Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

PROCESSOS DE LÉVY

Autor: Oriol Zamora Font

Director: Dr. Josep Vives
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 20 de juny de 2019

Abstract

The aim of this project is to prove the two fundamental theorems of the theory of Lévy Processes: the Lévy-Khintchine Theorem and the Lévy-Itô Decomposition. We can interpret this two theorems as a description and classification of infinite divisible probability measures and Lévy processes, respectively. The importance of this type of probability measures and processes is that they appear in the modeling of random phenomena under certain reasonable hypothesis.

Resum

L'objectiu del treball és demostrar els dos teoremes fonamentals de la teoria de processos de Lévy: el Teorema de Lévy-Khintchine i la Descomposició de Lévy-Itô. Aquests dos teoremes els podem interpretar com una descripció i classificació de les lleis infinitament divisibles i dels processos de Lévy, respectivament. La importància d'aquestes lleis i processos és que en la modelització de fenomens aleatoris apareixen de manera natural sota certes hipòtesis raonables.

2010 Mathematics Subject Classification. 60G51.

Índex

0 Introducció

En aquesta introducció s'explica una possible motivació del Teorema de Lévy-Khintchine i de la Descomposició de Lévy-Itô.
Sigui $S = \{S(t), t \geq 0\}$ un procés estocàstic tal que $S(t)$ és el preu d'un determinat bé a l'instant t. En molts contextos simples podem considerar les següents hipòtesis:

1. Els increments relatius de S en intervals de temps que no se solapin són independents.

2. La llei d'un increment relatiu de S en un interval de temps només depèn de la duració d'aquest interval.

Així doncs, sota aquestes hipòtesis per a $0 \leq t_1 < t_2 = t_1 + h < t_3 = t_2 + h$, on $h > 0$, les variables:

$$\frac{S(t_2) - S(t_1)}{S(t_1)} \quad \text{i} \quad \frac{S(t_3) - S(t_2)}{S(t_2)}$$

són independents i idènticament distribuides. Notem que llavors també són independents i idènticament distribuides les variables:

$$\frac{S(t_2)}{S(t_1)} \quad \text{i} \quad \frac{S(t_3)}{S(t_2)} \ ,$$

$$\log\left(S(t_2)\right) - \log\left(S(t_1)\right) \quad \text{i} \quad \log\left(S(t_3)\right) - \log\left(S(t_2)\right) \ .$$

Podem aconseguir una expressió més adient dels increments relatius usant que:

$$\log(x+1) = x + o\left(x^2\right) \quad , \quad |x| < 1.$$

Fent una tria adequada de t_1 i t_2 és raonable suposar que $0 < \frac{S(t_2)}{S(t_1)} < 2$. Llavors:

$$\frac{S(t_2) - S(t_1)}{S(t_1)} \approx \log\left(\frac{S(t_2) - S(t_1)}{S(t_1)} + 1\right) = \log\left(\frac{S(t_2)}{S(t_1)}\right)$$
$$= \log\left(S(t_2)\right) - \log\left(S(t_1)\right) \ .$$

Això ens motiva a definir el procés de preus logarítmics $X := \{X(t), t \geq 0\}$ on

$$X(t) := \log\left(S(t)\right) - \log\left(S(0)\right) \ .$$

Notem que llavors si $0 \leq s \leq t$, l'increment relatiu de S en l'interval $[s,t]$ és, aproximadament, l'increment absolut de X en l'interval $[s,t]$. Aleshores, les hipòtesis (1) i (2) sobre S es tradueixen a les següents hipòtesis sobre X:

1. Els increments de X en intervals de temps que no se solapin són independents.

2. La llei d'un increment de X en un interval de temps només depèn de la duració d'aquest interval.

Direm que X és un procés amb increments independents i estacionaris.
Fixem ara $T \geq 0$. Notem que l'increment de X en $[0,T]$ és la suma dels increments de X

en qualsevol partició de $[0, T]$. En particular, per tot $n \geq 1$, dividint l'interval $[0, T]$ en n subintervals de longitud T/n es té:

$$X(T) = \sum_{i=1}^{n} \left[X\left(\frac{iT}{n}\right) - X\left(\frac{(i-1)T}{n}\right) \right] = \sum_{i=1}^{n} Y_n(i) \ ,$$

on $Y_n(i) := X\left(\frac{iT}{n}\right) - X\left(\frac{(i-1)T}{n}\right)$. Per les hipòtesis que hem pres, les variables $Y_n(i)$ són independents i idènticament distribuides ja que corresponen a increments de X en intervals de temps que no se solapen i de la mateixa longitud. Per tant, a la conclusió a la que hem arribat és que per tot $n \geq 1$, existeixen variables aleatòries independents idènticament distribuides $Y_n(i)$, tals que:

$$P_{X(T)} = P_{Y_n(1)+...+Y_n(n)} \ .$$

Direm que la llei $P_{X(T)}$ és infinitament divisible. Preguntes naturals que ens podem fer són:

- Com expressar $P_{Y_n(1)+...+Y_n(n)}$ en funció de les $P_{Y_n(i)}$? Veurem més en general que si $X(1), ..., X(n)$ són variables independents aleshores:

  $$P_{X(1)+...+X(n)} = P_{X(1)} * ... * P_{X(n)} \ ,$$

  on * és la convolució, una operació sobre el conjunt de probabilitats.

- Quines lleis satisfan la propietat de ser infinitament divisible? Veurem que la llei normal, la llei de Poisson i la llei de Poisson composta en són exemples.

- Com de forta és la condició de ser infinitament divisible? Veurem que pel Teorema de Lévy-Khintchine tota llei infinitament divisible queda caracteritzada per una única terna $\left(a, \sigma^2, \mu\right)$ on $a \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \geq 0$, i μ és una mesura a $\mathbb{R}$ que satisfa $\mu\left(\{0\}\right) = 0$ i la propietat:

  $$\int_{\mathbb{R}} \left(1 \wedge x^2\right) \mu(dx) < \infty$$

  Direm que μ és mesura de Lévy.

Així doncs, el Teorema de Lévy-Khintchine el podem pensar com una classificació de les probabilitats infinitament divisibles.
Fins aquí hem estudiat la variable aleatòria $X(T)$ però també ens interessa estudiar el procés X globalment. Per fer-ho farem una altre hipòtesi raonable:

3. Fixat $t \geq 0$, amb probabilitat 1, no es produiran salts en el procés S en l'instant t i per tant, tampoc en X.

Direm que X és un procés continu en probabilitat. Notem a més que $X(0) = 0$. Un procés que satisfaci les tres hipòtesis i aquesta última propietat direm que és un procés de Lévy. Preguntes naturals que ens podem fer són:

- Quins processos són de Lévy? Veurem que el moviment Brownià, el procés de Poisson i el procés de Poisson compost en són exemples.

- Quina llei segueixen els salts d'un procés de Lévy? Veurem que el procés que compta el nombre de salts (d'un tamany prou lluny de 0) produïts fins a un cert instant de temps és un procés de Poisson.
- Com de forta és la condició de ser procés de Lévy? Veurem que la llei d'un procés de Lévy, queda caracteritzada també per una única terna $\big(a, \sigma^2, \mu\big)$ on $a \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \geq 0$, i μ és mesura de Lévy. I finalment demostrarem la Descomposició de Lévy-Itô que, a grans trets, afirma que tot procés de Lévy es descomposa en un part determinsta, en una part Browniana corresponent a la part contínua del procés i en una part de Poisson associada als salts del procés.

1 Teorema de Lévy-Khintchine

En aquest primer capítol es demostra el Teorema de Lévy-Khintchine. Usarem resultats de la teoria de mesura, de funcions característiques, de convergència de variables aletòries i d'anàlisi complexa, que per raons d'espai, estan escrits en l'annex en la secció de *Preliminars Capítol 1.*
Fixem la notació que utilitzarem al llarg del treball:

Notació 1. *Sigui* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espai de mesura. Escriurem:*

- $\mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}) := \{ \ X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) : X \textit{ funció mesurable } \}$
- $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu) := \left\{ X \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}) : \int_\Omega |X(\omega)|^p \mu(d\omega) < \infty \right\}$ *on* $p \geq 1$.
- $\mathcal{S}^+(\Omega, \mathcal{F}) := \left\{ X \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}) : X = \sum_{i=1}^m a_i \mathbb{1}_{B_i} \textit{ amb } a_i \geq 0 \textit{ i } B_i \in \mathcal{F} \ \right\}$
- $\mathcal{S}(\Omega, \mathcal{F}) := \left\{ X \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F}) : X = \sum_{i=1}^m a_i \mathbb{1}_{B_i} \textit{ amb } a_i \in \mathbb{R} \textit{ i } B_i \in \mathcal{F} \ \right\}$
- $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}) := \{ \ \mu : \mu \textit{ mesura } \sigma\textit{-additiva en } (\Omega, \mathcal{F}) \ \}$
- $\mathcal{M}_f(\Omega, \mathcal{F}) := \{ \ \mu \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}) : \mu \textit{ mesura finita } \}$
- $\mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F}) := \{ \ \mu \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}) : \mu \textit{ probabilitat } \}$.
- $B_b(\mathbb{R}) := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \textit{ Borel mesurables i acotades } \}$

Per comoditat si $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ escriurem $\mathcal{M}(\mathbb{R}) := \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $\mathcal{M}_f(\mathbb{R}) := \mathcal{M}_f(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ i $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}) := \mathcal{M}_1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Al llarg del treball $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ serà un espai de probabilitat fixat.

1.1 Convolució

Siguin $X, Y \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F})$ independents. Ens interessa descriure la llei de $X + Y$ en funció de les lleis de X i de Y. És a dir, ens preguntem com podem relacionar P_{X+Y} en termes de P_X i P_Y. Aleshores si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és l'aplicació $s(x, y) = x + y$, usant la independència de X i Y i el Teorema de Fubini (Teorema 3.10):

$$\begin{aligned} P_{X+Y}(B) &= \mathbb{P}(X + Y \in B) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B(X + Y)) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_B(s(X, Y))\right) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{s^{-1}(B)}(X, Y)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{s^{-1}(B)}(x, y) P_{(X,Y)}(dx, dy) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{s^{-1}(B)}(x, y) P_X(dx) P_Y(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{s^{-1}(B)} d(P_X \otimes P_Y) = (P_X \otimes P_Y)(s^{-1}(B)) \ . \end{aligned} \tag{1.1}$$

Això ens motiva a definir una operació sobre $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ que anomenarem convolució de la següent forma:

Definició 1.1. *Siguin* $P, Q \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. *Definim la convolució de* P *i* Q *com l'aplicació* $P * Q : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$*:*

$$(P * Q)(B) := (P \otimes Q)\left(s^{-1}(B)\right) \ ,$$

on $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $P \otimes Q$ *és la probabilitat producte de* P *i* Q *a* $\left(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$ *i* $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *és l'aplicació definida per* $s(x, y) = x + y$.

Hem usat que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right)$ i que $s^{-1}(B) \in \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right)$ per ser s contínua. Seguidament es demostren propietats bàsiques de la convolució, com per exemple que la convolució de dues probabilitats és una probabilitat i com expressar la funció característica de la convolució de probabilitats en termes de les seves funcions característiques. Acabem veient com podem expressar la llei d'una suma de variables aleatòries independents en termes de les seves lleis.

Observació 1.2. Siguin $P, Q \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ i $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Aleshores pel Teorema de Fubini:

$$(P * Q)(B) = \int_{s^{-1}(B)} d(P \otimes Q) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\{y : y \in B - x\}} Q(dy) P(dx) = \int_{\mathbb{R}} Q(B - x) P(dx) \ ,$$

on $B - x = \{y \in \mathbb{R} : y + x \in B\}$. Simètricament:

$$(P * Q)(B) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\{x : x \in B - y\}} P(dx) Q(dy) = \int_{\mathbb{R}} P(B - y) Q(dy) \ .$$

Proposició 1.3. *Siguin $P, Q \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. Aleshores $P * Q \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.*

Demostració. Hem de veure:

- $(P * Q)(\varnothing) = (P \otimes Q)\left(s^{-1}(\varnothing)\right) = (P \otimes Q)(\varnothing) = 0.$
- Siguin $\{B_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ disjunts dos a dos. Aleshores

$$(P * Q)\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = (P \otimes Q)\left(s^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)\right) = (P \otimes Q)\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} s^{-1}(B_i)\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} (P \otimes Q)\left(s^{-1}(B_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} (P * Q)(B_i) \ .$$

  Hem usat que $s^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} s^{-1}(B_i)$ i que $\left\{s^{-1}(B_i)\right\}_{i=1}^{\infty}$ són disjunts dos a dos per ser els B_i disjunts dos a dos.
- $\big(P * Q\big)(\mathbb{R}) = (P \otimes Q)\left(s^{-1}(\mathbb{R})\right) = (P \otimes Q)\left(\mathbb{R}^2\right) = 1\,.$

Per tant, $P * Q \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. ■

Proposició 1.4. *$(\mathcal{M}_1(\mathbb{R}), *)$ és un monoide abel·lià.*

Demostració. Siguin $P, Q, R, \delta_a \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ i $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on δ_a és la delta de Dirac amb $a \in \mathbb{R}$.

- Per la Proposició 1.3 $P * Q \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.
- Per l'Observació 1.2 és clar que $P * Q = Q * P$. Per tant, * és commutativa.
- Volem veure que * és associativa. Usant l'Observació 1.2 i el Teorema de Fubini:

$$((P * Q) * R)(B) = \int_{\mathbb{R}} (P * Q)(B - x) R(dx) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} P(B - x - y) Q(dy) R(dx)$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} P(B - x - y) R(dx) Q(dy) = \int_{\mathbb{R}} (P * R)(B - y) Q(dy) = ((P * R) * Q)(B) \ .$$

  Per tant, $(P * Q) * R = (P * R) * Q$. Aleshores:

$$P * (Q * R) = (Q * R) * P = (Q * P) * R = (P * Q) * R \ .$$

- En general es té:

$$(P * \delta_a)(B) = \int_{\mathbb{R}} \delta_a (B - x) \, P(dx) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B (a + x) \, P(dx)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{B-a} (x) \, P(dx) = P(B - a) \ .$$

Per tant, per $a = 0$ tenim $P * \delta_0 = P$. És a dir δ_0 és l'element neutre. ■

Proposició 1.5. *Sigui* $f \in B_b(\mathbb{R})$ *i siguin* $P, Q \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. *Aleshores:*

$$\int_{\mathbb{R}} f(u)(P * Q)(du) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x+y) P(dx) Q(dy) \ .$$

Demostració. Notem per ser f acotada les dues integrals estan ben definides.

1. Si $f = \mathbb{1}_B$, amb $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, es dedueix de la definició de convolució. Notem que: $\mathbb{1}_B(x+y) = \mathbb{1}_B(s(x,y)) = \mathbb{1}_{s^{-1}(B)}(x,y)$ i aplicant el Teorema de Fubini:

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B(u)(P * Q)(du) = \int_B (P * Q)(du) = (P * Q)(B) \ .$$

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B(x+y) P(dx) Q(dy) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{s^{-1}(B)}(x,y) P(dx) Q(dy)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{s^{-1}(B)} d(P \otimes Q) = (P \otimes Q)(s^{-1}(B)) = (P * Q)(B) \ .$$

2. Si $f \in \mathcal{S}^+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ per linealitat de la integral obtenim el resultat.

3. Si $f \geq 0$ usant la Proposició 3.1 sabem que existeix $\{S_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{S}^+(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tal que $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = f$ amb $S_n \leq S_{n+1}$. Llavors, aplicant el Teorema de convergència monòtona (Teorema 3.5) un cop per treure el límit de la integral i dos cops per posar-lo dins de l'integral doble:

$$\int_{\mathbb{R}} f(u)(P * Q)(du) = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \to \infty} S_n(u)(P * Q)(du) = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} S_n(u)(P * Q)(du)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} S_n(x+y) P(dx) Q(dy) = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} S_n(x+y) P(dx) Q(dy)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \to \infty} S_n(x+y) P(dx) Q(dy) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x+y) P(dx) Q(dy) \ .$$

4. Si $f \in B_b(\mathbb{R})$ qualsevol, separem entre part positiva i part negativa $f = f^+ - f^-$:

$$f^+ := f \vee 0 \quad \text{i} \quad f^- := (-f) \vee 0 \ .$$

Com que $f^+, f^- \geq 0$, usant l'apartat 3 i la linealitat de la integral obtenim el resultat. ■

Corol·lari 1.6. *Siguin* $P, Q \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$*, aleshores* $\varphi_{P*Q} = \varphi_P \varphi_Q$*.*

Demostració. Si $f(u) := \cos(tu), g(u) := \sin(tu)$, on $t, u \in \mathbb{R}$ aleshores $f, g \in B_b(\mathbb{R})$ i aplicant la Proposició 1.5:

$$\varphi_{P*Q}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itu}(P*Q)(du) = \int_{\mathbb{R}} f(u)(P*Q)(du) + i\int_{\mathbb{R}} g(u)(P*Q)(du)$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x+y)P(dx)Q(dy) + i\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} g(x+y)P(dx)Q(dy) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{it(x+y)}P(dx)Q(dy)$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}e^{ity}P(dx)Q(dy) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}P(dx)\int_{\mathbb{R}} e^{ity}Q(dy) = \varphi_P(t)\varphi_Q(t)\ .$$

■

Corol·lari 1.7. *Siguin* $P_1, ..., P_n \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$*, aleshores* $\varphi_{P_1*...*P_n} = \varphi_{P_1} \cdot ... \cdot \varphi_{P_n}$*.*

Demostració. Conseqüència d'aplicar repetidament el Corol·lari 1.6. ■

Proposició 1.8. *Siguin* $X, Y \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F})$ *independents. Aleshores:*

$$P_{X+Y} = P_X * P_Y\ .$$

Demostració. Sigui $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, aleshores per l'equació (1.1):

$$P_{X+Y}(B) = (P_X \otimes P_Y)(s^{-1}(B)) = (P_X * P_Y)(B)\ .$$

■

Corol·lari 1.9. *Siguin* $X(1), ..., X(n) \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F})$ *independents. Aleshores:*

$$P_{X(1)+...+X(n)} = P_{X(1)} * ... * P_{X(n)}\ .$$

Demostració. Ho demostrem per inducció. El cas $n = 2$ s'ha demostrat en la Proposició 1.8. Suposem cert per $n-1$ i veiem per n:

$$P_{X(1)+...+X(n)} = P_{(X(1)+...+X(n-1))+X(n)} = P_{X(1)+...+X(n-1)} * P_{X(n)}$$

$$= P_{X(1)} * ... * P_{X(n-1)} * P_{X(n)}\ .$$

Usem que si $X(1), ..., X(n)$ són independents, aleshores $X(1)+...+X(n-1)$ i $X(n)$ també ho són ja que usant la Proposició 3.13(5) i 3.13(6):

$$\varphi_{(X(1)+...+X(n-1),X(n))}(t, t_n) = \mathbb{E}\left(e^{it(X(1)+...+X(n-1))+t_nX(n)}\right)$$

$$\mathbb{E}\left(e^{itX(1)+...+itX(n-1)+t_nX(n)}\right) = \varphi_{(X(1),...,X(n-1),X(n))}(t, ..., t, t_n)$$

$$= \varphi_{X(1)}(t) \cdot ... \cdot \varphi_{X(n-1)}(t)\varphi_{X(n)}(t_n) = \varphi_{X(1)+...+X(n-1)}(t)\varphi_{X(n)}(t_n)\ .$$

■

1.2 Lleis infinitament divisibles

En aquesta secció definim la propietat ja introduïda de que una variable aleatòria sigui infinitament divisible i veiem condicions equivalents.

Notació 2. *Sigui $P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. Aleshores escriurem:*

$$\begin{cases} P^{*n} := \overbrace{P * ... * P}^{n} & si\ n \geq 1 \\ P^{*0} := \delta_0 & si\ n = 0 \end{cases}$$

Definició 1.10. *Sigui $X \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F})$. Diem que X és infinitament divisible si per tot $n \geq 1$ existeixen $Y_n(1), ..., Y_n(n) \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F})$ independents i idènticament distribuides tals que:*

$$P_X = P_{Y_n(1)+...+Y_n(n)} \ .$$

Proposició 1.11. *Sigui $X \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F})$. Són equivalents:*

1. *X és infinitament divisible.*
2. *Per tot $n \geq 1$, $\exists\ Y_n \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F})$ tal que $(P_{Y_n})^{*n} = P_X$.*
3. *Per tot $n \geq 1$, $\exists\ Y_n \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F})$ tal que $(\varphi_{Y_n})^n = \varphi_X$.*

Demostració.
(1) $\Rightarrow$ (2) Sigui $n \geq 1$, per definició existeixen $Y_n(1), ..., Y_n(n) \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F})$ independents i idènticament distribuides tals que $P_X = P_{Y_n(1)+...+Y_n(n)}$. Pel Corol·lari 1.9 tenim:

$$P_{Y_n(1)+...+Y_n(n)} = P_{Y_n(1)} * ... * P_{Y_n(n)} = \left(P_{Y_n(1)}\right)^{*n} \ .$$

(2) $\Rightarrow$ (3) Sigui $n \geq 1$ i $Y_n \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F})$ tal que $(P_{Y_n})^{*n} = P_X$. Aplicant el Corol·lari 1.7 obtenim $\varphi_X = (\varphi_{Y_n})^n$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sigui $n \geq 1$ i $Y_n \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F})$ tal que $\varphi_X = (\varphi_Y)^n$. Escollim $Y_n(1), ..., Y_n(n) \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F})$ còpies de Y_n independents. Aleshores usant la Proposició 3.13(7):

$$\varphi_X(t) = (\varphi_{Y_n}(t))^n = \mathbb{E}(\exp(itY_n))^n = \mathbb{E}\left(\exp\left(itY_n(1)\right)\right) \cdot ... \cdot \mathbb{E}\left(\exp\left(itY_n(n)\right)\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\exp\left(it(Y_n(1) + ... + Y_n(n))\right)\right) = \varphi_{Y_n(1)+...+Y_n(n)}(t) \Rightarrow P_X = P_{Y_n(1)+...+Y_n(n)} \ .$$

∎

Notem que la Proposició 1.11(2) ens motiva a definir de forma més general la propietat de ser infinitament divisible per probabilitats. Veurem una condició equivalent per les funcions característiques i que la convolució manté la propietat de ser infinitament divisible. Finalment veurem exemples d'aquest tipus de probabilitats.

Definició 1.12. *Sigui $P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. Diem que P és infinitament divisible si per tot $n \geq 1$ existeix $Q_n \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ tal que $(Q_n)^{*n} = P$.*

Proposició 1.13. *Sigui $P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. Aleshores:*

$$P \text{ és infinitament divisible } \Leftrightarrow \text{ Existeix } Q_n \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \text{ tal que } \varphi_P = (\varphi_{Q_n})^n \ .$$

Demostració. Per definició P és infinitament divisible si i només si existeix $Q_n \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ tal que $(Q_n)^{*n} = P$. Llavors usant el Corol·lari 1.7:

$$(Q_n)^{*n} = P \Leftrightarrow \varphi_{(Q_n)^{*n}} = \varphi_P \Leftrightarrow (\varphi_{Q_n})^n = \varphi_P \ .$$

■

Proposició 1.14. *Siguin $P, Q \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ infinitament divisibles. Aleshores $P * Q$ és també infinitament divisible.*

Demostració. Per hipòtesi, per tot $n \geq 1$ existeixen $Q_n, R_n \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ tals que $(Q_n)^{*n} = P$ i $(R_n)^{*n} = Q$. Aleshores, $(Q_n * R_n)^{*n} = (Q_n)^{*n} * (R_n)^{*n} = P * Q$, per tant, $P * Q$ és infinitament divisible. ■

Exemple 1.15. Si $P = N(a, \sigma^2)$, llavors per tot $n \geq 1$ si $Q_n = N\left(\frac{a}{n}, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ es té:

$$\varphi_P(t) = \exp\left(iat - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) = \left[\exp\left(\frac{iat}{n} - \frac{\sigma^2 t^2}{2n}\right)\right]^n = (\varphi_{Q_n}(t))^n \ .$$

Per tant, usant la Proposició 1.13 la llei normal és infinitament divisible.

Exemple 1.16. Si $P = Poiss(\lambda)$, amb $\lambda > 0$, llavors per tot $n \geq 1$ si $Q_n = Poiss\left(\frac{\lambda}{n}\right)$ es té:

$$\varphi_P(t) = \exp\left[\lambda\left(e^{it} - 1\right)\right] = \left[\exp\left(\frac{\lambda}{n}\left(e^{it} - 1\right)\right)\right]^n = (\varphi_{Q_n}(t))^n \ .$$

Per tant, usant la Proposició 1.13 la llei de Poisson és infinitament divisible.

Exemple 1.17. Si $P = \delta_b$ amb $b \in \mathbb{R}$, llavors per tot $n \geq 1$ si $Q_n = \delta_{b/n}$ es té:

$$\varphi_P(t) = \exp(itb) = \left[\exp\left(it\frac{b}{n}\right)\right]^n = (\varphi_{Q_n}(t))^n \ .$$

Per tant, usant la Proposició 1.13 la delta de Dirac és infinitament divisible.

1.2.1 Llei de Poisson composta

Per enunciar i demostrar el Teorema de Lévy-Khintchine, hem d'introduir les lleis de Poisson compostes, les mesures de Lévy i les lleis de Poisson compostes respecte mesures de Lévy. Veurem que les lleis de Poisson compostes i les lleis de Poisson compostes respecte mesures de Lévy són també probabilitats infinitament divisibles.

Definició 1.18. *Siguin $\{X(n), n \geq 1\} \subseteq \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F})$ variables independents idènticament distribuides, còpies de $X \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F})$, amb llei $P_X = \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, i sigui $N \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F})$ independent de les variables $X(n)$ amb llei Poisson de paràmetre $\lambda > 0$. Aleshores, definim la llei de Poisson composta $Poiss(\lambda, \mu)$ com:*

$$Poiss(\lambda, \mu) := P_Z = P_{X(1)+\ldots+X(N)} \ .$$

Calculem la funció característica de la llei de Poisson composta $Poiss(\lambda, \mu)$:

$$\varphi_{Poiss(\lambda,\mu)}(t) = \mathbb{E}\left(e^{it(X(1)+\ldots+X(N))}\right) = \int_{\mathbb{R}} E\left(e^{it(X(1)+\ldots+X(N))} | N = n\right) P_N(dn)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E\left(e^{it(X(1)+\ldots+X(n))}|N=n\right) P(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(e^{it(X(1)+\ldots+X(n))}\right) e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\mathbb{E}\left(e^{itX}\right)\right]^n \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}e^{\lambda\varphi_X(t)} = \exp\left[\lambda\left(\varphi_X(t)-1\right)\right] \ .$$

Observació 1.19. Sigui $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ i $\lambda > 0$ definim $\varphi(t) := \exp\left[\lambda\left(\varphi_\mu(t)-1\right)\right]$. Ens podem preguntar si φ és la funció característica d'una certa probabilitat $P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. Usant la correspondència de Schoenberg (Teorema 3.15), obtenim que si $\psi(t) := \varphi_\mu(t) - 1$ és hermítica i condicionalment definida positiva aleshores φ és definida positiva. Veiem-ho:

$$\psi(-t) = \varphi_\mu(-t) - 1 = \overline{\varphi_\mu(t)} - 1 = \overline{\varphi_\mu(t) - 1} = \overline{\psi(t)} \ .$$

Sigui $n \geq 1$, $t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}$, $z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}$ tal que $\sum_{i=1}^n z_i = 0$, aleshores:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_i\overline{z_j}\psi(t_i - t_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_i\overline{z_j}\varphi_\mu(t_i - t_j) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_i\overline{z_j}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_i\overline{z_j}\varphi_\mu(t_i - t_j) - \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{\sum_{j=1}^{n} z_j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_i\overline{z_j}\varphi_\mu(t_i - t_j) \geq 0 \ .$$

Hem usat que φ_μ és definida positiva. Per tant, φ és definida positiva. A més:

$$\varphi(0) = \exp\left[\lambda\left(\varphi_\mu(0) - 1\right)\right] = \exp\left[\lambda\left(1-1\right)\right] = 1 \ ,$$

i per ser φ_μ uniformement contínua a $\mathbb{R}$, φ és contínua a l'origen. Així doncs, usant el Teorema de Bochner (Teorema 3.14) obtenim que existeix $P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ tal que $\varphi_P = \varphi$. Definim $Poiss(\lambda, \mu) := P$. Notem que aquesta definició extén la que hem fet anteriorment. En la següent observació calculem la funció característica d'una classe de lleis de Poisson compostes que apareixeran al llarg del treball:

Observació 1.20. Sigui $\mu \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R})$ mesura finita, $\mu \neq 0$. Aleshores si $\lambda := \mu(\mathbb{R}) > 0$, $\nu := \frac{\mu}{\mu(\mathbb{R})} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ i $P := Poiss(\lambda, \nu) = Poiss\left(\mu(\mathbb{R}), \frac{\mu}{\mu(\mathbb{R})}\right)$ es té:

$$\varphi_P(t) = \exp\left(\int_{\mathbb{R}}\left(e^{itx} - 1\right)\mu(dx)\right) \ .$$

Demostració. Calculem:

$$\varphi_P(t) = \exp\left[\lambda\left(\varphi_\nu(t) - 1\right)\right] = \exp\left[\mu(\mathbb{R})\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\frac{\mu(dx)}{\mu(\mathbb{R})} - 1\right]$$

$$= \exp\left(\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\mu(dx) - \mu(\mathbb{R})\right) = \exp\left(\int_{\mathbb{R}}\left(e^{itx} - 1\right)\mu(dx)\right) \ .$$

∎

Exemple 1.21. Sigui $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ i $\lambda > 0$. Si $P = Poiss(\lambda, \mu)$, llavors per tot $n \geq 1$ si $Q_n = Poiss\left(\frac{\lambda}{n}, \mu\right)$ es té:

$$\varphi_P(t) = \exp\left[\lambda\left(\varphi_\mu(t) - 1\right)\right] = \left[\exp\left(\frac{\lambda}{n}\left(\varphi_\mu(t) - 1\right)\right)\right]^n = \left(\varphi_{Q_n}(t)\right)^n \ .$$

Per tant, usant la Proposició 1.13 la llei de Poisson composta és infinitament divisible.

1.3 Mesures de Lévy

Definició 1.22. *Sigui $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Diem que μ és una mesura de Lévy si $\mu(\{0\}) = 0$ i:*

$$\int_{\mathbb{R}} \left(1 \wedge x^2\right) \mu(dx) < \infty \ .$$

Observació 1.23. Sigui $\mu \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R})$ tal que $\mu(\{0\}) = 0$, aleshores μ és mesura de Lévy ja que:

$$\int_{\mathbb{R}} \left(1 \wedge x^2\right) \mu(dx) \leq \int_{\mathbb{R}} 1 \cdot \mu(dx) = \mu(\mathbb{R}) < \infty \ .$$

Proposició 1.24. *Sigui $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ mesura de Lévy. Aleshores $\forall \epsilon > 0$, $\mu\left([-\epsilon, \epsilon]^c\right) < \infty$.*

Demostració. Suficient demostrar-ho per $0 < \epsilon < 1$. Llavors $\epsilon^2 \wedge x^2 \leq 1 \wedge x^2$ i per tant:

$$\infty > \int_{\mathbb{R}} \left(x^2 \wedge 1\right) \mu(dx) \geq \int_{\mathbb{R}} \left(x^2 \wedge \epsilon^2\right) \mu(dx) = \int_{[-\epsilon,\epsilon]} x^2 \mu(dx) + \int_{[-\epsilon,\epsilon]^c} \epsilon^2 \mu(dx) \ .$$

Per tant:

$$\int_{[-\epsilon,\epsilon]^c} \epsilon^2 \mu(dx) < \infty \Rightarrow \int_{[-\epsilon,\epsilon]^c} \mu(dx) = \mu\left([-\epsilon, \epsilon]^c\right) < \infty \ .$$

∎

1.3.1 Llei de Poisson composta respecte una mesura de Lévy

Per introduir la llei de Poisson composta respecte una mesura de Lévy hem de fer unes definicions prèvies. Sigui $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ mesura de Lévy, $\mu \neq 0$ i $n \geq 1$. Definim:

$$\mu_n := \mu|_{\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]^c} \quad \text{i} \quad C_n := \int_{\left\{\frac{1}{n} < |x| \leq 1\right\}} x \mu(dx) \ .$$

Per la Proposició 1.24 tenim $\mu_n \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R})$. A més $C_n < \infty$ ja que usant la desigualtat de Holder (Proposició 3.8) i que μ és mesura de Lévy:

$$|C_n| \leq \int_{\left\{\frac{1}{n} < |x| \leq 1\right\}} |x| \mu(dx) \leq \left(\int_{\left\{\frac{1}{n} < |x| \leq 1\right\}} x^2 \mu(dx)\right)^{1/2} \left(\int_{\left\{\frac{1}{n} < |x| \leq 1\right\}} 1^2 \mu(dx)\right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\int_{\{0 < |x| \leq 1\}} x^2 \mu(dx)\right)^{1/2} \mu\left(\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]^c\right)^{1/2} < \infty \ .$$

Notem que per n prou gran es té que $\mu_n \neq 0$ ja que en cas contrari si $\mu_n = 0$ per tot $n \geq 1$ es tindria que $\mu = 0$ ja que:

$$\mu(\mathbb{R}) = \mu(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]^c\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]^c\right) = 0 \ .$$

Així doncs, per n prou gran, podem definir $P_n := \delta_{-C_n} * Poiss(\lambda_n, \nu_n)$ on $\lambda_n = \mu_n(\mathbb{R}) > 0$ i $\nu_n = \frac{\mu_n}{\mu_n(\mathbb{R})} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. Calculem la funció característica de P_n usant el Corol·lari 1.6 i l'Observació 1.20:

$$\varphi_{P_n}(t) = \varphi_{\delta_{-C_n}}(t) \varphi_{Poiss(\lambda_n, \nu_n)}(t) = \exp(-itC_n) \exp\left(\int_{\mathbb{R}} \left(e^{itx} - 1\right) \mu_n(dx)\right)$$

$$= \exp(-itC_n) \exp\left(\int_{\{\frac{1}{n}<|x|\}} \left(e^{itx} - 1\right) \mu(dx) \right) = \exp\left(-itC_n + \int_{\{\frac{1}{n}<|x|\}} \left(e^{itx} - 1\right) \mu(dx) \right)$$

$$= \exp\left(\int_{\{\frac{1}{n}<|x|\leq 1\}} -itx\mu(dx) + \int_{\{\frac{1}{n}<|x|\}} \left(e^{itx} - 1\right) \mu(dx) \right)$$

$$= \exp\left(\int_{\{\frac{1}{n}<|x|\}} \left(e^{itx} - 1 - itx\mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right) \mu(dx) \right) .$$

Observació 1.25.

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{P_n}(t) = \exp\left(\int_{\mathbb{R}} \left(e^{itx} - 1 - itx\mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right) \mu(dx) \right) =: \phi(t) .$$

Demostració. Notem que:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{\{\frac{1}{n}<|x|\}} \left(e^{itx} - 1 - itx\mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right\} = e^{itx} - 1 - itx\mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}} .$$

D'altra banda, usant la Proposició 3.23 existeix $\theta \in \mathbb{C}$ amb $|\theta| \leq 1$ tal que:

$$\mathbb{1}_{\{\frac{1}{n}<|x|\}} \left|e^{itx} - 1 - itx\mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right| = \left|e^{itx} - 1 - itx\right| \mathbb{1}_{\{\frac{1}{n}<|x|\leq 1\}} + \left|e^{itx} - 1\right| \mathbb{1}_{\{|x|>1\}}$$

$$\leq \left|\frac{\theta}{2}t^2x^2\right| \mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}} + \left|e^{itx} - 1\right| \mathbb{1}_{\{|x|>1\}} \leq \frac{1}{2}t^2x^2\mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}} + 2\mathbb{1}_{\{|x|>1\}} .$$

Integrant respecte μ i usant que és mesura de Lévy:

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2}t^2x^2\mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}} + 2\mathbb{1}_{\{|x|>1\}} \right) \mu(dx) = \frac{1}{2}t^2 \int_{|x|\leq 1} x^2\mu(dx) + 2\int_{|x|>1} \mu(dx) < \infty .$$

Per tant, podem aplicar el Teorema de convergència dominada (Teorema 3.6) i obtenim:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{P_n}(t) = \exp\left(\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{\{|x|>\frac{1}{n}\}} \left(e^{itx} - 1 - itx\mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right) \mu(dx) \right)$$

$$= \exp\left(\int_{\mathbb{R}} \left(e^{itx} - 1 - itx\mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right) \mu(dx) \right) .$$

■

Observació 1.26. ϕ és contínua.

Demostració. Notem que:

$$\phi \text{ contínua } \Leftrightarrow t \mapsto \int_{\mathbb{R}} \left(e^{itx} - 1 - itx\mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right) \mu(dx) \text{ contínua}$$

Si $f(x,t) := e^{itx} - 1 - itx\mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}}$, és clar que per x fixat, $f(x,\cdot)$ és contínua i que $f(\cdot,t)$ és integrable respecte la mesura de Lévy μ per tot $t \geq 0$ per l'observació anterior. Aleshores aplicant el Teorema 3.7(1) obtenim que ϕ és contínua. ■

Pel Teorema de continuïtat de Lévy (Teorema 3.19), obtenim que existeix $P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ tal que $\varphi_P = \phi$. Notem que si $\mu = 0$, aleshores $\phi(t) = 1$ per tot $t \in \mathbb{R}$ i, per tant, $\phi = \varphi_{\delta_0}$. Aquests resultats ens motiven la següent definició.

Definició 1.27. *Sigui $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ mesura de Lévy tal que $\mu \neq 0$. Anomenem llei de Poisson composta respecte a la mesura de Lévy μ i l'escrivim com $c - Poiss(\mu)$ a la probabilitat $P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ tal que $\varphi_P = \phi$ on ϕ és la funció definida en l'Observació 1.25. Si $\mu = 0$, definim $c - Poiss(\mu) := \delta_0$.*

Exemple 1.28. Sigui $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ mesura de Lévy, si $P = c - Poiss(\mu)$, llavors per tot $n \geq 1$ si $Q_n = c - Poiss\left(\frac{\mu}{n}\right)$ es té

$$\varphi_P(t) = \exp\left(\int_{\mathbb{R}} \left(e^{itx} - 1 - itx\mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right) \mu(dx)\right)$$

$$= \left[\exp\left(\int_{\mathbb{R}} \left(e^{itx} - 1 - itx\mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right) \frac{\mu}{n}(dx)\right)\right]^n = \left(\varphi_{Q_n}(t)\right)^n \ .$$

Per tant, usant la Proposició 1.13 la llei de Poisson composta respecte una mesura de Lévy és infinitament divisible.

1.4 Teorema de Lévy-Khintchine

Necessitarem uns resultats importants de les lleis infinitament divisibles: les seves funcions característiques mai s'anul·len i es poden aproximar per lleis de Poisson compostes.

Lema 1.29. *Sigui $P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. Definim $\widetilde{P}(B) = P(-B)$ amb $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ i $-B = \{-x : x \in B\}$. Aleshores $\widetilde{P} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ i $\varphi_{\widetilde{P}}(t) = \varphi_P(-t)$.*

Demostració. Apliquem el Teorema de la mesura imatge (Teorema 3.2):

$$\varphi_{\widetilde{P}}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \widetilde{P}(dx) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} P(dx) = \varphi_P(-t) \ .$$

■

Proposició 1.30. *Sigui $P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ infinitament divisible. Aleshores: $\varphi_P(t) \neq 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$.*

Demostració. Per tot $n \geq 1$ existeix $Q_n \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ tal que:

$$\varphi_P(t) = (\varphi_{Q_n}(t))^n \Rightarrow |\varphi_P(t)| = |\varphi_{Q_n}(t)|^n \Rightarrow |\varphi_{Q_n}(t)| = |\varphi_P(t)|^{1/n} \ .$$

Veiem que existeix $R_n \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ tal que $\varphi_{R_n}(t) = |\varphi_{Q_n}(t)|^2$:

$$|\varphi_{Q_n}(t)|^2 = \varphi_{Q_n}(t)\overline{\varphi_{Q_n}(t)} = \varphi_{Q_n}(t)\varphi_{Q_n}(-t) = \varphi_{Q_n}(t)\varphi_{\widetilde{Q}_n}(t) = \varphi_{Q_n * \widetilde{Q}_n}(t) \ .$$

Per tant, $R_n := Q_n * \widetilde{Q}_n$. L'objectiu és aplicar el Teorema de continuïtat de Lévy. Per fer-ho, calculem:

$$\varphi(t) := \lim_{n\to\infty} \varphi_{R_n}(t) = \lim_{n\to\infty} |\varphi_{Q_n}(t)|^2 = \lim_{n\to\infty} |\varphi_P(t)|^{2/n} = \mathbb{1}_{\{\varphi_P(t)\neq 0\}} = \begin{cases} 1 & \text{si } \varphi_P(t) \neq 0 \\ 0 & \text{si } \varphi_P(t) = 0 \end{cases}$$

Veiem ara que φ és contínua en el 0. Sabem que $\varphi_P(0) = 1$ i que φ_P és uniformement contínua a $\mathbb{R}$. Per tant, en un entorn del 0, $\varphi_P(t) \neq 0$ i , llavors, φ és contínua en el 0. Pel Teorema de continuïtat de Lévy obtenim que φ és funció característica. En particular és uniformement contínua en $\mathbb{R}$, llavors necessàriament ha de ser:

$$\varphi(t) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \varphi_P(t) \neq 0 \ .$$

■

Observació 1.31. Sigui $P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ infinitament divisible. Sabem que φ_P és una funció uniformement contínua, que $\varphi_P(0) = 1$ i per la Proposició 1.30 que no s'anul·la mai. Estem en les hipòtesis de la Proposició 3.24 i per tant, d'ara en endavant, podrem prendre logaritme i arrel n-èssima, en el sentit que es detalla en la Proposició 3.24, de funcions característiques de probabilitats infinitament divisibles .

Proposició 1.32. *Sigui $P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ infinitament divisible. Aleshores existeix una successió $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ tal que $Poiss(n, Q_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\omega} P$.*

Demostració. Per tot $n \geq 1$ existeix $Q_n \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ tal que $\varphi_P(t) = (\varphi_{Q_n}(t))^n$. Com que a més $\varphi_{Q_n}(0) = 1$ i φ_{Q_n} és contínua, usant la unicitat de l'arrel n-èssima (Proposició 3.24(2)), es té que:

$$\varphi_{Q_n}(t) = \varphi_P(t)^{1/n} \ .$$

Aleshores:

$$\varphi_{Poiss(n,Q_n)}(t) = \exp\left[n\left(\varphi_{Q_n}(t) - 1\right)\right] = \exp\left[n\left(\varphi_P(t)^{1/n} - 1\right)\right] \ .$$

Usant $\varphi_P(t)^{1/n} = e^{\log(\varphi_P(t))/n}$, obtenim:

$$n\left(\varphi_P(t)^{1/n} - 1\right) = n\left(e^{\log(\varphi_P(t))/n} - 1\right) = n\left(1 + \frac{\log(\varphi_P(t))}{n} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\log(\varphi_P(t))^k}{n^k k!} - 1\right)$$

$$= \log(\varphi_P(t)) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\log(\varphi_P(t))^k}{n^{k-1} k!} \ .$$

Com que $n \geq 1$, per tot $k \geq 2$ es té $n \leq n^{k-1}$ i, per tant, $\frac{1}{n^{k-1}} \leq \frac{1}{n}$. Aleshores:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\log(\varphi_P(t))^k}{n^{k-1} k!} \right| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{\infty} \left| \frac{\log(\varphi_P(t))^k}{k!} \right| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} e^{|\log(\varphi_P(t))|} = 0 \ .$$

Per tant:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\log(\varphi_P(t))^k}{n^{k-1} k!} = 0 \ .$$

Finalment:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{Poiss(n,Q_n)}(t) = \exp\left[\lim_{n\to\infty} \left(\log(\varphi_P(t)) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\log(\varphi_P(t))^k}{n^{k-1} k!}\right)\right]$$

$$= \exp\left[\log(\varphi_P(t))\right] = \varphi_P(t) \ .$$

Aplicant el Teorema de continuïtat de Lévy, obtenim que $Poiss\,(n, Q_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\omega} P$. ■

Usarem un seguit de funcions que definim a continuació. Enunciem les propietats d'aquestes funcions que necessitarem i per raons d'espai les demostrarem en l'annex.

Notació 3. *Siguin $t \in \mathbb{R}$ i $P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ infinitament divisible. Definim:*

- $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *com* $h(x) = 1 - \frac{\sin(x)}{x}$ *si* $x \neq 0$ *i* $h(0) = 0$.
- $g_t : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *com* $g_t(x) = e^{itx} - 1 - itx\mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}}$
- $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *com* $f_t(x) = \frac{g_t(x)}{h(x)}$ *si* $x \neq 0$ *i* $f_t(0) = -3t^2$
- $\phi_P(t) := \log(\varphi_P(t))$
- $\widetilde{\phi}_P(t) := \phi_P(t) - \frac{1}{2}\int_{t-1}^{t+1} \phi_P(s)ds$

Lema 1.33.

1. *$h(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ i $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.*
2. *h és contínua i acotada. Per tant, és integrable respecte una mesura finita.*

3. g_t *és integrable respecte una mesura de Lévy.*

4. *Sigui* $P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ *i* $k > 0$. *Definim* $Q(dx) := \frac{k}{h(x)} \mathbb{1}_{\{x \neq 0\}} P(dx)$.
   Aleshores $Q \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ *i és mesura de Lévy.*

5. f_t *és contínua i acotada. Per tant, és integrable respecte una mesura finita.*

Demostració. Veure annex, pàgina 57, Lema 3.27. ■

Finalment, necessitem tres lemes per demostrar el Teorema de Lévy-Khintchine. En el primer lema veiem que la convergència feble de probabilitats infinitament divisibles cap a una probabilitat infinitament divisible també implica la convergència uniforme en compactes del logaritme de les seves funcions característiques. En el segon lema demostrarem una caracterització de la delta de Dirac, que usarem en l'últim lema.

Lema 1.34. *Siguin* $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ *infinitament divisibles,* $P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ *infinitament divisible tal que* $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{\omega} P$. *Aleshores:*

1. ϕ_{P_n} *convergeix uniformement en compactes a* ϕ_P.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{\phi}_{P_n}(t) = \widetilde{\phi}_P(t)$ *per tot* $t \in \mathbb{R}$.

Demostració.
(1) Pel Teorema de continuïtat de Lévy, sabem que φ_{P_n} convergeix uniformement en compactes a φ_P i per ser P_n i P infinitament divisibles podem aplicar la Proposició 3.25, i obtenim que ϕ_{P_n} convergeix uniformement en compactes a ϕ_P.
(2) Sigui $t \in \mathbb{R}$, escollim l'interval compacte $K := [t-1, t+1]$. Per l'observació anterior, ϕ_{P_n} convergeix uniformement a ϕ_P en K, per tant, aplicant la Proposició 3.26, tenim:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{t-1}^{t+1} \phi_{P_n}(s)ds = \int_{t-1}^{t+1} \phi_P(s)(ds) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \widetilde{\phi}_{P_n}(t) = \widetilde{\phi}_P(t)\ .$$

■

Lema 1.35. *Sigui* $P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. *Aleshores:*

$$P = \delta_0 \Leftrightarrow \varphi_P(t) = 1 \quad \forall t \in [-1, 1]\ .$$

Demostració.
($\Rightarrow$) És clar que $\varphi_{\delta_0}(t) = 1$ per tot $t \in \mathbb{R}$.
($\Leftarrow$) Si veiem que $\varphi_P(t) = 1$ per tot $t \in \mathbb{R}$ ja hem acabat. Usant la desigualtat de la Proposició 3.13(9):

- $s = 1$ i $t \in [0, 2] \Rightarrow |\varphi_P(t) - 1|^2 \leq 0 = 2\left[1 - \mathrm{Re}\left(\phi_P(t-1)\right)\right] \Rightarrow \varphi_P(t) = 1$ per $t \in [-1, 2]$.

- $s = 2$ i $t \in [1, 4] \Rightarrow |\varphi_P(t) - 1|^2 \leq 0 = 2\left[1 - \mathrm{Re}\left(\phi_P(t-2)\right)\right] \Rightarrow \varphi_P(t) = 1$ per $t \in [-1, 4]$.

Repetint l'argument per valors adients de s i t obtenim que $\varphi_P(t) = 1$ per tot $t \in \mathbb{R}$ i, per tant, $P = \delta_0$. ■

Lema 1.36. *Sigui $P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ infinitament divisible. Aleshores:*

1. $\widetilde{\phi_P}(0) \geq 0$.
2. $\widetilde{\phi_P}(0) = 0 \Rightarrow P = \delta_a$ *per algun* $a \in \mathbb{R}$.

Demostració.
(1) Veiem primer que $\operatorname{Im}(\phi_P(t))$ és una funció senar. Sigui $t \in \mathbb{R}$, aleshores:

$$e^{\phi_P(-t)} = \varphi_P(-t) = \overline{\varphi_P(t)} = \overline{e^{\phi_P(t)}} = e^{\overline{\phi_P(t)}} \Rightarrow \phi_P(-t) = \overline{\phi_P(t)} + 2k(t)\pi i \ .$$

On $k(t) \in \mathbb{Z}$. En particular, per $t = 0$, es té $\phi_P(0) = 0$, per tant, $k(0) = 0$. Com que ϕ_P és una funció contínua, s'ha de tenir $k(t) = 0$ per tot $t \in \mathbb{R}$. Així doncs:

$$\varphi_P(-t) = \overline{\varphi_P(t)} \Rightarrow \operatorname{Im}(\phi_P(-t)) = -\operatorname{Im}(\phi_P(t)) \ .$$

Per tant, $\operatorname{Im}(\phi_P(t))$ és una funció senar. Veiem ara que $\operatorname{Re}(\phi_P(t)) \leq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$:

$$e^{\phi_P(t)} = \varphi_P(t) \Rightarrow e^{\operatorname{Re}(\phi_P(t))} = \left| e^{\phi_P(t)} \right| = |\varphi_P(t)| \leq 1 \Rightarrow \operatorname{Re}(\phi_P(t)) \leq 0 \ .$$

Finalment per veure que $\widetilde{\phi_P}(0) \geq 0$, usant que $\phi_P(0) = 0$, que $\operatorname{Im}(\phi_P(t))$ és una funció senar i que $\operatorname{Re}(\phi_P(t)) \leq 0$:

$$\operatorname{Im}\left(\widetilde{\phi_P}(0)\right) = \operatorname{Im}(\phi_P(0)) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \operatorname{Im}(\phi_P(s))\, ds = 0$$

$$\operatorname{Re}\left(\widetilde{\phi_P}(0)\right) = \operatorname{Re}(\phi_P(0)) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \operatorname{Re}(\phi_P(s))\, ds = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \operatorname{Re}(\phi_P(s))\, ds \geq 0 \ .$$

(2) Suposem que $\widetilde{\phi_P}(0) = 0$. Volem veure que existeix $a \in \mathbb{R}$ tal que $P = \delta_a$. Notem que:

$$\widetilde{\phi_P}(0) = 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} \operatorname{Re}(\phi_P(s))\, ds = 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(\phi_P(s)) = 0 \ \ \forall s \in [-1,1]$$

$$\Rightarrow \varphi_P(s) = e^{i \operatorname{Im}(\phi_P(s))} \ \ \forall s \in [-1,1] \Rightarrow |\varphi_P(s)| = 1 \ \ \forall s \in [-1,1] \ .$$

Considerem la funció característica de la probabilitat $P * \widetilde{P}$:

$$\varphi_{P*\widetilde{P}}(t) = \varphi_P(t)\varphi_{\widetilde{P}}(t) = \varphi_P(t)\varphi_P(-t) = \varphi_P(t)\overline{\varphi_P(t)} = |\varphi_P(t)|^2 \ .$$

Per tant, $\varphi_{P*\widetilde{P}}(t) = 1$ per tot $t \in [-1,1]$ i usant el Lema 1.35 obtenim que $P * \widetilde{P} = \delta_0$. Suposem ara que existeix $b \in \mathbb{R}$ tal que $P((b,+\infty)) =: p \in (0,1)$ i arribarem a una contradicció. Llavors:

$$\left(P * \widetilde{P}\right)((0,+\infty)) = \int_{(-\infty,-b)} P((-x,+\infty))\, \widetilde{P}(dx) + \int_{[-b,+\infty)} P((-x,+\infty))\, \widetilde{P}(dx)$$

$$\geq 0 + P((b,+\infty))\, \widetilde{P}([-b,+\infty)) = p \cdot P((-\infty,b]) = p(1-p) > 0 \ .$$

Fet que contradiu que $P * \widetilde{P} = \delta_0$. Així doncs per tot $b \in \mathbb{R}$ es té $P((b,+\infty)) \in \{0,1\}$. A més, existeixen $c,d \in \mathbb{R}$, $c < d$ tals que $P((c,+\infty)) = 1$ i $P((d,+\infty)) = 0$. En cas contrari si:

$$P((b,+\infty)) = 0 \ \forall b \in \mathbb{R} \Rightarrow P(\mathbb{R}) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(-n,+\infty)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P((-n,+\infty)) = 0 \ ,$$

o

$$P\left((b,+\infty)\right)=1\ \forall b\in\mathbb{R}\Rightarrow P\left(\mathbb{R}\right)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty,n]\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}P\left((-\infty,n]\right)=0$$

obtíndriem contraddicions.
Per tant, $P=\delta_a$ on $a:=\sup\{b\in\mathbb{R}:P\left((b,+\infty)\right)=1\}\in\mathbb{R}$. ■

Teorema 1.37. ***Teorema de Lévy-Khintchine*** *Sigui* $P\in\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. *Aleshores:*

P és infinitament divisible $\Leftrightarrow\exists\ a\in\mathbb{R},\ \sigma^2\geq 0\ ,\ \mu\in\mathcal{M}(\mathbb{R})$ *mesura de Lévy tal que:*

$$P=N(a,\sigma^2)*c-Poiss(\mu)\ .$$

Equivalentment:

P és infinitament divisible $\Leftrightarrow\exists\ a\in\mathbb{R},\ \sigma^2\geq 0\ ,\ \mu\in\mathcal{M}(\mathbb{R})$ *mesura de Lévy tal que:*

$$\varphi_P(t)=\exp\left[iat-\frac{\sigma^2t^2}{2}+\int_{\mathbb{R}}\left(e^{itx}-1-itx\mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right)\mu(dx)\right]\ .$$

Demostració.
($\Leftarrow$) Pels exemples 1.15 i 1.28 les lleis normals i lleis de Poisson compostes respecte una mesura de Lévy són lleis infinitament divisibles. Per la Proposició 1.14 la convolució de lleis infinitament divisibles és infinitament divisible. Per tant, P és infinitament divisible.

($\Rightarrow$) Sigui $P\in\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ infinitament divisible. Pel Lema 1.36 sabem que $\widetilde{\phi_P}(0)\geq 0$.
Si $\widetilde{\phi_P}(0)=0$ ja hem acabat ja que $P=\delta_a$ per algun $a\in\mathbb{R}$ i llavors escollim: a, $\sigma^2:=0$ i $\mu:=0$.
Suposem doncs que $\widetilde{\phi_P}(0)>0$. Per la Proposició 1.32 existeix una successió $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ tal que $Poiss(n,Qn)\xrightarrow[n\to\infty]{\omega}P$. Definim $\mu_n:=nQ_n\in\mathcal{M}_f(\mathbb{R})$ i

$$a_n:=\int_{\mathbb{R}}x\mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}}\mu_n(dx)\ .$$

$$\phi_n(t):=\phi_{Poiss(n,Q_n)}(t)=\log\left(\varphi_{Poiss(n,Q_n)}(t)\right)=\log\left[\exp\left(n\left(\varphi_{Q_n}(t)-1\right)\right)\right]\ .$$

L'objectiu és reescriure les funcions ϕ_n i $\widetilde{\phi_n}$ en termes de a_n,g_t i h. Notem que $a_n<\infty$ usant que μ_n són mesures finites:

$$|a_n|\leq\int_{\mathbb{R}}|x|\mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}}\mu_n(dx)\leq\int_{\mathbb{R}}1\cdot\mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}}\mu_n(dx)\leq\int_{\mathbb{R}}\mu_n(dx)=n<\infty\ .$$

Pel Lema 1.33(3) g_t és integrable respecte les mesures μ_n. Per rescriure $\phi_n(t)$, notem que $f(t):=n\left(\varphi_{Q_n}(t)-1\right)$ és contínua i satisfà que $f(0)=0$, que $e^{f(t)}=\varphi_{Poiss(n,Q_n)}(t)$. Per tant, usant la unicitat del logaritme (Proposició 3.24(1)), s'ha de tenir:

$$\phi_n(t)=n\left(\varphi_{Q_n}(t)-1\right)=\int_{\mathbb{R}}e^{itx}nQ_n(dx)-n=\int_{\mathbb{R}}\left(e^{itx}-1\right)\mu_n(dx)$$

$$=\int_{\mathbb{R}}\left(e^{itx}-1-itx\mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}}+itx\mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right)\mu_n(dx)=\int_{\mathbb{R}}g_t(x)\mu_n(dx)+it\int_{\mathbb{R}}x\mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}}\mu_n(dx)\,.$$

Per tant, la funció $\phi_n(t)$ es pot escriure com:

$$\phi_n(t)=\int_{\mathbb{R}}\left(e^{itx}-1\right)\mu_n(dx)=\int_{\mathbb{R}}g_t(x)\mu_n(dx)+ita_n\ .\tag{1.2}$$

Per reescriure $\widetilde{\phi_n}(t)$ ens interessa calcular l'expressió $\int_{t-1}^{t+1} \phi_n(s)(ds)$. Notem que:

$$\int_{t-1}^{t+1} \phi_n(s)ds = \int_{t-1}^{t+1} \int_{\mathbb{R}} \left(e^{isx} - 1\right) \mu_n(dx)ds = \int_{\mathbb{R}} \int_{t-1}^{t+1} \left(e^{isx} - 1\right) ds\mu_n(dx) \ . \tag{1.3}$$

Hem aplicat el Teorema de Fubini ja que usant que μ_n és mesura finita:

$$\int_{t-1}^{t+1} \int_{\mathbb{R}} \left|e^{isx} - 1\right| \mu_n(dx)ds \leq \int_{t-1}^{t+1} \int_{\mathbb{R}} 2\mu_n(dx)ds = 4 \int_{\mathbb{R}} \mu_n(dx) = 4n < \infty \ .$$

Notem que per $x = 0$ l'integrand de (1.3) és 0. Per tant, podem excloure $x = 0$ de l'integral:

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{t-1}^{t+1} \left(e^{isx} - 1\right) ds\mu_n(dx) = \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \int_{t-1}^{t+1} \left(e^{isx} - 1\right) ds\mu_n(dx)$$

$$= \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left|\frac{e^{isx}}{ix} - s\right|_{t-1}^{t+1} \mu_n(dx) = \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left(e^{itx}\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{ix} - 2\right) \mu_n(dx)$$

$$= 2 \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left(e^{itx}\frac{\sin(x)}{x} - 1\right) \mu_n(dx) \ .$$

Tornant a usar que per $x = 0$ l'integrand és 0 obtenim:

$$\widetilde{\phi_n}(t) = \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left(e^{itx} - 1\right) \mu_n(dx) - \frac{1}{2} \cdot 2 \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left(e^{itx}\frac{\sin(x)}{x} - 1\right) \mu_n(dx)$$

$$= \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \left(e^{itx} - 1 - e^{itx}\frac{\sin(x)}{x} + 1\right) \mu_n(dx) = \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} e^{itx} \left(1 - \frac{\sin(x)}{x}\right) \mu_n(dx) \ .$$

Per tant, la funció $\widetilde{\phi_n}(t)$ es pot escriure com:

$$\widetilde{\phi_n}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} h(x)\mu_n(dx) \ . \tag{1.4}$$

El següent objectiu és construir unes mesures de probabilitat a partir de les μ_n que convergeixin a una certa probabilitat. Com que $\widetilde{\phi_P}(0) > 0$, pel Lema 1.34(2) existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\widetilde{\phi_n}(0) > 0 \ \forall n \geq n_0$. Definim ara per $n \geq n_0$ les mesures de probabilitat (veure Proposició 3.3):

$$\widetilde{\mu}_n(dx) := \frac{h(x)}{\widetilde{\phi_n}(0)}\mu_n(dx) \ .$$

Veiem que efectivament $\widetilde{\mu}_n \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ usant (1.4):

$$\widetilde{\mu}_n(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} \frac{h(x)}{\widetilde{\phi_n}(0)}\mu_n(dx) = \frac{1}{\widetilde{\phi_n}(0)} \int_{\mathbb{R}} h(x)\mu_n(dx) = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} h(x)\mu_n(dx)} \int_{\mathbb{R}} h(x)\mu_n(dx) = 1 \ .$$

Notem que la integral $\int_{\mathbb{R}} h(x)\mu_n(dx)$ només podria ser igual a 0 si $Q_n = \delta_0$ ja que $h(x) = 0$ només per $x = 0$ i per $x \neq 0$, $h(x) > 0$. Però en aquest cas, tindríem per l'argument de la Proposició 1.32 que $P = \delta_0$, cas que ja hem estudiat. A més, la integral és finita ja que h és acotada i μ_n és finita.
Volem veure que les mesures $\widetilde{\mu}_n$ convergeixen feblement cap a una probabilitat $\widetilde{\mu}$. Per

fer-ho volem aplicar el Teorema de continuïtat de Lévy estudiant el límit de les funcions característiques de $\widetilde{\mu}_n$:

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{\widetilde{\mu}_n}(t)=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}e^{itx}\widetilde{\mu}_n(dx)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\widetilde{\phi_n}(0)}\int_{\mathbb{R}}e^{itx}h(x)\mu_n(dx)=\lim_{n\to\infty}\frac{\widetilde{\phi_n}(t)}{\widetilde{\phi_n}(0)}=\frac{\widetilde{\phi_P}(t)}{\widetilde{\phi_P}(0)}\ . \tag{1.5}$$

Hem usat que $\lim\limits_{n\to\infty}\widetilde{\phi_n}(t)=\widetilde{\phi_P}(t)$ per tot $t\in\mathbb{R}$ i (1.4).

Com que $\frac{\widetilde{\phi_P}(t)}{\widetilde{\phi_P}(0)}$ és una funció contínua en el 0 pel Teorema de continuïtat de Lévy obtenim que existeix $\widetilde{\mu}\in\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ tal que $\widetilde{\mu}_n\xrightarrow[n\to\infty]{\omega}\widetilde{\mu}$ i a més:

$$\varphi_{\widetilde{\mu}}(t)=\lim_{n\to\infty}\varphi_{\widetilde{\mu}_n}(t)=\frac{\widetilde{\phi_P}(t)}{\widetilde{\phi_P}(0)}\Rightarrow\widetilde{\phi_P}(t)=\widetilde{\phi_P}(0)\int_{\mathbb{R}}e^{itx}\widetilde{\mu}(dx)\ .$$

El següent pas és construir una mesura de Lévy, a partir de la mesura $\widetilde{\mu}$. Definim la mesura

$$\mu(dx):=\frac{\widetilde{\phi_P}(0)}{h(x)}\mathbb{1}_{\{x\neq 0\}}\widetilde{\mu}(dx)\ .$$

Pel Lema 1.33(4) $\mu\in\mathcal{M}(\mathbb{R})$ és mesura de Lévy. Usant que $Poiss(n,Qn)\xrightarrow[n\to\infty]{\omega}P$ i (1.2):

$$\phi_P(t)=\lim_{n\to\infty}\phi_n(t)=\lim_{n\to\infty}\left[\int_{\mathbb{R}}g_t(x)\mu_n(dx)+ia_nt\right]\ . \tag{1.6}$$

Volem reescriure la integral respecte μ_n per una que sigui respecte $\widetilde{\mu}_n$ i poder així usar la convergència feble d'aquestes. Llavors com que $g_t(0)=0$ i $\widetilde{\mu}_n(\{0\})=0$:

$$\int_{\mathbb{R}}g_t(x)\mu_n(dx)=\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}\frac{g_t(x)h(x)\widetilde{\phi_n}(0)}{h(x)\widetilde{\phi_n}(0)}\mu_n(dx)=\widetilde{\phi_n}(0)\int_{\mathbb{R}}f_t(x)\widetilde{\mu}_n(dx)\ .$$

Pel Lema 1.33(5) f_t és contínua i acotada. Com que $\widetilde{\mu}_n\xrightarrow[n\to\infty]{\omega}\widetilde{\mu}$ usant la Proposició 3.18(2) es té:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f_t(x)\widetilde{\mu}_n(dx)=\int_{\mathbb{R}}f_t(x)\widetilde{\mu}(dx)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}g_t(x)\mu_n(dx)=\widetilde{\phi_P}(0)\int_{\mathbb{R}}f_t(x)\widetilde{\mu}(dx)\ . \tag{1.7}$$

A partir de (1.6) i (1.7) podem assegurar que $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ existeix. Definim:

$$a:=\lim_{n\to\infty}a_n\quad \text{i}\quad \sigma^2:=6\widetilde{\phi_P}(0)\widetilde{\mu}\left(0\right)\geq 0\ . \tag{1.8}$$

L'últim pas és reescriure $\phi_P(t)$ en termes de a, σ^2, g_t i la mesura de Lévy μ utilitzant (1.7) i (1.8):

$$\phi_P(t)=\lim_{n\to\infty}\left[\int_{\mathbb{R}}g_t(x)\mu_n(dx)+ia_nt\right]=\widetilde{\phi_P}(0)\int_{\mathbb{R}}f_t(x)\widetilde{\mu}(dx)+iat$$

$$=\widetilde{\phi_P}(0)\left[\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}\frac{g_t(x)}{h(x)}\widetilde{\mu}(dx)-3t^2\widetilde{\mu}(0)\right]+iat=\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}g_t(x)\mu(dx)-\frac{1}{2}\sigma^2t^2+iat\ .$$

Així doncs, obtenim:

$$\varphi_P(t)=\exp\left[iat-\frac{\sigma^2t^2}{2}+\int_{\mathbb{R}}g_t(x)\mu(dx)\right]$$

$$= \exp\left[iat - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{itx} - 1 - itx\mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right) \mu(dx)\right] .$$

■

Observació 1.38. Es pot demostrar que:

P és infinitament divisible $\Leftrightarrow \exists!\ a \in \mathbb{R},\ \sigma^2 \geq 0\ ,\ \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ mesura de Lévy tal que

$$P = N(a, \sigma^2) * c - Poiss(\mu) .$$

Veure [3], pàgina 335, Teorema 16.17.

Com a conseqüència del Teorema de Lévy-Khintchine, introduïm aquestes dues definicions.

Definició 1.39. *Sigui $P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ infinitament divisible. Definim la terna característica de P com la única terna $\left(a, \sigma^2, \mu\right)$, on $a \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \geq 0$ i μ és mesura de Lévy tal que:*

$$P = N(a, \sigma^2) * c - Poiss(\mu) .$$

Definició 1.40. *Sigui $P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ infinitament divisible. Definim el símbol de Lévy de P com l'aplicació $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida per:*

$$\eta(t) := iat - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{itx} - 1 - itx\mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right) \mu(dx) .$$

Corol·lari 1.41. *Sigui $P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ infinitament divisible. Aleshores:*

- *η és contínua.*
- *$\eta(0) = 0$.*
- *$\varphi_P(t) = e^{\eta(t)}$.*

Per tant, $\eta(t) = \phi_P(t) = \log(\varphi_P(t))$ i en particular $\mathrm{Re}(\eta(t)) \leq 0\ \forall t \in \mathbb{R}$.

Demostració. Per veure la continuïtat de η, només cal veure la continuïtat de l'aplicació:

$$t \mapsto \int_{\mathbb{R}} \left(e^{itx} - 1 - itx\mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right) \mu(dx) ,$$

la qual s'ha demostrat en l'Observació 1.26. Les altres dues propietats són evidents i per la unicitat del logaritme (Proposició 3.24(1)) obtenim que $\eta(t) = \phi_P(t) = \log(\varphi_P(t))$ i tal com hem vist en el Lema 1.36(1) es té $\mathrm{Re}(\eta(t)) \leq 0\ \forall t \in \mathbb{R}$. ■

2 Descomposició de Lévy-Itô

En aquest segon capítol es demostra la Descomposició de Lévy-Itô. En la primera secció de preliminars es presenten definicions i proposicions que usarem en aquest capítol sobre processos estocàstics, funcions càdlàg, instants d'aturada, espais de martingales i de variacions de funcions.
En aquest capítol hi ha demostracions que no es fan ja que escapen dels objectius del treball i n'hi ha que es troben en l'annex en la secció de *Demostracions Capítol 2* per raons d'espai.

2.1 Preliminars

2.1.1 Processos estocàstics

Definició 2.1. *Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un procés estocàstic. Diem que:*

1. *X és centrat si $\mathbb{E}(X(t)) = 0 \ \forall t \geq 0$.*
2. *X és de quadrat-integrable si $\mathbb{E}\left(|X(t)|^2\right) < \infty \ \forall t \geq 0$.*
3. *X té trajectòries contínues si existeix $\Omega' \in \mathcal{F}$ tal que $\mathbb{P}(\Omega') = 1$ i les trajectòries $X(\cdot)(\omega) : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ són funcions contínues per tot $\omega \in \Omega'$.*

Definició 2.2. *Siguin $X = \{X(t), t \geq 0\}$ i $Y = \{Y(t), t \geq 0\}$ processos estocàstics. Diem que Y és una modificació de X si per tot $t \geq 0$:*

$$\mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : X(t)(\omega) \neq Y(t)(\omega)\}\right) = 0 \ .$$

2.1.2 Funcions càdlàg

Definició 2.3. *Una funció $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ és càdlàg si és contínua per la dreta en $[0, b)$ i existeix el límit per l'esquerra en $(0, b]$. Definim el salt en 0 com $\Delta f(0) := 0$. Si $t \in (0, b]$ escriurem $f(t-) := \lim_{t \to s^-} f(t)$, i definim el salt en t com:*

$$\Delta f(t) := f(t) - f(t-) \ .$$

$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ és càdlàg si per tot $b > 0$, $f|_{[0,b]}$ és càdlàg.

Proposició 2.4. *Sigui $f : I = [0, +\infty) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció càdlàg. Aleshores:*

1. *$\forall \epsilon > 0$, el conjunt $S_\epsilon := \{t \in I : |\Delta f(t)| \geq \epsilon\}$ és finit.*
2. *El conjunt $S := \{t \in I : \Delta f(t) \neq 0\}$ és numerable.*

Demostració. Veure [1], pàgina 140, Teorema 2.9.2. ∎

Definició 2.5. *Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un procés estocàstic. Diem que X és càdlàg si existeix $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ tal que $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ i les trajectòries $X(\cdot)(\omega) : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ són funcions càdlàg per tot $\omega \in \Omega_0$.*

2.1.3 Instants d'aturada

Definició 2.6. *Sigui* $X = \{X(t), t \geq 0\}$ *un procés estocàstic. Definim la filtració natural de* X *com* $\mathbb{F}^X = \left\{\mathcal{F}_t^X, t \geq 0\right\}$ *on* $\mathcal{F}_t^X := \sigma\{X(s), 0 \leq s \leq t\}$.

Definició 2.7. *Sigui* $T : \Omega \to [0, +\infty]$ *variable aleatòria i* $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *una filtració. Aleshores:*

$$T \text{ és instant d'aturada} \overset{def}{\iff} \{\omega \in \Omega : T(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ per tot } t \geq 0.$$

Definició 2.8. *Sigui* $X = \{X(t), t \geq 0\}$ *un procés adaptat,* T *un instant d'aturada i* $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *una filtració.*
Definim la variable aleàtòria aturada $X(T)$ *com*

$$X(T)(\omega) := X(T(\omega))(\omega) \ .$$

Definim la σ*-àlgebra aturada* $\mathcal{F}_T$ *com:*

$$\mathcal{F}_T := \{B \in \mathcal{F} : B \cap \{\omega \in \Omega : T(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t \geq 0\} \ .$$

Definim un nou procés estocàstic $X_T = \{X_T(t), t \geq 0\}$ *on:*

$$X_T(t) := X(T + t) - X(T) \ .$$

2.1.4 Espais de martingales

En el conjunt de totes les martingales respecte una filtració donada $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ definim la relació d'equivalència:

$$M_1 \sim M_2 \overset{\text{def}}{\iff} M_1 \text{ és modificació de } M_2 \ .$$

Aleshores considerem l'espai vectorial $\mathbb{M} := \{[M] : M \text{ martingala de quadrat integrable }\}$.
Definim la noció de convergència en aquest espai $\mathbb{M}$ com:

$$\lim_{n\to\infty} M_n = M \overset{def}{\iff} M_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} M(t) \quad \forall t \geq 0 \ .$$

El resultat que usarem per estudiar la convergència d'una successió de martingales és el següent:

Proposició 2.9. $\mathbb{M}$ *és un espai complet.*

Demostració. Veure [1], pàgina 91, Lema 2.1.11. ∎

2.1.5 Variació d'una funció

Definició 2.10. *Sigui* $g : [0, b] \to \mathbb{R}$ *una funció càdlàg i* $\mathcal{P}$ *partició de l'interval* $[0, b]$

$$\mathcal{P} = \{0 = t_1 < t_2 < ... < t_n = b\} \ .$$

Definim la norma de la partició com

$$\delta := \max_{1 \leq i \leq n-1} |t_{i+1} - t_i| \ .$$

Definim la variació de g respecte la partició $\mathcal{P}$ com

$$var_{\mathcal{P}}(g) := \sum_{i=1}^{n-1} |g(t_{i+1}) - g(t_i)| \ .$$

Definim la variació total de g com

$$V_g := \sup_{\mathcal{P} \text{ partició de } [0,b]} var_{\mathcal{P}}(g) \ .$$

Definim $V_g(t)$ com la variació total de $g|_{[0,t]}$, on $0 < t < b$.

2.2 Processos de Lévy

En aquesta secció definim el concepte ja introduït de procés de Lévy i veiem resultats importants d'aquests tipus de processos: cada variable aleatòria del procés és infinitament divisible i tot el procés queda determinat per la terna característica d'una única variable aleatòria del procés, la corresponent a $t = 1$.

Definició 2.11. *Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un procés estocàstic. Diem que és un procés de Lévy si:*

1. *$X(0) = 0$ q.s .*
2. *X té incremenents independents, això és: $\forall n \geq 1$ i $\forall\ 0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n$ les variables $X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), ..., X(t_n) - X(t_{n-1})$ són independents.*
3. *X té increments estacionaris, això és $\forall\ 0 \leq t_1 < t_2$, $P_{X(t_2)-X(t_1)} = P_{X(t_2-t_1)-X(0)}$.*
4. *X és continu en probabilitat, això és $\forall \epsilon > 0$ i $\forall s \geq 0$:*
$$\lim_{t \to s} \mathbb{P}\left(|X(t) - X(s)| > \epsilon\right) = 0\ .$$

Al llarg del treball per comprovar que un procés $X = \{X(t), t \geq 0\}$ que satisfà les propietats (1) i (3) de la Definició 2.11 és continu en probabilitat utilitzarem la següent proposició.

Proposició 2.12. *Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un procés estocàstic amb increments estacionaris i amb $X(0) = 0$ q.s. Aleshores:*

$$\forall \epsilon > 0 \text{ i } \forall s \geq 0 \ \lim_{t \to s} \mathbb{P}\left(|X(t) - X(s)| > \epsilon\right) = 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \lim_{t \to 0^+} \mathbb{P}\left(|X(t)| > \epsilon\right) = 0\ .$$

Demostració.
($\Rightarrow$) Prenem $s = 0$ i utilitzem que $X(0) = 0$ q.s.
($\Leftarrow$) Sigui $\epsilon > 0$ i $s > 0$. Aleshores usant que X té increments estacionaris:

$$\lim_{t \to s^+} \mathbb{P}\left(|X(t) - X(s)| > \epsilon\right) = \lim_{t \to s^+} \mathbb{P}\left(|X(t-s)| > \epsilon\right) = \lim_{u \to 0^+} \mathbb{P}\left(|X(u)| > \epsilon\right) = 0\ .$$

$$\lim_{t \to s^-} \mathbb{P}\left(|X(t) - X(s)| > \epsilon\right) = \lim_{t \to s^-} \mathbb{P}\left(|X(s) - X(t)| > \epsilon\right) = \lim_{u \to 0^+} \mathbb{P}\left(|X(u)| > \epsilon\right) = 0\ .$$

Per tant, per a tot $s \geq 0$ $\lim_{t \to s} \mathbb{P}\left(|X(t) - X(s)| > \epsilon\right) = 0$ com volíem veure. ∎

Proposició 2.13. *Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un procés de Lévy. Aleshores $X(t)$ és infinitament divisible $\forall t \geq 0$.*

Demostració. Si $t = 0$ escollim per $n \geq 1$, $Y^{(n)} \in \mathcal{L}^0\left(\Omega, \mathcal{F}\right)$ tals que $Y^{(n)} = 0$. Aleshores:

$$\varphi_{X(0)}(t) = 1 = (1)^n = \left(\varphi_{Y^{(n)}}(t)\right)^n\ .$$

Usant la Proposició 1.11(3), obtenim que $X(0)$ és infinitament divisible.

Si $t > 0$, per a qualsevol $n \geq 1$ escollim la partició $t_j = jt/n$ on $j = 0, ..., n$. Aleshores per ser procés de Lévy, les variables $X(t_1), X(t_2) - X(t_1), ..., X(t_n) - X(t_{n-1})$ són variables independents idènticament distribuides. Ara:

$$P_{X(t)} = P_{X(t_n)} = P_{[X(t_n)-X(t_{n-1})]+[X(t_{n-1})-X(t_{n-2})]+...+[X(t_2)-X(t_1)]+X(t_1)}\ .$$

Per tant, $X(t)$ és infinitament divisible. ∎

Lema 2.14. *Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un procés estocàstic continu en probabilitat, llavors l'aplicació $\psi_u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ definida per $\psi_u(t) := \varphi_{X(t)}(u)$ és uniformement contínua per cada $u \in \mathbb{R}$.*

Demostració. Per $s, t \geq 0$, $s \neq t$, escrivim $X(s,t) := X(t) - X(s)$. Fixem $u \in \mathbb{R}$ i $\epsilon > 0$. Com que l'aplicació $y \mapsto e^{iuy}$ és contínua a l'origen, existeix $\delta_1 > 0$ tal que

$$\sup_{0 \leq |y| < \delta_1} \left| e^{iuy} - 1 \right| < \frac{\epsilon}{2} \ .$$

Per ser el procés continu en probabilitat, existeix $\delta_2 > 0$ tal que si $0 < |t-s| < \delta_2$, aleshores $\mathbb{P}\left(|X(s,t)| \geq \delta_1\right) < \frac{\epsilon}{4}$. Llavors per tot $0 < |t-s| < \delta_2$, es té:

$$|\psi_u(t) - \psi_u(s)| = \left|\varphi_{X(t)}(u) - \varphi_{X(s)}(u)\right| = \left| \int_\Omega e^{iuX(t)(w)} \mathbb{P}(dw) - \int_\Omega e^{iuX(s)(w)} \mathbb{P}(dw) \right|$$

$$= \left| \int_\Omega e^{iuX(s)(w)} \left[e^{iuX(s,t)(w)} - 1 \right] \mathbb{P}(dw) \right| \leq \int_\mathbb{R} 1 \cdot \left| e^{iuy} - 1 \right| P_{X(s,t)}(dy)$$

$$\leq \int_{|y|<\delta_1} \left| e^{iuy} - 1 \right| P_{X(s,t)}(dy) + \int_{\delta_1 \leq |y|} \left| e^{iuy} - 1 \right| P_{X(s,t)}(dy)$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2} \cdot \mathbb{P}(|X(s,t)| < \delta_1) + 2 \cdot \mathbb{P}(|X(s,t)| \geq \delta_1) \leq \frac{\epsilon}{2} \cdot 1 + 2 \cdot \frac{\epsilon}{4} = \epsilon \ .$$

Per tant, l'aplicació ψ_u és uniformement contínua per cada $u \in \mathbb{R}$. ■

Proposició 2.15. *Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un procés de Lévy. Aleshores si $\eta(t, \cdot)$ és el símbol de Lévy de $X(t)$ es té $\eta(t,u) = t\eta(1,u)$.*

Demostració. Per tenir X increments independents i estacionaris es té:

$$\psi_u(t+s) = \varphi_{X(t+s)}(u) = \mathbb{E}\left(e^{iuX(t+s)}\right) = \mathbb{E}\left(e^{iu(X(t+s)-X(s))} e^{iuX(s)}\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(e^{iu(X(t+s)-X(s))}\right) \mathbb{E}\left(e^{iuX(s)}\right) = \mathbb{E}\left(e^{iuX(t)}\right) \mathbb{E}\left(e^{iuX(s)}\right) = \psi_u(t)\psi_u(s) \ .$$

A més:

$$\psi_u(0) = \varphi_{X(0)}(u) = \mathbb{E}\left(e^{iuX(0)}\right) = \mathbb{E}(1) = 1 \ .$$

Pel Lema 2.14, ψ_u és una aplicació contínua per cada $u \in \mathbb{R}$. Llavors, l'aplicació ψ_u és de la forma $\psi_u(t) = e^{t\alpha(u)}$ on $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ és una aplicació contínua (veure [5] pàgines 4-6). Sabem que $X(1)$ és infinitament divisible i per tant:

$$e^{\alpha(u)} = \psi_u(1) = \varphi_{X(1)}(u) = e^{\eta(1,u)} \Rightarrow \eta(1,u) = \alpha(u) + 2k(u)\pi i \quad , \quad k(u) \in \mathbb{Z} \ .$$

Com que $\eta(1, \cdot)$ i $\alpha(\cdot)$ són aplicacions contínues s'ha de tenir $k(u) = k \in \mathbb{Z}$ $\forall u \in \mathbb{R}$. A més es té $\alpha(0) = 0$ perquè:

$$e^{t\alpha(0)} = \psi_0(t) = \varphi_{X(t)}(0) = 1 \ \forall t \geq 0 \Rightarrow \alpha(0) = 0 \ .$$

Si fos $\alpha(0) \neq 0$, llavors escollint $t \geq 0$ tal que $t\alpha(0) \neq 2k\pi i$, amb $k \in \mathbb{Z}$ tindríem una contradicció. Com que també $\eta(1,0) = 0$ de $\eta(1,0) = \alpha(0) + 2k\pi i$ deduïm que $k = 0$ i, per tant, $\eta(1,u) = \alpha(u)$. Queda veure que $\eta(t,u) = t\eta(1,u)$. Fixem $u \in \mathbb{R}$. Tenim:

$$\psi_u(t) = \varphi_{X(t)}(u) \Rightarrow e^{t\eta(1,u)} = e^{\eta(t,u)} \Rightarrow t\eta(1,u) = \eta(t,u) + 2k(t)\pi i \ . \tag{2.1}$$

Com que $\psi_u(t) = e^{\eta(t,u)}$ és contínua, llavors $\eta(\cdot, u)$ és contínua. S'ha de tenir $k(t) = k \in \mathbb{Z}$ $\forall t \geq 0$. Ara $\eta(0,0) = 0$ per ser $\eta(0,\cdot)$ símbol de Lévy de $X(0)$, com que $\varphi_{X(0)}(u) = 1 = e^{\eta(0,u)}$ $\forall u \in \mathbb{R}$, i al ser $\eta(0,\cdot)$ contínua, ha de ser $\eta(0,u) = 0$ per tot $u \in \mathbb{R}$. Substituïnt $t = 0$ en (2.1) obtenim que $k(t) = k = 0$ i per tant:

$$\eta(t,u) = t\eta(1,u) \ .$$

■

Corol·lari 2.16. *Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un procés de Lévy tal que $\mathbb{E}(|X(t)|) < \infty$ per tot $t \geq 0$. Aleshores per tot $t \geq 0$:*

$$\mathbb{E}(X(t)) = t \cdot \mathbb{E}(X(1)) \ .$$

Demostració. Usant la Proposició 2.15, sabem que $\varphi_{X(t)}(u) = e^{t\eta(u)}$ on $\eta(\cdot)$ és el símbol de Lévy de $X(1)$. Usant que $X(t)$ és integrable, podem aplicar la Proposició 3.16 i llavors:

$$\mathbb{E}(X(t)) = \frac{1}{i}\varphi'_{X(t)}(0) = \frac{1}{i}e^{t\eta(0)}t\eta'(0) = \frac{1}{i}t\eta'(0) = t\left(\frac{1}{i}\eta'(0)\right) = t \cdot \mathbb{E}(X(1)) \ .$$

■

Definició 2.17. *Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un procés de Lévy. Definim la terna característica i el símbol de Lévy de X com la terna característica i el símbol de Lévy de $X(1)$.*

Observació 2.18. Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un procés de Lévy. Hem vist que $X(t)$ és infinitament divisible per tot $t \geq 0$ i que si $\eta(t,\cdot)$ és el símbol de Lévy de $X(t)$, aleshores $\eta(t,u) = t\eta(1,u)$. És a dir, un procés de Lévy queda totalment determinat pel símbol de Lévy de $X(1)$. Si (a, σ^2, μ) és la terna característica de $X(1)$, llavors:

$$\varphi_{X(t)}(u) = \exp\left[t\left\{iau - \frac{\sigma^2 u^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{iux} - 1 - iux\mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}}\right)\mu(dx)\right\}\right] \ .$$

Seguidament veurem com de robusta és la propietat de ser procés de Lévy: es manté per successions de processos de Lévy que convergeixin en probabilitat cap un procés i es manté per modificacions. Aquests dos resultats ens seran de gran utilitat per demostrar que un determinat procés és de Lévy i per treballar amb una modificació adient d'un procés de Lévy.

Teorema 2.19. *Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un procés estocàstic, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successió de processos de Lévy tals que per cada $t \geq 0$ $X_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X(t)$ i $\forall \epsilon > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{t\to 0^+} \mathbb{P}(|X_n(t) - X(t)| > \epsilon) = 0 \ .$$

Aleshores, X és un procés de Lévy.

Demostració. Veure annex, pàgina 59, Teorema 3.29. ■

Proposició 2.20. *Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un procés de Lévy i Y una modificació de X. Aleshores Y és un procés de Lévy amb la mateixa terna característica que X.*

Demostració. Veure annex, pàgina 61, Teorema 3.30. ■

2.3 Processos de Lévy càdlàg

En aquesta secció veurem que donat un procés de Lévy existeix una modificació d'aquest tal que el procés és càdlàg. Aquest fet ens serà de gran ajuda per estudiar els salts d'un procés de Lévy, ja que treballarem directament en la modificació càdlàg d'aquest, simplificant així l'estudi dels seus salts.

Teorema 2.21. *Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un procés de Lévy. Aleshores existeix una modificació $Y = \{Y(t), t \geq 0\}$ de X tal que Y és càdlàg.*

Demostració. Veure [1], pàgina 87, Teorema 2.1.8. ■

Observació 2.22. D'ara en endavant suposarem que tot procés de Lévy $X = \{X(t), t \geq 0\}$ és càdlàg i escriurem Ω_0 com en la Definició 2.5:

$$\Omega_0 = \{\omega \in \Omega : X(\cdot)(\omega) : [0, +\infty) \to \mathbb{R} \text{ és càdlàg }\} \ .$$

Pel Teorema 2.21 $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$.

2.3.1 Instants d'aturada

Al llarg del treball ens serà útil considerar diferents instants d'aturada associats al procés de Lévy X. Per comprovar que en efecte ho són i poder treballar amb ells necesitarem els dos teoremes següents: la Propietat forta de Markov i un criteri per deduir que en efecte una variable aleatòria és instant d'aturada.

Teorema 2.23. ***Propietat forta de Markov**. Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un procés de Lévy, T instant d'aturada tal que $T < \infty$ q.s. Aleshores:*

1. *X_T és un procés de Lévy independent de $\mathcal{F}_T$.*
2. *Per cada $t \geq 0$, $P_{X_T(t)} = P_{X(t)}$.*
3. *X_T és càdlàg i $X_T(t)$ és $\mathcal{F}_{T+t}$-mesurable.*

Demostració. Veure [1], pàgina 97, Teorema 2.2.11. ■

Teorema 2.24. *Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un procés adaptat i càdlàg i sigui $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Aleshores:*

$$T := \inf \{t > 0 : X(t) \in B\}$$

és un instant d'aturada.

Demostració. Veure [4], pàgina 5, Teoremes 3 i 4. ■

Observació 2.25. Treballarem amb successions d'instants d'aturada $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ que essencialment prendran la següent forma:

$$T_0 = 0 \quad , \quad T_n := \inf \{t > T_{n-1} : X(t) - X(T_{n-1}) \in B\} \quad n \geq 1 \ ,$$

on $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Notem que podem escriure per $n \geq 1$:

$$T_n = \inf \{t > 0 : X(t + T_{n-1}) - X(T_{n-1}) \in B\} = \inf \left\{t > 0 : X_{T_{n-1}}(t) \in B\right\} \ .$$

Veiem per inducció que els T_n són instants d'aturada. T_0 és clar que és instant d'aturada. Suposem que T_{n-1} ho és i veiem-ho per T_n. Per la Propietat forta de Markov, $X_{T_{n-1}}$ és càdlàg i $X_{T_{n-1}}(t)$ és $\mathcal{F}_{T+t}$-mesurable, per tant, podem aplicar el Teorema 2.24 i obtenim que T_n és instant d'aturada.

2.4 Exemples de processos de Lévy

En aquesta secció presentem exemples de processos de Lévy i caracteritzacions d'aquests exemples que usarem per identificar els diferents processos que ens aniran apareixent al llarg del treball.

2.4.1 Moviment Brownià

Exemple 2.26. Un moviment Brownià és un procés de Lévy $B = \{B(t), t \geq 0\}$ tal que

$$P_{B(t)} = N(0,t) \quad \forall t \geq 0 \ .$$

Lema 2.27. *Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un procés de Lévy i $c > 0$. Aleshores el procés $Y := \{Y(t), t \geq 0\}$ definit per $Y(t) := X(t) + ct$ és també un procés de Lévy.*

Demostració. És clar que $Y(0) = 0$ q.s, que té increments estacionaris i independents. A més per tot $\epsilon > 0$ i $t \leq \frac{\epsilon}{2c}$, usant la desigualtat del Lema 3.28:

$$\mathbb{P}\left(|Y(t)| > \epsilon\right) = \mathbb{P}\left(|X(t) + ct| > \epsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(|X(t)| > \frac{\epsilon}{2}\right) + \mathbb{P}\left(|ct| > \frac{\epsilon}{2}\right) = \mathbb{P}\left(|X(t)| > \frac{\epsilon}{2}\right) \ .$$

Aleshores prenent límit i usant la Proposició 2.12 ja que X és procés de Lévy:

$$0 \leq \liminf_{t \to 0^+} \mathbb{P}\left(|Y(t)| > \epsilon\right) \leq \limsup_{t \to 0^+} \mathbb{P}\left(|Y(t)| > \epsilon\right) \leq \limsup_{t \to 0^+} \mathbb{P}\left(|X(t)| > \frac{\epsilon}{2}\right) = 0 \ .$$

Per tant, $\lim_{t \to 0^+} \mathbb{P}\left(|Y(t)| > \epsilon\right) = 0$ i per la Proposició 2.12 Y és procés de Lévy. ■

Exemple 2.28. Un moviment Brownià amb deriva és un procés $C = \{C(t), t \geq 0\}$ tal que $C(t) = bt + \sigma B(t)$, on $B = \{B(t), t \geq 0\}$ és un moviment Brownià i $b \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Aleshores pel Lema 2.27, el moviment Brownià amb deriva és procés de Lévy i compleix que $P_{C(t)} = N(bt, \sigma^2 t)$. Quan $b = 0$, escriurem $B_{\sigma^2}(t) := C(t)$ i l'anomenarem moviment Brownià amb variància σ^2.

Proposició 2.29. *Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un procés de Lévy adaptat centrat amb trajectòries contínues i tal que $\mathbb{E}\left(X(t)X(s)\right) = \sigma^2(t \wedge s)$ per tot $t, s \geq 0$ amb $\sigma^2 > 0$. Aleshores:*

$$X \text{ moviment Brownià amb variància } \sigma^2 \Leftrightarrow \varphi_{X(t)}(u) = e^{-\sigma^2 t u^2/2} \quad \forall t \geq 0, u \in \mathbb{R} \ .$$

Demostració. Veure [1], pàgina 95, Corol·lari 2.2.8. ■

2.4.2 Procés de Poisson

Exemple 2.30. Un procés de Poisson de paràmetre $\lambda > 0$ és un procés de Lévy $N = \{N(t), t \geq 0\}$ tal que

$$P_{N(t)} = Poiss(\lambda t) \quad \forall t \geq 0 \ .$$

Donat un procés de Poisson $N = \{N(t), t \geq 0\}$ li associem els instants d'aturada següents:

$$T_0 := 0 \quad , \quad T_n := \inf\{t > 0 : N(t) = n\} \quad n > 1 \ .$$

Proposició 2.31. *Sigui $N = \{N(t), t \geq 0\}$ un procés de Lévy tal que $N(t) \in \mathbb{N}$ i tal que $\{\Delta N(t), t \geq 0\}$ pren valors en $\{0, 1\}$. Aleshores N és un procés de Poisson.*

Demostració. Veure annex, pàgina 62, Proposició 3.31. ■

2.4.3 Procés de Poisson compost

Definició 2.32. *Siguin* $\{X(n), n \geq 1\} \subseteq \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F})$ *independents idènticament distribuides, còpies de* $X \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F})$*, amb llei* $P_X = \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ *i sigui* $N = \{N(t), t \geq 0\}$ *procés de Poisson de paràmere* $\lambda > 0$ *que és independent del procés* $\{X(n), n \geq 1\}$*. Aleshores el procés de Poisson compost* $Y = \{Y(t), t \geq 0\}$ *de paràmetre* $\lambda > 0$ *i llei* μ *es defineix com:*

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X(i) = X(1) + ... + X(N(t)) \ .$$

Proposició 2.33. *Sigui* $X \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F})$ *amb llei* $P_X = \mu$*,* $\lambda > 0$ *i* $Y = \{Y(t), t \geq 0\}$ *procés de Poisson compost de paràmetre* $\lambda > 0$ *i llei* μ*. Aleshores:*

1. *Y és procés de Lévy.*
2. *$P_{Y(t)} = Poisson(\lambda t, \mu)$.*

Demostració. Veure annex, pàgina 64, Proposició 3.32. ∎

2.5 Salts de processos de Lévy

Donat un procés de Lévy $X = \{X(t), t \geq 0\}$, li associem el procés de salts $\Delta X := \{\Delta X(t), t \geq 0\}$ on

$$\Delta X(0) = 0 \quad \text{i} \quad \Delta X(t) = X(t) - X(t-) \quad \text{per } t > 0 \ .$$

Com a conseqüència de que X és continu en probabilitat i és càdlàg, demostrarem que, com un espera, la probabilitat que hi hagi un salt de X en un instant de temps fixat és 0.

Lema 2.34. *Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ procés de Lévy, aleshores per tot $t \geq 0$:*

$$\Delta X(t) = 0 \quad q.s \ .$$

Demostració. Sigui $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq [0, +\infty)$ tal que $t_n \leq t_{n+1}$ $\forall n \geq 1$ i $\lim_{n\to\infty} t_n = t$. Per ser X continu en probabilitat i usant la Proposició 3.22(4) tenim que:

$$\forall \epsilon > 0 \ \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|X(t_n) - X(t)| > \epsilon\right) = 0 \quad \Rightarrow X(t_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X(t)$$

$$\Rightarrow \exists \left\{X(t_{n_k})\right\}_{k=1}^{\infty} \text{ tal que } X(t_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{q.s} X(t)$$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathcal{F} \text{ tal que } \mathbb{P}(N) = 0 \text{ i } \lim_{k\to\infty} X(t_{n_k})(\omega) = X(t)(\omega) \ \ \forall \omega \in \Omega \setminus N \ .$$

Notem que $\mathbb{P}\left(\Omega_0 \setminus N\right) = 1$ i $\forall \omega \in \Omega_0 \setminus N$ es té:

$$X(t-)(\omega) = \lim_{n\to\infty} X(t_n)(\omega) = \lim_{k\to\infty} X(t_{n_k})(\omega) = X(t)(\omega) \Rightarrow \Delta X(t) = 0 \ \text{ q.s} \ .$$

■

Volem estudiar els salts de X, per fer-ho, comptarem el nombre de salts que es produeixen fins a un cert temps. Això ens motiva la següent definició.

Definició 2.35. *Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un procés de Lévy, $t \geq 0$ i $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ definim:*

$$N(t,B)(\omega) := \begin{cases} \#\left\{0 \leq s \leq t : \Delta X(s)(\omega) \in B \setminus \{0\}\right\} & si\ \omega \in \Omega_0 \\ 0 & si\ \omega \in \Omega_0^c \end{cases}$$

Observació 2.36.

1. Fixat $t \geq 0$ i $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $N(t,B) \in \mathcal{L}^0\left(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\right)$ és una variable aleatòria que retorna el nombre de vegades que hi ha hagut un salt de longitud pertanyent a B en l'interval de temps $[0,t]$.

2. Fixat $t \geq 0$ i $\omega \in \Omega$, $N(t,\cdot)(\omega) \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ ja que $N(t,\varnothing)(\omega) = 0$ i si $\{B_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ són disjunts i $\omega \in \Omega_0$:

$$\left\{0 \leq s \leq t : \Delta X(s)(\omega) \in \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \setminus \{0\}\right\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left\{0 \leq s \leq t : \Delta X(s)(\omega) \in B_i \setminus \{0\}\right\} \ .$$

   Usant que $\#$ és σ-additiva obtenim que $N(t,\cdot)(\omega)$ és σ-additiva.

3. Fixat $t \geq 0$ i $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ si definim $\nu_t(B) := \mathbb{E}(N(t,B))$, aleshores $\nu_t \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ ja que si $\{B_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ són disjunts:

$$\nu_t(\varnothing) = \mathbb{E}(N(t,\varnothing)) = \mathbb{E}(0) = 0 \ .$$

$$\nu_t\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \int_{\Omega} N\left(t, \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{\infty} N(t,B_i)(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\Omega} N(t,B_i)(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu_t(B_i) \ .$$

Hem usat el Teorema de convergència monòtona ja que la següent successió és creixent:
$$\left\{\sum_{i=1}^{m} N(t,B_i)(\omega)\right\}_{m=1}^{\infty} \ .$$

Definició 2.37. *Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un procés de Lévy i $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

1. *Definim la mesura d'intensitat de X com $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$:*
$$\mu(\cdot) := \nu_1(\cdot) = \mathbb{E}(N(1,\cdot)) \ .$$

2. *Definim la restricció de μ a B com $\mu_B \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$:*
$$\mu_B(C) := \mu(C \cap B) \qquad \textit{on} \quad C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \ .$$

La Proposició 2.4 (1) ens motiva a estudiar els salts de X de tamany més gran que un cert $\epsilon > 0$, ja que aleshores n'hi ha un nombre finit. Això justifica la següent definició:

Definició 2.38. *Definim la següent classe de subconjunts:*

$$\widetilde{\mathcal{B}} := \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \exists\ \epsilon > 0 \ \textit{tal que}\ B \subseteq (-\infty,-\epsilon] \cup [\epsilon,+\infty)\} \ .$$

Com a resultat important d'aquesta secció veurem que $N(\cdot,B)$ és un procés de Poisson de paràmetre $\mu(B)$.

Lema 2.39. *Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un procés de Lévy i $B \in \widetilde{\mathcal{B}}$. Aleshores:*

$$N(t,B) < \infty \qquad \forall t \geq 0 \ .$$

Demostració. Sigui $\epsilon > 0$ tal que $B \subseteq (-\infty,-\epsilon] \cup [\epsilon,+\infty)$.
Si $\omega \in \Omega_0^c$ el resultat és clar ja que $N(t,B)(\omega) = 0$.
Si $\omega \in \Omega_0$, per la Proposició 2.4(1), es té que S_ϵ és finit, i per tant $N(t,B)(\omega) < \infty$. ■

Teorema 2.40. *Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un procés de Lévy. Aleshores:*

1. *Sigui $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, llavors $\{N(t,B), t \geq 0\}$ és procés de Lévy.*
2. *Sigui $B \in \widetilde{\mathcal{B}}$, llavors:*
   (a) *$\mu(B) = 0 \Rightarrow N(t,B) = 0$ per tot $t \geq 0$.*
   (b) *$\mu(B) > 0 \Rightarrow \{N(t,B), t \geq 0\}$ és un procés de Poisson de paràmetre $\mu(B)$.*

3. *Siguin* $B_1, ..., B_m \in \widetilde{\mathcal{B}}$*, disjunts dos a dos i tals que* $\mu(B_j) > 0$ *per* $j = 1, .., m$*. Aleshores les variables aleatòries*

$$N(t, B_1), ..., N(t, B_m)$$

són independents per qualsevol $t \geq 0$*.*

Demostració.
(1) Siguin $0 \leq s < t$, definim primer la σ-àlgebra:

$$\mathcal{F}_{s,t} := \sigma\left(X(u) - X(v), s \leq u < v \leq t\right) \ .$$

Clarament $N(0, B) = 0$. Per veure que té increments independents veiem que $N(t, B) - N(s, B)$ és $\mathcal{F}_{s,t}$-mesurable. Sigui $n \geq 1$, aleshores:

$$N(t, B) - N(s, B) \geq n \Leftrightarrow \exists\ s < t_1 < ... < t_n \leq t \text{ tals que } \Delta X(t_j) \in B \text{ per } 1 \leq j \leq n \ .$$

A més si $u \geq 0$:

$$\Delta X(u) \in B \Leftrightarrow \exists\ b \in B \text{ tal que } \lim_{v \to u^-} X(u) - X(v) = b$$

$$\Leftrightarrow \exists\ b \in B \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0 \text{ tal que si } 0 < u - v < \delta \Rightarrow |X(u) - X(v) - b| < \epsilon \ .$$

Per tant, hem vist que si $n \geq 1$ aleshores $\{N(t, B) - N(s, B) \geq n\} \in \mathcal{F}_{s,t}$. Sigui ara $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, aleshores:

$$\{N(t, B) - N(s, B) \in C\} = \bigcup_{n \in C \cap \mathbb{N}} \{N(t, B) - N(s, B) = n\} \ .$$

Per $n \geq 1$:

$$\{N(t, B) - N(s, B) = n\} = \{N(t, B) - N(s, B) \geq n\} \backslash \{N(t, B) - N(s, B) \geq n + 1\} \in \mathcal{F}_{s,t} \ .$$

El cas $n = 0$ el podem escriure com:

$$\{N(t, B) - N(s, B) = 0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{N(t, B) - N(s, B) = n\}^c \in \mathcal{F}_{s,t} \ .$$

Per tant, $\{N(t, B) - N(s, B) \in C\} \in \mathcal{F}_{s,t}$ com volíem veure. Siguin $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_m$, aleshores usant que X té increments independents, es té per $j = 2, ..., m$:

$$\left.\begin{array}{l} N(t_j, B) - N(t_{j-1}, B) \text{ és } \mathcal{F}_{t_{j-1}, t_j}\text{-mesurable} \\ \mathcal{F}_{t_{j-1}, t_j} \text{ són independents} \end{array}\right\} \Rightarrow N(t_j, B) - N(t_{j-1}, B) \text{ són independents.}$$

Siguin $0 \leq t_1 < t_2$, usant que X té increments estacionaris es té:

$$\left.\begin{array}{l} N(t_2, B) - N(t_1, B) \text{ és } \mathcal{F}_{t_1, t_2}\text{-mesurable} \\ N(t_2 - t_1, B) \text{ és } \mathcal{F}_{0, t_2 - t_1}\text{-mesurable} \\ P_{X(u) - X(v)} = P_{X(u-v)} \text{ per tots } t_1 \leq v < u \leq t_2 \end{array}\right\} \Rightarrow P_{N(t_2, B) - N(t_1, B)} = P_{N(t_2 - t_1, B)} \ .$$

Per tant, $N(\cdot, B)$ té increments estacionaris i independents.
Per veure que $N(\cdot, B)$ és continu en probabiltiat veurem que:

$$\lim_{t \to 0^+} \mathbb{P}\left(N(t, B) \neq 0\right) = 0 \ .$$

Usant que si $N(t,B)=0$ per algun $t>0$, aleshores $N(s,B)=0$ per tot $0\leq s<t$, i que $N(\cdot,B)$ té increments estacionaris i independents obtenim que per tot $n\geq 1$:

$$\mathbb{P}\left(N(t,B)=0\right)=\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} N\left(\frac{jt}{n},B\right)=0\right)$$

$$=\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} N\left(\frac{jt}{n},B\right)-N\left(\frac{(j-1)t}{n},B\right)=0\right)=\mathbb{P}\left(N\left(\frac{t}{n},B\right)=0\right)^{n} \ .$$

Usant que elevar a $n\geq 1$ és una funció creixent en $[0,1]$ deduïm que:

$$\limsup_{t\to 0^+}\mathbb{P}\left(N(t,B)=0\right)=\lim_{n\to\infty}\limsup_{t\to 0^+}\mathbb{P}\left(N\left(\frac{t}{n},B\right)=0\right)^{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\limsup_{t\to 0^+}\mathbb{P}\left(N\left(\frac{t}{n},B\right)=0\right)\right]^{n}=\lim_{n\to\infty}\left[\limsup_{t\to 0^+}\mathbb{P}\left(N\left(t,B\right)=0\right)\right]^{n} \ .$$

Anàlogament deduïm que:

$$\liminf_{t\to 0^+}\mathbb{P}\left(N(t,B)=0\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\liminf_{t\to 0^+}\mathbb{P}\left(N\left(t,B\right)\right)\right]^{n} \ .$$

Es poden donar dues situacions:

1. $\limsup_{t\to 0^+}\mathbb{P}\left(N(t,B)=0\right)=\liminf_{t\to 0^+}\mathbb{P}\left(N(t,B)=0\right)\Rightarrow \lim_{t\to 0^+}\mathbb{P}\left(N(t,B)=0\right)=:L$
2. $\limsup_{t\to 0^+}\mathbb{P}\left(N(t,B)=0\right)\neq\liminf_{t\to 0^+}\mathbb{P}\left(N(t,B)=0\right)$

En el cas (1) notem que a més L satisfà $L=\lim_{n\to\infty}L^n$. Per tant, $L\in\{0,1\}$. Suposem que $L=0$, llavors

$$\lim_{t\to 0^+}\mathbb{P}\left(N(t,B)\neq 0\right)=1 \ .$$

Siguin $B_1,B_2\in\widetilde{\mathcal{B}}$ i disjunts, aleshores:

$$\mathbb{P}\left(N\left(t,B_1\cup B_2\right)\neq 0\right)=\mathbb{P}\left(\{N\left(t,B_1\right)\neq 0\}\cup\{(N\left(t,B_2\right)\neq 0\}\right)$$

$$=\mathbb{P}\left(N\left(t,B_1\right)\neq 0\right)+\mathbb{P}\left(N\left(t,B_2\right)\neq 0\right) \ .$$

Això implica que:

$$\lim_{t\to 0^+}\mathbb{P}\left(N\left(t,B_1\cup B_2\right)\neq 0\right)=\lim_{t\to 0^+}\left[\mathbb{P}\left(N\left(t,B_1\right)\neq 0\right)+\mathbb{P}\left(N\left(t,B_2\right)\neq 0\right)\right]=2 \ .$$

Obtenint així una contradicció. Per tant, $L=1$ i llavors

$$\lim_{t\to 0^+}\mathbb{P}\left(N(t,B)\neq 0\right)=0 \ .$$

En el cas (2) s'ha de tenir:

$$\liminf_{t\to 0^+}\mathbb{P}\left(N(t,B)=0\right)=0 \ \text{ i } \ \limsup_{t\to 0^+}\mathbb{P}\left(N(t,B)=0\right)=1 \ .$$

Notem que si $t \leq s$, llavors $\mathbb{P}(N(s,B)=0) \leq \mathbb{P}(N(t,B)=0)$. Aleshores per $s \geq 0$ es compleix:

$$\mathbb{P}(N(s,B)=0) = \delta \geq 0 \Rightarrow \liminf_{t\to 0^+} \mathbb{P}(N(t,B)=0) \geq \delta \ .$$

Aleshores:

$$\liminf_{t\to 0^+} \mathbb{P}(N(t,B)=0) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(N(t,B)=0) = 0 \ \ \forall t \geq 0 \Rightarrow \limsup_{t\to 0^+} \mathbb{P}(N(t,B)=0) = 0 \ .$$

Obtenint així una contradicció. Així doncs $\lim_{t\to 0^+} \mathbb{P}(N(t,B) \neq 0) = 0$, això implica que per tot $\epsilon > 0$ es té

$$\lim_{t\to 0^+} \mathbb{P}(N(t,B) > \epsilon) = 0 \ ,$$

ja que usant que $\mathbb{P}(N(t,B) > \epsilon) \leq \mathbb{P}(N(t,B) \neq 0)$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \liminf_{t\to 0^+} \mathbb{P}(N(t,B) > \epsilon) \leq \limsup_{t\to 0^+} \mathbb{P}(N(t,B) > \epsilon) \\ &\leq \limsup_{t\to 0^+} \mathbb{P}(N(t,B) \neq 0) = \lim_{t\to 0^+} \mathbb{P}(N(t,B) \neq 0) = 0 \ . \end{aligned}$$

Per tant, usant la Proposició 2.12 $N(\cdot, B)$ és procés de Lévy.

(2)(a) Notem que:

$$\mu(B) = 0 \Rightarrow \mathbb{E}(N(1,B)) = 0 \Rightarrow N(1,B) = 0 \text{ q.s} \ .$$

Com que $N(\cdot, B)$ és procés de Lévy, per tot $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 1$ es té:

$$P_{N(t,B)-N(t-1,B)} = P_{N(1,B)} \Rightarrow N(t,B) - N(t-1,B) = 0 \text{ q.s} \ .$$

Usant que $N(1,B) = 0$ q.s obtenim que per tot $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 1$ es té $N(t,B) = 0$ q.s. Com que $N(\cdot, B)$ és un procés creixent ha de ser $N(t,B) = 0$ per tot $t \geq 0$.

(2)(b) Com que $B \in \widetilde{\mathcal{B}}$ pel Lema 2.39 es té $N(t,B) \in \mathbb{N}$ i que $\{\Delta N(t,B), t \geq 0\}$ pren valors en $\{0,1\}$ ja que $\Delta N(t,B) = 1$ si $\Delta X(t) \in B$ i $\Delta N(t,B) = 0$ en cas contrari. Com que $\{N(t,B), t \geq 0\}$ és un procés de Lévy, usant la Proposició 2.31 obtenim que és un procés de Poisson de paràmetre $\lambda = \mathbb{E}(N(1,B)) = \mu(B) > 0$.

(3) Veure [1], pàgines 268-269, Secció *Poisson random measures revisited.* ■

Corol·lari 2.41. *Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un procés de Lévy, i $B \in \widetilde{\mathcal{B}}$. Aleshores $\mu(B) < \infty$ i, per tant, $\mu_B \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R})$.*

Demostració. Conseqüència de que $N(\cdot, B)$ és procés de Poisson de paràmetre $\mu(B)$. ■

2.5.1 Processos de Lévy amb salts acotats

Per motivar la integral de Poisson, veiem primer que els processos de Lévy amb salts acotats compleixen una propietat forta: existeixen els moments de qualsevol ordre de totes les variables del procés.

Definició 2.42. *Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un procés de Lévy, diem que té salts acotats si existeix $C > 0$ tal que:*

$$\sup_{0 \leq t < \infty} |\Delta X(t)| < C \ .$$

Teorema 2.43. *Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un procés de Lévy amb salts acotats, aleshores es té $\mathbb{E}(|X(t)|^p) < \infty$ per tot $p \geq 1$.*

Demostració. Veure annex, pàgina 65, Teorema 3.33. ■

2.5.2 Integral de Poisson

Ens interessa construir un nou procés de Lévy a partir del procés de Lévy X el qual tingui salts acotats i poder aplicar el Teorema 2.43.
Fixem $\omega \in \Omega_0$ i no l'escrivim per estalviar notació. Hem d'eliminar els salts de X més grans que un cert tamany $a > 0$. Definim $B := [-a, a]^c \in \widetilde{\mathcal{B}}$. Siguin $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ els instants d'arribada associats al procés de Poisson $N(\cdot, B)$ que es corresponen als instants en que X té salts de tamany més gran que a. Analitzem com hem de construir el nou procés, que anomenarem W_a:

- Si $t \in [0, T_1)$, X no té salts de tamany més gran que a, i per tant:
$$W_a(t) := X(t) \ .$$
- Si $t = T_1$, volem eliminar el salt que s'ha produït. Per tant, el restem:
$$W_a(T_1) := X(T_1) - \Delta X(T_1) = X(T_1) - X(T_1) + X(T_1-) = X(T_1-) \ .$$
- Si $t \in (T_1, T_2)$, X no té salts de tamany més gran que a, llavors per mantenir l'eliminació del salt en T_1 definim:
$$W_a(t) := X(t) - \Delta X(T_1) \ .$$
- Si $t = T_2$, volem eliminar el salt que s'ha produït. Per tant, el restem de la definició anterior W_a:
$$W_a(T_2) := X(t) - \Delta X(T_1) - \Delta X(T_2) \ .$$
- Si $t \in (T_2, T_3)$, X no té salts de tamany més gran que a, llavors per mantenir l'eliminació dels salts en T_1 i T_2 definim:
$$W_a(t) := X(t) - \Delta X(T_1) - \Delta X(T_2) \ .$$

Arribem a la conclusió que la definició de W_a ha de ser:
$$W_a(t) := X(t) - \sum_{n=1}^{\infty} \Delta X(T_n) \mathbb{1}_{[0,t]}(T_n) \ .$$
L'estudi del procés W_a es farà en la Secció 2.5.3 ja que abans necessitem estudiar la suma dels salts que apareix en la definició anterior. Usant que $N(t, \cdot)(\omega) \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, la suma dels salts la podem reescriure de la següent forma:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \Delta X(T_n) \mathbb{1}_{[0,t]}(T_n) = \sum_{\substack{x \in B \\ N(t,\{x\}) \neq 0}} x N(t, \{x\}) = \int_B x N(t, dx) \ .$$

Així doncs, la suma dels salts de tamany més gran que a produïts a l'interval $[0, t]$ es pot escriure com la integral de $f(x) = x$ respecte la mesura $N(t, \cdot)(\omega)$. Més en general, podem considerar integrals de qualsevol funció $f \in \mathcal{L}^0(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ respecte aquesta mesura. Això motiva la definició d'integral de Poisson.

Definició 2.44. *Sigui* $X = \{X(t), t \geq 0\}$ *un procés de Lévy,* $f \in \mathcal{L}^0(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $B \in \widetilde{\mathcal{B}}$. *Aleshores per* $t \geq 0$, $\omega \in \Omega$ *definim la integral de Poisson de* f*:*

$$Y_{f,B}(t)(\omega) := \int_B f(x)N(t,dx)(\omega) = \sum_{\substack{x \in B \\ N(t,\{x\}) \neq 0}} f(x)N(t,\{x\})(\omega) \ . \tag{2.2}$$

Observació 2.45. Notem que la suma de la dreta de (2.2) està ben definida i és finita, ja que per ser $B \in \widetilde{\mathcal{B}}$, existeix $\epsilon > 0$ tal que $B \subseteq (-\infty, \epsilon] \cup [\epsilon, +\infty)$ i usant la Proposició 2.4(1) es té que S_ϵ és finit. Aleshores $N(t,\{x\}) \neq 0$ només per un nombre finit de $x \in B$. Per estalviar notació, d'ara en endavant en el subíndex de la suma de la dreta de (2.2) només escriurem $x \in B$.

Observació 2.46. Com que $N(t,\{x\}) \neq 0 \Leftrightarrow \Delta X(u) = x$ per algun $u \in [0,t]$ podem escriure:

$$\int_B f(x)N(t,dx) = \sum_{\substack{0 \leq u \leq t \\ \Delta X(u) \in B}} f(\Delta X(u))\, \mathbb{1}_B(\Delta X(u)) \ . \tag{2.3}$$

Tornem a notar que pel mateix argument de l'observació anterior la suma de la dreta en (2.3) està ben definida i és finita. Per estalviar notació, d'ara en endavant en el subíndex de la suma de la dreta només escriurem $0 \leq u \leq t$.

Un cop definit $Y_{f,B}$, volem estudiar quin tipus de procés és. Hem vist en el Teorema 2.40 que:

$$\mu(B) = 0 \Rightarrow N(t,B) = 0 \text{ per tot } t \geq 0 \Rightarrow Y_{f,B}(t) = 0 \text{ per tot } t \geq 0 \ .$$

Per tant, ens podem restringir al cas en que $\mu(B) > 0$. Com que ens interessarà considerar el procés centrat $\hat{Y}_{f,B}$, necessitarem conèixer l'esperança de $Y_{f,B}(t)$. En el següent teorema veiem que $Y_{f,B}(t)$ té llei de Poisson composta i derivant la seva funció característica obtindrem la seva esperança i variància.

Teorema 2.47. *Sigui* $X = \{X(t), t \geq 0\}$ *un procés de Lévy,* $B \in \widetilde{\mathcal{B}}$ *tal que* $\mu(B) > 0$ *i* $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_B)$. *Aleshores:*

1. $P_{Y_{f,B}(t)} = Poiss\left(t\mu_{f,B}(\mathbb{R}), \frac{t\mu_{f,B}}{t\mu_{f,B}(\mathbb{R})}\right)$ *on* $\mu_{f,B} \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R})$ *és la mesura finita definida per* $\mu_{f,B}(C) := \mu\left(B \cap f^{-1}(C)\right)$ *on* $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
2. $\mathbb{E}(Y_{f,B}(t)) = t\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_B(dx)$.
3. *Si* $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_B)$, *aleshores* $\mathbb{V}(Y_{f,B}(t)) = t\int_{\mathbb{R}} f(x)^2\mu_B(dx)$.

Demostració.
(1) Notem que si $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, aleshores $\mu_{f,B}(C) = \mu_B\left(f^{-1}(C)\right)$. Aleshores, com que $\mu_B \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R})$ pel Corol·lari 2.41, és clar que també $\mu_{f,B} \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R})$.
Suposem primer que $f = \sum_{j=1}^n c_j \mathbb{1}_{B_j} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Podem suposar que els B_j són disjunts. Notem que:

$$Y_{f,B}(t) = \int_B \sum_{j=1}^n c_j \mathbb{1}_{B_j}(x)N(t,dx) = \sum_{j=1}^n c_j \int_{B \cap B_j} N(t,dx) = \sum_{j=1}^n c_j N(t, B_j \cap B) \ .$$

Podem suposar que $\mu(B_j \cap B) > 0$ ja que en cas contrari:

$$\mu(B_j \cap B) = 0 \Rightarrow N(t, B_j \cap B) = 0 \text{ per tot } t \geq 0 \ .$$

I aleshores c_j no apareixiria en la integral de Poisson.
Usant el Teorema 2.40 sabem que $P_{N(t,B_j \cap B)} = Poisson(t\mu_B(B_j))$ i que les variables aleatòries $N(t, B_j \cap B)$ són independents. Usant també el Teorema de la mesura imatge obtenim:

$$\varphi_{Y_{f,B}(t)}(u) = \mathbb{E}\left(e^{iuY_{f,B}(t)}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^{n} e^{iuc_j N(t,B_j\cap B)}\right) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left(e^{iuc_j N(t,B_j\cap B)}\right)$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \varphi_{Poisson(t\mu_B(B_j))}(uc_j) = \prod_{j=1}^{n} \exp\left[t\mu_B(B_j)\left(e^{iuc_j} - 1\right)\right]$$

$$= \exp\left[t\sum_{j=1}^{n} \mu_B(B_j)\left(e^{iuc_j} - 1\right)\right] = \exp\left[t\sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} \left[e^{iuc_j} - 1\right] \mathbb{1}_{B_j}(x)\mu_B(dx)\right]$$

$$= \exp\left[t\int_{\mathbb{R}} \left[e^{iuf(x)} - 1\right] \mu_B(dx)\right] = \exp\left[\int_{\mathbb{R}} \left[e^{iux} - 1\right] (t\mu_{f,B})(dx)\right] \ .$$

Sigui ara $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_B)$ qualsevol. Per la Proposició 3.21, existeix $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tal que:

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} f \Rightarrow \exists \{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \text{ tal que } f_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{\text{q.s}} f \ ,$$

on hem usat la Proposició 3.22(4). Aleshores amb probabilitat 1:

$$Y_{f,B}(t) = \sum_{x\in B} \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) N(t, \{x\}) = \lim_{k\to\infty} \sum_{x\in B} f_{n_k}(x) N(t, \{x\}) = \lim_{k\to\infty} Y_{f_{n_k},B}(t) \ .$$

Com que $\left|e^{iuY_{f_n,B}(t)}\right| \leq 1$ i $\left|e^{iuf_n(x)} - 1\right| \leq 2$, podem usar dues vegades el Teorema de convergència dominada i usant també el Teorema de la mesura imatge:

$$\varphi_{Y_{f,B}(t)}(u) = \mathbb{E}\left(\lim_{n\to\infty} e^{iuY_{f_{n_k},B}(t)}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(e^{iuY_{f_{n_k},B}(t)}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \exp\left[t\int_{\mathbb{R}} \left[e^{iuf_{n_k}(x)} - 1\right] \mu_B(dx)\right] = \exp\left[t\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} \left[e^{iuf_{n_k}(x)} - 1\right] \mu_B(dx)\right]$$

$$= \exp\left[t\int_{\mathbb{R}} \left[e^{iuf(x)} - 1\right] \mu_B(dx)\right] = \exp\left[\int_{\mathbb{R}} \left[e^{iux} - 1\right] (t\mu_{f,B})(dx)\right] \ .$$

Per tant, per l'Observació 1.20 $P_{Y_{f,B}(t)} = Poiss\left(t\mu_{f,B}(\mathbb{R}), \frac{t\mu_{f,B}}{t\mu_{f,B}(\mathbb{R})}\right)$ com volíem veure.
(2) Volem aplicar el Teorema 3.16, per fer-ho veiem que $\varphi_{Y_{f,B}(t)}(u)$ és derivable. Definim $h(u,x) := e^{iuf(x)} - 1$, aleshores:

$$\varphi_{Y_{f,B}(t)} \text{ derivable } \Leftrightarrow g(\cdot) := \int_{\mathbb{R}} h(\cdot, x)\mu_B(dx) \text{ derivable}$$

Pel Teorema 3.7(2):

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\partial h(u,x)}{\partial u}\right| \mu_B(dx) < \infty \Rightarrow g \text{ derivable}$$

Llavors usant que $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_B)$ i el Teorema 3.7(2):

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial h(u,x)}{\partial u} \right| \mu_B(dx) = \int_{\mathbb{R}} \left| e^{iuf(x)} i f(x) \right| \mu_B(dx) = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, \mu_B(dx) < \infty \ ,$$

$$\varphi'_{Y_{f,B}(t)}(u) = \varphi_{Y_{f,B}(t)}(u) t \int_{\mathbb{R}} i f(x) e^{iuf(x)} \mu_B(dx) \Rightarrow \varphi'_{Y_{f,B}(t)}(0) = 1 \cdot t \cdot i \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu_B(dx) \ .$$

Per tant, pel Teorema 3.16:

$$\mathbb{E}\left(Y_{f,B}(t)\right) = \frac{1}{i} \varphi'_{Y_{f,B}(t)}(0) = \frac{1}{i} t i \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu_B(dx) = t \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu_B(dx) \ .$$

(3) Volem aplicar el Teorema 3.16, per fer-ho veiem que $\varphi_{Y_{f,B}(t)}(u)$ és dos cops derivable. Aleshores:

$$\varphi_{Y_{f,B}(t)} \text{ dos cops derivable } \Leftrightarrow g(\cdot) = \int_{\mathbb{R}} h(\cdot, x) \mu_B(dx) \text{ dos cops derivable}$$

Pel Teorema 3.7(2):

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^2 h(u,x)}{\partial u^2} \right| \mu_B(dx) < \infty \Rightarrow g \text{ dos cops derivable}$$

Llavors usant que $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_B)$ i el Teorema 3.7(2):

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^2 h(u,x)}{\partial u^2} \right| \mu_B(dx) = \int_{\mathbb{R}} \left| e^{iuf(x)} i^2 f(x)^2 \right| \mu_B(dx) = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, \mu_B(dx) < \infty \ ,$$

$$\varphi''_{Y_{f,B}(t)}(u) = t \varphi'_{Y_{f,B}(t)}(u) \int_{\mathbb{R}} i f(x) e^{iuf(x)} \mu_B(dx) - t \varphi_{Y_{f,B}(t)}(u) \int_{\mathbb{R}} f(x)^2 e^{iuf(x)} \mu_B(dx) \ .$$

Per tant, pel Teorema 3.16:

$$\mathbb{E}\left(Y_{f,B}(t)^2\right) = -\varphi''_{Y_{f,B}(t)}(0) = t^2 \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) \mu_B(dx) \right)^2 + t \int_{\mathbb{R}} f(x)^2 \mu_B(dx) \ .$$

Finalment usant que $\mathbb{V}\left(Y_{f,B}(t)\right) = \mathbb{E}\left(Y_{f,B}(t)^2\right) - \mathbb{E}\left(Y_{f,B}(t)\right)^2$ obtenim:

$$\mathbb{V}\left(Y_{f,B}(t)\right) = t \int_{\mathbb{R}} f(x)^2 \mu_B(dx) \ .$$

$\blacksquare$

Al llarg del treball usarem que $Y_{f,B}$ és un procés de Lévy i ho demostrem en el següent teorema. A més, enunciem sense demostrar que, com un espera del teorema anterior, $Y_{f,B}$ és un procés de Poisson compost.

Teorema 2.48. *Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un procés de Lévy, $B \in \widetilde{\mathcal{B}}$ tal que $\mu(B) > 0$ i $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_B)$. Aleshores:*

1. *$\{Y_{f,B}(t), t \geq 0\}$ és un procés de Lévy.*
2. *$\{Y_{f,B}(t), t \geq 0\}$ és un procés de Poisson compost de paràmetre $\mu(B)$ i llei $\frac{\mu_{f,B}}{\mu_{f,B}(\mathbb{R})}$.*

Demostració.
(1) Clarament $Y_{f,B}(0) = 0$ ja que $N(0, B) = 0$.
Siguin $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n$, per $j = 2, ..., m$:

$$\begin{aligned} Y_{f,B}(t_j) - Y_{f,B}(t_{j-1}) &= \sum_{\substack{x \in B \\ N(t_j,\{x\}) \neq 0}} xN(t_j, \{x\}) - \sum_{\substack{x \in B \\ N(t_{j-1},\{x\}) \neq 0}} xN(t_{j-1}, \{x\}) \\ &= \sum_{\substack{x \in B \\ N(t_j,\{x\}) \neq 0}} xN(t_j, \{x\}) - \sum_{\substack{x \in B \\ N(t_j,\{x\}) \neq 0}} xN(t_{j-1}, \{x\}) \\ &= \sum_{\substack{x \in B \\ N(t_j,\{x\}) - N(t_{j-1},\{x\}) \neq 0}} x\left[N(t_j, \{x\}) - N(t_{j-1}, \{x\})\right] \ . \end{aligned}$$

Aleshores:

$$\left.\begin{array}{l} Y_{f,B}(t_j) - Y_{f,B}(t_{j-1}) \text{ són } \mathcal{F}_{t_{j-1},t_j}\text{-mesurables} \\ \mathcal{F}_{t_{j-1},t_j} \text{ són independents} \end{array}\right\} \Rightarrow Y_{f,B} \text{ té increments independents.}$$

Com que $N(\cdot, \{x\})$ té increments estacionaris, per la igualtat obtinguda anteriorment es té que $Y_{f,B}$ té també increments estacionaris.
Finalment per veure la continuïtat en probabilitat, sigui $\epsilon > 0$:

$$\mathbb{P}\left(|Y_{f,B}(t)| > \epsilon\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(|Y_{f,B}(t)| > \epsilon | N(t, B) = k\right) \mathbb{P}\left(N(t, B) = k\right)$$

Aleshores usant que $N(\cdot, B)$ és procés de Poisson de paràmetre $\mu(B)$ i que el cas $k = 0$ el podem excloure ja que llavors $Y_{f,B}(t) = 0$:

$$\limsup_{t \to 0^+} \mathbb{P}\left(|Y_{f,B}(t)| > \epsilon\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} 1 \cdot \limsup_{t \to 0^+} \frac{e^{-\mu(B)t}(\mu(B)t)^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0 \ .$$

Així doncs, per la Proposició 2.12 $Y_{f,B}$ és un procés de Lévy ja que:

$$0 \leq \liminf_{t \to 0^+} \mathbb{P}\left(|Y_{f,B}(t)| > \epsilon\right) \leq \limsup_{t \to 0^+} \mathbb{P}\left(|Y_{f,B}(t)| > \epsilon\right) = 0 \Rightarrow \lim_{t \to 0^+} \mathbb{P}\left(|Y_{f,B}(t)| > \epsilon\right) = 0 \ .$$

(2) Veure [1], pàgina 108, Teorema 2.3.9.

2.5.3 Eliminació de salts no acotats d'un procés de Lévy

Estudiat el procés $Y_{f,B}$, ja podem estudiar el procés W_a introduït en la Secció 2.5.2. Veurem que W_a hereda la propietat de ser Lévy de X i que compleix l'objectiu pel qual l'hem construït: té salts acotats. Veurem també que ens interessa construir el procés centrat $\hat{W}_a$, ja que a part de ser també procés de Lévy amb salts acotats, és martingala.

Definició 2.49. *Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un procés de Lévy, $a > 0$, definim els processos estocàstics $W_a = \{W_a(t), t \geq 0\}$ i $\hat{W}_a = \left\{\hat{W}_a(t), t \geq 0\right\}$ com*

$$W_a(t) := X(t) - \int_{|x| \geq a} xN(t, dx) \quad i \quad \hat{W}_a(t) := W_a(t) - \mathbb{E}\left(W_a(t)\right) \ .$$

Per comoditat direm $W := W_1$ i $\hat{W} := \hat{W}_1$.

Teorema 2.50. *Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un procés de Lévy i $a > 0$. Aleshores:*

1. *W_a és procés de Lévy.*
2. *Existeixen els moments de qualsevol ordre de W_a i $\mathbb{E}(W_a(t)) = t \cdot \mathbb{E}(W_a(1))$.*
3. *$\hat{W}_a$ és procés de Lévy.*
4. *Existeixen els moments de qualsevol ordre de $\hat{W}_a$ i $\hat{W}_a$ és un procés centrat.*
5. *$\hat{W}_a$ martingala respecte $\mathbb{F}^X$.*

Demostració.
(1) Usant que

$$W_a(t) = X(t) - \int_{|x|\geq a} xN(t, dx) = W_a(t) = X(t) - \sum_{|x|\geq a} xN(t, \{x\}) \ .$$

obtenim que $W_a(0) = 0$ ja que $X(0) = 0$ i $N(0, \{x\}) = 0$.
Siguin $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n$, per $j = 2, ..., n$:

$$\begin{aligned} & W_a(t_j) - W_a(t_{j-1}) \\ = X(t_j) - X(t_{j-1}) + & \sum_{\substack{|x|\geq a \\ N(t_j,\{x\})-N(t_{j-1},\{x\})\neq 0}} x\left[N(t_j, \{x\}) - N(t_{j-1}, \{x\})\right] \ . \end{aligned}$$

Aleshores:

$$\left.\begin{array}{l} X(t_j) - X(t_{j-1}) \text{ són } \mathcal{F}_{t_{j-1},t_j}\text{-mesurables} \\ N(t_j, \{x\}) - N(t_{j-1}, \{x\}) \text{ són } \mathcal{F}_{t_{j-1},t_j}\text{-mesurables} \\ \mathcal{F}_{t_{j-1},t_j} \text{ són independents} \end{array}\right\} \Rightarrow W_a \text{ té increments independents.}$$

Siguin $0 \leq t_1 < t_2$, usant que X té increments estacionaris es té:

$$\left.\begin{array}{l} W_a(t_2) - W_a(t_1) \text{ és } \mathcal{F}_{t_1,t_2}\text{-mesurable} \\ W_a(t_2 - t_1) \text{ és } \mathcal{F}_{0,t_2-t_1}\text{-mesurable} \\ P_{X(u)-X(v)} = P_{X(u-v)} \text{ per tots } t_1 \leq v < u \leq t_2 \end{array}\right\} \Rightarrow P_{W_a(t_2-W_a(t_1)} = P_{W_a(t_2-t_1)} \ .$$

Per tant, W_a té increments estacionaris. Finalment volem veure que W_a és continu en probabilitat. Usant la desigualtat del Lema 3.28 i usant que tant X com $\int_{|x|\geq a} xN(t, dx)$ són processos de Lévy pel Teorema 2.48(1):

$$\mathbb{P}(|W_a(t)| > \epsilon) \leq \mathbb{P}\left(|X(t)| > \frac{\epsilon}{2}\right) + \mathbb{P}\left(\left|\int_{|x|\geq a} xN(t, dx)\right| > \frac{\epsilon}{2}\right) \ .$$

Prenent límits obtenim que W_a és procés de Lévy usant la Proposició 2.12.

(2) Per la construcció de W_a en la Secció 2.5.2, es té que qualsevol salt de X de tamany més gran que a serà compensat pel fet de restar la suma dels salts. Més concretament, siguin $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ els instants d'arribada del procés de Poisson $N(\cdot, [-a, a]^c)$. Aleshores:

$$\Delta W_a(T_n) = \Delta X(T_n) - \Delta \int_{|x|\geq a} xN(T_n, dx) = \Delta X(T_n) - \Delta X(T_n) \cdot 1 = 0 \ .$$

Qualsevol altre salt de X serà acotat per a, i no hi haurà salt en la suma dels salts de tamany més gran que a de X. Així doncs, W_a té salts acotats. Per tant, pel Teorema 2.43 existeixen els moments de $W_a(t)$ de qualsevol ordre per tot $t \geq 0$. En particular, podem aplicar el Corol·lari 2.16 obtenint que

$$\mathbb{E}\left(W_a(t)\right) = t \cdot \mathbb{E}\left(W_a(1)\right) \ .$$

(3) Notem que W_a és un procés de Lévy i $\hat{W}_a(t) = W_a(t) - t \cdot \mathbb{E}\left(W_a(1)\right)$. Apliquem el Lema 2.27 i obtenim que $\hat{W}_a$ és procés de Lévy.
(4) Com que els salts de $\hat{W}_a$ són els mateixos que els salts de W_a el mateix raonament usat en (2) és vàlid. És clar que $\hat{W}_a$ és centrat.
(5) És clar que $\hat{W}_a$ és adaptat a $\mathbb{F}^X$ i és integrable. Llavors, si $0 \leq s < t$ usant que:

- $\hat{W}_a(t) - \hat{W}_a(s)$ és independent de $\mathcal{F}_s^X$ per ser $\mathcal{F}_{s,t}$-mesurable i X tenir increments independents,
- $\hat{W}_a(s)$ és $\mathcal{F}_s^X$-mesurable,

es té:

$$E\left(\hat{W}_a(t)|\mathcal{F}_s^X\right) = E\left(\hat{W}_a(t) - \hat{W}_a(s) + \hat{W}_a(s)|\mathcal{F}_s^X\right) = \mathbb{E}\left(\hat{W}_a(t) - \hat{W}_a(s)\right) + \hat{W}_a(s)$$

$$= \mathbb{E}\left(\hat{W}_a(t)\right) - \mathbb{E}\left(\hat{W}_a(s)\right) + \hat{W}_a(s) = \hat{W}_a(s) \ .$$

Per tant, $\hat{W}_a$ és martingala respecte $\mathbb{F}^X$. ■

2.5.4 Integral de Poisson compensada

De la mateixa manera que hem introduït en la secció anterior la versió centrada de W_a, ens interessa també introduir la versió centrada $\hat{Y}_{f,B}$ de la integral de Poisson $Y_{f,B}$. La motivació per fer-ho és que apart de mantenir la propietat de ser procés de Lévy, $\hat{Y}_{f,B}$ és martingala, fet que ens serà útil més endavant.

Definició 2.51. *Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un procés de Lévy, $B \in \widetilde{\mathcal{B}}$ i $f \in \mathcal{L}^1\left(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_B\right)$, aleshores definim per $t \geq 0$ la integral de Poisson compensada com:*

$$\int_B f(x)\hat{N}(t,dx) := Y_{f,B}(t) - \mathbb{E}\left(Y_{f,B}(t)\right) = \int_B f(x)N(t,dx) - t\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_B(dx) \ .$$

Escriurem $\hat{Y}_{f,B}(t) := \int_B f(x)\hat{N}(t,dx)$.

Proposició 2.52. *Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un procés de Lévy, $B \in \widetilde{\mathcal{B}}$ i $f \in \mathcal{L}^1\left(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_B\right)$. Aleshores:*

1. *$\hat{Y}_{f,B} := \left\{\hat{Y}_{f,B}(t), t \geq 0\right\}$ és procés de Lévy centrat.*
2. *$\varphi_{\hat{Y}_{f,B}(t)}(u) = \exp\left[t\int_{\mathbb{R}}\left(e^{iux} - 1 - iux\right)\mu_{f,B}(dx)\right]$.*
3. *$\hat{Y}_{f,B}$ és martingala respecte $\mathbb{F}^X$.*

Si a més $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_B)$:

4. $\mathbb{E}\left(V_{\hat{Y}_{f,B}}(t)^2\right) < \infty$ *per tot* $t \geq 0$.

5. $\hat{Y}_{f,B}$ *és de quadrat integrable.*

Demostració.
(1) $\hat{Y}_{f,B}$ és procés de Lévy perquè $Y_{f,B}$ ho és i pel Lema 2.27.
(2) Usant el Teorema 2.47(1) obtenim:

$$\varphi_{\hat{Y}_{f,B}(t)}(u) = \mathbb{E}\left(e^{iuY_{f,B}(t)}\right) \exp\left[-iut \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_B(dx)\right] =$$

$$= \exp\left[t \int_{\mathbb{R}} \left(e^{iux} - 1\right) \mu_{f,B}(dx)\right] \exp\left[-t \int_{\mathbb{R}} iux\mu_{f,B}(dx)\right]$$

$$= \exp\left[t \int_{\mathbb{R}} \left(e^{iux} - 1 - iux\right) \mu_{f,B}(dx)\right] .$$

(3) És clar que $\hat{Y}_{f,B}$ és adaptat a $\mathbb{F}^X$ i és integrable. Llavors, si $0 \leq s < t$ usant que:

- $\hat{Y}_{f,B}(t) - \hat{Y}_{f,B}(s)$ és independent de $\mathcal{F}_s^X$ per ser $\mathcal{F}_{s,t}$-mesurable i X tenir increments independents,
- $\hat{Y}_{f,B}(s)$ és $\mathcal{F}_s^X$-mesurable,

es té:

$$E\left(\hat{Y}_{f,B}(t)|\mathcal{F}_s^X\right) = E\left(\hat{Y}_{f,B}(t) - \hat{Y}_{f,B}(s) + \hat{Y}_{f,B}(s)|\mathcal{F}_s^X\right) = \mathbb{E}\left(\hat{Y}_{f,B}(t) - \hat{Y}_{f,B}(s)\right) + \hat{Y}_{f,B}(s)$$

$$= \mathbb{E}\left(\hat{Y}_{f,B}(t)\right) - \mathbb{E}\left(\hat{Y}_{f,B}(s)\right) + \hat{Y}_{f,B}(s) = \hat{Y}_{f,B}(s) .$$

Per tant, $\hat{Y}_{f,B}$ és martingala respecte $\mathbb{F}^X$.
(4) Veiem ara que la variació és de quadrat integrable. Sigui $t \geq 0$, notem primer que si $g(t) := t \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_B(dx)$:

$$V_{\hat{Y}_{f,B}}(t) \leq V_{Y_{f,B}}(t) + V_g(t) .$$

Sigui $\mathcal{P} = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = t\}$ partició de l'interval $[0, t]$, aleshores usant (2.3):

$$var_{\mathcal{P}}\left(Y_{f,B}\right) = \sum_{i=1}^n |Y_{f,B}(t_i) - Y_{f,B}(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{t_{i-1}<u\leq t_i} f\left(\Delta X(u)\right) \mathbb{1}_B\left(\Delta X(u)\right) \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \sum_{t_{i-1}<u\leq t_i} |f\left(\Delta X(u)\right)| \mathbb{1}_B\left(\Delta X(u)\right) = \sum_{0\leq u\leq t} |f\left(\Delta X(u)\right)| \mathbb{1}_B\left(\Delta X(u)\right) = Y_{|f|,B}(t) .$$

Per l'Observació 2.45, sabem que $Y_{|f|,B}(t) < \infty$, per tant:

$$V_{Y_{f,B}}(t) = \sup_{\mathcal{P} \text{ partició de } [0,t]} var_{\mathcal{P}}(Y_{f,B}) \leq Y_{|f|,B}(t) < \infty .$$

Per l'altra banda:

$$var_{\mathcal{P}}\left(g\right) = \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_B(dx)\right| \sum_{i=1}^n |t_i - t_{i-1}| = t\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_B(dx)\right| < \infty .$$

Per tant, també:

$$V_g(t) = \sup_{\mathcal{P} \text{ partició de } [0,t]} var_{\mathcal{P}}(g) \leq t \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu_B(dx) \right| < \infty \ .$$

Així doncs com que $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_B)$, pel Teorema 2.47(3) $Y_{|f|,B}$ és de quadrat integrable i llavors:

$$V_{\hat{Y}_{f,B}}(t) \leq Y_{|f|,B}(t) + t \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) \mu_B(dx) \right| \Rightarrow \mathbb{E}\left(\left| V_{\hat{Y}_{f,B}}(t) \right|^2 \right) < \infty \ .$$

(5) Usant la Proposició 2.47(3):

$$\mathbb{E}\left(\hat{Y}_{f,B}(t)^2 \right) = \mathbb{E}\left(\left(Y_{f,B}(t) - \mathbb{E}\left(Y_{f,B}(t) \right) \right)^2 \right) = \mathbb{V}\left(Y_{f,B}(t) \right) = t \int_{\mathbb{R}} f(x)^2 \mu_B(dx) < \infty \ .$$

■

2.6 Descomposició de Lévy-Itô

Estudiats els processos $Y_{f,B}$, W_a i les seves versions centrades notem que podem escriure el procés X com:

$$X(t) = \hat{W}(t) + \int_{|x|\geq 1} xN(t,dx) + \mathbb{E}\left(W(t)\right) = \hat{W}(t) + \int_{|x|\geq 1} xN(t,dx) + t \cdot \mathbb{E}\left(W(1)\right) \ , \quad (2.5)$$

on sabem que $\int_{|x|\geq 1} xN(\cdot, dx)$ és un procés de Poisson compost corresponent a la suma dels salts de X de tamany més gran que 1.
Recordem que W és el procés que resulta d'eliminar a X els salts de tamany més gran que 1, i $\hat{W}$ la seva versió centrada. Intuïtivament, $\hat{W}$ es descomposa en la part compensada dels salts de tamany més petit que 1, la qual anomenarem W_d, i en la part restant W_c que serà contínua, i de fet veurem, que serà un moviment Brownià amb variància.
Per estudiar els salts de X de tamany més petit que 1, voldrem donar sentit a l'expressió:

$$\int_{|x|<1} x\hat{N}(t,dx) \ . \quad (2.6)$$

Com que $(-1,1) \notin \widetilde{\mathcal{B}}$, no podem fer-ho directament aplicant els resultats obtinguts. Aproxirarem la integral anterior per integrals sobre conjunts de $\widetilde{\mathcal{B}}$.
Sigui $\{\epsilon_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$, successió tal que:

- $\epsilon_1 = 1$,
- $\epsilon_{n+1} < \epsilon_n$ per tot $n \geq 1$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$.

D'ara en endavant, definim per $m, n \geq 1$:

$$B_m := \{x \in \mathbb{R} : \epsilon_{m+1} \leq |x| < \epsilon_m\} \quad \text{i} \quad A_n := \bigcup_{m=1}^{n} B_m = \{x \in \mathbb{R} : \epsilon_{n+1} \leq |x| < 1\} \ . \quad (2.7)$$

Notem que per tot $n \geq 1$, $A_n, B_n \in \widetilde{\mathcal{B}}$ i:

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^2 \mu_{A_n}(dx) = \int_{A_n} |x|^2 \mu(dx) \leq \int_{A_n} 1 \cdot \mu(dx) = \mu(A_n) < \infty \ .$$

Pel mateix argument, $\int_{\mathbb{R}} |x|^2 \mu_{B_n}(dx) < \infty$. Aleshores podem aplicar la Proposició 2.52 i en particular per tot $n \geq 1$, $\hat{Y}_{Id,A_n} \in \mathbb{M}$ (veure Secció 2.1.4). Llavors, la suma compensada dels salts de tamany més petit que 1, serà, en certa manera, el límit de $\hat{Y}_{Id,A_n}$ en l'espai $\mathbb{M}$. Abans d'estudiar la convergència d'aquest procés, presentem dos resultats que usarem.

Proposició 2.53. *Siguin M_1 i M_2 dues martingales càdlàg centrades tals que $M_j(0) = 0$ q.s per $j = 1,2$. Suposem que M_1 és de quadrat integrable i que per cada $t \geq 0$ es té $\mathbb{E}\left(V_{M_2}(t)^2\right) < \infty$. Aleshores:*

$$\mathbb{E}\left(M_1(t)M_2(t)\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{0\leq s\leq t} \Delta M_1(s)\Delta M_2(s)\right) \ .$$

Demostració. Veure [1], pàgina 112, Proposició 2.4.1 ■

Corol·lari 2.54. *Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un procés de Lévy, $B_1, B_2 \in \widetilde{\mathcal{B}}$ i disjunts, $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_B)$. Aleshores per tot $t \geq 0$:*

$$\mathbb{E}\left(\hat{Y}_{f,B_1}(t)\hat{Y}_{g,B_2}(t)\right) = 0 \ .$$

Demostració. Usant la Proposició 2.52 podem aplicar la Proposició 2.53 i aleshores:

$$\mathbb{E}\left(\hat{Y}_{f,B_1}(t)\hat{Y}_{g,B_2}(t))\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{0 \leq s \leq t} \Delta\hat{Y}_{f,B_1}(s)\Delta\hat{Y}_{g,B_2}(s)\right) \ .$$

Notem que:

$$\Delta\hat{Y}_{f,B_j}(s) \neq 0 \Leftrightarrow \Delta Y_{f,B_j}(s) \neq 0 \Leftrightarrow \Delta X(s) \in B_j \ .$$

Per tant, al ser B_1 i B_2 disjunts es té:

$$\Delta\hat{Y}_{f,B_1}(s) \neq 0 \Rightarrow \Delta\hat{Y}_{g,B_2}(s) = 0 \ .$$

Així doncs:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{0 \leq s \leq t} \Delta\hat{Y}_{f,B_1}(s)\Delta\hat{Y}_{g,B_2}(s)\right) = 0 \Rightarrow \mathbb{E}\left(\hat{Y}_{f,B_1}(t)\hat{Y}_{g,B_2}(t)\right) = 0 \ .$$

■

Teorema 2.55. *Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un procés de Lévy. Aleshores:*

1. *La successió de martingales $\left\{\hat{Y}_{Id,A_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ convergeix en l'espai $\mathbb{M}$ a un procés W_d.*
2. *W_d és un procés de Lévy centrat.*
3. *$W_c := \hat{W} - W_d$ és un procés de Lévy centrat.*

Demostració.
(1) Per veure que la successió convergeix en l'espai $\mathbb{M}$, veurem que és de Cauchy i usarem la completitud de $\mathbb{M}$ (Proposició 2.9).
Per tot $t \geq 0$, les variables $\hat{Y}_{Id,B_m}$ són mutuament ortogonals ja que aplicant el Corol·lari 2.54 per $i \neq j$:

$$\mathbb{E}\left(\hat{Y}_{Id,B_i}(t)\hat{Y}_{Id,B_j}(t)\right) = 0 \ .$$

Aleshores per cada $n \geq 1$ i $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ es té:

$$\mu_{A_n}(C) = \sum_{m=1}^{n} \mu_{B_m}(C) \ .$$

Per tant, per tot $t \geq 0$:

$$\hat{Y}_{Id,A_n}(t) = \sum_{m=1}^{n} \left\{\int_{B_m} xN(t,dx) - t\int_{\mathbb{R}} x\mu_{B_m}(dx)\right\} = \sum_{m=1}^{n} \hat{Y}_{Id,B_m}(t) \ .$$

Usant que les variables $\hat{Y}_{Id,B_m}$ són mutuament ortogonals obtenim:

$$\mathbb{E}\left(\hat{Y}_{Id,A_n}(t)^2\right) = \mathbb{E}\left(\left(\sum_{m=1}^{n} \hat{Y}_{Id,B_m}(t)\right)^2\right) = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}\left(\hat{Y}_{Id,B_m}(t)^2\right) \ . \tag{2.8}$$

Es pot demostrar que per $n \geq 1$, $\hat{W} - \hat{Y}_{Id,A_n}(\cdot)$ i $\hat{Y}_{Id,A_n}(\cdot)$ són processos independents (veure [1], pàgina 121, demostració Teorema 2.4.11) i llavors:

$$\mathbb{V}\left(\hat{W}(t)\right) = \mathbb{V}\left(\hat{W}(t) - \hat{Y}_{Id,A_n}(t)\right) + \mathbb{V}\left(\hat{Y}_{Id,A_n}(t)\right) \ .$$

Usant que $\hat{W}$ és un procés de Lévy centrat i amb salts acotats, que les variables $\hat{Y}_{Id,A_n}(t)$ són centrades i la igualtat anterior es té:

$$\mathbb{E}\left(\hat{Y}_{Id,A_n}(t)^2\right) = \mathbb{V}\left(\hat{Y}_{Id,A_n}\right) \leq \mathbb{V}\left(\hat{W}(t)\right) = \mathbb{E}\left(\hat{W}(t)^2\right) < \infty \ .$$

Aleshores per (2.8) i aquesta última observació la successió:

$$\left\{\mathbb{E}\left(\hat{Y}_{Id,A_n}(t)^2\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

és creixent i acotada per dalt, i, per tant, és convergent.
Siguin ara $1 \leq k \leq j$, llavors es comprova fàcilment que:

$$\hat{Y}_{Id,A_j}(t) - \hat{Y}_{Id,A_k}(t) = \hat{Y}_{Id,A_j \setminus A_k}(t) = \hat{Y}_{Id,B_{k+1}\cup\ldots\cup B_j}(t) = \sum_{m=k+1}^{j} \hat{Y}_{Id,B_m}(t) \ .$$

Per tant, usant que $\hat{Y}_{Id,B_m}$ són mutuament ortogonals:

$$\mathbb{E}\left(\left|\hat{Y}_{Id,A_j}(t) - \hat{Y}_{Id,A_k}(t)\right|^2\right) = \mathbb{E}\left(\left(\sum_{m=k+1}^{j} \hat{Y}_{Id,B_m}(t)\right)^2\right) = \sum_{m=k+1}^{j} \mathbb{E}\left(\hat{Y}_{Id,B_m}(t)^2\right)$$

$$= \sum_{m=1}^{j} \mathbb{E}\left(\hat{Y}_{Id,B_m}(t)^2\right) - \sum_{m=1}^{k} \mathbb{E}\left(\hat{Y}_{Id,B_m}(t)^2\right) = \mathbb{E}\left(\hat{Y}_{Id,A_j}(t)^2\right) - \mathbb{E}\left(\hat{Y}_{Id,A_k}(t)^2\right) \ .$$

Llavors:

$$\left\{\mathbb{E}\left(\hat{Y}_{Id,A_n}(t)^2\right)\right\}_{n=1}^{\infty} \text{ de Cauchy en } \mathbb{R} \Rightarrow \left\{\hat{Y}_{Id,A_n}\right\}_{n=1}^{\infty} \text{ de Cauchy en } \mathbb{M}$$

Com que $\mathbb{M}$ és complet obtenim que la successió és convergent. Escriurem el seu limit com $W_d = \{W_d(t); t \geq 0\} \in \mathbb{M}$, és a dir:

$$\hat{Y}_{Id,A_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} W_d(t) \text{ per tot } t \geq 0 \ .$$

(2) Per veure que W_d és procés de Lévy usarem el Teorema 2.19. Primer observem que usant la Proposició 3.22(2) per tot $n \geq 1$ i per tot $t \geq 0$ es té:

$$\hat{Y}_{Id,A_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} W_d(t) \Rightarrow \hat{Y}_{Id,A_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} W_d(t) \ .$$

Sigui $\epsilon > 0$, usant la desigualtat del Lema 3.28 tenim:

$$\mathbb{P}\left(\left|W_d(t) + \left(-\hat{Y}_{Id,A_n}(t)\right)\right| > \epsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(|W_d(t)| > \frac{\epsilon}{2}\right) + \mathbb{P}\left(\left|\hat{Y}_{Id,A_n}(t)\right| > \frac{\epsilon}{2}\right) \ .$$

Per ser $\hat{Y}_{Id,A_n}$ procés de Lévy tenim que:

$$\lim_{t\to 0^+} \mathbb{P}\left(\left|\hat{Y}_{Id,A_n}(t)\right| > \frac{\epsilon}{2}\right) = 0 \ .$$

Per l'altra banda usant la desigualtat de Txebixev (Proposició 3.4) amb $f(x) = x^2$ obtenim:

$$\mathbb{P}\left(|W_d(t)| > \frac{\epsilon}{2}\right) \leq \frac{4}{\epsilon^2}\mathbb{E}\left(W_d(t)^2\right) \ ,$$

i per la Proposició 3.22(3):

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{E}\left(W_d(t)^2\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\hat{Y}_{Id,A_n}(t)^2\right) \\ \mathbb{E}\left(\hat{Y}_{Id,A_n}(t)^2\right) \leq \mathbb{V}\left(\hat{W}(t)\right) = \mathbb{E}\left(\hat{W}(t)^2\right) < \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{E}\left(W_d(t)^2\right) \leq \mathbb{E}\left(\hat{W}(t)^2\right) < \infty \ .$$

Aplicant el Teorema de convergència dominada per entrar el límit i usant que amb probabilitat 1, $\hat{W}$ és contínua per la dreta en $t = 0$:

$$\limsup_{t\to 0^+} \mathbb{P}\left(|W_d(t)| > \frac{\epsilon}{2}\right) \leq \frac{4}{\epsilon^2} \limsup_{t\to 0^+} \mathbb{E}\left(\hat{W}(t)^2\right)$$

$$= \frac{4}{\epsilon^2} \lim_{t\to 0^+} \mathbb{E}\left(\hat{W}(t)^2\right) = \frac{4}{\epsilon^2}\mathbb{E}\left(\lim_{t\to 0^+} \hat{W}(t)^2\right) = \frac{4}{\epsilon^2}\mathbb{E}(0) = 0 \ .$$

Així doncs per tot $n \geq 1$:

$$\limsup_{t\to 0^+} \mathbb{P}\left(\left|W_d(t) - \hat{Y}_{Id,A_n}\right| > \epsilon\right) = 0 \ .$$

Per tant, pel Teorema 2.19 W_d és procés de Lévy. A més W_d és un procés centrat per la Proposició 3.22(1) i 3.22(3).
(3) Per veure que $W_c = \hat{W} - W_d$ és procés de Lévy usarem el Teorema 2.19. Notem que aplicant la Proposició 2.9:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{W} \in \mathbb{M} \text{ i } \hat{Y}_{Id,A_n} \in \mathbb{M} \Rightarrow \hat{W} - \hat{Y}_{Id,A_n} \in \mathbb{M} \\ \hat{W}(t) - \hat{Y}_{Id,A_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} W_c(t) \text{ per tot } t \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow W_c \in \mathbb{M} \ .$$

Notem que per tot $n \geq 1$, $\hat{W} - \hat{Y}_{Id,A_n}$ és procés de Lévy. Per veure-ho:

$$\hat{W}(t) - \hat{Y}_{Id,A_n}(t) = X(t) - \int_{|x|\geq 1} xN(t,dx) - \mathbb{E}\left(W_1(t)\right) - \int_{A_n} x\hat{N}(t,dx)$$

$$= X(t) - \int_{|x|\geq 1} xN(t,dx) - t \cdot \mathbb{E}\left(W_1(t)\right) - \int_{A_n} xN(t,dx) + t\int_{\mathbb{R}} x\mu_{A_n}(dx)$$

$$= X(t) - \int_{|x|\geq \epsilon_{n+1}} xN(t,dx) + t\left[\int_{\mathbb{R}} x\mu_{A_n}(dx) - \mathbb{E}\left(W_1(1)\right)\right] = W_{\epsilon_{n+1}}(t) + tK \ .$$

On $K := \int_{\mathbb{R}} x\mu_{A_n}(dx) - \mathbb{E}\left(W_1(1)\right) \in \mathbb{R}$. Aleshores pel Teorema 2.50(1) $W_{\epsilon_{n+1}}$ és procés de Lévy i pel Lema 2.27 $W_{\epsilon_{n+1}}(\cdot) + (\cdot)K$ també. Així doncs $\hat{W} - \hat{Y}_{Id,A_n}$ és procés de Lévy. Usant la Proposició 3.22(2), per tot $n \geq 1$ i per tot $t \geq 0$ es té:

$$\hat{W}(t) - \hat{Y}_{Id,A_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} W_c(t) \Rightarrow \hat{W}(t) - \hat{Y}_{Id,A_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} W_c(t) \ .$$

Sigui $\epsilon > 0$, usant la desigualtat del Lema 3.28 tenim:

$$\mathbb{P}\left(\left|W_c(t) + \left(-\hat{W}(t) + \hat{Y}_{Id,A_n}(t)\right)\right| > \epsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(|W_c(t)| > \frac{\epsilon}{2}\right) + \mathbb{P}\left(\left|\hat{W}(t) - \hat{Y}_{Id,A_n}(t)\right| > \frac{\epsilon}{2}\right) .$$

Per ser $\hat{W} - \hat{Y}_{Id,A_n}$ procés de Lévy tenim que:

$$\lim_{t\to 0^+} \mathbb{P}\left(\left|\hat{W}(t) - \hat{Y}_{Id,A_n}(t)\right| > \frac{\epsilon}{2}\right) = 0 .$$

Llavors usant la desigualtat de Txebixev amb $f(x) = x^2$ obtenim:

$$\mathbb{P}\left(|W_c(t)| > \frac{\epsilon}{2}\right) \leq \frac{4}{\epsilon^2}\mathbb{E}\left(W_c(t)^2\right) ,$$

i per la Proposició 3.22(3):

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{E}\left(W_c(t)^2\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\left(\hat{W}(t) - \hat{Y}_{Id,A_n}(t)\right)^2\right) \\ \mathbb{E}\left(\left(\hat{W}(t) - \hat{Y}_{Id,A_n}(t)\right)^2\right) \leq \mathbb{V}\left(\hat{W}(t)\right) = \mathbb{E}\left(\hat{W}(t)^2\right) < \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{E}\left(W_c(t)^2\right) \leq \mathbb{E}\left(\hat{W}(t)^2\right) .$$

Aplicant el Teorema de convergència dominada per entrar el límit i usant que amb probabilitat 1, $\hat{W}$ és contínua per la dreta en $t = 0$:

$$\limsup_{t\to 0^+} \mathbb{P}\left(|W_c(t)| > \frac{\epsilon}{2}\right) \leq \frac{4}{\epsilon^2} \limsup_{t\to 0^+} \mathbb{E}\left(\hat{W}(t)^2\right)$$

$$= \frac{4}{\epsilon^2} \lim_{t\to 0^+} \mathbb{E}\left(\hat{W}(t)^2\right) = \frac{4}{\epsilon^2}\mathbb{E}\left(\lim_{t\to 0^+} \hat{W}(t)^2\right) = \frac{4}{\epsilon^2}\mathbb{E}(0) = 0 .$$

Així doncs per tot $n \geq 1$:

$$\limsup_{t\to 0^+} \mathbb{P}\left(\left|W_c(t) + \left(-\hat{W}(t) + \hat{Y}_{Id,A_n}\right)\right| > \epsilon\right) = 0 .$$

Per tant, pel Teorema 2.19 W_c és procés de Lévy. A més W_d és un procés centrat per la Proposició 3.22(1) i 3.22(3). ∎

Corol·lari 2.56. *Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un procés de Lévy. Aleshores $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ és una mesura de Lévy.*

Demostració. Notem que:

$$\mu(\{0\}) = \mathbb{E}(N(1, \{0\})) = \mathbb{E}(0) = 0 .$$

Pel Corol·lari 2.41 sabem que si $B \in \widetilde{\mathcal{B}}$ aleshores $\mu(B) < \infty$. En particular:

$$\int_{(-1,1)^c} 1\mu(dx) = \mu\left((-1,1)^c\right) < \infty .$$

Finalment usant el Teorema de convergència monotòna, el Teorema 2.52(5), 3.23(3) i que $W_d \in \mathbb{M}$ es té:

$$\int_{[-1,1]} x^2\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x)x^2\mu(dx) = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} x^2\mu_{A_n}(dx)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\hat{Y}_{Id,A_n}(1)^2\right) = \mathbb{E}\left(W_d(1)^2\right) < \infty .$$

Així doncs μ és mesura de Lévy. ∎

Corol·lari 2.57. *Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un procés de Lévy. Aleshores, la funció característica de $W_d(t)$ és:*

$$\varphi_{W_d(t)}(u) = \exp\left[t \int_{|x|<1} \left(e^{iux} - 1 - iux\right) \mu(dx)\right] .$$

Demostració. Usant la Proposició 3.22(2) i 3.22(5) obtenim que per tot $t \geq 0$ es té:

$$\hat{Y}_{Id,A_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} W_d(t) \Rightarrow P_{\hat{Y}_{Id,A_n}}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{\omega} P_{W_d(t)} .$$

Usant el Teorema de continuïtat de Lévy i argumentant com en l'Observació 1.25 podem usar el Teorema de convergència dominada i obtenim:

$$\varphi_{W_d(t)}(u) = \lim_{n\to\infty} \varphi_{\hat{Y}_{Id,A_n}(t)}(u) = \lim_{n\to\infty} \exp\left[t \int_{\mathbb{R}} \left(e^{iux} - 1 - iux\right) \mu_{A_n}(dx)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \exp\left[t \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{A_n}(x) \left(e^{iux} - 1 - iux\right) \mu(dx)\right] = \exp\left[t \int_{|x|<1} \left(e^{iux} - 1 - iux\right) \mu(dx)\right] .$$

■

Com a conseqüència d'aquest teorema tenim una expressió per la suma compensada dels salts de X de tamany més petit que 1, per tant, podem donar sentit a la integral de (2.6). Això motiva la següent definició.

Definició 2.58. *Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un procés de Lévy. Definim*

$$\int_{|x|<1} x\hat{N}(t, dx) := W_d(t) .$$

Arribats aquest punt, notem que l'equació de (2.5) la podem escriure de la següent forma:

$$X(t) = W_c(t) + \int_{|x|<1} x\hat{N}(t, dx) + \int_{|x|\geq 1} xN(t, dx) + t \cdot \mathbb{E}\left(W(1)\right) , \tag{2.9}$$

Per poder demostrar la Descomposició de Lévy-Itô només ens queda veure que W_c és un moviment Brownià amb variància. Per fer-ho veurem que estem en les hipòtesis de la Proposició 2.29.

Teorema 2.59. *Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un procés de Lévy. Aleshores W_c té trajectòries contínues.*

Demostració. Veure annex, pàgina 67, Teorema 3.34. ■

Teorema 2.60. *Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un procés de Lévy. Aleshores:*

1. *O bé $W_c(t) = 0$ q.s per tot $t \geq 0$.*
2. *O bé W_c és un moviment Brownià amb variància.*

Demostració. Veure annex, pàgina 70, Teorema 3.36. ■

Finalment podem enunciar i demostrar la desitjada Descomposició de Lévy-Itô.

Teorema 2.61. ***Descomposició de Lévy-Itô.*** *Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un procés de Lévy. Aleshores existeixen:*

- $b \in \mathbb{R}$,
- $\sigma^2 \geq 0$ *tal que:*
  - *Si $\sigma^2 = 0$ llavors $B_{\sigma^2}(t) := 0$ per tot $t \geq 0$.*
  - *Si $\sigma^2 > 0$ llavors $B_{\sigma^2} = \{B_{\sigma^2}(t), t \geq 0\}$ és un moviment Brownià amb variància σ^2.*
- $N : ([0, +\infty) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})) \times \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *tal que per $t \geq 0$, $\omega \in \Omega$, $N(t, \cdot)(\omega) \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ i*
$$\int_{|x| \geq 1} xN(t, dx) \tag{2.10}$$
correspon a la suma de salts de X de tamany més gran o igual que 1 en l'interval $[0, t]$. A més si $B := (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ es té que:
  - *Si $\mu(B) = \mathbb{E}(N(1, B)) = 0$, X no té salts de tamany més gran o igual que 1.*
  - *Si $\mu(B) = \mathbb{E}(N(1, B)) > 0$, el procés (2.10) és un procés de Poisson compost de paràmetre $\mu(B)$ i llei $\frac{\mu_B}{\mu_B(\mathbb{R})}$.*
- $W_d = \{W_d(t); t \geq 0\}$ *procés de Lévy tal que $W_d(t)$ és la suma compensada de salts de X de tamany més petit que 1 en l'interval $[0, t]$. L'escriurem:*
$$W_d(t) = \int_{|x|<1} x\hat{N}(t, dx) \ .$$
A més, $W_d(t)$ té funció característica:
$$\varphi_{W_d(t)}(u) = \exp\left[t \int_{|x|<1} \left(e^{iux} - 1 - iux\right) \mu(dx)\right],$$

tals que:
$$X(t) = bt + B_{\sigma^2}(t) + \int_{|x|<1} x\hat{N}(t, dx) + \int_{|x|\geq 1} xN(t, dx) \ .$$

Demostració. Conseqüència d'aplicar els resultats obtinguts en aquest capítol. Podem reescriure l'equació de (2.9) com:
$$\begin{aligned} X(t) &= W_c(t) + \int_{|x|<1} x\hat{N}(t, dx) + \int_{|x|\geq 1} xN(t, dx) + t \cdot \mathbb{E}(W(1)) \\ &= bt + B_{\sigma^2}(t) + \int_{|x|<1} x\hat{N}(t, dx) + \int_{|x|\geq 1} xN(t, dx) \ . \end{aligned}$$
On hem definit:
$$b := \mathbb{E}(W(1)) = \mathbb{E}\left(X(1) - \int_{|x|\geq 1} xN(1, dx)\right) \in \mathbb{R} \ .$$
$$B_{\sigma^2}(t) := W_c(t) \ .$$

■

3 Annex

3.1 Preliminars Capítol 1

3.1.1 Teoria de la mesura

Proposició 3.1. *Sigui* $X \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F})$*,* $X \geq 0$*, aleshores existeix* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{S}^+(\Omega, \mathcal{F})$ *tal que* $X_n \leq X_{n+1}$ *i* $X = \lim_{n\to\infty} X_n$*.*

Demostració. Veure [6], pàgina 32, Proposició 6.4. ■

Teorema 3.2. ***Teorema de la mesura imatge.*** *Sigui* $X \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F})$ *,* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funció Borel-mesurable i* $\mu \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F})$*. Definim la llei de* X *com:*

$$\mu_X(B) := \mu(X^{-1}(B)) \text{ on } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \ .$$

Aleshores $\mu_X \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F})$ *i*

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)| \, \mu_X(dx) < \infty \Leftrightarrow \int_{\Omega} |g(X(w))| \, \mu(dw) < \infty$$

i en aquest cas:

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\mu_X(dx) = \int_{\Omega} g(X(w))\mu(dw) \ .$$

Demostració. Veure [6], pàgina 41, Proposició 6.9 ■

Proposició 3.3. *Sigui* $\mu \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F})$ *i sigui* $X \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F})$ *tal que* $X \geq 0$*. Definim:*

$$\nu(B) := \int_B X(w)\mu(dw) \text{ on } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \ .$$

Aleshores, $\nu \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F})$ *i escriurem* $\nu(dw) = X(w)\mu(dw)$ *ja que si* $Y \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F})$ *es té:*

$$\int_{\Omega} |Y(w)| \, \nu(dw) < \infty \Leftrightarrow \int_{\Omega} |Y(w)| \, X(w)\mu(dw) < \infty$$

i en aquest cas:

$$\int_{\Omega} Y(w)\nu(dw) = \int_{\Omega} Y(w)X(w)\mu(dw) \ .$$

Demostració. Veure [6], pàgina 41, Secció 6.3.2. ■

Proposició 3.4. ***Desigualtat de Txebixev.*** *Siguin:*

- $X \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F})$*,* $X \geq 0$*,*
- $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *creixent,*
- $a \geq 0$ *tal que* $f(a) > 0$ *i* $\mathbb{E}(f(X)) < +\infty$*.*

Aleshores:

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{1}{f(a)} \mathbb{E}(f(X)) \ .$$

Demostració. Veure [3], pàgina 108, Teorema 5.11. ■

Teorema 3.5. ***Teorema de convergència monòtona.*** *Siguin* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F})$ *i* $X \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F})$ *tals que:*

- $X_1 \geq 0$ *q.s,*
- $X_n \leq X_{n+1}$ *q.s,*
- $X = \lim_{n\to\infty} X_n$ *q.s*

Aleshores $\mathbb{E}(X) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

Demostració. Veure [1], pàgina 8, Teorema 1.1.2. ■

Teorema 3.6. ***Teorema de convergència dominada.*** *Siguin* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F})$ *,* $X \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F})$ *i* $Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *tals que*

- $X = \lim_{n\to\infty} X_n$ *q.s*
- $|X_n| \leq Y$ *q.s*

Aleshores $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *i* $\mathbb{E}(X) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

Demostració. Veure [1], pàgina 8, Teorema 1.1.14. ■

Proposició 3.7. ***Continuïtat i derivació sota el signe d'integral.*** *Sigui* $I \subseteq \mathbb{R}$ *interval obert i:*

- $f : \Omega \times I \to R$ *tal que* $f(\cdot, t) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *per tot* $t \in I$
- $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$*,* $g \geq 0$.

Considerem la funció $\phi : I \to \mathbb{R}$ *definida per:*

$$\phi(t) := \int_{\Omega} f(x,t)\mu(dx) \ .$$

Aleshores:

1. *Si* $f(x, \cdot)$ *és contínua en* $t_0 \in I$ *i* $|f(x,t)| \leq g(x)$ $\forall x \in \Omega$*,* $\forall t \in I$*, aleshores* ϕ *és contínua en* t_0.
2. *Si* $\forall x \in \Omega$*,* $f(x, \cdot)$ *és derivable en* I *i* $\left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right| \leq g(x)$ $\forall x \in \Omega$*,* $\forall t \in I$*. Aleshores* ϕ *és derivable en* I *i:*
$$\phi^{'}(t) = \int_{\Omega} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\mu(dx)$$

Demostració. Veure [3], pàgines 140-141, Teoremes 6.27 i 6.28. ■

Proposició 3.8. ***Desigualtat de Holder.*** *Siguin* $X, Y \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F})$*,* $X, Y \geq 0$ *q.s,* $\mu \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F})$ *i siguin* p *i* q *tals que* $1 \leq p \leq \infty$ *i* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Aleshores:*

$$\int_\Omega X(w)Y(w)\mu(dw) \leq \left(\int_\Omega (X(w))^p \mu(dw)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega (Y(w))^q \mu(dw)\right)^{\frac{1}{q}} .$$

Demostració. Veure [3], pàgina 150, Teorema 7.16. ■

Proposició 3.9. ***Desigualtat de Holder discreta.*** *Siguin* $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ *i* p *i* q *tals que* $1 < p$ *i* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Aleshores:*

$$\left|\sum_{i=1}^n a_i\right|^p \leq n^{p/q} \sum_{i=1}^n |a_i|^p .$$

Demostració. Aplicació de la Desigualtat de Holder amb la mesura de comptar. ■

Teorema 3.10. ***Teorema de Fubini.*** *Siguin* $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mu_i)$ *espais de mesura* σ*-finits per* $i = 1, 2$*. Sigui* $f \in \mathcal{L}^0(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2)$ *amb* $f \geq 0$ *o* $f \in \mathcal{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$*. Aleshores:*

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) \mu_2(d\omega_2)\right) \mu_1(d\omega_1)$$

$$= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2) \mu_1(d\omega_1)\right) \mu_2(d\omega_2) .$$

Demostració. Veure [3], pàgina 276, Teorema 14.16. ■

3.1.2 Funció característica

Definició 3.11. *Sigui* $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *una funció. Aleshores:*

1. ψ *és hermítica si per tot* $t \in \mathbb{R}$*,* $\overline{\psi(t)} = \psi(-t)$*.*
2. ψ *és definida positiva si per tot* $n \geq 1$*, per tot* $t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}$ *i per tot* $z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}$ *es té:*
$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n z_i \overline{z_j} \psi(t_i - t_j) \geq 0 .$$
3. ψ *és condicionalment definida positiva si per tot* $n \geq 1$*, per tot* $t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}$ *i per tot* $z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}$ *complint* $\sum_{i=1}^n z_i = 0$ *es té:*
$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n z_i \overline{z_j} \psi(t_i - t_j) \geq 0 .$$

Definició 3.12. ***Funció característica.*** *Sigui* $P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ *es defineix la seva funció característica com la funció* $\varphi_P : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$*:*

$$\varphi_P(t) := \int_\mathbb{R} e^{itx} P(dx)$$

Si $X \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F})$ es defineix la funció característica de X com:

$$\varphi_X(t) := \varphi_{P_X}(t) = \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) \ .$$

Si $X = (X_1, ..., X_n)$ és un vector aleatori es defineix la funció característica de X com:

$$\varphi_X(t) := \mathbb{E}\left(e^{i\langle t, X\rangle}\right) \ ,$$

on $t = (t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n$ i $\langle t, X\rangle = \sum_{j=1}^n t_j X_j$.

Proposició 3.13. ***Propietats de la funció característica.*** *Siguin $P, Q \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ i siguin $X_1, ..., X_n \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F})$ aleshores:*

1. $\varphi_P(0) = 1$.
2. $|\varphi_P(t)| \leq 1 \ \forall t \in \mathbb{R}$.
3. *φ_P és hermítica.*
4. *φ_P és uniformement contínua a $\mathbb{R}$.*
5. *$X_1, ..., X_n$ independents $\Rightarrow \varphi_{X_1+...+X_n} = \prod_{j=1}^n \varphi_{X_j}$.*
6. *Si $X = (X_1, ..., X_n)$. Aleshores:*

   $$X_1, ..., X_n \text{ independents } \Leftrightarrow \varphi_X(t_1, ..., t_n) = \prod_{j=1}^n \varphi_{X_j}(t_j) \text{ per tot } t = (t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^n.$$

7. $\varphi_P = \varphi_Q \Leftrightarrow P = Q$.
8. *φ_P és definida positiva.*
9. $|\varphi_P(t) - \varphi_P(s)|^2 \leq 2\left[1 - \mathrm{Re}\left(\varphi_P(t-s)\right)\right] \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$.

Demostració. Veure [6], pàgines 110-113, Secció 12.1 propietats (1),(2),(3),(6),(8) i (9). Veure [1], pàgina 17, Lema 1.1.11 (1). Veure [3], pàgina 307, Lema 15.19. ■

Teorema 3.14. ***Teorema de Bochner*** *. Sigui $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que satisfà:*

1. *φ és definida positiva.*
2. $\varphi(0) = 1$.
3. *φ és contínua a l'origen.*

Aleshores existeix $P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ tal que $\varphi_P = \varphi$.

Demostració. Veure [1], pàgina 17, Teorema 1.1.12. ■

Teorema 3.15. ***Correspondència de Schoenberg*** *. Una funció $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ és hermítica i condicionalment definida positiva si i només si $e^{t\psi}$ és definida positiva per tot $t > 0$.*

Demostració. Veure [1], pàgina 17, Teorema 1.1.13. ■

Proposició 3.16. *Sigui $P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ probabilitat amb moment d'ordre $m \geq 1$ finit, és a dir, $\int_{\mathbb{R}} |x|^m P(dx) < +\infty$. Aleshores φ_P és m cops derivable i en conseqüència:*

$$\int_{\mathbb{R}} x^k P(dx) = i^{-k} \varphi^{(k)}(0) \qquad \text{per } 1 \leq k \leq m \ .$$

Demostració. Veure [6], pàgina 114, Teorema 12.2. ∎

3.1.3 Convergència de probabilitats i de variables aleatòries

Definició 3.17. *Siguin $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, $P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ aleshores definim:*

$$P_n \xrightarrow[n\to\infty]{\omega} P \overset{def}{\iff} \lim_{n\to\infty} F_{P_n}(x) = F_P(x) \text{ per tot punt } x \text{ punt de continuïtat de } F_P \ .$$

Direm que les mesures de probabilitat P_n convergeixen feblement cap a P.

Proposició 3.18. *Siguin $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, $P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, són equivalents:*

1. $\lim_{n\to\infty} F_{P_n}(x) = F_P(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ *punt de continuïtat de* F_P.
2. $\forall f \in B_b(\mathbb{R})$ *contínua* $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) P_n(dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x) P(dx)$.

Demostració. Veure [6], pàgina 100, Definició 11.1 i Teorema 11.2. ∎

Teorema 3.19. ***Teorema de continuïtat de Lévy.*** *Siguin $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, $P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ aleshores:*

1. $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{\omega} P \Rightarrow \varphi_{P_n}$ *convergeix uniformement en compactes a φ_P, això és, per tot compacte $K \subseteq \mathbb{R}$, es té:*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t \in K} |\varphi_{P_n}(t) - \varphi_P(t)| = 0 \ .$$

2. *Si existeix φ tal que $\lim_{n\to\infty} \varphi_{P_n}(t) = \varphi(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ i φ és contínua en el 0. Aleshores existeix $Q \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ tal que $\varphi = \varphi_Q$ i $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{\omega} Q$.*

Demostració. Veure [3], pàgina 309, Teorema 15.23. ∎

Definició 3.20. ***Convergència de variables aleatòries.*** *Siguin $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F})$i $X \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F})$. Definim:*

- *Convergència quasi-segura:*

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{q.s} X \overset{def}{\iff} \exists N \in \mathcal{F} \text{ tal que } \mathbb{P}(N) = 0 \text{ i } \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega \setminus N \ .$$

- *Convergència en probabilitat:*

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X \overset{def}{\iff} \forall \epsilon > 0 \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0 \ .$$

- *Convergència en mitjana d'ordre p, $p \geq 1$. Suposem que $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i $X \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$:*

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} X \overset{def}{\Longleftrightarrow} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(|X_n - X|^p\right) = 0 \ .$$

Proposició 3.21. *Sigui $X \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Aleshores existeix $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{S}(\Omega, \mathcal{F})$ tal que:*

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} X \ .$$

Demostració. Veure [1], pàgina 9. ∎

Proposició 3.22. ***Relació entre els diferents tipus de convergència.***
Siguin $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}, \{Y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F})$, $X, Y \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F})$ i $a, b \in \mathbb{R}$. Aleshores:

1. *Si $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i $X \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$:*

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^q} X \text{ per } p \geq q \geq 1 \ .$$

2. *Si $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i $X \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$: $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X$.*

3. *Si $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i $X \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$:*

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} X \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(X_n^p\right) = \mathbb{E}\left(X^p\right) \ .$$

4. $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X \Rightarrow \exists \{X_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F})$ *tal que* $X_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{q.s} X \ .$

5. $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X \Rightarrow P_{X_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\omega} P_X \ .$

6. $$\left.\begin{array}{l} X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X \\ Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} Y \end{array}\right\} \Rightarrow aX_n + bY_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} aX + bY \ .$$

Demostració. Per (1),(2),(4),(5) i (6) veure:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Convergence_of_random_variables#Properties_4`
Per (3) veure:
`https://math.stackexchange.com/questions/475133`

∎

3.1.4 Preliminars d'anàlisi complexa

Proposició 3.23. $\forall u \in \mathbb{R}\ \forall n \geq 1\ \exists\ \theta \in \mathbb{C}$ *tal que* $|\theta| \leq 1$ *i*

$$e^{iu} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(iu)^k}{k!} + \theta \frac{|u|^n}{n!} \ .$$

Demostració. Veure [2], pàgina 40, Lema 8.6. ■

Proposició 3.24. *Sigui* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *funció contínua tal que* $\varphi(0) = 1$ *i* $\varphi(t) \neq 0$ *per tot* $t \in \mathbb{R}$. *Aleshores:*

1. *Existeix una única funció contínua* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *tal que* $f(0) = 0$ *i* $e^{f(t)} = \varphi(t)$.
2. *Per tot* $n \geq 1$, *existeix una única funció contínua* $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *tal que* $g_n(0) = 1$ *i* $g_n(t)^n = \varphi(t)$.

A més per tot $n \geq 1$, *es té* $g_n(t) = e^{f(t)/n}$. *Escriurem* $\log(\varphi(t)) := f(t)$ *i* $\varphi(t)^{1/n} := g_n(t)$.

Demostració. Veure [2], pàgina 33, Lema 7.6. ■

Proposició 3.25. *Siguin* $\varphi, \varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *funcions contínues per* $n \geq 1$ *tals que* $\varphi(0) = \varphi_n(0) = 1$ *i* $\varphi(t) \neq 0$ *i* $\varphi_n(t) \neq 0$ *per tot* $t \in \mathbb{R}$. *Aleshores:*

$$\varphi_n \textit{ convergeix uniformement en compactes a } \varphi$$

$$\Rightarrow \log(\varphi_n) \textit{ convergeix uniformement en compactes a } \log(\varphi) \ .$$

Demostració. Veure [2], pàgina 34, Lema 7.7 ■

Proposició 3.26. *Sigui* $I \subseteq \mathbb{R}$ *interval compacte,* $f_n : I \to \mathbb{C}$ *funcions Riemann-integrables que convergeixen uniformement a* $f : I \to \mathbb{C}$. *Aleshores:*

1. f *és Riemann-integrable.*
2. $\int_I f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_I f_n(x)dx$.

Demostració. Veure:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Uniform_convergence#To_integrability` ■

3.2 Demostracions Capítol 1

Recordem que per $t \in \mathbb{R}$ i $P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ infinitament divisible hem definit:

- $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *com* $h(x) = 1 - \frac{\sin(x)}{x}$ *si* $x \neq 0$ *i* $h(0) = 0$.
- $g_t : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *com* $g_t(x) = e^{itx} - 1 - itx\mathbb{1}_{\{|x|\leq 1\}}$
- $f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *com* $f_t(x) = \frac{g_t(x)}{h(x)}$ *si* $x \neq 0$ *i* $f_t(0) = -3t^2$
- $\phi_P(t) := \log(\varphi_P(t))$
- $\widetilde{\phi}_P(t) := \phi_P(t) - \frac{1}{2}\int_{t-1}^{t+1} \phi_P(s)ds$

Lema 3.27.

1. *$h(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ i $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.*
2. *h és contínua i acotada. Per tant, és integrable respecte una mesura finita.*
3. *g_t és integrable respecte una mesura de Lévy.*
4. *Sigui $P \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ i $k > 0$. Definim $Q(dx) := \frac{k}{h(x)}\mathbb{1}_{\{x\neq 0\}}P(dx)$.
Aleshores $Q \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ i és mesura de Lévy.*
5. *f_t és contínua i acotada. Per tant, és integrable respecte una mesura finita.*

Demostració.
(1) Veiem que si $x \neq 0$, aleshores $h(x) > 0$:

$$h(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{\sin(x)}{x} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x) \leq x \text{ per } x \geq 0 \\ \sin(x) \geq x \text{ per } x \leq 0 \end{cases}$$

on la condició de la dreta es pot comprovar que és certa. Per tant, $h(x) \geq 0$ per tot $x \in \mathbb{R}$. A més si $x \neq 0$, es té:

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sin(x) \Leftrightarrow x = 0 \ .$$

Per tant, $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ com volíem veure.
(2) L'únic problema de continuïtat pot ser en $x = 0$. Però:

$$\lim_{x\to 0} h(x) = 1 - \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 - 1 = 0 = h(0) \ .$$

Per tant, h és contínua. A més $h(x) \leq 2$ per tot $x \in \mathbb{R}$ ja que:

$$h(x) \leq 2 \Leftrightarrow 1 - \frac{\sin(x)}{x} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{\sin(x)}{x} \geq -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x) \geq -x \text{ per } x \geq 0 \\ \sin(x) \leq -x \text{ per } x \leq 0 \end{cases}$$

on la condició de la dreta es pot comprovar que es compleix.
(3) Argument similar al de l'Observació 1.25.

(4) Que $Q \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ és conseqüència de que $h \geq 0$ i de la Proposició 3.3. Per veure que és mesura de Lévy notem que $Q(\{0\}) = 0$ i que:

$$\int_{\mathbb{R}} \left(1 \wedge x^2\right) Q(dx) = k \int_{[-1,1]\setminus\{0\}} \frac{x^2}{h(x)} P(dx) + k \int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} \frac{1}{h(x)} P(dx) \ .$$

Es pot comprovar que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{h(x)} = 6$, llavors definint:

$$\widetilde{h}(x) := \begin{cases} \frac{x^2}{h(x)} & \text{si } x \geq 0 \\ 6 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

obtenim una funció contínua ja que h només s'anul·la en l'origen. En conseqüència $\widetilde{h}$ està acotada en el compacte $[-1,1]$. Llavors es té:

$$\int_{[-1,1]\setminus\{0\}} \frac{x^2}{h(x)} P(dx) \leq \int_{[-1,1]} \widetilde{h}(x) P(dx) < \infty \ .$$

Per l'altra integral es pot comprovar que si $x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$ aleshores $\frac{1}{h(x)} \leq 7$ i per tant:

$$\int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} \frac{1}{h(x)} P(dx) \leq 7 \int_{\mathbb{R}\setminus[-1,1]} P(dx) \leq 7 \int_{\mathbb{R}} P(dx) = 7 < \infty \ .$$

Per tant, Q és mesura de Lévy.
(5) L'únic problema de continuïtat pot ser en $x = 0$ però es pot comprovar que

$$\lim_{x\to 0} f_t(x) = -3t^2 \ ,$$

i per tant, f_t és contínua. Per veure que és acotada distingim dos casos:

- Si $x \in [-1,1]$ aleshores $|f_t|$ és una funció contínua que en un compacte està acotada.
- Si $x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$ aleshores $|f_t| = \left|\frac{e^{itx}-1}{h(x)}\right| \leq \frac{2}{7}$ i, per tant, també està acotada. ■

3.3 Demostracions Capítol 2

3.3.1 Processos de Lévy

Lema 3.28. *Siguin* $X, Y \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F})$ *i* $c > 0$. *Aleshores:*

$$\mathbb{P}(|X+Y| > c) \leq \mathbb{P}\left(|X| > \frac{c}{2}\right) + \mathbb{P}\left(|Y| > \frac{c}{2}\right) .$$

Demostració. La desigualtat es dedueix de la inclusió següent:

$$\{\omega \in \Omega : |X(\omega) + Y(\omega)| > c\} \subseteq \left\{\omega \in \Omega : |X(\omega)| > \frac{c}{2}\right\} \cup \left\{\omega \in \Omega : |Y(\omega)| > \frac{c}{2}\right\} .$$

La qual és certa ja que si $\omega \in \Omega$ és tal que $|X(\omega) + Y(\omega)| > c$, necessàriament ha de ser $|X(\omega)| > \frac{c}{2}$ o $|Y(\omega)| > \frac{c}{2}$ ja que en cas contrari seria $|X(\omega)| \leq \frac{c}{2}$ i $|Y(\omega)| \leq \frac{c}{2}$ i llavors $|X(\omega) + Y(\omega)| \leq |X(\omega)| + |Y(\omega)| \leq \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c$ que seria contradicció. ∎

Teorema 3.29. *Sigui* $X = \{X(t), t \geq 0\}$ *un procés estocàstic,* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una successió de processos de Lévy tals que per cada* $t \geq 0$ $X_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X(t)$ *i* $\forall \epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{t\to 0^+} \mathbb{P}(|X_n(t) - X(t)| > \epsilon) = 0 .$$

Aleshores, X *és un procés de Lévy.*

Demostració. Veiem les 4 propietats per ser procés de Lévy. Volem veure que $X(0) = 0$ q.s. És a dir que:

$$\mathbb{P}(M) = 0 \quad \text{on} \quad M := \{\omega \in \Omega : X(0)(\omega) \neq 0\} \in \mathcal{F} .$$

Aleshores usant la Proposició 3.22(4):

$$X_n(0) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X(0) \Rightarrow \exists \{X_{n_k}(0)\}_{k=1}^{\infty} \text{ tal que } X_{n_k}(0) \xrightarrow[k\to\infty]{q.s} X(0)$$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathcal{F} \text{ tal que } \mathbb{P}(N) = 0 \text{ i } \lim_{n\to\infty} X_{n_k}(0)(\omega) = X(0)(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega \setminus N .$$

Com que per tot $n \geq 1$, X_n és procés de Lévy es té:

$$\mathbb{P}(M_{n_k}) = 0 \quad \text{on} \quad M_{n_k} := \{\omega \in \Omega : X_{n_k}(0)(\omega) \neq 0\} \in \mathcal{F} .$$

Llavors:

$$X(0)(\omega) = \lim_{k\to\infty} X_{n_k}(0)(\omega) = \lim_{k\to\infty} 0 = 0 \quad \forall \omega \in \Omega \setminus \left(N \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} M_{n_k}\right) .$$

Per tant, $M \subseteq N \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} M_{n_k}$ i finalment:

$$\mathbb{P}(M) \leq \mathbb{P}(N) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(M_{n_k}) = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0 .$$

Així doncs $X(0) = 0$ q.s com volíem veure.
Sigui $m \geq 1$ i $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_m$, volem veure que les variables $X(t_j) - X(t_{j-1})$ són

independents per $j = 2, ..., m$. Notem que per la Proposició 3.22(6) per tot $a_1, ..., a_m \in \mathbb{R}$ es té:

$$a_1 X_n(t_1) + ... + a_m X_n(t_m) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} a_1 X(t_1) + ... + a_m X(t_m) \tag{3.1}$$

Aleshores usant el Teorema de continuïtat de Lévy, que X_n és procés de Lévy i (3.1):

$$\varphi_{(X(t_2)-X(t_1),...,X(t_m)-X(t_{m-1}))}(u_2, ..., u_m) =$$
$$= \mathbb{E}\left(\exp\left[i\left[u_2\left(X(t_2) - X(t_1)\right) + ... + u_m\left(X(t_m) - X(t_{m-1})\right)\right]\right]\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\exp\left[i\left[u_2\left(X_n(t_2) - X_n(t_1)\right) + ... + u_m\left(X_n(t_m) - X_n(t_{m-1})\right)\right]\right]\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \varphi_{(X_n(t_2)-X_n(t_1),...,X_n(t_m)-X_n(t_{m-1}))}(u_2, ..., u_m) =$$
$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n(t_2)-X_n(t_1)}(u_2) \cdot .... \cdot \varphi_{X_n(t_m)-X_n(t_{m-1})}(u_m)$$
$$= \varphi_{X(t_2)-X(t_1)}(u_2) \cdot ... \cdot \varphi_{X(t_m)-X(t_{m-1})}(u_m) \ .$$

Per tant, les variables $X(t_2) - X(t_1), ..., X(t_m) - X(t_{m-1})$ són independents per la Proposició 3.13(6).
Siguin $0 \leq t_1 < t_2$. Usant el Teorema de contínuitat de Lévy, que X_n és procés de Lévy i (3.1):

$$\varphi_{X(t_2)-X(t_1)} = \lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n(t_2)-X_n(t_1)} = \lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n(t_2-t_1)} = \varphi_{X(t_2-t_1)} \ .$$

Llavors $P_{X(t_2)-X(t_1)} = P_{X(t_2-t_1)-X(0)}$ i, per tant, X té increments estacionaris.
Queda per veure que X és continu en probabilitat. Sigui $\epsilon > 0$, $t \geq 0$, $n \geq 1$. Aleshores usant la desigualtat del Lema 3.28 per a $X(t) - X_n(t)$ i per a $X_n(t)$:

$$\mathbb{P}\left(|X(t)| > \epsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(|X(t) - X_n(t)| > \frac{\epsilon}{2}\right) + \mathbb{P}\left(|X_n(t)| > \frac{\epsilon}{2}\right) \ .$$

Prenem límit superior:

$$\limsup_{t\to 0^+} \mathbb{P}\left(|X(t)| > \epsilon\right) \leq \limsup_{t\to 0^+} \mathbb{P}\left(|X(t) - X_n(t)| > \frac{\epsilon}{2}\right) + \limsup_{t\to 0^+} \mathbb{P}\left(|X_n(t)| > \frac{\epsilon}{2}\right) \ .$$

Usant que cada X_n és procés de Lévy obtenim:

$$\limsup_{t\to 0^+} \mathbb{P}\left(|X_n(t)| > \frac{\epsilon}{2}\right) = \lim_{t\to 0^+} \mathbb{P}\left(|X_n(t)| > \frac{\epsilon}{2}\right) = 0 \ .$$

Per tant:

$$\limsup_{t\to 0^+} \mathbb{P}\left(|X(t)| > \epsilon\right) \leq \limsup_{t\to 0^+} \mathbb{P}\left(|X(t) - X_n(t)| > \frac{\epsilon}{2}\right) \ .$$

I usant la hipòtesis del teorema tenim:

$$\limsup_{t\to 0^+} \mathbb{P}\left(|X(t)| > \epsilon\right) = \lim_{n\to\infty} \limsup_{t\to 0^+} \mathbb{P}\left(|X(t)| > \epsilon\right)$$
$$\leq \lim_{n\to\infty} \limsup_{t\to 0^+} \mathbb{P}\left(|X(t) - X_n(t)| > \frac{\epsilon}{2}\right) = 0 \ .$$

Finalment:

$$0 \leq \liminf_{t\to 0^+} \mathbb{P}\left(|X(t)| > \epsilon\right) \leq \limsup_{t\to 0^+} \mathbb{P}\left(|X(t)| > \epsilon\right) = 0 \Rightarrow \lim_{t\to 0^+} \mathbb{P}\left(|X(t)| > \epsilon\right) = 0 \ .$$

Per tant, per la Proposició 2.12 X és un procés de Lévy com volíem veure. ■

Proposició 3.30. *Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un procés de Lévy i Y una modificació de X. Aleshores Y és un procés de Lévy amb la mateixa terna característica que X.*

Demostració. Veiem les 4 propietats per ser procés de Lévy. Volem veure que $Y(0) = 0$ q.s. Notem que:

$$\{Y(0) \neq 0\} = (\{X(0) = Y(0)\} \cap \{Y(0) \neq 0\}) \cup (\{X(0) \neq Y(0)\} \cap \{Y(0) \neq 0\}) \ .$$

Llavors usant que X és un procés de Lévy i Y una modificació de X:

$$\mathbb{P}(\{Y(0) \neq 0\}) \leq \mathbb{P}(\{X(0) \neq 0\}) + \mathbb{P}(\{X(0) \neq Y(0)\}) = 0 + 0 = 0 \ .$$

Per tant, $Y(0) = 0$ q.s com volíem veure.
Definim els següents esdeveniments per $n \geq 1$ i $s_1, ..., s_n \geq 0$:

$$\mathcal{N}(s_1, ..., s_n) := \bigcap_{j=1}^{n} \{\omega \in \Omega : X(s_j)(\omega) = Y(s_j)(\omega)\} \ .$$

Per ser Y modificació de X es té que $\mathbb{P}(\mathcal{N}(s_1, ..., s_n)) = 1$.
Sigui $n \geq 1$, $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n$ i $B_2, ..., B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, aleshores:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=2}^{n} Y(t_j) - Y(t_{j-1}) \in B_j\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=2}^{n} Y(t_j) - Y(t_{j-1}) \in B_j, \mathcal{N}(t_1, ..., t_n)\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=2}^{n} X(t_j) - X(t_{j-1}) \in B_j, \mathcal{N}(t_1, ..., t_n)\right) = \prod_{j=2}^{n} \mathbb{P}(X(t_j) - X(t_{j-1}) \in B_j, \mathcal{N}(t_1, ..., t_n))$$

$$= \prod_{j=2}^{n} \mathbb{P}(Y(t_j) - Y(t_{j-1}) \in B_j, \mathcal{N}(t_1, ..., t_n)) = \prod_{j=2}^{n} \mathbb{P}(Y(t_j) - Y(t_{j-1}) \in B_j)$$

Per tant, obtenim que Y té increments independents.
Siguin $0 \leq t_1 < t_2$ i $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, aleshores:

$$\mathbb{P}(Y(t_2) - Y(t_1) \in B) = \mathbb{P}(Y(t_2) - Y(t_1) \in B, \mathcal{N}(t_1, t_2))$$
$$= \mathbb{P}(X(t_2) - X(t_1) \in B, \mathcal{N}(t_1, t_2)) = \mathbb{P}(X(t_2 - t_1) \in B, \mathcal{N}(t_1, t_2))$$
$$= \mathbb{P}(Y(t_2 - t_1) \in B, \mathcal{N}(t_1, t_2)) = \mathbb{P}(Y(t_2 - t_1) \in B) \ .$$

Per tant, Y té increments estacionaris.
Queda per veure que Y és continu en probabilitat. Sigui $\epsilon > 0$, $t \geq 0$, aleshores:

$$\mathbb{P}(|Y(t)| > \epsilon) = \mathbb{P}(|Y(t)| > \epsilon, \mathcal{N}(t)) = \mathbb{P}(|X(t)| > \epsilon, \mathcal{N}(t)) = \mathbb{P}(|X(t)| > \epsilon) \ .$$

Llavors usant que X és procés de Lévy i la Proposició 2.12:

$$0 \leq \liminf_{t \to 0^+} \mathbb{P}(|Y(t)| > \epsilon) \leq \limsup_{t \to 0^+} \mathbb{P}(|Y(t)| > \epsilon) = \limsup_{t \to 0^+} \mathbb{P}(|X(t)| > \epsilon) = 0 \ .$$

Per tant:

$$\liminf_{t \to 0^+} \mathbb{P}(|Y(t)| > \epsilon) = \limsup_{t \to 0^+} \mathbb{P}(|Y(t)| > \epsilon) = \lim_{t \to 0^+} \mathbb{P}(|Y(t)| > \epsilon) = 0 \ .$$

Així doncs, per la Proposició 2.12 Y és un procés de Lévy i té les mateixa terna característica que X ja que:

$$P_{Y(1)} = P_{Y(1)-Y(0)} = P_{X(1)-X(0)} = P_{X(1)} \ .$$

■

3.3.2 Exemples de processos de Lévy

Proposició 3.31. *Sigui* $N = \{N(t), t \geq 0\}$ *un procés de Lévy tal que* $N(t) \in \mathbb{N}$ *i tal que* $\{\Delta N(t), t \geq 0\}$ *pren valors en* $\{0,1\}$. *Aleshores* N *és un procés de Poisson.*

Demostració. Definim la següent successió d'instants d'aturada $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$:

$$T_0 = 0 \quad , \quad T_n := \inf\{t > T_{n-1} : N(t) - N(T_{n-1}) \neq 0\} \quad n > 1 \ .$$

Aleshores per $n \geq 1$, escrivint $T_n = \inf\{t > 0 : N(t + T_{n-1}) - N(T_{n-1}) \neq 0\} + T_{n-1}$ es té:

$$T_n - T_{n-1} = \inf\{t > 0 : N(t + T_{n-1}) - N(T_{n-1}) \neq 0\} = \inf\left\{t > 0 : N_{T_{n-1}}(t) \neq 0\right\} \ .$$

Per la Propietat forta de Markov (Teorema 2.23) es té que $P_{N_{T_{n-1}}(t)} = P_{N(t)}$, per tant, les variables $\{T_j - T_{j-1}\}_{j=1}^{\infty}$ són idènticament distribuides. També per la Propietat forta de Markov, sabem que

$$N_{T_{n-1}} \text{ és independent de } \mathcal{F}_{T_{n-1}} \Rightarrow T_n - T_{n-1} \text{ és independent de } \mathcal{F}_{T_{n-1}} \ .$$

Sigui $1 \leq j_1 < ... < j_n$ i $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ per $i = 1, ..., n$. Aleshores:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} T_{j_i} - T_{j_i - 1} \in B_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} T_{j_i} - T_{j_i-1} \in B_i\right)\mathbb{P}\left(T_{j_n} - T_{j_{n-1}} \in B_n\right) \ ,$$

on hem usat que:

- $T_{j_n} - T_{j_n - 1}$ és independent de $\mathcal{F}_{T_{j_n-1}}$.
- Per $i = 1, ..., n-1$, $T_{j_i} - T_{j_i - 1}$ és $\mathcal{F}_{T_{j_n-1}}$-mesurable ja que $\mathcal{F}_{T_{j_i}} \subseteq \mathcal{F}_{T_{j_n-1}}$ i $T_{j_i} - T_{j_i-1}$ és $\mathcal{F}_{T_{j_i}}$-mesurable.

Repetint l'argument obtenim que les variables $\{T_j - T_{j-1}\}_{j=1}^{\infty}$ són independents.
Per a tot $s, t \geq 0$ es té:

$$\{T_1 > s + t\} \cap \Omega_0 = \{N(s) = 0, N(t + s) = 0\} \cap \Omega_0 \ . \tag{3.2}$$

La inclusió ($\subseteq$) és clara. La inclusió ($\supseteq$) a priori només implicaria que $T_1 \geq s + t$. Però el cas $T_1 = s + t$ el podem descartar ja que voldria dir que $N(u) = 1$ per $u \in (t + s, t + s + \delta)$ per un cert $\delta > 0$. Però això contradiu el fet de que N és contínua per la dreta en $s + t$ en Ω_0. Així doncs:

$$\mathbb{P}(T_1 > s + t) = \mathbb{P}(N(s) = 0, N(t + s) - N(s) = 0)$$

$$= \mathbb{P}(N(s) = 0)\,\mathbb{P}(N(t + s) - N(s) = 0) = \mathbb{P}(N(s) = 0)\,\mathbb{P}(N(t) = 0)$$

$$= \mathbb{P}(T_1 > s)\,\mathbb{P}(T_1 > t) \ .$$

Hem usat que N té increments independents i estacionaris i la igualtat (3.2) per $s = 0$ i $t = 0$.
Definim la funció $\sigma : [0, +\infty) \to [0, 1]$ com $\sigma(t) := \mathbb{P}(T_1 > t)$. Notem que

- σ és decreixent: $0 \leq s \leq t \Rightarrow \mathbb{P}(T_1 > t) \leq \mathbb{P}(T_1 > s)$.
- $\sigma(0) = \mathbb{P}(T_1 > 0) = 1$, ja que en Ω_0, $T_1 > 0$ ja que si fos $T_1 = 0$ contradiria el fet de ser N contínua per la dreta en $t = 0$.

- Com que en Ω_0, $T_1 > 0$, es té que amb probabilitat 1, $N(t) = 0$ per $t \in [0, T_1)$. Per tant:
$$\lim_{t\to 0^+} \sigma(t) = \lim_{t\to 0^+} \mathbb{P}(T_1 > t) = \lim_{t\to 0^+} \mathbb{P}(N(t) = 0) = 1 \ .$$

Aleshores existeix $\lambda > 0$ tal que $\sigma(t) = \mathbb{P}(T_1 > t) = e^{-\lambda t}$ (veure [5] pàgines 4-6). Per tant, $P_{T_1} = Exp(\lambda)$ i per a tot $t \geq 0$:
$$\mathbb{P}\left(N(t) = 0\right) = \mathbb{P}\left(T_1 > t\right) = e^{-\lambda t} \ .$$

Per veure que N és un procés de Poisson volem demostrar que per tot $n \geq 0$ es té
$$\mathbb{P}\left(N(t) = n\right) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \ .$$

Ho fem per inducció, per $n = 0$, ja ho hem vist. Suposem cert per n i veiem que ho és per $n+1$:
$$\mathbb{P}\left(N(t) = n+1\right) = \mathbb{P}\left(T_{n+2} > t, T_{n+1} \leq t\right)$$
$$= \mathbb{P}\left(T_{n+2} > t\right) + \mathbb{P}\left(T_{n+1} \leq t\right) - \mathbb{P}\left(T_{n+2} > t \text{ o } T_{n+1} \leq t\right) \ .$$

Per calcular $\mathbb{P}\left(T_{n+2} > t \text{ o } T_{n+1} \leq t\right)$ notem que si $T_{n+2} \leq t$ aleshores $T_{n+1} \leq t$ ja que $T_{n+1} \leq T_{n+2}$. Així doncs:
$$\mathbb{P}\left(N(t) = n+1\right) = \mathbb{P}\left(T_{n+2} > t\right) + 1 - \mathbb{P}\left(T_{n+1} > t\right) - \mathbb{P}\left(T_{n+2} > t \text{ o } T_{n+1} \leq t\right)$$
$$= \mathbb{P}\left(T_{n+2} > t\right) + 1 - \mathbb{P}\left(T_{n+1} > t\right) - 1 = \mathbb{P}\left(T_{n+2} > t\right) - \mathbb{P}\left(T_{n+1} > t\right) \ .$$

Usant que $T_{n+1} = T_1 + (T_2 - T_1) + ... + (T_{n+1} - T_n)$ obtenim que T_{n+1} és la suma de $n+1$ variables aleatòries independents indènticament distribuides amb llei $Exp(\lambda)$, per tant, $P_{T_{n+1}} = Gamma(n+1, \lambda)$. Aleshores:
$$\mathbb{P}\left(N(t) = n+1\right) = \int_t^\infty e^{-\lambda s}\frac{\lambda^{n+2}s^{n+1}}{(n+1)!}ds - \int_t^\infty e^{-\lambda s}\frac{\lambda^{n+1}s^n}{n!}ds$$
$$= \frac{\lambda^{n+1}}{n!}\int_t^\infty e^{-\lambda s}\left(\frac{\lambda s^{n+1}}{n+1} - s^n\right) ds \ . \tag{3.3}$$

Fent integració per parts amb $u = \frac{\lambda s^{n+1}}{n+1} - s^n$ i $v = \frac{-e^{-\lambda s}}{\lambda}$ obtenim:
$$\mathbb{P}\left(N(t) = n+1\right) = \frac{\lambda^{n+1}}{n!}\left\{\left|\left(\frac{\lambda s^{n+1}}{n+1} - s^n\right)\frac{-e^{-\lambda s}}{\lambda}\right|_t^\infty + \int_t^\infty \frac{e^{-\lambda s}}{\lambda}\left(\lambda s^n - n s^{n-1}\right) ds\right\} \ . \tag{3.4}$$

Usant la hipòtesi d'inducció $\mathbb{P}\left(N(t) = n\right) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$ i l'equació de (3.3) pel cas n obtenim el valor de la integral de (3.4):
$$e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_t^\infty e^{-\lambda s}\left(\frac{\lambda s^n}{n} - s^{n-1}\right) ds = \frac{\lambda^{n+1}}{n!}\int_t^\infty \frac{e^{-\lambda s}}{\lambda}\left(\lambda s^n - n s^{n-1}\right) ds \ .$$

Substituïnt en (3.4), obtenim:
$$\mathbb{P}\left(N(t) = n+1\right) = \frac{\lambda^{n+1}}{n!}\left\{\left(\frac{\lambda t^{n+1}}{n+1} - t^n\right)\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} + e^{-\lambda t}\frac{t^n}{\lambda}\right\} = \frac{\lambda^{n+1}}{n!}\frac{\lambda t^{n+1}}{n+1}\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}$$
$$= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!} \ .$$

Per tant, N és un procés de Poisson. ■

Proposició 3.32. *Sigui* $X \in \mathcal{L}^0(\Omega, \mathcal{F})$ *amb llei* $P_X = \mu$, $\lambda > 0$ *i* $Y = \{Y(t), t \geq 0\}$ *procés de Poisson compost de paràmetre* $\lambda > 0$ *i llei* μ. *Aleshores:*

1. *Y és procés de Lévy.*
2. $P_{Y(t)} = Poisson(\lambda t, \mu)$.

Demostració.
(1) Clarament $Y(0) = 0$ q.s. Siguin primer $0 \leq s < t$ i $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ aleshores:

$$\mathbb{P}(Y(t) - Y(s) \in B) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=N(s)+1}^{N(t)} X(i) \in B, N(s) = l, N(t) - N(s) = k\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left[\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{k} X(i) \in B\right)\mathbb{P}(N(t) - N(s) = k)\right]\sum_{l=0}^{\infty}\mathbb{P}(N(s) = l)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{k} X(i) \in B\right)\mathbb{P}(N(t-s) = k) \ . \tag{3.5}$$

Siguin ara $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n$, $t_0 := 0$ i $B_2, ..., B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Aleshores:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=2}^{n} Y(t_j) - Y(t_{j-1}) \in B_j\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=2}^{n} \sum_{i=N(t_{j-1})+1}^{N(t_j)} X(i) \in B_j\right)$$

$$= \sum_{k_1=0,...,k_n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=2}^{n} \sum_{i=N(t_{j-1})+1}^{N(t_j)} X(i) \in B_j, N(t_1) = k_1, \bigcap_{j=2}^{n} N(t_j) - N(t_{j-1}) = k_j\right)$$

$$= \sum_{k_1=0,...,k_n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=2}^{n} \sum_{i=k_1+...+k_{j-1}+1}^{k_1+...+k_j} X(i) \in B_j, N(t_1) = k_1, \bigcap_{j=2}^{n} N(t_j) - N(t_{j-1}) = k_j\right)$$

$$= \sum_{k_1=0,...,k_n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N(t_1) = k_1)\prod_{j=2}^{n}\left[\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{k_j} X(i) \in B_j\right)\mathbb{P}(N(t_j) - N(t_{j-1}) = k_j)\right]$$

$$= \prod_{j=2}^{n}\sum_{k_j=0}^{\infty}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{k_j} X(i) \in B_j\right)\mathbb{P}(N(t_j) - N(t_{j-1}) = k_j) = \prod_{j=2}^{n}\mathbb{P}(Y(t_j) - Y(t_{j-1}) \in B_j) \ ,$$

on hem usat l'equació de (3.5) en la última igualtat. Per tant, Y té increments independents. Siguin $0 \leq s < t$ i $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, aleshores:

$$\mathbb{P}(Y(t-s) \in B) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{k} X(i) \in B\right)\mathbb{P}(N(t-s) \in B) = \mathbb{P}(Y(t) - Y(s) \in B) \ ,$$

on hem tornat a usar l'equació de (3.5). Per tant, Y té increments estacionaris. Finalment sigui $\epsilon > 0$, aleshores:

$$\mathbb{P}(|Y(t)| > \epsilon) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{k} X(i)\right| > \epsilon\right)\mathbb{P}(N(t) = k)$$

i

$$\limsup_{t\to 0^+} \mathbb{P}\left(|Y(t)| > \epsilon\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{k} X(i)\right| > \epsilon\right) \limsup_{t\to 0^+} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} \leq \sum_{k=1}^{\infty} 1\cdot 0 = 0 \ .$$

Per tant:

$$0 \leq \liminf_{t\to 0^+} \mathbb{P}\left(|Y(t)| > \epsilon\right) \leq \limsup_{t\to 0^+} \mathbb{P}\left(|Y(t)| > \epsilon\right) = 0 \Rightarrow \lim_{t\to 0^+} \mathbb{P}\left(|Y(t)| > \epsilon\right) = 0 \ .$$

Per tant, per la Proposició 2.12 Y és un procés de Lévy.
(2) Usem que $P_{N(t)} = Poisson(\lambda t)$. ■

3.3.3 Processos de Lévy amb salts acotats

Teorema 3.33. *Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ procés de Lévy amb salts acotats, aleshores es té $\mathbb{E}\left(|X(t)|^p\right) < \infty$ per tot $p \geq 1$.*

Demostració. Sigui $C > 0$ tal que $\sup\limits_{0\leq t<\infty} |\Delta X(t)| < C$. Definim la successió d'instants d'aturada $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ de la següent manera:

$$T_1 := \inf\left\{t \geq 0 : |X(t)| > C\right\} \ , \quad T_n := \inf\left\{t \geq T_{n-1} : |X(t) - X(T_{n-1})| > C\right\} \ n > 1 \ .$$

Escrivint per $n \geq 1$, $T_n = \inf\left\{t \geq 0 : |X(t + T_{n-1}) - X(T_{n-1})\right\} + T_{n-1}$ es té:

$$T_{n+1} - T_n = \inf\left\{t \geq 0 : |X(t + T_n) - X(T_n)| > C\right\} = \inf\left\{t \geq 0 : |X_{T_n}(t)| > C\right\} \ .$$

Suposem primer que $T_1 < \infty$ q.s. L'objectiu es veure que per tot $n \geq 1$ es té

$$\sup_{0\leq s<\infty} |X(s \wedge T_n)| \leq 2nC \ . \tag{3.6}$$

Veiem-ho per inducció. Per $n = 1$.

$$\sup_{0\leq s<\infty} |X(s \wedge T_1)| = |X(T_1)| \vee \sup_{0\leq s<T_1} |X(s)| \ .$$

Usant que $|X(T_1-)| \leq C$ ja que en cas contrari exisitiria $s > 0$ satisfent $|X(T_1 - s)| > C$, obtenim:

$$|X(T_1)| = |\Delta X(T_1) - X(T_1-)| \leq |\Delta X(T_1)| + |X(T_1-)| \leq C + C = 2C \ .$$

$$|X(s)| \leq C \leq 2C \text{ per ser } 0 \leq s < T_1 \ .$$

Suposem ara cert per n i veiem-ho per $n + 1$.

$$\sup_{0\leq s<\infty} |X(s \wedge T_{n+1})| = \sup_{0\leq s<T_n} |X(s \wedge T_{n+1})| \vee \sup_{T_n\leq s\leq T_{n+1}} |X(s)| \ .$$

Per hipòtesi d'inducció tenim $\sup\limits_{0\leq s<T_n} |X(s \wedge T_{n+1})| = \sup\limits_{0\leq s<T_n} |X(s \wedge T_n)| \leq 2nC$. A més:

$$\sup_{T_n\leq s\leq T_{n+1}} |X(s)| \leq \sup_{T_n\leq s\leq T_{n+1}} |X(s) - X(T_n)| + |X(T_n)| \leq |X(T_{n+1}) - X(T_n)| + 2nC$$

$$\leq |X(T_{n+1}) - X(T_{n+1}-)| + |X(T_{n+1}-) - X(T_n)| + 2nC \leq C + C + 2nC = 2(n+1)C \ .$$

Hem usat que X té salts acotats i la definició dels T_n. Demostrem ara que:

$$\exists\ 0 < a < 1 \text{ tal que per tot } n \geq 1 \text{ es té } \mathbb{E}(e^{-T_n}) = a^n \ .$$

Usant la Propietat forta de Markov, per $n \geq 1$, les variables $T_{n+1} - T_n$ són independents de $\mathcal{F}_{T_n}$ ja que $X_{T_n}(t)$ és independent de $\mathcal{F}_{T_n}$. A més com que $P_{X_{T_n}(t)} = P_{X(t)}$, es té $P_{T_{n+1}-T_n} = P_{T_1}$. Demostrem primer per inducció que per tot $n \geq 1$ es té:

$$\mathbb{E}\left(e^{-T_1}e^{-(T_2-T_1)} \cdot \ldots \cdot e^{-(T_{n+1}-T_n)}\right) = \left[\mathbb{E}\left(e^{-T_1}\right)\right]^n \ .$$

Per $n = 1$, usant que T_1 és $\mathcal{F}_{T_1}$-mesurable i que $T_2 - T_1$ és independent de $\mathcal{F}_{T_1}$:

$$\mathbb{E}\left(e^{-T_1}e^{-(T_2-T_1)}\right) = \mathbb{E}\left(E\left(e^{-T_1}e^{-(T_2-T_1)}|\mathcal{F}_{T_1}\right)\right) = \mathbb{E}\left(e^{-T_1}E\left(e^{-(T_2-T_1)}|\mathcal{F}_{T_1}\right)\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(e^{-T_1}\mathbb{E}\left(e^{-(T_2-T_1)}\right)\right) = \mathbb{E}\left(e^{-T_1}\right)\mathbb{E}\left(e^{-(T_2-T_1)}\right) = \left[\mathbb{E}\left(e^{-T_1}\right)\right]^2 \ .$$

Suposem cert per n i veiem-ho per $n+1$. Usem la hipòtesi d'inducció i que:

- $\mathcal{F}_{T_j} \subseteq \mathcal{F}_{T_{n+1}}$ per $j = 1, \ldots n+1$ ja que $T_j \leq T_{n+1} \Rightarrow \mathrm{T}_1, T_2 - T_1, \ldots, T_{n+1} - T_n$ són $\mathcal{F}_{T_{n+1}}$-mesurables.
- $T_{n+2} - T_{n+1}$ és independent de $\mathcal{F}_{T_{n+1}}$.

$$\mathbb{E}\left(e^{-T_1}e^{-(T_2-T_1)} \cdot \ldots \cdot e^{-(T_{n+1}-T_n)}e^{-(T_{n+2}-T_{n+1})}\right)$$

$$\mathbb{E}\left(E\left(e^{-T_1}e^{-(T_2-T_1)} \cdot \ldots \cdot e^{-(T_{n+1}-T_n)}e^{-(T_{n+2}-T_{n+1})}|\mathcal{F}_{T_{n+1}}\right)\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(e^{-T_1}e^{-(T_2-T_1)} \cdot \ldots \cdot e^{-(T_{n+1}-T_n)}\right)\mathbb{E}\left(e^{-(T_{n+2}-T_{n+1})}\right) = \left[\mathbb{E}\left(e^{-T_1}\right)\right]^{n+1} \ .$$

Finalment com que $T_1 > 0$ amb probabilitat 1, ja que si fos 0 contradiria el fet de ser contínua per la dreta en $t = 0$ amb probabilitat 1, es té $0 < e^{-T_1} < 1$. Aleshores $a := \mathbb{E}\left(e^{-T_1}\right) \in [0,1)$. No pot ser igual a 1 ja que:

$$\mathbb{E}\left(e^{-T_1}\right) = 1 \Rightarrow \mathbb{E}\left(1 - e^{-T_1}\right) = 0 \Rightarrow 1 - e^{-T_1} = 0 \text{ q.s } \Rightarrow T_1 = 0 \text{ q.s} \ ,$$

fet que seria contradicció. Per tant:

$$\mathbb{E}(e^{-T_n}) = \mathbb{E}\left(e^{-T_1}e^{-(T_2-T_1)} \cdot \ldots \cdot e^{-(T_n-T_{n-1})}\right) = \left[\mathbb{E}\left(e^{-T_1}\right)\right]^n = a^n \ .$$

Per (2.5) es té que

$$\{t \leq T_n\} \subseteq \{|X(t)| \leq 2nC\} \Rightarrow \{2nC < |X(t)|\} \subseteq \{t > T_n\} \ .$$

Llavors usant la desigualtat de Txebivex amb la funció identitat:

$$\mathbb{P}\left(2nC < |X(t)|\right) \leq \mathbb{P}\left(T_n < t\right) = \mathbb{P}\left(-T_n > -t\right) = \mathbb{P}\left(e^{-T_n} > e^{-t}\right) \leq \mathbb{E}\left(e^{-T_n}\right)e^t = e^t a^n \ .$$

Per tant:

$$\int_{|x|>2nC} |x|^p \, P_{X(t)}(dx) = \sum_{r=n}^{\infty} \int_{2rC<|x|\leq 2(r+1)C} |x|^p \, P_{X(t)}(dx)$$

$$\leq \sum_{r=n}^{\infty} 2^p(r+1)^p C^p \mathbb{P}\left(2rC < |X(t)| \leq 2(r+1)C\right) = 2^p C^p e^t \sum_{r=n}^{\infty}(r+1)^p a^r < \infty \ .$$

Hem usat que $\mathbb{P}(2rC < |X(t)| \leq 2(r+1)C) \leq \mathbb{P}(2rC < |X(t)|) \leq e^t a^r$ i el criteri del quocient per veure que la sèrie és convergent:

$$\lim_{r\to\infty}\left|\frac{(r+2)^p\, a^{r+1}}{(r+1)^p\, a^r}\right| = |a| < 1 \ .$$

Finalment:

$$\mathbb{E}\left(|X(t)|^p\right) = \int_{|x|\leq 2nC} |x|^p\, P_{X(t)}(dx) + \int_{|x|>2nC} |x|^p\, P_{X(t)}(dx)$$
$$\leq 2^p n^p C^p \cdot 1 + \int_{|x|>2nC} |x|^p\, P_{X(t)}(dx) < \infty \ .$$

En cas de que no es compleixi $T_1 < \infty$ q.s tindrem:

$$\mathbb{E}\left(|X(t)|^p\, \mathbb{1}_{T_1=\infty}\right) \leq C^p \mathbb{P}(T_1 = \infty) \leq C^p \quad \forall t \geq 0 \ .$$

$$\mathbb{E}\left(|X(t)|^p\right) = \mathbb{E}\left(|X(t)|^p\, \mathbb{1}_{T_1<\infty}\right) + \mathbb{E}\left(|X(t)|^p\, \mathbb{1}_{T_1=\infty}\right) < \infty \ .$$

■

3.3.4 Descomposició de Lévy-Itô

Teorema 3.34. *Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un procés de Lévy. Aleshores W_c té trajectòries contínues.*

Demostració. Volem veure que:

$$\mathbb{P}(N) = 0 \quad \text{on} \quad N := \{\omega \in \Omega : W_c(\cdot)(\omega) \text{ no és contínua } \} \ .$$

Suposem que $\mathbb{P}(N) > 0$ i arribarem a una contradicció. Aleshores:

$$\exists\ c > b > 0 \text{ i un instant d'aturada } T \text{ tal que } \mathbb{P}\left(|\Delta W_c(T)| \in (b,c)\right) > 0 \ .$$

Sigui $B := \{x \in \mathbb{R} : |x| \in (b,c)\}$, $t \geq 0$,

$$\hat{Y}^{W_c}_{Id,B}(t) = \int_B x \hat{N}^{W_c}(t, dx)$$

la integral de Poisson compensada pel procés de Lévy W_c i A_n els conjunts definits en la pàgina 43 en (2.7). Primer veiem que:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\left(\hat{W}(t) - \hat{Y}_{Id,A_n}(t)\right) \hat{Y}^{W_c}_{Id,B}(t)\right) = 0 \ . \tag{3.7}$$

Podem aplicar la Proposició 2.53 ja que:

- En el Teorema 2.55(3) hem vist que $\hat{W} - \hat{Y}_{Id,A_n} \in \mathbb{M}$, és a dir, és martingala i de quadrat integrable. I també hem vist que $\hat{W}(t) - \hat{Y}_{Id,A_n}(t) = W_{\epsilon_{n+1}}(t) + tK$ i, en conseqüència, és procés de Lévy. És clar que és centrat.
- $\hat{Y}^{W_c}_{Id,B}$ és procés de Lévy centrat, martingala i de variació de quadrat integrable per la Proposició 2.52.

Aleshores:

$$\mathbb{E}\left(\left(\hat{W}(t)-\hat{Y}_{Id,A_n}(t)\right)\hat{Y}^{W_c}_{Id,B}(t)\right)=\mathbb{E}\left(\sum_{0\le s\le t}\Delta W_{\epsilon_{n+1}}(s)\Delta\hat{Y}^{W_c}_{Id,B}(s)\right)\ .$$

Com que:

- $-\epsilon_{n+1}<\left|\Delta W_{\epsilon_{n+1}}(s)\right|<\epsilon_{n+1}$.
- $\left|\Delta\hat{Y}^{W_c}_{Id,B}(s)\right|=\left|\Delta Y^{W_c}_{Id,B}(s)\right|\in(b,c)$.

Aleshores:

$$\left|\sum_{0\le s\le t}\Delta W_{\epsilon_{n+1}}(s)\Delta\hat{Y}^{W_c}_{Id,B}(s)\right|<\epsilon_{n+1}\sum_{0\le s\le t}\left|\Delta\hat{Y}^{W_c}_{Id,B}(s)\right|<c\cdot N^{W_c}(t,B)\ .$$

Podem aplicar el Teorema de convergència dominada ja que $N^{W_c}(t,B)$ és integrable. Llavors:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\mathbb{E}\left(\sum_{0\le s\le t}\Delta W_{\epsilon_{n+1}}(s)\Delta\hat{Y}^{W_c}_{Id,B}(s)\right)\right|\le\mathbb{E}\left(\lim_{n\to\infty}\epsilon_{n+1}\cdot c\cdot N^{W_c}(t,B)\right)=0\ .$$

Per tant, ja hem vist (3.7). Volem veure ara que:

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left(\left(\hat{W}(t)-\hat{Y}_{Id,A_n}\right)\hat{Y}^{W_c}_{Id,B}(t)\right)=\mathbb{E}\left(W_c(t)\hat{Y}^{W_c}_{Id,B}(t)\right)\ . \tag{3.8}$$

Notem que per la Proposició 3.22(4) per tot $t\ge 0$:

$$\hat{W}(t)-\hat{Y}_{Id,A_n}\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}}W_c(t)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\exists\left\{\hat{W}(t)-M(t,A_{n_k})\right\}_{k=1}^{\infty}\text{ tal que }\hat{W}(t)-M(t,A_{n_k})\xrightarrow[k\to\infty]{q.s}W_c(t)\ .$$

Podem aplicar el Teorema de convergència dominada ja que aplicant la desigualtat de Holder, el Teorema 2.50(2) i la Proposició 2.52(5):

$$\mathbb{E}\left(\left|\left(W_{\epsilon_{n+1}}(t)+tK\right)\hat{Y}^{W_c}_{Id,B}(t)\right|\right)\le\mathbb{E}\left(\left(W_{\epsilon_{n+1}}(t)+tK\right)^2\right)^{1/2}\mathbb{E}\left(\left(\hat{Y}^{W_c}_{Id,B}(t)\right)^2\right)^{1/2}<\infty\ .$$

Aleshores aplicant el Teorema de convergència dominada:

$$\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}\left(\left(\hat{W}(t)-M(t,A_{n_k})\right)\hat{Y}^{W_c}_{Id,B}(t)\right)$$

$$=\mathbb{E}\left(\lim_{k\to\infty}\left(\hat{W}(t)-M(t,A_{n_k})\right)\hat{Y}^{W_c}_{Id,B}(t)\right)=\mathbb{E}\left(W_c(t)\hat{Y}^{W_c}_{Id,B}(t)\right)\ .$$

Per tant, ja hem vist (3.8). Finalment volem veure que:

$$\mathbb{E}\left(W_c(t)\hat{Y}^{W_c}_{Id,B}(t)\right)>0\ . \tag{3.9}$$

Abans veiem que existeix $t_0\ge 0$ tal que $\mathbb{P}(T\le t_0)>0$. En cas contrari si:

$$\forall t\ge 0\ \mathbb{P}(T\le t)=0\Rightarrow\mathbb{P}(T=\infty)=\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}T>n\right)=1-\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}T\le n\right)$$

$$\geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T \leq n) = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(T = \infty) = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(N) = 0 \ .$$

Podem aplicar la Proposició 2.53 ja que $W_c \in \mathbb{M}$ i és procés de Lévy centrat. Aleshores per $t \geq t_0$:

$$\mathbb{E}\left(W_c(t)\hat{Y}^{W_c}_{Id,B}(t)\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{0 \leq s \leq t} \Delta W_c(s) \Delta \hat{Y}^{W_c}_{Id,B}(t)\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\sum_{0 \leq s \leq t} \mathbb{1}_B(\Delta W_c(s)) \Delta W_c(s)^2\right) > 0 \ .$$

ja que la suma contindrà almenys el terme $\Delta W_c\,(T(\omega))^2 > b^2 > 0$ i hem suposat que aquest salt succeeix amb probabilitat estrictament positiva. Així doncs, ajuntant els resultats de (3.7), (3.8) i (3.9):

$$0 \neq \mathbb{E}\left(W_c(t)\hat{Y}^{W_c}_{Id,B}(t)\right) = \lim_{k \to \infty} \mathbb{E}\left(\left(\hat{W}(t) - \hat{Y}_{Id,A_{n_k}}\right) \hat{Y}^{W_c}_{Id,B}(t)\right) = 0 \ .$$

Obtenim així una contradicció i per tant, el procés W_c té trajectòries contínues com volíem veure. ■

Lema 3.35. *Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un procés de Lévy i siguin $0 \leq s < t$. Aleshores existeixen $a, c, d \geq 0$, $b \in \mathbb{R}$ tals que:*

$$\mathbb{E}\left(W_c(t)^2\right) = at \quad , \quad \mathbb{E}\left(W_c(t)^3\right) = bt \quad , \quad \mathbb{E}\left(W_c(t)^4\right) = ct + dt^2 \ ,$$

$$\mathbb{E}\left((W_c(t) - W_c(s))^2\right) = a(t-s) \quad i \quad \mathbb{E}\left((W_c(t) - W_c(s))^4\right) = c(t-s) + d(t-s)^2 \ .$$

Demostració. Pel Teorema 3.34 W_c és un procés de Lévy amb trajectòries continues, aleshores pel Teorema 3.33 tots els moments de W_c existeixen. Per tant, com que $\varphi_{W_c(t)}(u) = e^{t\eta(u)}$, per la Proposició 3.16 es té $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ i a més $\mathbb{E}\left(W_c(t)^m\right) = i^{-m}\varphi^{(m)}_{W_c(t)}(0)$. Com que W_c és centrat i $\varphi'_{W_c(t)}(u) = e^{t\eta(u)} t\eta'(u)$:

$$\mathbb{E}\left(W_c(t)\right) = 0 \Rightarrow \varphi'_{W_c(t)}(0) = 0 \Rightarrow e^{t\eta(0)} t\eta'(0) = 0 \Rightarrow e^{t \cdot 0} t\eta'(0) = 0 \Rightarrow \eta'(0) = 0 \ .$$

Derivant repetidament $\varphi_{W_c(t)}$ i evaluant en el 0 obtenim:

$$\varphi''_{W_c(t)}(0) = \eta''(0)t \Rightarrow \mathbb{E}\left(W_c(t)^2\right) = -\eta''(0)t \ .$$

$$\varphi'''_{W_c(t)}(0) = \eta'''(0)t \Rightarrow \mathbb{E}\left(W_c(t)^2\right) = i\eta'''(0)t \ .$$

$$\varphi^{(4)}_{W_c(t)}(0) = \eta^{(4)}(0)t + 3\left(\eta''(0)\right)^2 t^2 \Rightarrow \mathbb{E}\left(W_c(t)^4\right) = \eta^{(4)}(0)t + 3\left(\eta''(0)\right)^2 t^2 \ .$$

Definint $a := -\eta''(0)$, $b := i\eta'''(0)$, $c := \eta^{(4)}(0)$, $d := 3\left(\eta''(0)\right)^2$, obtenim les tres primeres igualtats.
Notem que $a, c, d \geq 0$ per ser $W_c(t)^2 \geq 0$ i $W_c(t)^4 \geq 0$.
Per demostrar les dues últimes igualtats usem que W_c té increments estacionaris i les tres primeres igualtats:

$$\mathbb{E}\left((W_c(t) - W_c(s))^2\right) = \mathbb{E}\left(W_c(t-s)^2\right) = a(t-s) \ .$$

$$\mathbb{E}\left((W_c(t) - W_c(s))^4\right) = \mathbb{E}\left(W_c(t-s)^4\right) = c(t-s) + d(t-s)^2 \ .$$

■

Teorema 3.36. *Sigui $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un procés de Lévy. Aleshores:*

1. *O bé $W_c(t) = 0$ q.s per tot $t \geq 0$.*
2. *O bé W_c és un moviment Brownià amb variància $a^{1/2}$.*

Demostració.
(1) Sabem pel Lema 3.35 que $\mathbb{E}\left(W_c(t)^2\right) = at$ i que $a \geq 0$. Si $a = 0$ és clar que estem en el cas (1).
(2) Suposem ara que $a > 0$. Volem aplicar la Proposició 2.29. Notem que ja hem vist que W_c és procés de Lévy adaptat centrat i és martingala en el Teorema 2.55(3) i que té trajectòries contínues en el Teorema 3.34. Llavors si $0 \leq s < t$:

$$\mathbb{E}\left(W_c(t)W_c(s)\right) = \mathbb{E}\left(\left[W_c(t) - W_c(s) + W_c(s)\right] W_c(s)\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\left[W_c(t) - W_c(s)\right] W_c(s)\right) + \mathbb{E}\left(W_c(s)^2\right) = \mathbb{E}\left(W_c(t) - W_c(s)\right) \mathbb{E}\left(W_c(s)\right) + \mathbb{E}\left(W_c(s)^2\right)$$

$$= 0 \cdot 0 + \mathbb{E}\left(W_c(s)^2\right) = \mathbb{E}\left(W_c(s)^2\right) = as \ .$$

Per tant, només ens queda veure que:

$$\varphi_{W_c(t)}(u) = \mathbb{E}\left(e^{iuW_c(t)}\right) = e^{-atu^2/2} \ .$$

Sigui $\mathcal{P} := \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = t\}$ partició de $[0, t]$ i δ la seva norma. Només per aquesta demostració escriurem $\Delta W_c(t_j) := W_c(t_{j+1}) - W_c(t_j)$ per $0 \leq j \leq n-1$. Aleshores:

$$e^{iuW_c(t)} - 1 = \sum_{j=0}^{n-1} \left[e^{iuW_c(t_{j+1})} - e^{iuW_c(t_j)}\right] = \sum_{j=0}^{n-1} e^{iuW_c(t_j)} \left(e^{iu\Delta W_c(t_j)} - 1\right) \ .$$

Llavors, aplicant el Lema 3.23 obtenim que existeix $\theta_j \in \mathbb{C}$, $|\theta| \leq 1$ tal que:

$$e^{iu\Delta W_c(t_j)} = 1 + iu\Delta W_c(t_j) - \frac{u^2}{2}\Delta W_c(t_j)^2 + \frac{\theta_j}{6} |u|^3 \left|\Delta W_c(t_j)\right|^3 \ .$$

Podem escriure:

$$\mathbb{E}\left(e^{iuW_c(t)} - 1\right) = \mathbb{E}\left(I_1(t)\right) + \mathbb{E}\left(I_2(t)\right) + \mathbb{E}\left(I_3(t)\right) \ ,$$

on:

$$I_1(t) := iu \sum_{j=0}^{n-1} e^{iuW_c(t_j)} \Delta W_c(t_j) \quad , \quad I_2(t) := \frac{-u^2}{2} \sum_{j=0}^{n-1} e^{iuW_c(t_j)} \Delta W_c(t_j)^2 \ \text{ i}$$

$$I_3(t) := \frac{|u|^3}{6} \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j e^{iuW_c(t_j)} \left|\Delta W_c(t_j)\right|^3 \ .$$

Usant que W_c té increments independents i és centrat i el Lema 3.35 obtenim:

$$\mathbb{E}\left(I_1(t)\right) = iu \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}\left(e^{iuW_c(t)}\right) \mathbb{E}\left(\Delta W_c(t_j)\right) = iu \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}\left(e^{iuW_c(t)}\right) \cdot 0 = 0 \ .$$

$$\mathbb{E}\left(I_2(t)\right) = \frac{-u^2}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}\left(e^{iuW_c(t)}\right) \mathbb{E}\left(\Delta W_c(t_j)^2\right) = \frac{-au^2}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_{W_c(t_j)}(u) \left(t_{j+1} - t_j\right) \ .$$

Per estudiar $I_3(t)$ definim per cada $\alpha > 0$ l'esdeveniment $B_\alpha \in \mathcal{F}$ com:

$$B_\alpha := \left\{ \omega \in \Omega : \max_{0 \leq j \leq n-1} \sup_{t_j \leq u,v \leq t_{j+1}} |W_c(v)(\omega) - W_c(u)(\omega)| \leq \alpha \right\} .$$

Aleshores:

$$\mathbb{E}(I_3(t)) = \mathbb{E}(I_3(t)\mathbb{1}_{B_\alpha}) + \mathbb{E}\left(I_3(t)\mathbb{1}_{B_\alpha^c}\right) .$$

Aplicant la desigualtat de Holder i la desigualtat de Holder discreta (Proposició 3.9) per $p = \frac{4}{3}$ i $q = 4$ i el Lema 3.35:

$$\left|\mathbb{E}\left(I_3(t)\mathbb{1}_{B_\alpha^c}\right)\right| \leq \mathbb{E}\left(\left|I_3(t)\mathbb{1}_{B_\alpha^c}\right|\right) \leq \frac{|u|^3}{6} \int_{B_\alpha^c} \sum_{j=0}^{n-1} |\Delta W_c(t_j)(\omega)|^3 \, \mathbb{P}(d\omega)$$

$$\leq \frac{|u|^3}{6} \left(\int_{B_\alpha^c} 1^4 \mathbb{P}(d\omega) \right)^{1/4} \left(\int_{B_\alpha^c} \left(\sum_{j=0}^{n-1} |\Delta W_c(t_j)(\omega)|^3 \right)^{4/3} \mathbb{P}(d\omega) \right)^{3/4}$$

$$\leq \frac{|u|^3}{6} \mathbb{P}(B_\alpha^c)^{1/4} \left(\int_{B_\alpha^c} n^{1/3} \sum_{j=0}^{n-1} \Delta W_c(t_j)(\omega)^4 \mathbb{P}(d\omega) \right)^{3/4}$$

$$\leq \frac{|u|^3}{6} \mathbb{P}(B_\alpha^c)^{1/4} n^{1/4} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}\left(\Delta W_c(t_j)^4\right) \right)^{3/4}$$

$$= \frac{|u|^3}{6} \mathbb{P}(B_\alpha^c)^{1/4} n^{1/4} \left(\sum_{j=0}^{n-1} c(t_{j+1} - t_j) + d(t_{j+1} - t_j)^2 \right)^{3/4}$$

$$\leq \frac{|u|^3}{6} \mathbb{P}(B_\alpha^c)^{1/4} n^{1/4} (ct + d\delta t)^{3/4} .$$

Per l'altra banda, usant el Lema 3.35:

$$|\mathbb{E}(I_3(t)\mathbb{1}_{B_\alpha})| \leq \mathbb{E}(|I_3(t)\mathbb{1}_{B_\alpha}|) \leq \frac{|u|^3}{6} \int_{B_\alpha} \sum_{j=0}^{n-1} |\Delta W_c(t_j)(\omega)|^3 \, \mathbb{P}(d\omega)$$

$$\leq \frac{\alpha |u|^3}{6} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}\left(\Delta W_c(t_j)^2\right) = \frac{\alpha |u|^3}{6} \sum_{j=0}^{n-1} a(t_{j+1} - t_j) = \frac{\alpha a |u|^3 t}{6} .$$

Sigui ara $\{\mathcal{P}_n\}_{n=1}^\infty$ una successió de particions de $[0, t]$:

$$\mathcal{P}_n := \left\{ 0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < ... < t_{m(n)}^{(n)} = t \right\} ,$$

tal que $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$, on δ_n és la norma de la partició $\mathcal{P}_n$ i $\mathcal{P}_n \subseteq \mathcal{P}_{n+1}$. Per cada $n \geq 1$, escribim $I_k^{(n)}(t)$ per $k = 1, 2, 3$ i $B_\alpha^{(n)}$. Usant que:

- W_c té trajectòries uniformement contínues en $[0, t]$.
- $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$.

$$\max_{0\leq j(m)\leq m(n)-1} \sup_{t_j^{(n)}\leq u,v\leq t_{j+1}^{(n)}} |W_c(v)-W_c(u)| \leq \sup_{0\leq u,v\leq t, |u-v|\leq \delta_n} |W_c(v)-W_c(u)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ .$$

Aleshores com que:

$$\mathcal{P}_n \subseteq \mathcal{P}_{n+1} \Rightarrow B_\alpha^{(n)} \subseteq B_\alpha^{(n+1)} \Rightarrow B_\alpha^{(n+1)c} \subseteq B_\alpha^{(n)c} \ .$$

Deduïm que donat $\alpha > 0$:

$$\exists \ n_0 \geq 1 \text{ tal que } \forall n \geq n_0 \ \mathbb{P}\left(B_\alpha^{(n)c}\right) = 0 \ .$$

Com que també δ_n tendeix a 0, es té:

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\mathbb{E}\left(I_3^{(n)}(t)\right)\right| \leq \limsup_{n\to\infty} \left|\mathbb{E}\left(I_3^{(n)}(t)\mathbb{1}_{B_\alpha^c}\right)\right| + \limsup_{n\to\infty} \left|\mathbb{E}\left(I_3^{(n)}(t)\mathbb{1}_{B_\alpha}\right)\right|$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \frac{|u|^3}{6}\mathbb{P}\left(B_\alpha^{(n)c}\right)^{1/4} n^{1/4}\left(ct + d\delta_n t\right)^{3/4} + \limsup_{n\to\infty} \frac{\alpha a\,|u|^3\,t}{6} = \frac{\alpha a\,|u|^3\,t}{6} \ .$$

Com que l'argument és cert per tot $\alpha > 0$ es té:

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\mathbb{E}\left(I_3^{(n)}(t)\right)\right| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\mathbb{E}\left(I_3^{(n)}(t)\right)\right| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(I_3^{(n)}(t)\right) = 0 \ .$$

Aleshores per tot $n \geq 1$:

$$\mathbb{E}\left(e^{iuW_c(t)}-1\right) = \mathbb{E}\left(I_1^{(n)}(t)\right) + \mathbb{E}\left(I_2^{(n)}(t)\right) + \mathbb{E}\left(I_3^{(n)}(t)\right) = 0 + \mathbb{E}\left(I_2^{(n)}(t)\right) + \mathbb{E}\left(I_3^{(n)}(t)\right) \ . \tag{3.10}$$

Notem que:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(I_2^{(n)}(t)\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{-au^2}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi_{W_c(t_j)}(u)\left(t_{j+1}-t_j\right) = \frac{-au^2}{2}\int_0^t \varphi_{W_c(s)}(u)ds \ .$$

Per tant, prenent límits en (3.10) obtenim:

$$\mathbb{E}\left(e^{iuW_c(t)}-1\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(I_2^{(n)}(t)\right) + \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(I_3^{(n)}(t)\right) = \frac{-au^2}{2}\int_0^t \varphi_{W_c(s)}(u)ds + 0 \ .$$

$$\varphi_{W_c(t)}(u) - 1 = \frac{-au^2}{2}\int_0^t \varphi_{W_c(s)}(u)ds \ . \tag{3.11}$$

Substituïnt que $\varphi_{W_c(t)}(u) = e^{t\eta(u)}$, obtenim que si $\eta(u) \neq 0$ per tot $t \geq 0$:

$$e^{t\eta(u)} - 1 = \frac{-au^2}{2}\int_0^t e^{s\eta(u)}ds \Leftrightarrow e^{t\eta(u)} - 1 = \frac{-au^2}{2}\frac{e^{t\eta(u)}-1}{\eta(u)} \ .$$

Escollint $t \geq 0$ tal que $t\eta(u) \neq 2k\pi i$ amb $k \in \mathbb{Z}$, obtenim que $e^{t\eta(u)} - 1 \neq 0$ i, per tant, simplificant en l'equació anterior obtenim:

$$1 = \frac{-au^2}{2}\frac{1}{\eta(u)} \Rightarrow \eta(u) = \frac{-au^2}{2} \ .$$

Si $\eta(u) = 0$, aleshores l'equació (3.11) queda per tot $t \geq 0$:

$$e^{t\cdot 0} - 1 = \frac{-au^2}{2}\int_0^t e^{s\cdot 0}ds \Leftrightarrow 0 = \frac{-au^2}{2}t \Rightarrow u = 0 \ .$$

Per tant, en qualsevol cas $\eta(u) = \frac{-au^2}{2}$ i $\varphi_{W_c(t)}(u) = e^{-tau^2/2}$ com volíem veure. És a dir, W_c és un moviment Brownià amb variància $a^{1/2}$. ■

Referències

[1] Applebaum, D. *Lévy Processes and Stochastic Calculus.* Second edition. New York : Cambridge University Press, 2009. ISBN 978-0-521-73865-1.

[2] Sato, K. *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions.* First English edition. Cambridge : Cambridge University Press, 1999. ISBN 0-521-553024.

[3] Klenke, A. *Probability Theory A Comprehensive Course.* Londres : Springer, 2008. ISBN 978-1-84800-047-6.

[4] Protter, P. *Stochastic Integration and Differential Equations.* Berlin : Springer, 1990. ISBN 3-540-50996-8.

[5] Bingham, N.H.; Goldie, C.M.; Teugels, J.L. *Regular Variation.* Cambridge : Cambridge University Press, 1987. ISBN 0-521-37943-1.

[6] Nualart, D.; Sanz, M. *Curs de Probabilitats.* Primera edició. Barcelona : Promociones y Publicaciones Universitarias, S.A, 1990. ISBN 84-7665-718-8.