.

Un cop aconseguit l'equilibri simètric d'estratègies, en els casos de subhastes de primer i segon preu, podem comparar els preus de venta. Els ingressos que rep el venedor s'analitzaran en els dos formats de subhasta esmentats.
En una subhasta de primer preu, el postor que guanya la subhasta ha de pagar el preu que ha ofert; aquest preu, si el postor té una valoració x, serà:

$$m^I(x) = Prob[\text{Guanyar}] \cdot \text{Quantitat oferida} = G(x) \cdot E[Y_1 \mid Y_1 < x]. \tag{3.4}$$

S'observa que l'expressió anterior, (3.4), és la mateixa que la obtinguda en subhastes de segon preu, (3.1). Això és degut a que els ingressos esperats del venedor són la suma dels pagaments esperats dels postors, abans de conèixer les seves respectives valoracions -*ex ante*.[6] Llavors, els ingressos esperats per les subhastes de primer i segon preu coincideixen.

Exemple 3.4 (Continuació de l'Exemple 3.2, de valoracions uniformes en subhasta a primer preu)**.** Continuem amb l'exemple anterior. Recordem que tenim una variable aleatòria uniforme entre 0 i 1000 i n potencials compradors. Primer calculem β^I, l'estratègia en equilibri simètric,

$$\begin{aligned}
\beta^I(x) &= x - \int_0^x \frac{G(y)}{G(x)} dy = x - \int_0^x \left[\frac{F(y)}{F(x)}\right]^{n-1} dy = \\
&= x - \frac{1}{x^{n-1}} \int_0^x y^{n-1} dy = \frac{(n-1)x}{n}.
\end{aligned}$$

Si $n = 2$ tenim $\beta^I(x) = \frac{x}{2}$. A continuació veurem quant val l'ingrés esperat:

$$\begin{aligned}
E[m^I(x)] &= \int_0^{1000} m^I(x) f(x) dx = \int_0^{1000} G(x) \beta^I(x) f(x) dx = \\
&= \int_0^{1000} \frac{x^{n-1}}{1000^{n-1}} \frac{(n-1)x}{n} \frac{1}{1000} dx = \frac{n-1}{n(n+1)} 1000.
\end{aligned}$$

Si $n = 2$ tenim $E[m^I(x)] = \frac{500}{3}$. Observem que el resultat coincideix amb el resultat obtingut en el cas de subhastes en sobre tancat de segon preu.

3.2 Comparació d'ingressos

Ja hem vist que $m^I(x) = m^{II}(x)$, i per tant posarem $m^A(x)$ el pagament esperat per les valoracions *ex ante* d'un postor concret correspon a:

$$\begin{aligned}
E[m^A(X)] &= \int_0^{\omega} m^A(x) f(x) dx = \int_0^{\omega} G(x) E[Y_1 \mid Y_1 < x] f(x) dx \\
&= \int_0^{\omega} G(x) \frac{1}{G(x)} \left(\int_0^x y g(y) dy \right) f(x) dx = \int_0^{\omega} \left(\int_0^x y g(y) dy \right) f(x) dx \\
&= \int_0^{\omega} \left(\int_y^{\omega} f(x) dx \right) y g(y) dy = \int_0^{\omega} y(1 - F(y)) g(y) dy.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

[6]Ens referirem a valors *ex-ante* quan fem referència als valors esperats.

Denotem per $E[R^A]$ els ingressos esperats del venedor. Aquests són tan sols n cops els pagaments *ex ante* d'un postor individual. Llavors,

$$\begin{aligned} E[R^A] &= n \cdot E[m^A(X)] = n \int_0^\omega y(1-F(y))g(y)dy \\ &= \int_0^\omega y f_2^{(n)}(y)dy = E[Y_2^{(n)}], \end{aligned}$$

on s'utilitzen resultats de la secció 2.4 i es denota $f_1^{(n-1)}(y) = g(y)$.

En qualsevol cas, els ingressos esperats coincideixen amb la segona major valoració esperada. Així, podem enunciar el següent resultat, que és un cas particular del *Teorema d'equivalència d'ingressos* que es veurà a la següent secció.

Proposició 3.5. *Tenim una subhasta amb valoracions privades independents i idènticament distribuïdes. Els ingressos esperats en la subhasta de sobre tancat a primer preu coincideixen amb els ingressos esperats en la subhasta de sobre tancat a segon preu.*

El fet que els ingressos esperats de venda coincideixin tant a les subhastes de primer preu com de segon preu és sorprenent, ja que en subhastes concretes el preu de venda pot ser major o menor segons la subhasta.

Per exemple, suposem que hi ha dos únics postors i que les valoracions són privades i estan uniformement distribuïdes. Les valoracions compleixen $x_1 > x_2$. Recordem que l'estratègia d'equilibri de la subhasta a primer preu és $\beta^I(x) = \frac{1}{2}x$. Si

i). $\frac{1}{2}x_1 > x_2$: Els ingressos d'una subhasta a primer preu seran majors als d'una subhasta a segon preu.

ii). $x_1 > x_2 > \frac{1}{2}x_1$: Els ingressos d'una subhasta a primer preu seran menors als d'una subhasta a segon preu.

Podem observar que, efectivament, els ingressos poden ser majors en un tipus de subhasta o un altre segons les valoracions realitzades. La proposició anterior expressa el fet que la *mitjana* d'aquest resultat coincideixi.

Podem afegir alguns comentaris més sobre la distribució de preus de les subhastes a primer i segon preu. Els ingressos que s'obtenen de les subhastes a segon preu són més variables que els de primer preu, ja que, en els primers, els preus poden oscil·lar entre 0 i ω, mentre que en els segons només ho fan entre 0 i $E[Y_1]$.

Des de la perspectiva del venedor, una subhasta a segon preu comporta més risc que una a primer preu. Els venedors que siguin adversos al risc, sempre preferiran subhastes a primer preu, abans que a segon preu.

3.3 Principi d'equivalència

En la secció anterior hem vist que independentment de la funció de distribució, els preus esperats de venda en una subhasta de primer preu coincideixen amb els de subhastes a segon preu. Tot i que el preu d'una i altra pot diferir. S'exploraran les raons de la igualtat obtinguda a la Proposició 3.5. A més, es descobrirà que aquesta igualtat s'estén a tots els tipus de subhastes.

Resultat principal

Fins ara hem considerat que els postors presenten ofertes. Aquestes ofertes només determinen qui aconsegueix l'objecte i quin és el preu a pagar. Direm que una subhasta és *estàndard* si les regles de la subhasta determinen que el postor amb major oferta guanya l'objecte. Les subhastes que s'han tractat fins ara (primer i segon preu) són subhastes estàndards. Un exemple d'un mètode no estàndard seria la loteria, ja que les probabilitats de que un comprador guanyi a la loteria són proporcionals al total jugat; la persona que més juga no té perquè guanyar.

Ara considerem una subhasta estàndard, A, i un equilibri simètric de la subhasta donat per β^A. Sigui $m^A(x)$ el pagament esperat d'equilibri d'un postor amb valoració x. Resulta que si el pagament esperat d'un postor amb valoració 0 és 0 aleshores veurem que la funció de pagament esperat $m^A(.)$ no depèn d'A. Com a resultat, veurem en el "Principi d'equivalència d'ingressos"que els ingressos esperats en qualsevol subhasta estàndard són els mateixos.

Teorema 3.6. ***Principi d'equivalència d'ingressos.*** *Suposem que les valoracions són independents i idènticament distribuïdes i que tots els postors són neutrals al risc. Aleshores, qualsevol subhasta estàndard amb un equilibri simètric i creixent, tal que $m^A(0) = 0$, proporciona els mateixos ingressos esperats pel venedor.*[7]

Demostració. Considerem una subhasta de forma estàndard, A, i fixem un equilibri simètric i creixent β d'A. Posem $m^A(x)$ el pagament esperat a l'equilibri de la subhasta A per un postor amb valoració x. També suposem que es compleix $m^A(0) = 0$.

Sense pèrdua de generalitat, considerem un postor particular, per exemple $i \in N$, i suposem que la resta de postors segueixen l'estratègia d'equilibri β.

Suposem que el postor i oferta una quantitat diferent a $\beta(x)$. Li direm $\beta(z)$, ja que β és contínua i creixent, i per tant, pel teorema de la funció inversa correspon a una valoració z. El postor i guanya la subhasta quan la seva oferta és major a l'oferta de la resta de postors, és a dir, quan $\beta(z) > \beta(Y_1)$ i per tant a $z > Y_1$. Els beneficis esperats pels postors neutrals al risc són

$$\Pi^A(z, x) = G(z)x - m^A(z)$$

on, $G(z) \equiv F(z)^{n-1}$ és la distribució de Y_1, degut a que les valoracions són independents i idènticament distribuïdes. Cal remarcar que $m^A(z)$ depèn de β i z, però no depèn de x. Per trobar el màxim, apliquem les condicions de primer ordre,

$$\frac{d}{dz}\Pi^A(z, x) = g(z)x - \frac{d}{dz}m^A(z) = 0.$$

Com estem en l'equilibri, l'òptim és utilitzar $z = x$. Per tant, obtenim per tot y,

$$\frac{d}{dy}m^A(y) = g(y)y.$$

Com que $m^A(0) = 0$, obtenim

$$m^A(x) = m^A(0) + \int_0^x yg(y)dy = \int_0^x yg(y)dy = G(x) \cdot E[Y_1 \mid Y_1 < x].^8$$

[7]No hi ha preus d'entrada.

[8]Observem que és el resultat que hem obtingut tant a primer com a segon preu.

D'aquesta expressió resulta que el pagament no depèn del tipus de subhasta A.

□

Si les hipòtesis es relaxen, no podem afirmar el resultat del teorema. És per això que l'equivalència d'ingressos no es veu reflectida a la realitat.

3.4 Preus de reserva

En l'anàlisi feta fins ara, el venedor no ha jugat cap paper, tot i que s'ha assumit implícitament que l'objecte el voldrà vendre a qualsevol preu. En molts casos, els venedors tenen reservat el dret a no vendre l'objecte si el preu és inferior a una certa quantitat, diem-li $r > 0$, que s'anomena *preu de reserva*.

A partir d'ara, s'analitzarà l'efecte del preu de reserva en els ingressos esperats pel venedor.

Preus de reserva en subhastes a segon preu

Suposem que el venedor posa un preu de reserva $r > 0$. Com que el preu de l'objecte mai serà inferior a r, cap postor amb valoració $x < r$ podrà obtenir un benefici positiu en la subhasta. Que la subhasta tingui preu de reserva no fa que els postors modifiquin el seu comportament; l'estratègia dominant (en sentit dèbil) segueix sent oferir la pròpia valoració. El preu esperat a pagar per un postor amb valoració x amb preu de reserva r és

$$m^{II}(x,r) = rG(r) + \int_r^x yg(y)dy \quad \text{si } x \geq r \tag{3.6}$$

on x denota la valoració del postor ($x \geq r$). Si $x < r$, $m^{II}(x,r) = 0$.

El guanyador paga el preu de reserva r independentment de si la segona oferta més elevada és inferior a r.

Preus de reserva en subhastes a primer preu

Considerem una subhasta a primer preu amb preu de reserva $r > 0$. Com que el preu de l'objecte mai serà inferior a r, cap postor amb valoració $x < r$ podrà obtenir un benefici positiu en la subhasta. A més, si posem β^I l'equilibri simètric d'una subhasta a primer preu amb preu de reserva r és

$$\beta^I(x,r) = E[\max(Y_1, r) \mid Y_1 < x] = r\frac{G(r)}{G(x)} + \frac{1}{G(x)}\int_r^x yg(y)dy \quad \text{si } x \geq r.$$

El cas $x = r$, és degut a que un postor amb valoració r guanyarà la subhasta només si la resta de postors han ofert un preu inferior o igual a r.
El preu esperat a pagar pel postor guanyador és

$$m^I(x,r) = G(x)\beta^I(x) = rG(r) + \int_r^x yg(y)dy \quad \text{si } x \geq r \tag{3.7}$$

que coincideix amb l'expressió obtinguda a (3.6). Veiem que els pagaments esperats i, així, els ingressos esperats són els mateixos en les subhastes a primer i segon preu. Per tant, es reafirma el resultat obtingut a la Proposició 3.5 amb preus de reserva.

Efecte dels preus de reserva en els ingressos del venedor

Atès que hem vist que els ingressos esperats del venedor coincideixen en les subhastes a primer i segon preu, es vol saber com afecten els preus de reserva als ingressos esperats del venedor.[9] Denotarem A com una subhasta a primer o segon preu indistintament. El preu esperat a pagar per un postor amb valoració r és $rG(r)$. Mentre que el preu *ex ante* d'un postor, s'obté fent uns càlculs similars als utilitzats a (3.5),

$$E[m^A(X,r)] = \int_r^\omega m^A(x,r)f(x)dx = r(1-F(r))G(r) + \int_r^\omega y(1-F(y))g(y)dy.$$

L'objectiu d'aquest apartat és conèixer quin és el preu de reserva òptim per tal de maximitzar els ingressos del venedor. Suposem que el venedor valora l'objecte en $x_0 \in [0,\omega)$, això significa que ell obté una valoració de x_0 de la seva possessió o ús. Clarament, el venedor no posarà un preu de reserva $r < x_0$ ja que té possibilitats d'obtenir pèrdues. En general, el preu de reserva serà $r \geq x_0$ i s'esperaran uns beneficis per part del venedor de

$$\Pi_0(r,x_0) = n \cdot E[m^A(X,r)] + F(r)^n x_0.$$

Per calcular el màxim, apliquem condicions de primer ordre

$$\frac{d\Pi_0}{dr}(r,x_0) = n[1-F(r)-rf(r)]G(r) + nG(r)f(r)x_0.$$

Definim la *taxa de risc*[10] associada a la funció de distribució F com $\lambda(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$, que és equivalent a posar $f(x) = \lambda(x)(1-F(x))$. Així, si substituïm f a l'equació anterior obtenim

$$\begin{aligned}\frac{d\Pi_0}{dr}(r,x_0) &= n[1-F(r)-r(\lambda(r)(1-F(r)))]G(r) + nG(r)\lambda(r)(1-F(r))x_0 = \\ &= nG(r)(1-F(r))(1-(r-x_0)\lambda(r))).\end{aligned}$$

S'observa que si $x_0 > 0$, la derivada de Π_0 avaluada en $r = x_0$

$$\frac{d\Pi_0}{dr}(x_0,x_0) = n \cdot G(x_0) \cdot (1-F(x_0)) \geq 0$$

és positiva ja que F i G prenen valors entre 0 i 1, el que implica que Π_0 és creixent a $r = x_0$. Per tant, el venedor fixarà un preu de reserva $r > x_0$. En cas que $x_0 = 0$, la derivada de Π_0 respecte r avaluada en $r = 0$ serà igual a 0, ja que $G(0) = 0$. Si afegim la taxa de risc associada a la funció de distribució F, $\lambda(x) = f(x)/(1-F(x))$. Aleshores, podem escriure

$$\frac{d\Pi_0}{dr}(r,x_0,x) = n[1-(r-x_0)\lambda(x)](1-F(r))G(r).$$

Veiem que si $x_0 > 0$, la derivada de Π_0 avaluada en $r = x_0$ és positiva, això implica que el preu de reserva que s'haurà de fixar serà de $r > x_0$. En canvi, si fixem $x_0 = 0$, la derivada de Π_0 avaluada en $r = 0$ és igual a 0; com que $\lambda(r)$ està acotada els pagaments esperats es troben en un mínim local (en el 0), això porta a que un petit increment del preu de

[9] El venedor el considerarem com el "jugador"0.

[10] Si F representa la probabilitat que un esdeveniment passi abans de x, aleshores la taxa de risc representa la probabilitat que un esdeveniment passi justament a x, sense que s'hagi donat anteriorment. Un postor pot ser més afí o advers al risc segons el seu caràcter.

reserva comportarà un augment dels ingressos. D'aquesta manera, un venedor que vulgui maximitzar els seus ingressos, haurà de fixar un preu de reserva que sobrepassi la seva valoració. Sense entrar en detall, anem a veure a través d'un exemple com pot ser que posar un preu de reserva major a x_0 condueixi a un increment dels ingressos. Considerem una subhasta de segon preu amb dos postors i $x_0 = 0$. Si es fixa un preu de reserva r, el venedor corre el risc de que els dos postors ofereixin menys que r i l'objecte quedi sense vendre. Aquesta possibilitat es compensa amb la possibilitat que la major valoració Y_1 sigui major a r, mentre que la segona Y_2 no ho sigui.[11] En aquest cas, degut al preu de reserva, l'objecte es vendrà per r en comptes de Y_2. La probabilitat de que les dues ofertes estiguin per sota el preu de reserva és de $F(r)^2$ i la pèrdua màxima generada és r. Mentre que la possibilitat que una oferta sigui superior a r i l'altra sigui inferior té una probabilitat de $2F(r)(1 - F(r))$ i el mínim guany aconseguit serà de r. Per tant, els guanys esperats de posar un preu de reserva petit són superiors a les pèrdues esperades en cas de no posar-lo.

Condicions d'entrada

Hem vist que si el preu de reserva és $r > 0$ s'exclouen de la subhasta tots els postors amb valoració $x < r$. Una altra manera que té el venedor per excloure de la subhasta als postors amb "baixes" valoracions és fixar una taxa d'entrada. Una *taxa d'entrada* és una quantitat fixada de diners que els compradors paguen al venedor per poder fer ofertes en la subhasta. Aquesta quantitat no és reemborsable. També es coneix com a preu d'admissió.

Com ja s'ha vist, un preu de reserva r exclou de la subhasta a tots els postors amb valoració $x < r$. Els mateixos postors poden ser exclosos si se'ls hi demana un preu o taxa d'entrada e tal que

$$e = \int_0^r G(y)dy.$$

e és igual als ingressos esperats d'un postor amb valoració r, independentment del tipus de subhasta. D'aquesta manera, un postor amb valoració $x < r$, no li val la pena entrar a la subhasta ja que els seus beneficis esperats són menors a e. Així, l'efecte d'exclusió mitjançant un preu de reserva, es pot aconseguir amb una taxa d'entrada e prèviament calculada. A la vegada, l'efecte exclusió d'una taxa d'entrada, es pot aconseguir amb un preu de reserva.

Ingressos vs eficiència

El preu de reserva, o equivalentment una taxa d'entrada, augmenta els beneficis que rep el comprador però en pot deteriorar l'eficiència. Suposem que la valoració de l'objecte per part del venedor és 0. Si no es fixa un preu de reserva, l'objecte es vendrà sempre al major postor, que en un model simètric coincideix amb el postor amb major valoració. Així, tant en una subhasta a primer com a segon preu, l'objecte acaba en mans del postor que més el valora. D'altra banda, si es fixa un preu de reserva, $r > 0$, existeix la possibilitat que l'objecte no es vengui i es quedi en mans del venedor, aquesta situació serà ineficient. Aquest fet fa pensar que hi hagi un terme mig entre ingressos i eficiència.

[11] En la resta de casos, el preu de reserva no té efecte.

Capítol 4

Disseny de mecanismes

En l'actualitat, els economistes no només analitzen el mercat, sinó que també el "dissenyen".[1] Les propietats que es volen aconseguir amb el disseny són essencials, no manipulació, eficiència... Dissenyar un mercat no només implica indicar les seves característiques principals sinó també ser detallista, implementar totes les seves possibles complicacions... D'altra banda, uns dissenyadors no podrien fer aquesta tasca tot sols ja que, els models conceptuals que s'utilitzen en el marc teòric no inclouen tota la complexitat d'un mercat. És per això que el disseny de mercats necessita d'un punt de vista enfocat a l'enginyeria. D'aquesta manera veiem que la teoria del disseny de mecanismes té una vessant humana. Vegeu Roth, (2002) [15].

Els mecanismes són una eina important en la microeconomia. S'ha vist que tenen moltes aplicacions en modelització i disseny de solucions de problemes amb informació asimètrica. Aquestes aplicacions les podem trobar en els camps de l'enginyeria, ciències de la computació, comerç electrònic i economia. Recentment s'ha vist la importància del disseny de mecanismes que podem veure reflectida en el Premi Nobel d'Economia de l'any 2007 lliurat a tres matemàtics i economistes: L. Hurwicz, E. Maskin i R. Myerson per haver descrit els fonaments de la teoria del disseny de mecanismes.

Una subhasta és una de les maneres que té un venedor per vendre un objecte a $n \in \mathbb{N}$ potencials compradors amb valoracions desconegudes. En una subhasta, l'objecte es ven a un preu acordat competitivament[2] entre els potencials compradors. Tot i així, el venedor té més maneres de vendre l'objecte. Per exemple, el venedor podria fixar un preu i vendre l'objecte al primer postor que l'assoleixi, podria triar un potencial comprador a l'atzar i negociar amb ell el preu, podria dur a terme una subhasta i després renegociar el preu amb el comprador "guanyador"... Aquest capítol considera el problema d'assignació d'una subhasta independentment del format de preus i de forma general es pregunta: Quina és la millor manera d'assignar un objecte?

Volem utilitzar els mecanismes en el context general de les subhastes. El seu funcionament haurà de ser possible en tot tipus de subhastes i l'objectiu és donar un resultat (qui ha guanyat i quant ha de pagar) a partir de les pròpies valoracions dels postors. Aquest mecanisme haurà de complir una sèrie de característiques. La majoria dels mecanismes són estàndard i s'utilitzen en els quatre formats bàsics de subhasta.[3]

[1] En aquest context, "dissenyar"es refereix a preveure com s'han de fer les institucions per aconseguir els objectius buscats deixant als agents la llibertat d'actuació.

[2] Seguint les normes de les subhastes i les restriccions del venedor.

[3] A primer i segon preu, ascendents i descendents.

4.1 Mecanismes

Com hem vist anteriorment, tenim un venedor que vol vendre un únic objecte indivisible i $n \in \mathbb{N}$ potencials compradors neutrals al risc. El conjunt de compradors l'indiquem per $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Els compradors o postors tindran valoracions privades, independents i idènticament distribuïdes.[4] El postor $i \in N$ obtindrà la seva valoració de la variable aleatòria X_i distribuïda a l'interval $\mathcal{X}_i = [0, \omega_i]$ seguint la funció de distribució F_i amb densitat associada f_i.

Per tal de simplificar, suposarem que el valor de l'objecte pel venedor és 0.

Indiquem per $\mathcal{X} = \Pi_{j=1}^{n} \mathcal{X}_j$ el producte del conjunt d'intervals de valoració dels potencials compradors i per tot $i \in N$, sigui $\mathcal{X}_{-i} = \Pi_{j \neq i} \mathcal{X}_j$ el producte del conjunt dels intervals de valoració dels potencials compradors excepte el del postor i. Definim $f(\mathbf{x})$ com la densitat conjunta de $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{X}$. Com que les valoracions són independents tenim que $f(\mathbf{x}) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot \ldots \cdot f_n(x_n)$ i de forma similar, definim $f_{-i}(\mathbf{x}_{-i})$ com la densitat conjunta de $\mathbf{x}_{-i} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ per $i \in N$. A continuació, definim de forma general què és un mecanisme de venda.

Un *mecanisme de venda* és una terna $(\mathcal{B}, \pi, \mu)$, on

- $\mathcal{B} = \Pi_{i \in N} \mathcal{B}_i$, on $\mathcal{B}_i$ és el conjunt de possibles *missatges* o *ofertes* per cada jugador $i \in N$. Un element de $\mathcal{B}$ serà de la forma $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

- $\pi : \mathcal{B} \longrightarrow \Delta$ és una *regla d'assignació* on el símplex $\Delta = \{(p_1, p_2, \ldots, p_n) \in [0,1]^n \mid \sum_{i \in N} p_i = 1\}$ és el conjunt de distribucions de probabilitat sobre el conjunt de compradors N. Una regla d'assignació determina, en funció de les ofertes, la probabilitat per cada postor $i \in N$, d'aconseguir l'objecte, $\pi_i(\mathbf{b})$.

- $\mu : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ és una *regla de pagament.* Una regla de pagament determina, en funció de les ofertes, el pagament esperat per cada postor $i \in N$. El denotem per $\mu_i(\mathbf{b})$.

Les subhastes a primer i segon preu són mecanismes. En aquest cas, el conjunt de possibles ofertes $\mathcal{B}_i$ és $\mathcal{X}_i$. Un cop se sap la pròpia valoració $x_i \in \mathcal{X}_i$, la quantitat que ofereix el postor $i \in N$ és $b_i = \beta_i(x_i) \in \mathcal{B}_i$. Si assumim que no hi ha cap preu de reserva, la regla d'assignació en les dues modalitats de subhasta és

$$\pi_i(\mathbf{b}) = \begin{cases} 1 & \text{si } b_i > \max_{j \neq i} b_j, \\ 0 & \text{si } b_i < \max_{j \neq i} b_j, \\ \frac{1}{\#\{j \in N | b_j = b_i\}} & \text{si } b_i = \max_{j \neq i} b_j. \end{cases}$$

Vegem però que difereixen en el pagament esperat. En una subhasta a primer preu es té

$$\mu_i^I(\mathbf{b}) = \begin{cases} b_i & \text{si } b_i > \max_{j \neq i} b_j, \\ 0 & \text{si } b_i < \max_{j \neq i} b_j, \\ \frac{1}{\#\{j \in N | b_j = b_i\}} b_i & \text{si } b_i = \max_{j \neq i} b_j. \end{cases}$$

[4]En aquest capítol, la distribució de les valoracions dels compradors podria no ser la mateixa per tots ells.

En canvi, en una subhasta a segon preu es té

$$\mu_i^{II}(\mathbf{b}) = \begin{cases} \max_{j\neq i} b_j & \text{si } b_i > \max_{j\neq i} b_j, \\ 0 & \text{si } b_i < \max_{j\neq i} b_j, \\ \frac{1}{\#\{j\in N | b_j = b_i\}} \max_{i\in N} b_i & \text{si } b_i = \max_{j\neq i} b_j. \end{cases}$$

Cada mecanisme defineix un joc d'informació incompleta entre els postors. Una n-tupla d'estratègies $(\beta_i)_{i\in N}$ on $\beta_i : [0, \omega_i] \longrightarrow \mathcal{B}_i$ és un *equilibri* d'un mecanisme (de venda) si per tot $i \in N$ i per tot $x_i \in \mathcal{X}_i$, $\beta_i(x_i)$ maximitza el benefici esperat del postor i, prenent com a donades les estratègies de la resta de postors, β_{-i}.

4.2 Mecanismes directes. El principi de revelació

Un mecanisme pot ser força complicat si no es fan algunes suposicions sobre el conjunt $\mathcal{B}$ d'ofertes. Un subconjunt més senzill de mecanismes és aquell en que el conjunt d'ofertes coincideix amb el conjunt de valoracions, és a dir $\mathcal{B}_i = \mathcal{X}_i$ per tot $i \in N$. Aquests mecanismes s'anomenen *directes* perquè a cada postor se li demana directament que expressi la seva valoració.

Formalment, un *mecanisme directe* $(\mathbf{Q}, \mathbf{M})$ consisteix en dues funcions,

$$\mathbf{Q} : \mathcal{X} \longrightarrow \Delta \quad \text{on} \quad \mathbf{Q}(\mathbf{x}) = (\mathbf{Q}_1(\mathbf{x}), \mathbf{Q}_2(\mathbf{x}), \ldots, \mathbf{Q}_n(\mathbf{x})) \in \Delta$$

i

$$\mathbf{M} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{on} \quad \mathbf{M}(\mathbf{x}) = (\mathbf{M}_1(\mathbf{x}), \mathbf{M}_2(\mathbf{x}), \ldots, \mathbf{M}_n(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^n.$$

El valor $Q_i(\mathbf{x})$ és la probabilitat pel postor $i \in N$ d'aconseguir l'objecte i $M_i(\mathbf{x})$ el pagament esperat del postor i.

Recordem que un mecanisme s'ha definit com una terna $(\mathcal{B}, \pi, \mu)$. En el cas de mecanismes directes considerem que $\mathcal{B} = \mathcal{X}$, $\pi = \mathbf{Q}$ i $\mu = \mathbf{M}$. És per això que un mecanisme directe s'expressa com $(\mathbf{Q}, \mathbf{M})$.

Un equilibri d'un mecanisme directe és una assignació dels postors a guanyar l'objecte i un pagament esperat per tots ells, que fa que no existeixi una opció que millori la situació per cap postor. El mecanisme estarà suportat per la sinceritat.

Diem que un mecanisme directe $(\mathbf{Q}, \mathbf{M})$ admet un equilibri sincer si $\beta(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ és un equilibri del mecanisme. És a dir, si revelar la seva pròpia valoració per cada postor és un equilibri, aleshores el mecanisme directe obtindrà un equilibri sincer. Ens referirem a $(\mathbf{Q}(\mathbf{x}), \mathbf{M}(\mathbf{x}))$ com el resultat obtingut del mecanisme a $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$.

El següent resultat, el *principi de revelació*, és fonamental en la teoria de disseny de mecanismes. Il·lustra la relació entre un mecanisme indirecte i un directe, mostrant com els resultats obtinguts com a conseqüència d'utilitzar un mecanisme en un equilibri es poden reproduir per un equilibri sincer utilitzant mecanismes directes. En aquest sentit, no s'obté cap pèrdua de generalitat quan focalitzem en mecanismes directes.

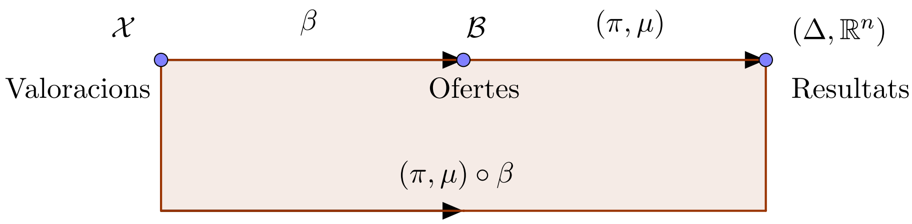
Proposició 4.1 (Principi de Revelació). *Donat un mecanisme $(\mathcal{B}, \pi, \mu)$ i un equilibri β per a aquest mecanisme, existeix un mecanisme directe en què*

a) dir la pròpia valoració de cada comprador és un equilibri, *b) els resultats coincideixen amb els donats per l'equilibri en el mecanisme original.*

Demostració. Sigui $(\mathcal{B}, \pi, \mu)$ un mecanisme qualsevol i β l'equilibri associat a aquest mecanisme. Atès que β és un equilibri, el mecanisme original maximitza el benefici per cadascun dels postors un cop donades les ofertes de la resta de postors.

Definim el següent mecanisme directe $(\mathbf{Q}, \mathbf{M})$ on $\mathbf{Q} : \mathcal{X} \longrightarrow \Delta$ i $\mathbf{M} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Si posem $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \pi(\beta(\mathbf{x}))$ i $\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \mu(\beta(\mathbf{x}))$, el mecanisme directe s'obté de la composició $(\pi, \mu) \circ \beta$.

Vegeu el següent diagrama:



Observem que dir la pròpia valoració és el millor que es pot fer; ja que en cas contrari, hauria de sortir a compte dir una valoració diferent en el mecanisme original. Però com que β és un equilibri no pot ser.

D'aquesta manera, veiem que l'afirmació *a)* és compleix per ser β un equilibri i l'afirmació *b)* es compleix per construcció. $\square$

La idea que sustenta el principi de revelació és simple. Fixem un mecanisme i un equilibri β del mecanisme anterior. Ara, en comptes de tenir postors que presenten ofertes $b_i = \beta_i(x_i)$ per tal de determinar el resultat –qui s'enduu l'objecte i quant ha de pagar– podem demanar directament les valoracions $x_i \in \mathcal{X}_i$ dels postors i assegurar-nos que obtenim el mateix resultat que el que hauríem obtingut si haguessin fet $\beta_i(x_i)$. Expressat d'una altra manera, un mecanisme directe fa "els càlculs"per obtenir l'equilibri dels postors automàticament.

Observem que en el mecanisme directe que un postor $i \in N$ digui una valoració $z_i \in \mathcal{X}_i$ diferent a l'autèntica valoració $x_i \in \mathcal{X}_i$ és equivalent a que en el mecanisme original el postor trobi beneficiós presentar l'oferta $\beta_i(z_i)$ enlloc de $\beta_i(x_i)$. Atès que β és un equilibri, els guanys esperats seran sempre iguals o menors a $\beta(x_i)$.

4.3 Compatibilitat d'incentius

En aquest apartat distingirem els mecanismes directes que donen lloc a un equilibri sincer i n'estudiarem les seves propietats. Per fer-ho, necessitem introduir nova notació.

Donat un mecanisme directe $(\mathbf{Q}, \mathbf{M})$, definim

$$q_i(z_i) = \int_{\mathcal{X}_{-i}} Q_i(z_i, \mathbf{x}_{-i}) f_{-i}(\mathbf{x}_{-i}) d\mathbf{x}_{-i}, \quad z_i \in \mathcal{X}_i. \tag{4.1}$$

Aquesta és la probabilitat de que el postor $i \in N$ aconsegueixi l'objecte quan presenta una valoració de $z_i \in \mathcal{X}_i$, en comptes de $x_i \in \mathcal{X}_i$, i la resta de postors presenten la seva valoració vertadera. Per visualitzar-ho vegem un petit exemple en el cas discret. Suposem que tenim dos postors amb possibles valoracions $\{a, b, c\}$ i $\{s, t, q\}$ respectivament. Aleshores, la probabilitat que té el postor 2 d'aconseguir l'objecte amb una valoració s és

$$q_2(s) = Q_2(a, s)P(x_1 = a) + Q_2(b, s)P(x_1 = b) + Q_2(c, s)P(x_1 = c).$$

De manera similar definim

$$m_i(z_i) = \int_{\mathcal{X}_{-i}} M_i(z_i, \mathbf{x}_{-i}) f_{-i}(\mathbf{x}_{-i}) d\mathbf{x}_{-i}, \quad z_i \in \mathcal{X}_i.$$

És el pagament esperat del postor $i \in N$ quan presenta una valoració $z_i \in \mathcal{X}_i$ i la resta de postors presenten la seva valoració vertadera. És important veure que com que les valoracions són independentment distribuïdes, la probabilitat d'aconseguir l'objecte i el pagament esperat depenen només de l'oferta presentada z_i i no de la valoració real x_i. El benefici esperat del postor i quan la seva valoració real és x_i però presenta com oferta z_i, assumint que la resta de postors han presentat la seva valoració real, es pot escriure com

$$q_i(z_i)x_i - m_i(z_i),$$

és a dir, el benefici que aconsegueix el postor i correspon a la probabilitat d'aconseguir l'objecte a partir de l'oferta presentada per ell multiplicada per la seva valoració que té de l'objecte menys el pagament que hagi de fer.

Un mecanisme directe de revelació $(\mathbf{Q}, \mathbf{M})$ es diu *compatible amb els incentius* si $\forall i \in N$ amb valoració real $x_i \in \mathcal{X}_i$ es compleix

$$q_i(x_i)x_i - m_i(x_i) \geq q_i(z_i)x_i - m_i(z_i), \quad \forall z_i \in \mathcal{X}_i.$$

Veiem que l'expressió del benefici esperat es maximitza quan $z_i = x_i$.

La compatibilitat d'incentius captura l'essència de dissenyar un mecanisme que superi el propi interès dels agents. En un mecanisme compatible amb els incentius un agent escollirà presentar la seva pròpia valoració pel seu propi benefici. També es pot entendre com que un mecanisme $(\mathbf{Q}, \mathbf{M})$ compatible amb els incentius admet un equilibri sincer on tothom reporta la veritat, és a dir, té com a equilibri $\beta(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$.

Definim la funció d'equilibri en els resultats com $U_i(x_i) \equiv q_i(x_i)x_i - m_i(x_i)$. Compleix que $\forall i \in N$ amb la seva valoració real $x_i \in \mathcal{X}_i$, $U_i(x_i) \geq q_i(z_i)x_i - m_i(z_i), \quad \forall z_i \in \mathcal{X}_i$. Observem que ser compatible amb els incentius té algunes implicacions.

Primer, si la valoració presentada és $z_i \in \mathcal{X}_i$, el resultat esperat serà $q_i(z_i)x_i - m_i(z_i)$ que correspon a una funció afí del valor veritable $x_i \in \mathcal{X}_i$. La compatibilitat amb els incentius implica que

$$U_i(x_i) \equiv \max_{z_i \in \mathcal{X}_i} \{q_i(z_i)x_i - m_i(z_i)\}$$

això és que U_i és el màxim d'una família de funcions afins. Per tant, U_i és una funció convexa.[5]

[5]Sigui $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunt convex i no buit, i $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$. Llavors, f és una *funció convexa* en S si i només si

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \quad \forall \lambda \in [0,1] \quad \text{i} \quad \forall x, y \in S.$$

Vegeu Boyd i Vandenberghe, [1].

Segon, per tot $x_i \in \mathcal{X}_i$ i per tot $z_i \in \mathcal{X}_i$ podem escriure,

$$\begin{aligned} q_i(x_i)z_i - m_i(x_i) &= q_i(x_i)x_i - m_i(x_i) + q_i(x_i)(z_i - x_i) \\ &= U_i(x_i) + q_i(x_i)(z_i - x_i), \end{aligned}$$

per tant, la compatibilitat amb els incentius és equivalent a per tot x_i i z_i,

$$U_i(z_i) \geq U_i(x_i) + q_i(x_i)(z_i - x_i). \tag{4.2}$$

Això implica que per tot x_i, $q_i(x_i)$ és el pendent d'una recta de variable z_i amb ordenada a x_i igual a $U_i(x_i)$. Una funció convexa és absolutament continua i, per tant, és diferenciable quasi a tot arreu[6] de l'interior del seu domini (vegeu Royden, [16]). Així, en tot punt on U_i és diferenciable,

$$U_i'(x_i) = q_i(x_i).$$

Com que U_i és convexa, això implica que q_i és una funció no decreixent.

En tercer lloc, com que tota funció absolutament contínua es pot expressar com la integral de la seva derivada, llavors tenim,

$$U_i(x_i) = U_i(0) + \int_0^{x_i} q_i(t)dt \tag{4.3}$$

això implica que exceptuant la suma d'una constant, el benefici d'un comprador en un mecanisme directe amb compatibilitat d'incentius $(\mathbf{Q}, \mathbf{M})$ només depèn de la regla d'assignació $\mathbf{Q}$. Si $(\mathbf{Q}, \mathbf{M})$ i $(\mathbf{Q}, \underline{\mathbf{M}})$ són dos mecanismes amb incentius compatibles amb la mateixa regla d'assignació $\mathbf{Q}$, però amb diferents regles de pagament, aleshores les funcions de pagament esperat associades als dos mecanismes U_i i $\underline{U_i}$ respectivament, difereixen en la constant -els dos mecanismes es diuen *equivalents en resultat*. Dit d'una altra manera, el resultat esperat vé totalment determinat per la regla d'assignació $\mathbf{Q}$; mentre que la constant $U_i(0)$ la determina la regla de pagament $\mathbf{M}$.

Finalment, un mecanisme té compatibilitat amb els incentius si, i només si té associada una funció q_i no decreixent. Ja hem vist que per obtenir compatibilitat d'incentius, q_i és no decreixent. Per veure la implicació contrària, observem que si q_i és no decreixent, llavors

$$\int_{x_i}^{z_i} q_i(t_i)dt_i \geq q_i(x_i)(z_i - x_i)$$

i és evident utilitzant (4.2) i (4.3) provem l'equivalència desitjada.

L'equivalència de resultats deduïda aquí implica directament una forma general del principi d'equivalència d'ingressos.

Proposició 4.2 (Equivalència d'ingressos). *Si un mecanisme directe* $(\mathbf{Q}, \mathbf{M})$ *és compatible amb els incentius, aleshores, per tot* $i \in N$ *i per tota valoració real* $x_i \in \mathcal{X}_i$ *el pagament esperat del comprador és*

$$m_i(x_i) = m_i(0) + q_i(x_i)x_i - \int_0^{x_i} q_i(t)dt \tag{4.4}$$

Per tant, si tenim mecanismes diferents amb la mateixa regla d'assignació i compatibles amb els incentius, els pagaments esperats de tots ells seran equivalents però diferiran en una constant.

[6] Excepte en un conjunt de mesura zero.

Demostració. Recordem que $U_i(x_i) = q_i(x_i)x_i - m_i(x_i)$ i $U_i(0) = -m_i(0)$. Llavors la igualtat (4.3) pot ser reescrita com (4.4). □

Observem que la Proposició 4.2 implica que si agafem una subhasta a primer preu i una altra a segon preu podem observar que totes dues utilitzen la mateixa regla d'assignació, l'objecte el guanya el jugador que té major valoració (ja que ens trobem en el cas de mecanismes compatibles amb incentius on el millor que un postor pot presentar és la seva pròpia valoració). Veiem que el mecanisme d'assignació és independent del tipus de subhasta. En canvi, la subhasta a primer i segon preu difereixen en el pagament.

La Proposició 4.2 generalitza el principi d'equivalència d'ingressos del Teorema 3.6 en situacions on els compradors poden ser asimètrics. Per veure-ho, observem que si els compradors són simètrics i existeix un equilibri simètric, aleshores l'objecte s'assigna al comprador amb major valoració. La resta d'hipòtesis són necessàries per aconseguir $m_i(0) = 0$. Per tant, l'enunciat en aquest cas es comporta com el Teorema 3.6.

En canvi, a primer cop d'ull, la Proposició 4.2 sembla contradir els resultats en el Teorema 3.6 en el cas de compradors asimètrics. Això és degut a que el principi d'equivalència d'ingressos sembla no complir-se per subhastes a primer i segon preu. La Proposició 4.2 implica que només donades algunes asimetries aleshores els ingressos que s'obtenen són equivalents. Aquestes asimetries corresponen a aquells mecanismes que tenen la mateixa regla d'assignació. En cas que els compradors siguin asimètrics, les subhastes a primer o segon preu assignen l'objecte de manera diferent; normalment la subhasta de segon preu assigna de manera eficient mentre que la de primer preu no. Això explica les diferències en els pagaments i els ingressos resultants de les dues subhastes quan els compradors no són simètrics.

El principi d'equivalència d'ingressos general pot ser molt útil si el reafirmem com: 'En un mecanisme compatible amb els incentius el pagament esperat per un comprador depèn de la regla d'assignació excepte una constant'.

4.4 Mecanismes òptims

En aquesta secció veurem el venedor com a dissenyador del mecanisme i examinarem quins són els mecanismes que maximitzen els ingressos esperats[7] entre els mecanismes compatibles amb els incentius i racionals individualment (que explicarem a continuació). És a dir, el venedor haurà d'escollir la $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{M}$ que maximitzin els seus beneficis. Per fer-ho utilitzarem el principi de revelació, que ens permet fer aquest estudi per mecanismes directes sense perdre generalitat.

En un mecanisme on els pagaments resultants siguin molt alts relativament a les valoracions privades, els compradors preferiran no participar en la subhasta. Amb aquest punt de partida podem dir que un mecanisme directe $(\mathbf{Q}, \mathbf{M})$ és *individualment racional* si per tot $i \in N$ i la seva valoració real $x_i \in \mathcal{X}_i$, el benefici esperat d'equilibri és $U_i(x_i) \geq 0$. Estem assumint que si un comprador no participa en una subhasta, no tindrà ni costs ni guanys. La racionalitat individual ens diu que participar no dona pèrdues. És a dir, tindrem racionalitat individual si el postor pot decidir voluntàriament si participar o no en una subhasta. Això farà que el mecanisme estigui dissenyat de manera que sempre pugui aconseguir més utilitat participant en la subhasta que no fent-ho.

[7]Recordem que els ingressos esperats del venedor són la suma dels pagaments esperats per tots els compradors.

Si el mecanisme té compatibilitat amb els incentius, aleshores de (4.3) la racionalitat individual és equivalent a la hipòtesis $U_i(0) \geq 0$, i com que $U_i(0) = -m_i(0)$, és el mateix que dir $m_i(0) \leq 0$.

Si un mecanisme és compatible amb els incentius i individualment racional aleshores maximitza els ingressos esperats del venedor. L'anomenarem *mecanisme òptim*.

Suposem que el venedor utilitza un mecanisme directe $(\mathbf{Q}, \mathbf{M})$. L'ingrés esperat pel venedor és

$$E[R] = \sum_{i \in N} E[m_i(X_i)]$$

on el pagament esperat *ex ante* del postor $i \in N$ és

$$\begin{aligned} E[m_i(X_i)] &= \int_0^{w_i} m_i(x_i) f_i(x_i) dx_i \\ &= m_i(0) + \int_0^{w_i} q_i(x_i) x_i f_i(x_i) dx_i - \int_0^{w_i} \left(\int_0^{x_i} q_i(t_i) f_i(x_i) dt_i \right) dx_i \end{aligned}$$

on la segona equació segueix de (4.4). Per calcular la integral de l'últim terme intercanviem l'ordre d'integració

$$\int_0^{w_i} \int_0^{x_i} q_i(t_i) f_i(x_i) dt_i dx_i = \int_0^{w_i} \int_{t_i}^{w_i} q_i(t_i) f_i(x_i) dx_i dt_i \quad = \int_0^{w_i} (1 - F_i(t_i)) q_i(t_i) dt_i.$$

La primera igualtat surt d'aplicar el teorema de Fubini i que $x_i \in [0, \omega_i)$. Per tant, podem escriure,

$$\begin{aligned} E[m_i(X_i)] &= m_i(0) + \int_0^{w_i} \left(x_i - \frac{1 - F_i(x_i)}{f_i(x_i)} \right) q_i(x_i) f_i(x_i) dx_i \\ &= m_i(0) + \int_{\mathcal{X}} \left(x_i - \frac{1 - F_i(x_i)}{f_i(x_i)} \right) Q_i(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

utilitzant (4.1).

Per tant, l'objectiu del venedor és trobar un mecanisme que maximitzi

$$\sum_{i \in N} m_i(0) + \sum_{i \in N} \int_{\mathcal{X}} \left(x_i - \frac{1 - F_i(x_i)}{f_i(x_i)} \right) Q_i(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \tag{4.5}$$

tenint en compte que hi ha compatibilitat amb els incentius i racionalitat individual. Recordem que la compatibilitat d'incentius és equivalent al fet que q_i sigui no decreixent; mentre que la racionalitat individual és equivalent a que $m_i(0) \leq 0$.

A partir d'ara, necessitem una definició per alleugerir la notació. Fem una simplificació per obtenir el mecanisme òptim de venta. Definim

$$\psi_i(x_i) \equiv x_i - \frac{1 - F_i(x_i)}{f_i(x_i)} \tag{4.6}$$

com la *valoració virtual* d'un comprador amb valoració $x_i \in \mathcal{X}_i$. És un fet verificar per tot $i \in N$,

$$E[\psi(X_i)] = 0. \tag{4.7}$$

Vegem - ho:

$$\begin{aligned} E[\psi(X_i)] &= \int_0^{\omega_i} \psi(x_i)f(x_i)dx_i = \int_0^{\omega_i} x_i f(x_i)dx_i - \int_0^{\omega_i}(1-F_i(x_i))dx_i = \\ &= \omega_i - \int_0^{\omega_i} F(x_i)dx_i - \omega_i + \int_0^{\omega_i} F(x_i)dx_i = 0 \end{aligned}$$

on a la tercera igualtat s'ha aplicat integració per parts i que $F(\omega_i) = 1$.

El problema de disseny és *regular* si per tot $i \in N$, la valoració virtual $\psi_i(\cdot)$ és una funció creixent en la pròpia valoració, $x_i \in \mathcal{X}_i$. Atès que

$$\psi_i(x_i) = x_i - \frac{1}{\lambda_i(x_i)}$$

on recordem de la Secció 3.4 que $\lambda_i \equiv \frac{f_i}{1-F_i}$ és la taxa de risc associada a F_i. Una condició suficient per tenir regularitat és que per tot $i \in N$, $\lambda_i(\cdot)$ sigui creixent.

A partir d'ara, considerarem que el problema de disseny és regular.

Llavors, el venedor hauria d'escollir $(\mathbf{Q}, \mathbf{M})$ per maximitzar

$$\sum_{i\in N} m_i(0) + \int_{\mathcal{X}} \left(\sum_{i\in N} \psi_i(x_i)Q_i(\mathbf{x}) \right) \cdot f(\mathbf{x})d\mathbf{x}. \tag{4.8}$$

Temporalment no considerem les hipòtesis de compatibilitat amb els incentius i racionalitat individual. Prenem l'expressió

$$\sum_{i\in N} \psi_i(x_i)Q_i(\mathbf{x}) \tag{4.9}$$

del segon terme de l'expressió (4.8). Observem que la funció $\psi_i(x_i)$ no és "estratègica"ja que només depèn de F_i. Així, la funció $\mathbf{Q}$ (si que és "estratègica") es comporta com una funció de pes. La millor opció que tenim és donar més pes a aquelles $\psi_i(x_i)$ que són maximals, sempre que siguin positives. D'aquesta manera, $\mathbf{Q}$ decideix quan $\psi_i(x_i)$ jugarà i quan no. Això maximitzarà la funció (4.9) a cada punt $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ i d'aquesta manera també es maximitzarà la integral de (4.8).

Amb això en ment, considerem un mecanisme $(\mathbf{Q}, \mathbf{M})$ on

- la regla d'assignació $\mathbf{Q}$ és que l'objecte se'l queda el postor $i \in N$ amb probabilitat positiva si, i només si $\psi_i(x_i) = \max_{j\in N} \psi_j(x_j)$; expressat d'una altra manera,

$$Q_i(\mathbf{x}) > 0 \iff \psi_i(x_i) = \max_{j\in N}\{\psi_j(x_j) \geq 0\}. \tag{4.10}$$

- la regla de pagament $\mathbf{M}$ és

$$M_i(\mathbf{x}) = Q_i(\mathbf{x}) \cdot x_i - \int_0^{x_i} Q_i(z_i, \mathbf{x}_{-i})dz_i \tag{4.11}$$

El mecanisme introduït per (4.10) i (4.11) és un *mecanisme òptim* com veurem a continuació.

Primer, notem que la q_i resultant és una funció no decreixent. Suposem que $z_i < x_i$, llavors per regularitat es té que $\psi_i(z_i) < \psi_i(x_i), \forall i \in N$; també tenim que es compleix que $Q_i(z_i, \mathbf{x}_{-i}) \leq Q_i(x_i, \mathbf{x}_{-i})$ i tenim que

$$q_i(z_i) = \int_{\mathcal{X}_{-i}} \mathbf{Q}(z_i, \mathbf{x}_{-i}) df_{-i}(\mathbf{x}_{-i}) \leq \int_{\mathcal{X}_{-i}} \mathbf{Q}(x_i, \mathbf{x}_{-i}) df_{-i}(\mathbf{x}_{-i}) = q_i(x_i).$$

Per tant, q_i és una funció no decreixent.

Segon, de (4.11), es compleix $M_i(0, \mathbf{x}_{-i}) = 0, \forall \mathbf{x}_{-i}$, d'aquí que $m_i(0) = 0$. I, com que $m_i(0) \leq 0$ obtenim la racionalitat individual.

Per tant, el mecanisme proposat compleix les dues condicions, compatibilitat amb els incentius i racionalitat individual. El mecanisme és òptim perquè es maximitzen ambdós termes de (4.8), per tot $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) \in \Delta$. En particular, dona pes a les probabilitats no negatives de (4.9). Això implica que es maximitza el valor de l'ingrés esperat a (4.8) com a

$$E[max\{\psi_1(X_1), \psi_2(X_2), \ldots, \psi_n(X_n), 0\}] \tag{4.12}$$

el valor màxim esperat dels ingressos. En altres paraules, és l'esperança del màxim de les valoracions virtuals, sempre i quan aquestes no siguin negatives.

Una altra manera més intuïtiva per veure el mateix és utilitzant

$$y_i(\mathbf{x}_{-i}) = inf\{z_i \in \mathcal{X}_i \mid \psi_i(z_i) \geq 0 \quad \text{i} \quad \forall j \neq i, \psi_i(z_i) \geq \psi_j(x_j)\}$$

com el mínim valor que fa que la valoració virtual superi a la valoració virtual de la resta de postors. Això vol dir, que donat que la resta de postors fan $\mathbf{x}_{-i}$, el comprador $i \in N$ mira quin és el tipus, $z_i \in \mathcal{X}_i$, més petit tal que $\psi_i(z_i) \geq 0$ és major que les valoracions virtuals de tots els altres. Observem que $y_i(\mathbf{x}_{-i})$ està ben definit perquè el conjunt és no buit i acotat. Per tant, $Q_i(x_i, \mathbf{x}_{-i})$ dona pes als valors més grans de valoració virtual. Ara, podem expressar (4.10) com

$$Q_i(z_i, \mathbf{x}_{-i}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad z_i > y_i(\mathbf{x}_{-i}) \\ 0 & \text{si} \quad z_i \leq y_i(\mathbf{x}_{-i}) \end{cases}.$$

Notem que en el cas d'empat, quan $z_i = y_i(\mathbf{x}_{-i})$, el valor és irrellevant pels càlculs que vénen a continuació. De l'anterior expressió en resulta

$$\int_0^{x_i} Q_i(z, \mathbf{x}_{-i}) dz = \begin{cases} x_i - y_i(\mathbf{x}_{-i}) & \text{si} \quad x_i > y_i(\mathbf{x}_{-i}) \\ 0 & \text{si} \quad x_i < y_i(\mathbf{x}_{-i}) \end{cases}$$

i de la mateixa manera expressem (4.11) com

$$M_i(\mathbf{x}) = Q_i(\mathbf{x}) \cdot x_i - \int_0^{x_i} Q_i(z, \mathbf{x}_{-i}) dz = \begin{cases} y_i(\mathbf{x}_{-i}) & \text{si} \quad Q_i(\mathbf{x}) = 1 \\ 0 & \text{si} \quad Q_i(\mathbf{x}) = 0. \end{cases}$$

En resum, assignem tota la probabilitat d'aconseguir l'objecte al postor amb valoració virtual més gran (positiva). Observem que només paga el comprador "guanyador"per un import igual a la menor valoració que li permet guanyar la subhasta. Els arguments que hem vist fins ara justifiquen la següent proposició.

Proposició 4.3. *Suposem que el problema de disseny és regular. Llavors el següent mecanisme* $(\mathbf{Q}, \mathbf{M})$ *és òptim, on per tot* $i \in N$

$$Q_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & si \quad \psi_i(x_i) > \max_{j \neq i} \psi_j(x_j) \quad i \quad \psi_i(x_i) \geq 0, \\ 0 & altrament, \end{cases}$$

i

$$M_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} y_i(\mathbf{x}_{-i}) & si \quad Q_i(\mathbf{x}) = 1, \\ 0 & si \quad Q_i(\mathbf{x}) = 0. \end{cases}$$

Cas simètric

Suposem ara que les funcions de distribució de les valoracions són iguals per tots els jugadors, és a dir, per tot $i \in N$, tenim $f_i = f$. Això implica que per tot $i \in N$, $\psi_i = \psi$ i en aquest cas, tenim

$$y_i(\mathbf{x}_{-i}) = \max\{\psi^{-1}(0), \max_{j \neq i} x_j\}.$$

Per tant, el mecanisme òptim és una subhasta de segon preu amb preu de reserva $r^* = \psi^{-1}(0)$.

Per veure la implicació contrària obtenim de 3.4 la següent proposició.

Proposició 4.4. *Suposem que el problema de disseny és regular i simètric. Aleshores una subhasta de segon preu amb preu de reserva* $r^* = \psi^{-1}(0)$ *és un mecanisme òptim.*

Discussió i interpretació

En general, excepte les subhastes de primer i segon preu, el mecanisme òptim no és eficient, és a dir, no necessàriament l'objecte acabarà en mans de la persona que més el valori. Això és degut a que quan les ψ_i, per a tot $i \in N$ són diferents, el seu creixement pot ser asimètric per cadascuna d'elles i aleshores es poden "desendreçar" les valoracions.

Observem que el mecanisme òptim definit a la Proposició 4.3 és ineficient per dos motius. Primer, no es tenen en compte els beneficis socials, ja que el mecanisme no assigna l'objecte quan la major valoració virtual és negativa. Com que les valoracions dels compradors no poden ser mai negatives i el valor de l'objecte pel venedor és 0, això implica que no s'assignarà l'objecte a un comprador encara que hi hagi beneficis socials si no hi ha cap valoració virtual positiva. Segon, en cas que l'objecte sigui assignat a un comprador, aquest serà el que tingui valoració virtual major però no té perquè coincidir amb el postor amb major valoració ja que es tracta d'un cas asimètric.

Anem a veure perquè és òptim assignar objectes utilitzant com a base les valoracions virtuals. Més concretament, veurem què són les valoracions virtuals. Considerem un comprador aïllat tal que les seves valoracions estan distribuïdes seguint una funció de distribució F donada. Suposem que el venedor li fa una oferta al comprador per un preu p no negociable, aquest l'haurà d'acceptar o rebutjar. La probabilitat que el venedor és quedi amb l'objecte és de $1 - F(p)$ que equival a la probabilitat que la seva pròpia valoració sigui major a p. Si pensem la probabilitat d'aconseguir l'objecte com la "quantitat"demandada pel postor i, podem escriure la "funció de demanda"del postor i com $q(p) = 1 - F(p)$. La seva inversa correspon a $p(q) = F^{-1}(1 - q)$ on q denota la quantitat demandada (la probabilitat d'aconseguir l'objecte). Per tant, la funció d'ingressos pel venedor correspon a

$$q \cdot p(q) = q \cdot F^{-1}(1-q)$$

que si la diferenciem respecte q obtenim

$$\frac{d}{dq}(p(q) \cdot q) = F^{-1}(1-q) - \frac{q}{F'(F^{-1}(1-q))}.$$

Com que $F^{-1}(1-q) = p$ tenim

$$IM(p) \equiv p - \frac{1-F(p)}{f(p)} = \psi(p)$$

la valoració virtual del postor i quan $p(q) = p$. Per tant, la valoració virtual d'un comprador, $\psi(p)$, es pot interpretar com l'ingrés marginal, ja que hem suposat que ψ és estrictament creixent. Com que el comprador està aïllat el venedor fixarà un preu monopolístic r^*, posant $IM(p) = CM(p)$ (cost marginal), és a dir, s'iguala l'ingrés marginal que s'obté a p al cost marginal. Aleshores, r^* ha de tenir un valor 0 ja que assumim que el cost marginal és nul, aleshores, $IM(r^*) = \psi(r^*) = 0$, que és el mateix que dir $r^* = \psi^{-1}(0)$.

Subhastes vs negociacions

Hem vist que la caracterització d'un mecanisme òptim ens permet tenir una visió interna sobre la valoració de la competència. Concretament, podem suposar que un venedor s'enfronta a un únic comprador per la venda d'un únic objecte, per fer-ho hauran d'utilitzar algun tipus de *negociació*. La valoració del comprador X_1 ve donada per la seva funció de distribució F. Hem vist que l'anàlisi anterior mostra que per aconseguir un mecanisme òptim, el millor que pot fer el venedor és oferir una oferta sense negociació (o l'agafes o te-la quedes) corresponent a $r_1^* = \psi_1^{-1}(0)$. Si el comprador està per sobre r_1^* comprarà mentre que sinó no. Així, els ingressos esperats són de

$$E[\max\{\psi(X_1), 0\}]. \tag{4.13}$$

Veiem què passaria si el comprador pogués convèncer a un nou jugador X_2 també seguint F. En cas que competissin sense preu de reserva, en una subhasta estàndard s'obtindria

$$E[\max\{\psi(X_1), \psi(X_2)\}]. \tag{4.14}$$

Observem que en aquest cas no cal afegir 0 ja que no es fixa r^* ($r^* = 0$).

Ara volem veure com l'expressió (4.14) és major que l'expressió (4.13). Agafem $X_1 \geq r^*$, en aquest cas el comprador 1 acceptaria l'oferta del venedor. Degut a la regularitat, això és equivalent a $\psi(X_1) \geq 0$, per tant tenim

$$\begin{aligned} E[\max\{\psi(X_1), \psi(X_2)\} \mid \psi(X_1) \geq 0] &> E[\psi(X_1) \mid \psi(X_1) \geq 0] \\ &= E[max\{\psi(X_1), 0\} \mid \psi(X_1) \geq 0]. \end{aligned}$$

Ara, si suposem $X_1 < r^*$, de manera que el comprador 1 refusi l'oferta del venedor. Com que la funció màxim és una funció convexa obtindrem

$$E[\max\{\psi(X_1), \psi(X_2)\} \mid \psi(X_1) < 0] > max\{E[\psi(X_1) \mid \psi(X_1) < 0], E[\psi(X_2) \mid \psi(X_1) < 0]\}.$$

Com que X_1 i X_2 són variables aleatòries independents, podem reescriure la part dreta de la desigualtat com

$$\begin{aligned}
&\max\{E[\psi(X_1) \mid \psi(X_1) < 0], E[\psi(X_2) \mid \psi(X_1) < 0]\} \\
&= \max\{E[\psi(X_1) \mid \psi(X_1) < 0], E[\psi(X_2)\} \\
&= \max\{E[\psi(X_1) \mid \psi(X_1) < 0], 0\} = 0 \\
&= E[\max\{\psi(X_1), 0\} \mid \psi(X_1) < 0]
\end{aligned}$$

on hem utilitzat que $E[\psi(X_2)] = 0$, vist a (4.7). Com que en els dos casos, $X_1 \geq r^*$ i $X_1 < r^*$, es dona que $E[\max\{\psi(X_1), \psi(X_2)\} \mid \psi(X_1) \leq 0] > E[\max\{\psi(X_1), 0)\} \mid \psi(X_1) < 0] = 0$ aleshores l'expressió (4.14) és més gran que l'expressió (4.13).

Per tant, sembla millor convidar un segon jugador que tenir-ne un i proposar-li un mecanisme òptim. A més a més, en el cas d'un sol jugador, el venedor quan vol determinar r^* necessita conèixer F mentre que amb dos jugadors només necessita saber que segueixen la mateixa F.

Subhastes vs mecanismes

En general, un mecanisme es pot fer a mida per aconseguir el mateix resultat que una subhasta específica. Per exemple, el mecanisme òptim obtingut en aquesta secció depèn de les distribucions de les valoracions dels compradors –les hem anomenat $F_i, i \in N$. Les regles d'assignació i pagaments d'una subhasta òptima depenen de la comparació de les valoracions virtuals, que a la vegada depenen de la distribució de les valoracions. A més, un mecanisme òptim no tracta de la mateixa manera a diferents compradors –compradors amb diferent distribució de valoracions són tractats diferent. Per tant, un mecanisme òptim no és universal, ja que les regles són específiques per l'objecte a vendre, tampoc és anònim perquè la identitat del comprador és important degut a les asimetries. Veiem que un mecanisme òptim no satisfà les condicions d'universalitat i anonimat definides a la introducció de les característiques d'una subhasta.

Des d'un punt de vista pràctic, la restricció dels mecanismes que satisfan aquestes dues propietats són importants a considerar. Qualsevol mecanisme que depengui dels petits detalls de les distribucions dels compradors serà difícil d'implementar ja que són difícils de conèixer a la realitat. És per això que en aquest sentit les subhastes són "millors"que els mecanismes.

4.5 Mecanismes eficients. El mecanisme VCG

Dins del context de la venda d'un únic objecte a n potencials compradors, hem vist que una subhasta a segon preu sense preu de reserva sempre assignarà l'objecte de manera eficient. En aquesta secció tractarem d'aplicar una generalització de la subhasta a segon preu a altres contexts.

Com un exemple, considerarem que existeix un equilibri perfecte entre un venedor i un comprador. El venedor coneix perfectament la funció de costos de producció, de manera privada. Mentre que el comprador coneix la seva pròpia valoració.[8]

[8]En el context de les subhastes, el valor de l'objecte per part del comprador és coneguda.

Suposem que les valoracions dels agents estan compreses en l'interval $\mathcal{X}_i = [\alpha_i, \omega_i] \subset \mathbb{R}$, d'aquesta manera pot passar que $\alpha_i < 0$, per denotar valors negatius (costs).

Una regla d'assignació $\mathbf{Q}^* : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbf{\Delta}$ diem que és *eficient* si maximitza el "benestar social", és a dir, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$,

$$\mathbf{Q}^*(\mathbf{x}) \in arg \max_{\mathbf{Q} \in \mathbf{\Delta}} \sum_{j \in N} Q_j(x_j) x_j \tag{4.15}$$

Veiem que $\mathbf{Q}^*(\mathbf{x})$ es pot entendre com la utilitat esperada. A cada vector $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \mathbf{x}$ li assignem una probabilitat màxima als x_i més grans. En cas d'empat, és indiferent saber com es reparteix la probabilitat de guanyar l'objecte entre ells. Per exemple, si tenim $\mathbf{x} = (2, 2, 1)$ una assignació no eficient podria ser $Q_a(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ i dues d'eficients podrien ser $Q_b(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ i $Q_c(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$. Observem que $E[Q_a(\mathbf{x})] = \frac{5}{3} < 2 = E[Q_b(\mathbf{x})] = E[Q_c(\mathbf{x})]$.

Quan no hi han empats, una regla d'assignació eficient assigna l'objecte a la persona que més el valora.[9] Tot mecanisme amb una regla d'assignació eficient és eficient. Donada una regla d'assignació eficient $\mathbf{Q}^*$, definim el màxim del benestar social com

$$W(\mathbf{x}) \equiv \sum_{j \in N} Q_j^*(\mathbf{x}) x_j \tag{4.16}$$

quan $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ correspon a les valoracions reals dels compradors. Per cada $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ s'agafa el valor màxim que s'obté pel mecanisme eficient $\mathbf{Q}^*$. De la mateixa manera definim

$$W_{-i}(\mathbf{x}) \equiv \sum_{j \neq i} Q_j^*(\mathbf{x}) x_j \tag{4.17}$$

com el benestar social de tots els agents excepte d'$i \in N$.

El mecanisme VCG

El *mecanisme Vickrey-Clarke-Groves* o també conegut com el *mecanisme VCG* $(\mathbf{Q}^*, \mathbf{M}^V)$, és un mecanisme eficient amb una regla de pagament $\mathbf{M}^V : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ on

$$M_i^V(\mathbf{x}) = W(\alpha_i, \mathbf{x}_{-i}) - W_{-i}(\mathbf{x}) \quad \text{on} \quad \alpha_i \in (-\infty, \omega_i). \tag{4.18}$$

$M_i^V(\mathbf{x})$ denota el que farem pagar a un jugador ("guanyador") és la diferència entre el valor de l'objecte "quan ell no hi és"$(W_i(\alpha_i, \mathbf{x}_{-i})$ vol dir que el jugador $i \in N$ no aporta res ni guanya mai; no "ha vingut"), i el valor de l'objecte quan "ell juga"menys la seva aportació en aquest valor (observem que $W_{-i}(\mathbf{x}) = W(\mathbf{x}) - Q_i^*(\mathbf{x}) x_i$).

Normalment, en el context de les subhastes posem $\alpha_i = 0$. És un exercici veure que el mecanisme VCG és el mateix que una subhasta a segon preu. Suposem que tenim dos postors amb valoracions pròpies x_1 i x_2 respectivament. Posem $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ i definim la regla d'assignació òptima com

$$\mathbf{Q}^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} (1, 0) & \text{si } x_! > x_2, \\ (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & \text{si } x_1 = x_2, \\ (0, 1) & \text{si } x_1 < x_2. \end{cases}$$

Diferenciem els casos

[9] Pot haver-hi més d'una regla d'assignació eficient segons els casos d'empat que es produeixin.

- Si $x_1 > x_2$.
  En el cas del postor 1 obtenim $W(0, x_2) = 0 + 1 \cdot x_2 = x_2$ mentre que $W_{-1}(x_1, x_2) = 0 \cdot x_2 = 0$. Per tant, $M_1^V(\mathbf{x}) = x_2 - 0 = x_2$.
  En el cas del postor 2 obtenim $W(x_1, 0) = 1 \cdot x_1 + 0 = x_1$ mentre que $W_{-2}(x_1, x_2) = 1 \cdot x_1 = x_1$. Per tant, $M_1^V(\mathbf{x}) = x_1 - x_1 = 0$.

- Si $x_1 = x_2$.
  En el cas del postor 1 obtenim $W(0, x_2) = 0 + 1 \cdot x_2 = x_2$ mentre que $W_{-1}(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2$. Per tant, $M_1^V(\mathbf{x}) = x_2 - \frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{2}x_2$.
  En el cas del postor 2 obtenim $W(x_1, 0) = 1 \cdot x_1 + 0 = x_1$ mentre que $W_{-2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1$. Per tant, $M_2^V(\mathbf{x}) = x_1 - \frac{1}{2}x_1 = \frac{1}{2}x_1$.

- Si $x_1 < x_2$.
  En el cas del postor 1 obtenim $W(0, x_2) = 0 + 1 \cdot x_2 = x_2$ mentre que $W_{-1}(x_1, x_2) = 1 \cdot x_2 = x_2$. Per tant, $M_1^V(\mathbf{x}) = x_2 - x_2 = 0$.
  En el cas del postor 2 obtenim $W(x_1, 0) = 1 \cdot x_1 + 0 = x_1$ mentre que $W_{-2}(x_1, x_2) = 0 \cdot x_1 = 0$. Per tant, $M_1^V(\mathbf{x}) = x_1$.

Veiem que $M_i^V(\mathbf{x}) = W(0, \mathbf{x}_{-i}) - W_{-i}(\mathbf{x})$ serà positiu si, i només si $x_i \geq \max_{j \neq i} x_j$. En aquest cas, $M_i^V(\mathbf{x}) = max_{j \neq i} x_j$, la segona major valoració. Per tant, els pagaments obtinguts coincideixen amb els que s'obtindrien en una subhasta de segon preu.

El mecanisme VCG és compatible amb els incentius. De fet, podem veure com en una subhasta de segon preu dir la pròpia valoració és una estratègia dèbilment dominant en el mecanisme VCG.

Si la resta de compradors presenten valors $\mathbf{x}_{-i} \in \mathcal{X}_{-i}$, aleshores si el postor $i \in N$ presenta una oferta $z_i \in \mathcal{X}_i$ diferent a la seva pròpia valoració $x_i \in \mathcal{X}_i$, els seus beneficis seran de

$$Q_i^*(z_i, \mathbf{x}_{-i})x_i - M_i^V(z_i, \mathbf{x}_{-i}) = \sum_{j \in N} Q_j^*(z_i, \mathbf{x}_{-i})x_j - W(\alpha_i, \mathbf{x}_{-i})$$

utilitzant (4.17) i (4.18). La definició de $\mathbf{Q}^*$ a (4.15) implica que l'equació anterior per tot $\mathbf{x}_{-i}$, el primer terme es maximitza agafant $z_i = x_i$; i com que el segon terme no depèn de z_i, és òptim posar $z_i = x_i$. Per tant, en l'equilibri d'aquest mecanisme, els beneficis pel postor $i \in N$ quan les valoracions són $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ són

$$Q_i^*(\mathbf{x})x_i - M_i^V(\mathbf{x}) = W(\mathbf{x}) - W(\alpha_i, \mathbf{x}_{-i}),$$

és a dir, la diferència entre el benestar social si el postor i presenta la seva valoració real, x_i, i si presenta la seva mínima valoració, α_i. En altres paraules, ens indica la màxima aportació que pot fer el jugador $i \in N$ en el benestar social.

Com que el mecanisme VCG és compatible amb els incentius compleix les propietats de la Secció 4.1. En particular, els ingressos esperats del mecanisme VCG, U_i^V, es calculen integrant els beneficis resultants en l'equilibri sobre $\mathcal{X}_{-i}$. D'aquesta manera obtenim la utilitat del jugador $i \in N$ amb valoració $x_i \in \mathcal{X}_i$ quan utilitza aquest mecanisme. En resulta la funció

$$U_i^V(x_i) = E[W(x_i, \mathbf{X}_{-i}) - W(\alpha_i, \mathbf{X}_{-i})]$$

que és convexa i creixent (veure Secció 4.3). Clarament, $U_i^V(\alpha_i) = 0$ i com que U_i^V és monòtona implica que VCG és individualment racional.

Si $(\mathbf{Q}^*, \mathbf{M})$ és algun altre mecanisme eficient amb compatibilitat amb els incentius, aleshores pel principi d'equivalència d'ingressos sabem que per tot $i \in N$, les funcions de benefici, diem-li U_i, difereixen de U_i^V com a màxim en una constant c_i. Si $(\mathbf{Q}^*, \mathbf{M})$ és individualment racional, es compleix $c_i = U_i(x_i) - U_i^V(x_i) \geq 0$. Vegem-ne el motiu; si tinguéssim $U_i(\alpha_i) < U_i^V(\alpha_i) = 0$ arribaríem a contradicció amb el fet que $(\mathbf{Q}^*, \mathbf{M})$ és racional individualment. Com que els beneficis esperats de $(\mathbf{Q}^*, \mathbf{M})$ són més grans que els del mecanisme VCG i, tots dos tenen la mateixa regla d'assignació, els pagaments esperats hauran de ser menors.

Proposició 4.5. *Entre tots els mecanismes eficients, compatibles amb els incentius i racionals individualment tal que assignen un únic objecte indivisible, el mecanisme VCG maximitza el pagament esperat per cada agent.*

4.6 Una aplicació del comerç bilateral

El disseny de mecanismes té aplicacions molt importants en l'àmbit econòmic. Per exemple, el disseny dels procediments de votació, la creació i redacció de contractes entre parts que tenen informació privada, la construcció de procediments per decidir entre projectes públics o mediambientals[10], mètodes d'assignació, mètodes de decisió social... També abasta més camps com l'enginyeria, ciències de la computació o comerç electrònic, que els trobem per exemple en les subhastes *online* o els algoritmes d'ordenació de *Google*.

Veiem que el disseny de mecanismes és més general que el focus macroeconòmic que li hem donat en aquest treball i que hem centralitzat en les subhastes. És per això que després d'introduir el concepte d'*equilibri pressupostari* veurem un cas de comerç bilateral.

En molts problemes econòmics, és desitjable considerar mecanismes on no faci falta la injecció de fons per part del dissenyador del mecanisme –el pressupost del dissenyador del mecanisme és exactament el necessari *ex post*.[11] Mentre que en el cas del mecanisme VCG normalment no existeix aquesta propietat, tot i que és un factor important a considerar per saber si és factible o no.

Es diu que un mecanisme aconsegueix un *equilibri pressupostari* si per tota presentació de valoracions, els pagaments dels agents són suma zero, és a dir, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$,

$$\sum_{i \in N} M_i(\mathbf{x}) = 0.$$

Dit en paraules, no existeixen transferències netes dins o fora del sistema.

Suposem que existeix un venedor amb una funció de costos de producció privada $C \in [\underline{c}, \overline{c}]$ sobre un objecte indivisible. Suposem també que existeix un comprador d'aquest objecte amb una funció de valoració privada $V \in [\underline{v}, \overline{v}]$. El cost C i la valoració V estan independentment distribuïdes, les distribucions són conegudes i prenen valors en tots els punts dels seus intervals de suport. Per tant, hi ha informació incompleta per les dues bandes del mercat. Finalment suposem que $\underline{v} < \overline{c}$ i $\overline{v} \geq \underline{c}$, de manera que sempre es solapen

[10]La redacció per part d'una empresa contractes de treball de manera que en un primer moment es distingeix el nivell de productivitat dels treballadors tot i que aquest fet no sigui observable.

[11]Ens referirem a valors *ex post* quan fa referència a totes les possibilitats, és a dir, quan passa sempre.

els intervals i, a vegades, serà eficient no comerciar. Hi ha alguna manera d'assegurar-se que es comerciarà sempre que calgui fer-ho? Per contestar aquesta pregunta, és natural prendre una perspectiva de disseny de mecanismes.

Un mecanisme decideix quan es duu a terme l'intercanvi. També decideix quina és la quantitat que el comprador paga, P, i quina el venedor rep, R. Si s'efectua la compra, el benefici que obté el comprador és $V - P$ i el del venedor $R - C$. Encara no necessitem distingir el signe de V o C, ni cal assumir que estem en un equilibri pressupostari.[12]

Un mecanisme és eficient sempre i quan $V > C$, ja que així es produeix l'objecte i es col·loca a un comprador.

Proposició 4.6. *En un problema de comerç bilateral, no existeix cap mecanisme que compleixi a la vegada les següents característiques:*

- *Eficiència*
- *Compatible amb els incentius*
- *Racional individualment*
- *Equilibri pressupostari*

Demostració. Primer, considerem un mecanisme VCG amb el funcionament explicat a continuació.

El comprador anuncia la seva valoració V i el venedor el cost C.

i). Si $V \leq C$, l'objecte no s'intercanvia i no es fa cap pagament.

ii). Si $V > C$, l'objecte s'intercanvia. El comprador paga $max\{C, \underline{v}\}$ i el venedor rep $min\{V, \overline{c}\}$

Hem de verificar que l'estratègia dèbilment dominant pel comprador és anunciar $V = v$ i pel venedor $C = c$. Aquest mecanisme és eficient ja que, en equilibri, l'objecte s'intercanvia sempre que $v > c$.

Un comprador amb valoració $\underline{v}$ esperarà uns beneficis de 0, mentre que si presenta una oferta $v > \underline{v}$ esperarà un benefici positiu. De la mateixa manera, un venedor amb cost $\overline{c}$ esperarà obtenir uns beneficis de 0, mentre que si presenta un cost $c < \overline{c}$ els beneficis esperats seran positius. Per tant, el mecanisme és racional individualment.

Sempre que $V > C$, es fa l'intercanvi. El fet que $\underline{v} < \overline{c}$ implica que la quantitat que rep el venedor $R = min\{V, \overline{c}\}$ és més gran que la quantitat que paga el venedor $P = max\{C, \underline{v}\}$. Veiem que en aquest context, el mecanisme sempre suposa un dèficit. Aquest dèficit serà de $R - P = V - C$, que coincideix amb els guanys *ex post* que resulten de l'intercanvi.

Ara suposem que tenim un altre mecanisme diferent a l'enunciat que és eficient i amb compatibilitat d'incentius. Pel principi d'equivalència d'ingressos, existeix una constant k tal que el pagament esperat per qualsevol comprador amb valoració v utilitzant aquest mecanisme es diferencia del pagament esperat del mecanisme VCG en la constant additiva

[12] Això faria que $P = R$.

k. De manera semblant, existeix una constant l tal que l'ingrés esperat per qualsevol venedor amb cost c utilitzant aquest mecanisme es diferencia de l'ingrés esperat del mecanisme VCG en la constant additiva l.

Suposem que l'altre mecanisme és també racional individualment. Com que en el mecanisme VCG amb valoració $\underline{v}$ obtindrà uns beneficis de 0, això implica que tindrem $k \leq 0$. De manera semblant, un venedor amb costs $\overline{c}$ tindrà un benefici esperat de 0, per tant, tindrem $l \geq 0$.[13]

El dèficit esperat de l'altre mecanisme és el dèficit esperat en el mecanisme VCG més la constant $l - k \geq 0$. Però com que hem vist que si el mecanisme VCG té dèficit, la resta de mecanismes tindran dèficit, això implica que no existeix cap mecanisme eficient amb compatibilitat d'incentius, racionalitat individual i amb equilibri pressupostari. $\square$

[13]Utilitzem el mateix argument que a la Proposició 4.5.

Capítol 5

Conclusions

Al final dels meus estudis de grau en els àmbits de les matemàtiques, l'economia i l'empresa vaig descobrir una branca del coneixement que els relacionava molt bé, la teoria de jocs. Durant el període universitari amb prou feines havia arribat a conèixer els trets més fonamentals i bàsics que s'hi contemplen. Possiblement la relació més directa que trobem és el càlcul d'equilibris. Aquest projecte m'ha permès aprofundir els meus coneixements en aquesta matèria i en les branques de subhastes i disseny de mecanismes. Tots dos temes són molt extensos i diversos, però tenen una intersecció que és en la que m'he focalitzat. He pogut entendre, des d'un punt de vista analític, com funcionen les subhastes i quins elements hi intervenen, així com conèixer i descobrir els mecanismes focalitzats en les subhastes.

En aquest treball he après nous conceptes matemàtics gràcies als coneixements adquirits durant el grau, sobretot gràcies a les vessants d'estadística, probabilitats, càlcul diferencial, càlcul integral i teoria de jocs. Cal destacar que aquests conceptes no es troben en el temari dels graus, sinó que són completament nous. Comprendre'ls no ha sigut una feina fàcil, m'he ajudat dels recursos disponibles basats en la recerca de bons recursos bibliogràfics i virtuals, així com del suport dels tutors. La utilització de la bibliografia, així com la lectura d'articles que donaven per evidents, passos que per mi no ho eren m'ha permès solucionar els problemes plantejats. A l'hora de redactar la informació, idees, arguments... he hagut de prestar molta atenció als detalls així com en el llenguatge per aconseguir transmetre-la de manera clara i rigorosa perquè no hi hagués possibilitat de mala interpretació o error. El projecte també m'ha comportat un desenvolupament d'habilitats més transversals com orientar-me dins de la bibliografia i copsar quins són els textos més importants.

El plantejament del projecte m'ha permès connectar la teoria de jocs amb problemes que poden sorgir a la vida real. D'aquesta manera, he pogut entendre resultats en principi sorprenents com que sota una sèrie d'hipòtesis tots els tipus de subhasta són equivalents, o bé, que si s'utilitza un mecanisme directe a partir de les pròpies valoracions s'obté instantàniament el desenllaç més beneficiós per a tots els postors degut al grau d'abstracció. Cal destacar, que aquests resultats donen pas a nous horitzons per continuar estudiant i investigant en aquests camps tant des de la vessant teòrica així com realitzant algunes aproximacions numèriques o aplicacions.

L'objectiu d'aquest treball era entendre les subhastes d'un únic objecte amb valoracions privades. Hem pogut veure que sota unes hipòtesis el tipus de subhasta que s'utilitzi no afecta als ingressos esperats del venedor. A més, també hem analitzat com afecten els preus de reserva, i les seves extensions, a les subhastes. En la mateixa línia, també teníem com a objectiu entendre la teoria del disseny de mecanismes aplicada a les subhastes d'un únic objecte amb valoracions privades. En aquest context, hem vist què és un mecanisme i com aquest pot reproduir les mateixes condicions que una subhasta concreta. Hem pogut justificar que tot mecanisme indirecte es pot expressar com un mecanisme directe. A més, hem conegut algunes propietats dels mecanismes com la compatibilitat amb els incentius o la racionalitat individual, així com, distingir alguns mecanismes d'altres com els mecanismes òptims o els eficients. És per això que crec que hem assolit els objectius.

Les principals dificultats que m'he trobat durant l'estudi de subhastes i disseny de mecanismes han estat entendre bé els nous conceptes, així com saber com estan relacionats tots ells. Però sobretot, poder transmetre amb la claredat i detall necessari tot el que volia traspassar. Les meves eines principals s'han basat en la recerca bibliogràfica, ja que aquest projecte és principalment teòric. Un estudi més aprofundit d'altres tipus de subhastes implica conceptes d'anàlisi matemàtica més elaborats. Per exemple, en les subhastes multi-objecte, els agents tenen valoracions sobre conjunts d'objectes, i la definició de tipus d'un postor es complica. Els nous desenvolupaments tecnològics, per exemple *Yahoo*, *Google*, *Amazon*... van per davant dels estudis teòrics, i en aquest àmbit, que mou molts diners, hi ha aplicacions pràctiques importants.[1]

Aquest projecte és només una mostra de les eines de la teoria de jocs que poden ser exportades a camps més enllà de les matemàtiques i que ens acosten al món que ens envolta. La utilització de tots els recursos que tenim disponibles és un primer pas per continuar descobrint el pensament de la societat que ens rodeja, que està més a la vora de les matemàtiques del que sembla en un primer cop d'ull.

[1] Vegeu http://www.worldaffairs.org/event-calendar/speaker-directory/michael-schwarz.

Bibliografia

[1] Boyd, Stephen P. i Vandenberghe, Lieven: Convex optimization, *Cambridge University Press*, 2004.

[2] Enciclopèdia Catalana: Gran Enciclopèdia Catalana, *Enciclopèdia Catalana S.A.*, 2018.

[3] Friedman, James W.: Teoría de juegos con aplicaciones a la economía, *Alianza Universidad*, 1986.

[4] Gardner, Roy: Juegos para empresarios y economistas, *Antoni Bosch, ed.*, 1996.

[5] Harsanyi, John C.: Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players I: The Basic Model, *Management Science 14*, 159–182 1967.

[6] Harsanyi, John C.: Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players II: Bayesian Equilibrium Points, *Management Science 14*, 320–334, 1968.

[7] Harsanyi, John C.: Rational Behavior and Bargaining Equilibrium in Games and Social Situations, *Cambridge University Press*, 1977.

[8] Julià de Ferran, Olga: Probabilitats: Problemes i més problemes, *Publicacions i edicions de la Universitat de Barcelona*, 2005.

[9] Krishna, Vijay: Auction Theory. Second Edition, *Elsevier Inc.*, 2010.

[10] Mas-Colell, Andreu, M. D. Whinston i J. R. Green: Microeconomic Theory *Oxford University Press*, 1995.

[11] Mennen, I.: Power and status in the Roman Empire, AD. 193–284 (Impact of Empire, vol. 12). doi:10.1163/ej.9789004203594.i-306.

[12] Nash, John F.: Equilibrium points in n-person games, *Proceedings of the National Academy of Sciences 36*, 48-49, 1950.

[13] Pérez, Joaquín, Jimeno, José Luis i Cerdá, Emilio: Teoría de Juegos, *Pearson Educación*, 2004.

[14] Rafels, Carles, et al.: Teoria de jocs, *Materials UOC*, 2019.

[15] Roth, Alvin E.: The Economist as Engineer: Game Theory, Experimentation, and Computation as Tools for Design Economics, *Econometrica*, Vol. 70, Núm. 4, 1341-1378, 2002.

[16] Royden, H. L.: Real analysis, *Macmillan*, 1963.

[17] Vohra, Rakesh V.: Advanced mathematical economics, *Routledge*, 2005.

[18] Von Neumann, John i Oskar Morgenstern: Theory of Games and Economic Behavior, *Princeton University Press*, 1944.

[19] Watson, Joel: Strategy: an introduction to game theory - 2nd edition, *W. W. Norton & Company, Inc.*, 2008.