Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua
UNAN-MANAGUA
Facultad Regional Multidisciplinaria Estelí

UNIVERSITAT DE BARCELONA

MÓDULO DE INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA APLICADA A LA TOMA DE DECISIONES FINANCIERAS

Alegre, P.; Rodríguez, G.; Sancho, T.

Escola Universitària d'Estudis Empresarials

Universitat de Barcelona

Postgrado en Gerencia Financiera 2008-2009

Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua (UNAN)

Estelí (Nicaragua)

PREFACIO

Este manual está pensado para dar un desarrollo coherente al objetivo planteado con este Módulo que es el de dar a conocer al alumno, desde una perspectiva teórico/práctica, las herramientas más habituales del cálculo financiero que están asociadas a los regímenes financieros subyacentes a las operaciones financieras del mercado dinerario, y aplicarlas a la valoración de las rentas financieras en general, poniendo el énfasis en las rentas constantes que son las que se suelen presentar con más asiduidad en préstamos, hipotecas, planes de jubilación, rentas vitalicias, etc. A tal fin, hemos estructurado el manual en base a cuatro temas: uno inicial, en donde se formulan las principales propiedades del modelo matemático asociado a las operaciones financieras de financiación; un segundo tema, en el que se aplica lo anterior al estudio de los regímenes financieros de interés simple vencido, descuento comercial y de interés compuesto; un tercer tema, en donde se introduce al alumno en el estudio de las rentas financieras y su valoración a través de un régimen financiero de interés compuesto; y, finalmente, un cuarto tema, que es una aplicación del anterior, y en el que se analizan las rentas que se amortizan por el denominado sistema francés, el más extendido de todos. Además, y con el objeto de ilustrar los contenidos que se desgranan en cada uno de los temas, hemos incluido un apartado al final de los tres primeros en donde se resuelven algunos ejercicios. Por último, no debemos perder de vista que este Módulo constituye el fundamento del de *Instrumentos financieros de financiación y de inversión* pues parte del instrumental que allí se utiliza tiene aquí su desarrollo inicial.

Los autores

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA FINANCIERA

1.1. Operación financiera y capital financiero: clasificación de las operaciones financieras

Como es sabido, los sujetos económicos acuden a los mercados financieros con el objetivo de intercambiar recursos monetarios, ya sea con el ánimo de obtener liquidez o bien con la intención de ceder, durante un cierto tiempo, un capital para obtener así un rendimiento. Por consiguiente, el objetivo de la **matemática financiera** ha de ser el de "*elaborar un modelo matemático que interprete correctamente el fenómeno económico conocido como financiación – la transformación del ahorro en inversión- en su aspecto cuantitativo y temporal.*"[1] De nuevo en los mercados financieros, y una vez establecido el pacto formal y explícito que debe mediar entre los diferentes sujetos económicos que se intercambian capitales monetarios, podemos decir que se ha generado una **operación financiera**.

Definición. *Una **operación financiera** es cualquier intercambio de capitales monetarios entre sujetos económicos y en diferentes momentos del tiempo.*

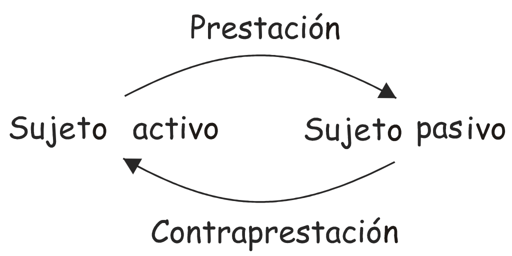
Ejemplo: *Una entidad bancaria que le cede a usted hoy 1000€ con el compromiso formal de que, al cabo de un año, le devuelva 1050€.*
SOLUCIÓN: Se trata de una operación financiera en la que las cuantías monetarias de 1000€ y de 1050€ son los capitales que dos sujetos económicos, la entidad bancaria y usted, se intercambian en el término de un año.

[1] RODRÍGUEZ, A. (1994) *Matemática de la financiación*. Barcelona: Ediciones S.

Como elementos característicos de toda operación financiera tenemos:

1. **Elemento personal**, formado por el **sujeto activo** (también financiador o prestamista) que es el que posee las disponibilidades monetarias y que decide cederlas por un tiempo cobrando un precio o interés, y por el **sujeto pasivo** (financiado o prestatario) que es el que las recibe. Este último se compromete a devolverle al sujeto activo las disponibilidades cedidas pagándole, además, un precio estipulado.
2. **Elemento objetivo**, formado por las disponibilidades monetarias que el sujeto activo y el pasivo se intercambian. La parte que cede el sujeto activo al pasivo se denomina **prestación** y la que le devuelve el sujeto pasivo **contraprestación**.
3. **Elemento convencional**, que es el acuerdo o pacto, precisado siempre mediante un contrato mercantil, entre los sujetos activo y pasivo.

Gráficamente:



<u>Ejemplo</u>: *Determínese los elementos característicos de la operación financiera del ejemplo anterior.*

SOLUCIÓN: Está claro que el sujeto activo es la entidad financiera y usted es el pasivo. En este caso el elemento convencional es el acuerdo que le compromete a usted a devolver la contraprestación (1050€) al cabo de un año y que le permite disponer, a partir de hoy, de la prestación (1000€). El precio o interés que ha de pagar por este servicio es, precisamente, de 50€.

Consecuentemente, la matemática financiera está obligada a caracterizar los elementos objetivo y convencional de una operación financiera.[2] El componente fundamental del elemento objetivo es el **capital financiero**.

Definición. *Un **capital financiero** es todo par ordenado (C,T) donde:*

1. *$C > 0$ es un número positivo denominado **cuantía** y viene expresado en unidades monetarias precisas (en nuestro caso euros, €).*
2. *$T > 0$ es otro número positivo denominado **diferimiento** que nos mide, en años, el intervalo de tiempo entre un origen temporal dado hasta el momento en que la cuantía C esté disponible.*[3]

La clave de la definición anterior está en el hecho de que el valor monetario de un capital (la cuantía) no es suficiente para individualizarlo desde de una perspectiva financiera (no es lo mismo poseer 1000€ hoy que dentro de un año). Por tanto, la dimensión temporal (el diferimiento) es esencial. Esto trae como consecuencia que tanto la prestación como la contraprestación de una operación financiera la formen, precisamente, capitales financieros. Desde un punto de vista práctico resulta útil ordenar los capitales financieros sobre la recta temporal en función de sus diferimientos. Gráficamente:

$$\begin{array}{ccc} C & C' & C'' \\ \vdash & + & \dashv \\ T & T' & T'' \end{array}$$

En este caso, se tiene que:

$$T < T' < T''.$$

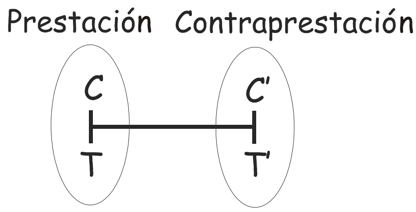
---

[2] Obviamente, el elemento personal no incumbe a la matemática financiera.

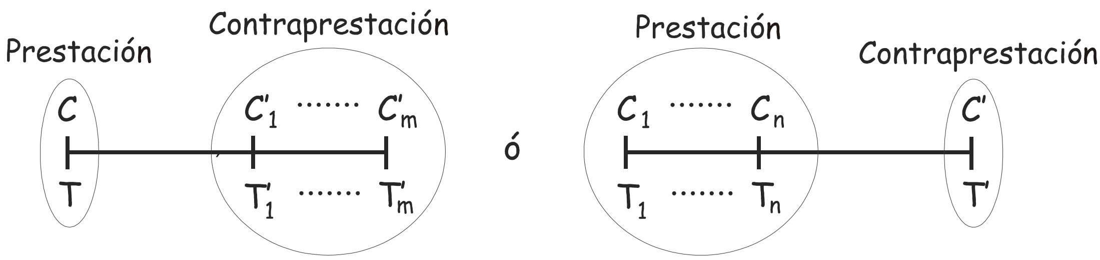
[3] Normalmente este origen temporal suele ser el de la operación financiera en la que se encuentre el capital financiero.

El concepto de capital financiero también nos permite clasificar todas las operaciones financieras en tres categorías. En efecto, atendiendo a la magnitud de la prestación y de la contraprestación tenemos:

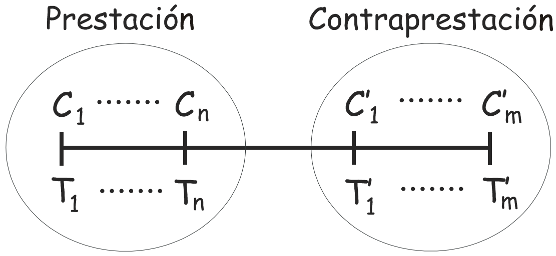
1. Las **operaciones financieras simples**, que son aquellas en las que tanto la prestación como la contraprestación están formadas por un único capital financiero:



2. Las **operaciones financieras parcialmente complejas**, que son aquellas en las que la prestación o la contraprestación, pero no ambas, están formadas por más de un capital financiero:



3. Las **operaciones financieras complejas**, que son aquellas en que tanto la prestación como la contraprestación están constituidas por más de un capital financiero:[4]



[4] En este caso los capitales financieros que forman el elemento objetivo de la operación (prestación y contraprestación) pueden estar mezclados.

Ejemplo: *Determínese a qué categoría de las tres anteriores pertenecen las siguientes operaciones financieras:*

a. La compra de una Letra del Tesoro.

b. Un préstamo hipotecario.

c. Una cuenta corriente.

SOLUCIÓN: a) La compra de una Letra del Tesoro es una operación financiera simple ya que tanto la prestación, 1000€,[5] como la contraprestación (la cuantía de la cual depende del tipo de interés vigente en el momento de la venta) son capitales financieros únicos. Los diferimientos dependen del momento en que se compra y vende la Letra. En este caso, el comprador es el sujeto activo y el Estado es el pasivo ya que por medio de la venta de este producto financiero consigue liquidez.

b) Un préstamo hipotecario es una operación financiera parcialmente compleja ya que el sujeto pasivo (el particular que la suscribe) recibe un único capital financiero (la cantidad monetaria que ha solicitado en concepto de préstamo menos los gastos que puedan haber), y el sujeto activo (la entidad financiera que emite el préstamo) suele recibir más de un capital financiero de forma periódica en el tiempo (los denominados términos o cuotas del préstamo).

c) En este caso, tanto la prestación como la contraprestación suelen tener más de un capital financiero. El titular de la cuenta, que es el que hace las imposiciones monetarias, es el sujeto activo y la entidad financiera propietaria de la cuenta es el sujeto pasivo. Así pues, la prestación está formada por las imposiciones que hace el titular y la contraprestación es el conjunto de anotaciones que la entidad hace en la cuenta y que contemplan tanto el capital invertido como los intereses generados.

[5] Las Letras del Tesoro en la UE tienen un nominal de 1000€.

1.2. Equivalencia financiera: factor financiero

Una vez caracterizado el elemento objetivo de una operación financiera, la matemática financiera hace lo mismo con el elemento convencional. El acuerdo de voluntades entre los sujetos activo y pasivo obliga a que la contraprestación sea en un cierto sentido "equivalente" a la prestación. De aquí que surja el concepto de **equivalencia financiera**.

Definición. *Una **relación de equivalencia financiera** es una relación binaria definida sobre el conjunto de capitales financieros, y que denotaremos por* $(C,T)\sim(C',T')$, *que satisface las siguientes propiedades:*

1. ***Reflexiva:*** *Todo capital financiero* (C,T) *es equivalente consigo mismo:*

$$(C,T)\sim(C,T).$$

2. ***Simétrica:*** *Si un capital financiero es equivalente a otro, también este último es equivalente al primero:*

$$\text{Si } (C,T)\sim(C',T') \text{ entonces } (C',T')\sim(C,T).$$

3. ***Transitiva:*** *Si un capital financiero es equivalente a otro y este último es equivalente a un tercero entonces el primero también es equivalente a éste:*

$$\text{Si } (C,T)\sim(C',T') \text{ y } (C',T')\sim(C'',T'') \text{ entonces } (C,T)\sim(C'',T'').$$

4. ***Homogeneidad respecto las cuantías****: Si dos capitales financieros son equivalentes también lo serán aquellos capitales que, teniendo los mismos diferimientos, tienen las cuantías multiplicadas por un mismo número positivo:*

$$\text{Si } (C,T)\sim(C',T') \text{ entonces } (k\cdot C,T)\sim(k\cdot C',T') \text{ para todo } k\geq 0.$$

5. ***Positividad del interés.*** *De dos capitales financieros equivalentes, el capital con el diferimiento más grande tendrá la cuantía mayor:*

$$\text{Si } (C,T)\sim(C',T') \text{ y } T\leq T' \text{ entonces } C\leq C'.$$

Ejemplo: *Compruébese que la relación definida por:*

$$(C,T) \sim (C',T') \text{ si y sólo si } C' = C \cdot (1.05)^{T'-T}$$

es una relación de equivalencia financiera.

SOLUCIÓN: 1) Ya que:

$$C \cdot (1.05)^{T-T} = C \cdot (1.05)^{0} = C \cdot 1 = C$$

deducimos que $(C,T) \sim (C,T)$.

2) Si $(C,T) \sim (C',T')$ entonces:

$$C' = C \cdot (1.05)^{T'-T} \text{ y } C = \frac{C'}{(1.05)^{T'-T}} = C' \cdot (1.05)^{T-T'}$$

es decir, que $(C',T') \sim (C,T)$.

3) Si $(C,T) \sim (C',T')$ y $(C',T') \sim (C'',T'')$ entonces:

$$C' = C \cdot (1.05)^{T'-T} \text{ y } C'' = C' \cdot (1.05)^{T''-T'}$$

de donde:

$$C'' = C' \cdot (1.05)^{T''-T'} = \left(C \cdot (1.05)^{T'-T}\right) \cdot (1.05)^{T''-T'} = C \cdot (1.05)^{(T'-T)+(T''-T')} =$$
$$= C \cdot (1.05)^{T''-T}.$$

Así pues, $(C,T) \sim (C'',T'')$.

4) Si $(C,T) \sim (C',T')$ y $k \geq 0$ deducimos que $C' = C \cdot (1.05)^{T'-T}$ y que:

$$k \cdot C' = k \cdot \left(C \cdot (1.05)^{T'-T}\right) = (k \cdot C) \cdot (1.05)^{T'-T}.$$

Es decir, que $(k \cdot C,T) \sim (k \cdot C',T')$.

5) Finalmente, si $(C,T) \sim (C',T')$ y $T \leq T'$ tendremos que $T'-T \geq 0$ y, por tanto, que:

$$C' = C \cdot (1.05)^{T'-T} \geq C \cdot (1.05)^{0} = C \cdot 1 = C.$$

En consecuencia, la relación $\sim$ es una relación de equivalencia financiera.

Las propiedades de "homogeneidad respecto las cuantías" y de "positividad del interés" (o "preferencia por la liquidez") son las que confieren a toda relación de equivalencia financiera su marcado carácter financiero. Notemos, de paso, que la relación de equivalencia financiera que acabamos de ver "formaliza" el elemento convencional de la operación financiera simple del ejemplo inicial. En efecto, según el ejemplo anterior, el capital $(1000,0)$ es "equivalente" al capital $(1050,1)$, es decir, que $(1000,0) \sim (1050,1)$ ya que:

$$C \cdot (1.05)^{T'-T} = 1000 \cdot (1.05)^{1-0} = 1000 \cdot 1.05 = 1050 = C'.$$

Como veremos, esto pasa con todas las operaciones financieras simples. Por otro lado, puede probarse que toda relación de equivalencia financiera está determinada por una función que depende única y exclusivamente de los diferimientos. Esta función se denomina **factor financiero** y jugará a partir de ahora un papel fundamental.

Definición. *El **factor financiero** asociado a la relación de equivalencia financiera* $\sim$ *es una función escalar de dos variables* $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *que satisface la propiedad:*

$$(C,T) \sim (C',T') \text{ si y sólo si } \frac{C'}{C} = f(T,T').$$

En la práctica, el factor financiero es la herramienta que se utiliza para calcular las cuantías y los diferimientos de capitales equivalentes a partir de la igualdad:

$$C' = C \cdot f(T,T').$$

Esta igualdad lleva por nombre **ecuación de equilibrio** de la equivalencia financiera.

Ejemplo: *Determínese el factor financiero asociado a la relación de equivalencia financiera del ejemplo anterior y calcúlese según dicha relación de equivalencia financiera:*

a. La cuantía monetaria equivalente, dentro de 5 años, a 1000€ disponibles de aquí a 1 año

b. La cuantía monetaria equivalente hoy a 2000€ disponibles dentro de 3 años

c. El tiempo que hay que esperar para que 1500€ de hoy sean equivalentes a 1800€

SOLUCIÓN: Es evidente que, en este caso, el factor financiero asociado a la relación de equivalencia financiera del ejemplo anterior es $f(T,T') = (1.05)^{T'-T}$.

a) Ya que los 1000€ estarán disponibles dentro de 1 año, cabe considerar el capital financiero $(1000,1)$. Así pues, hemos de encontrar la cuantía monetaria C' de manera que $(1000,1) \sim (C',5)$. Por consiguiente, aplicando la ecuación de equilibrio de esta equivalencia financiera tenemos que:

$$C' = 1000 \cdot (1.05)^{5-1} = 1000 \cdot (1.05)^{4} = 1000 \cdot 1.21550625 = 1215.506 \text{ €}.$$

b) Puesto que hay que calcular la cuantía C equivalente hoy a 2000€ disponibles dentro de 3 años, hemos de considerar el capital $(C,0)$. Así pues, la equivalencia financiera será $(C,0) \sim (2000,3)$. Por tanto:

$$2000 = C \cdot (1.05)^{3-0} = C \cdot 1.157625 \text{ y } C = \frac{2000}{1.157625} = 1727.675 \text{ €}.$$

c) Se trata de calcular el diferimiento T' asociado a la cuantía de 1800€ de manera que $(1500,0) \sim (1800,T')$. Así pues,

$$1800 = 1500 \cdot (1.05)^{T'-0} = 1500 \cdot (1.05)^{T'} \text{ y } T' = \frac{\ln\left(\frac{1800}{1500}\right)}{\ln 1.05} = 3.736850652.$$

Es decir, hay que esperar 3 años, 8 meses $(0.736850652 \cdot 12 = 8.842207824)$ y 25 días $(0.842207824 \cdot 30 = 25.26623472)$ aproximadamente.

Veamos finalmente cuáles son las propiedades que caracterizan a una función escalar de dos variables $f(T,T')$ como el factor financiero asociado a una relación de equivalencia financiera según el modelo matemático que estamos viendo.

Propiedad. *La función $f(T,T')$ es un factor financiero si y sólo si se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $f(T,T')>0$.
2. $f(T,T')\leq 1$ *si y sólo si* $T\geq T'$. *Análogamente,* $f(T,T')\geq 1$ *si y sólo si* $T\leq T'$.[6]
3. $f(T',T)=\dfrac{1}{f(T,T')}$.
4. ***Principio de escindibilidad**: Si* $T,T',T''\geq 0$ *son tres diferimientos en general entonces:*
$$f(T,T'')=f(T,T')\cdot f(T',T'').$$
5. $f(T,T')$ *es decreciente respecto* T *y creciente respecto* T'.

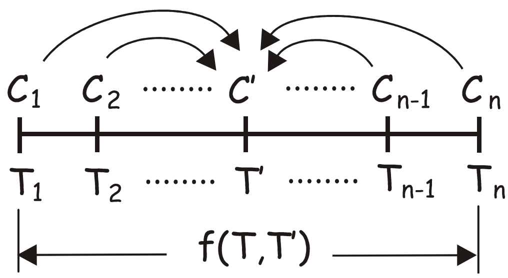
Como señalamos más adelante en el tema dedicado a los regímenes financieros, existen factores financieros con una fuerte implantación en los mercados dinerarios que no se ajustan del todo a este modelo (en concreto, los asociados a los regímenes financieros de interés simple y de descuento comercial y que, por tal motivo, se suelen denominar regímenes financieros "prácticos"). Sin embargo esto no es óbice para que no podamos aplicar en estos casos muchos de los conceptos que acabamos de ver.

---

[6] Por tanto, $f(T,T')=1$ si y sólo si $T=T'$.

1.3. Valoración de un conjunto de capitales financieros: suma financiera

Hasta aquí nos hemos centrado en exclusiva en el análisis de las operaciones financieras simples. Sin embargo, los conceptos y resultados que hemos apuntado pueden utilizarse para estudiar el resto de operaciones ya que, como veremos, se puede extender el concepto de equivalencia financiera a toda operación financiera con independencia de la magnitud de su elemento objetivo.[7] Para llevar a término este proceso es indispensable que los diferimientos de los capitales financieros que forman la prestación y/o la contraprestación sean iguales cosa que, por regla general y a priori, no sucede. Así pues, y como paso previo, hay que "trasladar" cada uno de estos capitales a un determinado diferimiento T' (generalmente al inicio o bien al final de la operación financiera) según el factor financiero asociado a la operación. Este proceso puede esquematizarse de la forma:



En este caso, la cuantía C' del capital financiero equivalente en T' al conjunto de capitales financieros $\{(C_1,T_1),\ldots,(C_n,T_n)\}$ será igual a la suma de las cuantías $C_1^{'},\ldots,C_n^{'}$ de los n capitales financieros equivalentes a éstos en T'. Es decir:

$$C' = C_1^{'} + \cdots + C_n^{'} = \left(C_1 \cdot f\left(T_1,T'\right)\right) + \cdots + \left(C_n \cdot f\left(T_n,T'\right)\right) = \sum_{r=1}^{n} C_r \cdot f\left(T_r,T'\right).$$ [8]

[7] Este proceso se conoce por el nombre de **Principio de Reducción Financiera**.

[8] Esto es lo que se entiende genéricamente por **valorar** un conjunto de capitales.

Definición. *La **suma financiera** en un diferimiento T' de un conjunto de capitales financieros $\{(C_1,T_1),\ldots,(C_n,T_n)\}$ según un factor financiero $f(T,T')$ es el capital financiero (C',T') siendo C' la suma aritmética de les cuantías de los capitales financieros que, en T', son equivalentes a $(C_1,T_1),\ldots,(C_n,T_n)$. En otras palabras:*

$$C' = \sum_{r=1}^{n} C_r \cdot f(T_r,T') = C_1 \cdot f(T_1,T') + \cdots + C_n \cdot f(T_n,T').$$

*Se dice entonces que la cuantía C' de la suma financiera (C',T') es el **valor** en T' de estos capitales financieros según el factor financiero $f(T,T')$.*

Nótese, en primer lugar, que toda suma financiera es un capital financiero. Además, toda suma financiera se encuentra supeditada a un factor financiero $f(T,T')$ en concreto y al diferimiento T' donde se esté valorando.

Ejemplo: *Calcúlese el valor que tendrán, dentro de cuatro años, los capitales financieros* $(500,1)$, $(800,2)$ *y* $(1000,6)$ *según el factor financiero dado por la igualdad* $f(T,T') = (1.05)^{T'-T}$.

SOLUCIÓN: En este caso $T' = 4$. Por tanto, el valor C' será igual a:

$$\begin{aligned} C' &= 500 \cdot f(1,4) + 800 \cdot f(2,4) + 1000 \cdot f(6,4) = \\ &= 500 \cdot (1.05)^{4-1} + 800 \cdot (1.05)^{4-2} + 1000 \cdot (1.05)^{4-6} = \\ &= 500 \cdot (1.05)^{3} + 800 \cdot (1.05)^{2} + 1000 \cdot (1.05)^{-2} = \\ &= 2367.842€. \end{aligned}$$

En consecuencia, la suma financiera en el diferimiento $T' = 4$ de los tres capitales financieros $(500,1)$, $(800,2)$ y $(1000,6)$ es el capital financiero:

$$(2367.842, 4).$$

Propiedad. *Todas las sumas financieras de un mismo conjunto de capitales financieros calculadas según un mismo factor financiero son siempre capitales financieros equivalentes.*

Ejemplo:

a. *Calcúlese la suma financiera, a día de hoy, de los capitales financieros* $(500,1)$, $(800,2)$ *y* $(1000,6)$ *según el factor financiero* $f(T,T')=(1.05)^{T'-T}$.

b. *Pruébese que esta suma financiera es equivalente a la obtenida en el ejemplo anterior.*

SOLUCIÓN: a) En este caso $T'=0$. Por tanto, el valor C' será igual ahora a:

$$\begin{aligned} C' &= 500\cdot f(1,0)+800\cdot f(2,0)+1000\cdot f(6,0)= \\ &= 500\cdot(1.05)^{0-1}+800\cdot(1.05)^{0-2}+1000\cdot(1.05)^{0-6}= \\ &= 500\cdot(1.05)^{-1}+800\cdot(1.05)^{-2}+1000\cdot(1.05)^{-6}=1948.029€. \end{aligned}$$

b) Es inmediato comprobar que $(1948.029,0)\sim(2367.842,4)$ ya que:

$$2367.842=1948.029\cdot(1.05)^{4}=1948.029\cdot f(0,4).$$

Así pues, para saber si dos conjuntos de capitales financieros constituyen el elemento objetivo de una operación financiera compleja, o parcialmente compleja, según un factor financiero dado puede seguirse el proceso siguiente:

1. Se valoran los dos conjuntos de capitales en un mismo diferimiento (por regla general, en el origen temporal 0 o al final de la operación financiera).[9]
2. Se comprueba que los valores así obtenidos son iguales. En el caso que lo sean sabremos que forman la prestación y la contraprestación de dicha operación financiera.

[9] El valor en el origen temporal se denomina **valor actual** y al final de la operación **valor final**.

Ejemplo: *Compruébese que los conjuntos:*

$$\{(400,1),(800,2)\} \ y \ \{(441,3),(882,4)\}$$

forman, respectivamente, la prestación y la contraprestación de una cierta operación financiera compleja según el factor financiero $f(T,T') = (1.05)^{T'-T}$.

SOLUCIÓN: Si, por ejemplo, valoramos los dos conjuntos al inicio, es decir en el diferimiento $T' = 0$, tendremos los valores:

$$C_1 = 400 \cdot (1.05)^{-1} + 800 \cdot (1.05)^{-2} = 1106.57\,€$$

y:

$$C_2 = 441 \cdot (1.05)^{-3} + 882 \cdot (1.05)^{-4} = 1106.57\,€.$$

Puesto que ambos valores son iguales, deducimos que $\{(400,1),(800,2)\}$ forma la prestación y $\{(441,3),(882,4)\}$ la contraprestación de una cierta operación financiera compleja según el factor financiero $f(T,T') = (1.05)^{T'-T}$. Así pues, podemos escribir que:

$$\{(400,1),(800,2)\} \sim \{(441,3),(882,4)\}$$

según $f(T,T') = (1.05)^{T'-T}$.

Acabamos de poner de manifiesto que, independientemente de la naturaleza del elemento objetivo, toda operación financiera se puede "tratar" como si fuera una operación financiera simple. Para ello cabe aplicar el Principio de Reducción Financiera que nos permite "sustituir" cada uno de los conjuntos de capitales financieros que puedan aparecer formando parte del elemento objetivo de la operación por su suma financiera en un cierto diferimiento y proceder, a continuación, al estudio la operación financiera simple resultante. Este proceso jugará un papel fundamental a la hora de estudiar las rentas financieras.

1.4. Ejercicios resueltos

1. *Demuéstrese que, independientemente del valor de la constante* $a>1$*, la función definida por la igualdad* $f(T,T')=a^{T'-T}$ *es un factor financiero*[10] *¿Pasa lo mismo con* $f(T,T')=1+a(T'-T)$*? Razónese la respuesta.*

SOLUCIÓN: Comprobaremos que esta función satisface las cinco propiedades que caracterizan a los factores financieros y que hemos apuntado más arriba.

1) Ya que la función exponencial a^x es estrictamente positiva para todo $a>0$ y para todo x número real, deducimos la primera propiedad:

$$f(T,T')=a^{T'-T}>0.$$

2) Por otro lado, y puesto que $a^x\geq 1$ si y sólo si $x\geq 0$, tenemos la segunda:

$$f(T,T')=a^{T'-T}\geq 1 \text{ si y sólo si } T'\geq T.$$

3) La tercera propiedad es inmediata ya que:

$$f(T',T)=a^{T-T'}=a^{-(T'-T)}=\frac{1}{a^{T'-T}}=\frac{1}{f(T,T')}.$$

4) La cuarta se obtiene a partir de la cadena de igualdades:

$$f(T,T'')=a^{T''-T}=a^{T''+(T'-T')-T}=a^{(T''-T')+(T'-T)}=a^{T''-T'}\cdot a^{T'-T}=f(T',T'')\cdot f(T,T').$$

5) La última propiedad se deduce del análisis del signo de las dos derivadas parciales de $f(T,T')$. En efecto, ya que $a>1$ implica $\ln a>0$, se tiene que:

$$\frac{\partial f(T,T')}{\partial T}=a^{T'-T}\cdot\ln a\cdot(-1)<0 \text{ y } \frac{\partial f(T,T')}{\partial T'}=a^{T'-T}\cdot\ln a>0.$$

Por tanto, $f(T,T')$ es decreciente respecto T y creciente respecto T'.

Finalmente, la función $f(T,T')=1+a(T'-T)$ no puede ser un factor financiero ya que, por ejemplo, no satisface la tercera propiedad:

$$f(T',T)=1+a(T-T')\neq\frac{1}{1+a(T'-T)}=\frac{1}{f(T,T')}.$$

[10] Este tipo de factores financieros se denominan **estacionarios**.

2. *Dado el factor financiero* $f(T,T') = (1.03)^{T'-T}$ *, calcúlese el tiempo que hay que esperar para doblar un capital de 100€. ¿Y para que aumente en la mitad? Razónese que dicho tiempo no depende del capital inicial.*

SOLUCIÓN: En el supuesto que empecemos a contar a partir de hoy $(T = 0)$, la operación financiera a considerar en el primer caso sería:

$$(100,0) \sim (200,T').$$

Por tanto:

$$200 = 100 \cdot f(0,T') = 100 \cdot (1.03)^{T'-0}$$

de donde:

$$(1.03)^{T'} = \frac{200}{100} = \frac{2 \cdot 100}{100} = 2$$

y:

$$T' \cdot \ln(1.03) = \ln\left((1.03)^{T'}\right) = \ln 2 \text{ y } T' = \frac{\ln 2}{\ln(1.03)} = 23.44977225.$$

Dicho de otra manera, deberíamos esperar, aproximadamente, unos 23 años, 5 meses y 12 días. Si quisiéramos que aumentara tan sólo la mitad, es decir, obtener un montante de 150€, la operación financiera a considerar sería ahora $(100,0) \sim (150,T')$. Por consiguiente:

$$150 = 100 \cdot f(0,T') = 100 \cdot (1.03)^{T'-0} \text{ y } (1.03)^{T'} = \frac{150}{100} = \frac{1.5 \cdot 100}{100} = 1.5.$$

En definitiva:

$$T' = \frac{\ln(1.5)}{\ln(1.03)} = 13.71723742.$$

Es decir que, ahora, hay que esperar 13 años, 8 meses y 19 días para que los 100€ se conviertan en 150€.[11] Es evidente que si analizamos con atención el proceso seguido en los dos casos, el tiempo no depende del capital inicial.

[11] Nótese que este lapso de tiempo no es la mitad del anterior.

3. *Calcúlese el capital C que hay que depositar en una cuenta corriente para obtener 6000€ dentro de siete años si el factor financiero vigente los cuatro primeros años es $f(T,T')=(1.03)^{T'-T}$ y durante el resto del plazo es igual a $f(T,T')=(1.02)^{T'-T}$.*

SOLUCIÓN: En primer lugar, y suponiendo que invertimos un capital monetario C, vamos a calcular el capital C' que se obtendría al cabo de los cuatro primeros años a partir de hoy $(T=0)$. En este caso, y puesto que la operación financiera a considerar sería:

$$(C,0)\sim(C',4)$$

se obtiene que:

$$C'=C\cdot(1.03)^{4-0}=C\cdot(1.03)^{4}.$$

Aplicando ahora la propiedad de escindibilidad de los factores financieros se tiene que el capital final de 6000€ será, pues, equivalente a este capital C' transcurridos los tres últimos años del plazo de la operación. Así pues, la operación financiera que cabe tener en cuenta ahora sería, precisamente:

$$(C',4)\sim(6000,7)$$

de donde:

$$6000=C'\cdot(1.02)^{7-4}=C'\cdot(1.02)^{3}$$

que, junto con la ecuación anterior, se deduce que:

$$\begin{aligned}6000&=C'\cdot(1.02)^{3}=\left(C\cdot(1.03)^{4}\right)(1.02)^{3}=C\cdot(1.03)^{4}\cdot(1.02)^{3}=\\&=C\cdot 1.19439895.\end{aligned}$$

Así pues, el capital a invertir a día de hoy sería de:

$$C=\frac{6000}{1.19439895}=5023.447\text{ €}.$$

4. *Una deuda de 5000€ vence de aquí a 8 meses, otra de 3000€ dentro de 1 año y una tercera de 8000€ al cabo de 15 meses. Si se desea cancelarlas mediante un único pago que sea igual a la suma aritmética de sus valores nominales, determínese el momento en que se debe hacer si la cancelación se lleva a cabo según el factor financiero* $f(T,T') = (1.05)^{T'-T}$.

SOLUCIÓN: Las deudas de las que nos habla el ejercicio vienen representadas por los capitales financieros:

$$\left(5000,\frac{8}{12}\right),\ (3000,1)\ \text{y}\ \left(8000,\frac{15}{12}\right).$$ [12]

Puesto que la suma aritmética de sus cuantías asciende a 16000€, una estrategia de resolución del problema consiste en considerar el valor actual V_0 (es decir el valor a día de hoy) de las tres deudas que es:

$$\begin{aligned} V_0 &= 5000\cdot f\left(\frac{8}{12},0\right) + 3000\cdot f(1,0) + 8000\cdot f\left(\frac{15}{12},0\right) = \\ &= 5000\cdot(1.05)^{0-\frac{8}{12}} + 3000\cdot(1.05)^{0-1} + 8000\cdot(1.05)^{0-\frac{15}{12}} = \\ &= 15223.804€ \end{aligned}$$

y calcular el diferimiento T' que satisface la equivalencia:

$$(V_0,0) \sim (16000,T').$$

En efecto, puesto que:

$$16000 = V_0\cdot f(0,T') = 15223.804\cdot(1.05)^{T'-0}$$

deducimos que:

$$T' = \frac{\ln\left(\dfrac{16000}{15223.804}\right)}{\ln 1.05} = 1.019231435.$$ [13]

Es decir, que la cancelación de las tres deudas ha de hacerse dentro de 1 año y 7 días.

[12] Téngase en cuenta que los diferimientos hay que expresarlos en años.

[13] El diferimiento así obtenido se denomina **diferimiento medio** de los tres capitales. El diferimiento medio varía si lo hace el factor financiero con el que se valora.

5. *Supóngase la operación financiera que consiste en la cesión hoy a un particular, por parte de una entidad bancaria, de 1000€ con el compromiso de que le sean devueltos 1100€ dentro de 2 años. ¿Cuál es el precio que el particular paga a la entidad bancaria por dicha cesión? ¿Cuál es la cuantía monetaria que el particular paga por cada € recibido? ¿Cuál es la que recibe la entidad bancaria por cada € invertido?*

SOLUCIÓN: Como vemos, se trata de la operación financiera:

$$(1000,0) \sim (1100,2).$$

El precio que el particular (el sujeto pasivo) debe satisfacer a la entidad bancaria (el sujeto activo) por disponer hoy de 1000€ es el montante de la diferencia:

$$\Delta C = C' - C = 1100 - 1000 = 100\text{€}.$$ [14]

Sin embargo, el momento del pago depende de la óptica de cada uno de los sujetos: desde una perspectiva financiera, el sujeto activo recibe el precio total al final de la operación mientras que el pasivo lo paga al inicio. Así pues, la entidad bancaria se verá recompensada dentro de 2 años con:

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{100}{1000} = 0.1\text{€}$$

por cada uno de los 1000€ que hoy cede,[15] mientras que el particular ha de pagarle hoy al activo:

$$\frac{\Delta C}{C'} = \frac{100}{1100} = 0.\widehat{09}\,\text{€}$$

por cada € de los 1100€ que recibe.[16] Nótese las diferentes interpretaciones de dan de un mismo fenómeno económico los sujetos activo y pasivo.

[14] Esta cuantía monetaria se denomina **precio total** de la operación financiera.
[15] Este precio se denomina **precio unitario de interés**.
[16] Este precio se denomina **precio unitario de descuento**. En la práctica, este precio se le descuenta automáticamente al sujeto pasivo en el momento de formalizar la operación.

2. REGÍMENES FINANCIEROS

Los **regímenes financieros** son la expresión formal de los pactos que en los mercados financieros reglados establecen entre sí los sujetos económicos. Los regímenes financieros pueden clasificarse desde una perspectiva doble:

1. Según se adapten, o no, al modelo matemático que hemos expuesto tenemos los **regímenes racionales** o los **regímenes prácticos**.
2. Según la perspectiva del sujeto económico tenemos, por un lado, los **regímenes de interés** (o **de capitalización)** cuando es el punto de vista del sujeto activo el que cuenta, y los **regímenes de actualización** (o **de descuento**) cuando es el sujeto pasivo el que centra la atención.

Para poder llevar a cabo el análisis formal de los regímenes financieros, debemos introducir el concepto de **precio** (o **interés**) de una operación financiera simple $(C,T) \sim (C',T')$. Dado que una operación de este tipo supone siempre la entrega, por parte del sujeto activo, de una disponibilidad monetaria inicial C en un momento T con el compromiso, por parte del sujeto pasivo, de restituirlo en otro momento T' posterior, se origina así un servicio financiero que, como tal, debe remunerarse. En definitiva, este servicio supone, por un lado, la cesión de C durante el plazo temporal $\Delta T = T' - T$ y, por otro, el cobro adicional, por parte del sujeto activo, de la cuantía monetaria $\Delta C = C' - C$ denominada **precio total** de la operación financiera. Lo fundamental a la hora de considerar el precio total de una operación financiera simple es cómo se obtiene y en qué momento el sujeto pasivo se lo paga al activo. Con estas consideraciones previas en la mano, estudiaremos en primer lugar los regímenes financieros prácticos de interés simple a tanto vencido y de descuento comercial.

2.1 Regímenes financieros prácticos de interés simple a tanto vencido y de descuento comercial

Este tipo de regímenes se utilizan en el mercado financiero para pactar operaciones a corto término, es decir, operaciones en donde el plazo $\Delta T = T' - T$ suele ser inferior o igual a un año. Veamos primero el de **interés simple a tanto vencido**.

Definición. *Cuando dos sujetos económicos acuerdan la operación financiera* $(C,T) \sim (C',T')$, *con* $T \le T'$, *según un régimen financiero de* ***interés simple a tanto vencido*** *es que han establecido los siguientes pactos:*

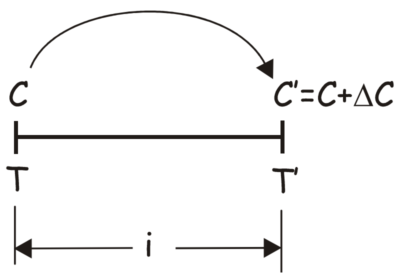
1. *Se cede un capital* C *en un momento* T *con el compromiso de restituirlo en un momento futuro* T'. *El precio total* ΔC *por esta cesión es proporcional a la cuantía inicial* C *y al plazo* ΔT *en la forma:*

$$\Delta C = C' - C = i \cdot C \cdot \Delta T \text{,}$$[17]

   siendo $i > 0$ *una constante de proporcionalidad denominada* ***tanto anual de interés vencido.***

2. *El precio total* ΔC *se hace efectivo al final, en* T'.

Esquemáticamente:



[17] Esta igualdad se conoce por el nombre de **Postulado Clásico de la Matemática Financiera**.

Por ejemplo, la compra de una Letra del Tesoro está sujeta un régimen financiero de este tipo desde la óptica del sujeto activo, que es el comprador. Puesto que en toda operación financiera $(C,T)\sim(C',T')$ sujeta a este régimen se tiene que:

$$f(T,T')=\frac{C'}{C}=\frac{C+(C'-C)}{C}=1+\frac{i\cdot C\cdot\Delta T}{C}=1+i\cdot\Delta T=1+i\cdot(T'-T)$$

deducimos la siguiente propiedad:

Propiedad. *El factor financiero de interés asociado al régimen financiero de interés simple a tanto vencido $i>0$ es:*

$$f(T,T')=1+i\cdot(T'-T),\ \textit{para todo}\ T\le T'.$$ [18]

<u>Ejemplo</u>: *Calcúlese la cuantía que se obtiene al cabo de 180 días si hoy depositamos 1500€ en una cuenta corriente que da el 3% anual de interés simple vencido (considérese el año natural de 365 días).*

SOLUCIÓN: En este caso se tiene que $i=3\%=0.03$, $C=1500$€, $T=0$ y $T'=180/365$. Por tanto se ha de plantear la operación financiera:

$$(1500,0)\sim\left(C',\frac{180}{365}\right).$$

Así pues, y según el factor financiero hallado, se deduce que:

$$C'=C\cdot f(T,T')=1500\cdot\left(1+0.03\cdot\left(\frac{180}{365}-0\right)\right)=1522.192€.$$

Téngase presente que el precio total de la operación:

$$\Delta C=C'-C=1522.192-1500=22.192€$$

nos lo pagará el sujeto pasivo (la entidad financiera) dentro de 180 días.

---

[18] Se trata de un **factor financiero de interés** puesto que $f(T,T')>1$. Este factor financiero no satisface algunas de las propiedades apuntadas en el tema 1 (véase el ejercicio 1 del mismo).

Otro de los regímenes financieros prácticos más utilizados en los mercados es el de **descuento simple comercial**.

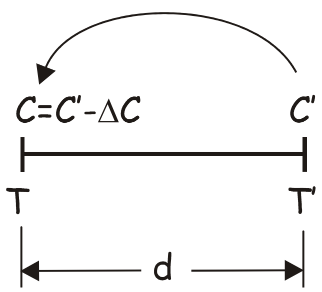
Definición. *Cuando dos sujetos económicos acuerdan la operación financiera* $(C,T) \sim (C',T')$, *con* $T \leq T'$, *según un régimen financiero de* ***descuento simple comercial*** *es que han establecido los siguientes pactos:*

1. *Se anticipa un capital* C' *disponible en un momento futuro* T' *a otro anterior* T. *El precio total* ΔC *por este anticipo es proporcional a la cuantía final* C' *y al plazo* ΔT *de la operación en la forma:*

   $$\Delta C = d \cdot C' \cdot \Delta T ,$$

   siendo $d > 0$ *una constante de proporcionalidad denominada* ***tanto anual de descuento.***
2. *El precio total* ΔC *se hace efectivo al inicio, en* T.

Esquemáticamente:



Por ejemplo, los "efectos comerciales" (o "de comercio") que descuentan las entidades financieras son operaciones financieras sujetas a un régimen de este tipo siempre y cuando la perspectiva considerada sea la del sujeto pasivo, el propietario del efecto. Este régimen financiero, como el anterior, también tiene asociado un factor financiero. Veámoslo.

Ya que en toda operación financiera $(C,T) \sim (C',T')$ sujeta a este régimen se tiene que:

$$f(T',T) = \frac{C}{C'} = \frac{C' - (C' - C)}{C'} = 1 - \frac{d \cdot C' \cdot \Delta T}{C'} = 1 - d \cdot \Delta T = 1 - d \cdot (T' - T)$$

se deduce la siguiente propiedad:

Propiedad. *El factor financiero de descuento que está asociado al régimen financiero de descuento simple comercial a tanto de descuento $d > 0$ es:*

$$f(T',T) = 1 - d \cdot (T' - T), \text{ para todo } T \leq T'.$$[19]

<u>Ejemplo</u>: *Calcúlese el líquido que resulta de descontar hoy un efecto de comercio de nominal 3000€ que vence dentro de 90 días, si el descuento se efectúa bajo un régimen de descuento comercial del 7% anual sin considerar gastos (hay que considerar siempre el año comercial de 360 días).*

SOLUCIÓN: En este caso se tiene que $d = 7\% = 0.07$, $C' = 3000$ €, $T = 0$ y $T' = 90/360$. Por tanto, cabe plantear la operación financiera:

$$(C,0) \sim \left(3000, \frac{90}{360}\right).$$

Así pues, y teniendo en cuenta la expresión del factor financiero que acabamos de introducir, el líquido descontado C es igual a:

$$C = C' \cdot f(T',T) = 3000 \cdot \left(1 - 0.07 \cdot \left(\frac{90}{360} - 0\right)\right) = 2947.5 \text{ €}.$$

El precio total de la operación:

$$\Delta C = C' - C = 52.5 \text{ €}$$

lo hemos de pagar hoy en el momento de formalizar el descuento.

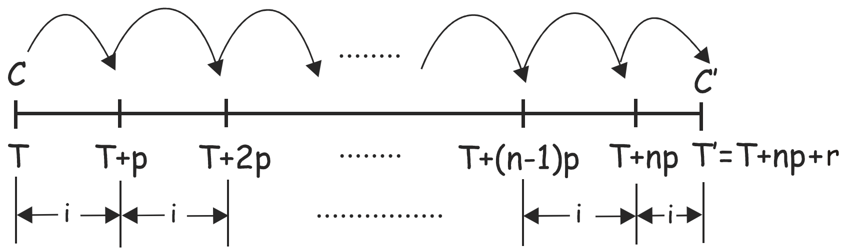
[19] Se trata de un **factor financiero de descuento** puesto que $f(T',T) < 1$. Como en el caso anterior, este factor financiero no satisface todas las propiedades del modelo.

2.2. Régimen financiero racional de interés compuesto. Tanto nominal y tanto efectivo asociados.

Cuando el plazo de la operación financiera ΔT es superior a un año, los mercados suelen fraccionar el cálculo del precio total ΔC en periodos de idéntica duración de manera que el precio devengado al final (o al inicio) de cada periodo se acumula al inicio del siguiente (o al final del anterior). En todos estos casos, los factores financieros que resultan satisfacen las propiedades del modelo estudiado y, por ello, son siempre regímenes financieros racionales. Nosotros, aquí, sólo analizaremos el régimen financiero de **interés compuesto a tanto vencido y constante** que es el más utilizado.

Definición. *Cuando dos sujetos económicos acuerdan la operación financiera* $(C,T) \sim (C',T')$, *con* $T \leq T'$, *bajo un régimen de **interés compuesto a tanto vencido y constante*** $i > 0$ *es que ha establecido los pactos siguientes:*

1. *El plazo de la operación* ΔT *se divide en* n *periodos de idéntica duración* p *(medida en años),* $\Delta T = T' - T = n \cdot p + r$, *siendo* $0 \leq r < p$ *un residuo, tal que el precio final* $\Delta C = C' - C$ *se va acumulando de forma progresiva en cada uno de los periodos teniendo en cuenta que el precio por periodo es proporcional a la cuantía monetaria acumulada al inicio del mismo y a su duración, con* $i > 0$ *como constante de de proporcionalidad. De forma esquemática:*



2. *El precio total* ΔC *es hace efectivo al final, en* T'.

Análogamente a como sucede con los dos regímenes financieros anteriores, este régimen también tiene asociado un factor financiero característico que, además, satisface las cinco propiedades del modelo estudiado.[20] La siguiente propiedad nos da la expresión formal de este factor financiero para un régimen de interés compuesto a tanto constante vencido.

Propiedad. *El factor financiero asociado al régimen de interés compuesto a tanto constante vencido* $i > 0$ *es:*

$$f(T,T') = (1 + i \cdot p)^{\frac{T'-T}{p}}$$

para todo par de diferimientos $T, T' \geq 0$*, siendo* p *la duración en años de los* n *periodos.*[21]

<u>Ejemplo</u>: *Calcúlese el capital que se obtiene al depositar 6000€ durante 2 años en una cuenta corriente que da un 2.5% anual pagable por trimestres.*

SOLUCIÓN: El régimen financiero, en este caso, es el de interés compuesto a tanto constante $i = 2.5\% = 0.025$. Si la cuenta se abriera hoy, la operación financiera a considerar sería $(6000, 0) \sim (C', 2)$. Puesto que los periodos son trimestres $(p = 1/4)$ tenemos que:

$$\frac{T'-T}{p} = \frac{2-0}{1/4} = 8 \text{ trimestres.}$$[22]

Así pues, el capital C' que se obtendrá dentro de 2 años será igual a:

$$C' = C \cdot (1 + i \cdot p)^{\frac{T'-T}{p}} = 6000 \cdot \left(1 + 0.025 \cdot \frac{1}{4}\right)^{8} = 6306.645€.$$

---

[20] Véase el ejercicio 1 del tema 1.

[21] Este factor financiero es de **interés** cuando $T \leq T'$ y de **descuento** si $T' \leq T$.

[22] Como vemos no hay residuo. En estos casos, el exponente $(T'-T)/p$ coincide con el número n de periodos que contiene el plazo $\Delta T = T'-T$ de la operación

Ejemplo: *Calcúlese el líquido que se obtiene, al cabo de un año y 9 meses, al depositar hoy 1000€ en una cuenta bancaria que ofrece el 3% de interés anual pagable semestralmente.*

SOLUCIÓN: El régimen financiero a considerar es el de interés compuesto a tanto constante $i = 3\% = 0.03$ y la operación financiera es:

$$(1000,0) \sim \left(C',1+\frac{9}{12}\right).$$

Ya que el precio se acumula semestralmente y el plazo de la operación es de 1 año y nueve meses, es decir, 3 semestres y 1 trimestre, tenemos un residuo r de un trimestre $(r = 1/4)$. Por tanto:

$$p = \frac{1}{2},\ n = 3 \text{ y } r = \frac{1}{4}.$$

Así pues, el líquido obtenido será de:

$$C' = C \cdot (1 + i \cdot p)^{\frac{T'-T}{p}} = 1000 \cdot \left(1 + 0.03 \cdot \frac{1}{2}\right)^{\frac{\left(1+\frac{9}{12}\right)-0}{1/2}} = 1053.492€.$$

Hay que tener presente también que los mercados de capital ofrecen otra posibilidad de gestionar, financieramente hablando, el residuo: es lo que se entiende por aplicar el **convenio lineal**.[23] En concreto, el convenio lineal consiste en aplicar el régimen de interés simple al mismo tanto anual sobre la cuantía obtenida al final del último periodo y a lo largo del residuo. En nuestro caso, y puesto que esta cuantía es de:

$$C \cdot (1 + i \cdot p)^n = 1000 \cdot \left(1 + \frac{0.03}{2}\right)^3 = 1045.678€$$

el líquido obtenido sería ahora de:

$$C' = 1045.678 \cdot (1 + i \cdot r) = 1045.678 \cdot \left(1 + 0.03 \cdot \frac{1}{4}\right) = 1053.521€.$$[24]

[23] La alternativa anterior, que es la más usual y que es la que nosotros vamos a considerar, se denomina **convenio exponencial**.

[24] Nótese que, en este caso, la cuantía final es superior a la del convenio exponencial.

Llegados a este punto hemos de introducir los denominados **tantos de interés periódicos** con los que vienen expresados en el mercado todos los regímenes de interés compuesto. Para ello cabe tener presente lo que es la **frecuencia anual de capitalización** asociada a un régimen de este tipo que no es otra cosa que el número de veces que, al cabo del año, se acumulan los intereses. Por ejemplo, la frecuencia anual de capitalización de un régimen de interés compuesto del 2.5% anual capitalizable trimestralmente, $p = 1/4$, es 4 ya que al final de cada uno de los cuatro trimestres del año los intereses devengados se transforman en capital. Así pues, y en general, la frecuencia anual de capitalización m de un régimen de interés compuesto de periodo p es igual a:

$$m = \frac{1}{p}.$$

En consecuencia, tenemos la siguiente definición:

Definición.

5. *El **tanto nominal** de interés periódico asociado a un régimen de interés compuesto a tanto constante $i > 0$ y de frecuencia m es:*

$$i_m = i.$$

6. *El **tanto efectivo** de interés periódico asociado a un régimen de interés compuesto a tanto constante $i > 0$ y de frecuencia m es:*

$$I_m = \frac{i}{m}.$$

Nótese que el tanto nominal i_m es, precisamente, el tanto anual de interés $i > 0$ vigente en cada periodo. Obsérvese, de paso, que los tantos nominal y efectivo coinciden cuando el periodo de capitalización es de 1 año $(p = m = 1)$.

Ejemplo: *Calcúlese los tantos nominal y efectivo de un:*

a. *2.5% anual pagable (acumulable, capitalizable) por trimestres (también de frecuencia trimestral).*

b. *0.2% mensual (efectivo mensual).*

SOLUCIÓN: a) En este caso la frecuencia anual de capitalización es igual a $m=4$, y los tantos nominal y efectivo de interés periódico son:

$$i_4 = 2.5\% = 0.025 \text{ y } I_4 = \frac{i_4}{4} = \frac{0.025}{4} = 0.00625.$$

b) Ahora la frecuencia anual de capitalización es $m=12$. Por tanto, los tantos efectivo y nominal de interés periódico serán:

$$I_{12} = 0.2\% = 0.002 \text{ y } i_{12} = 12 \cdot I_{12} = 12 \cdot 0.002 = 0.024 = 2.4\%.$$

Puesto que:

$$f(T,T') = (1+i\cdot p)^{\frac{T'-T}{p}} = \left(1+i\cdot\frac{1}{1/p}\right)^{\frac{1}{p}\cdot(T'-T)} = \left(1+\frac{i}{m}\right)^{m(T'-T)} = (1+I_m)^{m(T'-T)}$$

en la práctica es el tanto efectivo de interés periódico I_m el que se utiliza en los cálculos financieros a través de la igualdad anterior. Veamos un ejemplo.

Ejemplo: *Calcúlese la cantidad a depositar dentro de un año en una cuenta bancaria que da el 2% anual capitalizable mensualmente si se quiere disponer de 1000€ dentro de dos años y medio.*

SOLUCIÓN: Ya que:

$$m=12,\ i_{12}=0.02 \text{ y } I_{12} = \frac{i_{12}}{12} = \frac{0.02}{12} = 0.001\widehat{6},$$

la cantidad C a depositar dentro de un año, $T=1$, para obtener 1000€ dentro de dos años y medio, $T'=2.5$, será de:

$$C = C'\cdot f(T',T) = C'\cdot(1+I_m)^{m(T-T')} = 1000\cdot\left(1+0.001\widehat{6}\right)^{12(1-2.5)} = 970.470\text{€}.$$

2.3. Regímenes financieros equivalentes

Aunque en la práctica el precio total de una operación financiera se calcula a través del régimen financiero con el cual se ha pactado, éste no determina unívocamente su valor ya que se puede obtener el mismo precio bajo otro régimen financiero "equivalente" al inicialmente convenido. Vamos a ver un ejemplo.

Ejemplo: *Compruébese que el líquido resultante en dos cuentas de depósito que se abrieron hoy hace un año con una imposición inicial de 1500€, y que se pactaron respectivamente a un 2% anual de interés simple y a un 1.98% de interés anual capitalizable mensualmente, es el mismo.*

SOLUCIÓN: En el primer caso, $i = 2\% = 0.02$ y el líquido que se obtiene al cabo de un año es de:

$$C' = C \cdot \left(1 + i \cdot \left(T' - T\right)\right) = 1500 \cdot \left(1 + 0.02 \cdot (1 - 0)\right) = 1530\text{€}.$$

En el segundo caso, tenemos que:

$$m = 12\ ,\ i_{12} = 0.0198 \text{ y } I_{12} = \frac{i_{12}}{12} = \frac{0.0198}{12} = 0.00165\,.$$

Por tanto, el líquido resultante al cabo de un año es de:

$$C' = C \cdot \left(1 + I_m\right)^{m(T'-T)} = 1500 \cdot \left(1 + 0.00165\right)^{12(1-0)} = 1530\text{€}.$$

Como vemos, los dos regímenes financieros de este ejemplo determinan la misma operación financiera:

$$(1500,0) \sim (1530,1)$$

y, en consecuencia, el mismo precio total:

$$\Delta C = C' - C = 30\text{€}.$$

Así pues, y respecto a esta operación financiera, podemos decir que los regímenes financieros de interés simple al 2% y de interés compuesto del 1.98% anual capitalizable mensualmente son **equivalentes**. Fijémonos que es esencial no perder de vista la operación financiera respecto la cual los dos regímenes financieros son equivalentes.

Definición. *Dos regímenes financieros son **equivalentes** respecto una operación financiera dada* $(C,T) \sim (C',T')$ *si determinan el mismo precio total* $\Delta C = C' - C$.

Por su implantación en la práctica financiera nosotros estudiaremos tan solo los regímenes de interés compuesto equivalentes. Es importante señalar que, en todos estos casos, los regímenes de interés compuesto equivalentes no dependen ahora de ninguna operación financiera subyacente. Esto es lo que nos dice la siguiente propiedad.

Propiedad. *Dos regímenes financieros de interés compuesto de tantos efectivos* I_m *y* $I_{m'}$ *son equivalentes si y sólo si:*

$$(1 + I_m)^m = (1 + I_{m'})^{m'} .$$

De la igualdad anterior, se deduce la fórmula:

$$I_{m'} = (1 + I_m)^{\frac{m}{m'}} - 1$$

que nos permite calcular el tanto efectivo $I_{m'}$ de periodicidad m' equivalente al tanto efectivo I_m de periodicidad m. Veamos un ejemplo.

Ejemplo: *Pruébese que un interés efectivo del 3% anual es equivalente a un 2.98% anual pagadero por semestres y hállese, asimismo, el tanto efectivo mensual equivalente a ellos.*

SOLUCIÓN: De entrada, el tanto efectivo de interés I_2 asociado al tanto nominal $i_2 = 2.98\%$ es $I_2 = i_2 / 2 = 0.0298/2 = 0.0149 = 1.49\%$. Por tanto, hay que probar que $I_1 = 3\% = 0.03$ y $I_2 = 1.49\% = 0.0149$ son tantos efectivos equivalentes. En efecto, a partir de la fórmula anterior tenemos que:

$$I_1 = (1+I_2)^{\frac{2}{1}} - 1 = (1.0149)^2 - 1 = 0.03002201 \simeq 3\%.$$ [25]

Finalmente, calcularemos el tanto efectivo mensual I_{12} equivalente a un 3% anual (o, lo que es lo mismo, a un 2.98% anual pagadero por semestres). De forma análoga, y a partir de la fórmula precedente, deducimos que:

$$I_{12} = (1+I_1)^{\frac{1}{12}} - 1 = (1.03)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0.00246626 \simeq 0.247\%$$

Así pues, allí donde aparezca un 3% efectivo anual podemos poner siempre un 2.98% anual capitalizable por semestres o un 0.247% efectivo mensual.

Consecuentemente, toda operación financiera puede caracterizarse por un tanto efectivo de interés compuesto de frecuencia arbitraria. En este sentido cabe destacar el **tanto efectivo de interés anual** I_1 con el que vienen referenciados en los mercados todos los productos financieros. Este tanto efectivo nos permite comparar las rentabilidades de dos o más de estos productos. Debemos de señalar que el tanto I_1 coincide con el **TAE** (Tanto Anual Equivalente) de una operación financiera si no median gastos financieros suplementarios.[26]

[25] El símbolo $\simeq$ indica aproximadamente igual.

[26] La Circular 8/1990 del Banco de España de 7 de septiembre de 1990 estipula como se calcula el TAE de cualquier operación financiera del mercado.

El ejemplo que cierra este tema nos muestra cómo calcular el TAE de una operación financiera.

Ejemplo: *Calcúlese:*

a. El líquido descontado hoy de un efecto comercial de nominal 1000€ que será efectivo dentro de un mes, si se descuenta al 3.6% anual de descuento comercial sabiendo que hay unos gastos del 0.2% sobre el nominal.

b. El TAE de esta operación financiera.

SOLUCIÓN: a) Ya que hay unos gastos del 0.2% sobre el nominal:

$$g = 0.2\% = 0.002$$

el líquido neto descontado C será igual al descuento de los 1000€ menos el 0.2% de 1000€, es decir, que:

$$C = 1000\left(1 - 0.036\cdot\frac{1}{12}\right) - 0.002\cdot 1000 = 1000\left(1 - \frac{0.036}{12} - 0.002\right) = 995\,€.$$

b) Puesto que el líquido resultante de 995€ contempla ya los gastos financieros de la operación de descuento deducimos que, para obtener el TAE I_1 asociado, cabrá plantear la equivalencia:

$$(995,0)\underset{I_1}{\sim}\left(1000,\frac{1}{12}\right).$$ [27]

Por tanto:

$$1000 = 995(1+I_1)^{1\cdot\left(\frac{1}{12}-0\right)} = 995(1+I_1)^{\frac{1}{12}}$$

y, en consecuencia:

$$I_1 = \left(\frac{1000}{995}\right)^{12} - 1 = 0.06199636 \simeq 6.2\%.$$

[27] A partir de ahora podemos indicar, como en este caso, el régimen financiero asociado una operación financiera por medio de su tanto de interés o de descuento escrito bajo el símbolo de equivalencia financiera $\sim$.

2.4. Ejercicios resueltos

1. *Calcúlese el precio de compra de una Letra del Tesoro que vence dentro de 240 días bajo régimen financiero de interés simple vencido del 2.5% anual (considérese ahora el año comercial de 360 días).*

SOLUCIÓN: En este caso tenemos que:

$$i = 2.5\% = 0.025\,,\ C' = 1000\,€,\ T = 0 \text{ y } T' = \frac{240}{360}.$$

Así pues, la operación financiera a considerar será:

$$(C,0) \underset{i=0.025}{\sim} \left(1000, \frac{240}{360}\right)$$

siendo C, precisamente, el precio de compra ya que, según el enunciado, no median gastos a considerar. Por tanto, y teniendo presente la expresión del factor financiero de interés simple a tanto vencido:

$$f(T,T') = 1 + i \cdot (T' - T) = 1 + 0.025 \cdot \left(\frac{240}{360} - 0\right) = 1.01\widehat{6}$$

y la ecuación de equilibrio de la operación $C' = C \cdot f(T,T')$ deducimos que:

$$C = \frac{C'}{f(T,T')} = \frac{1000}{1 + 0.025 \cdot \left(\frac{240}{360} - 0\right)} = \frac{1000}{1.01\widehat{6}} = 983.606\,€.$$

El precio total de la operación, que es:

$$\Delta C = C' - C = 16.393\,€$$

lo hará efectivo el Estado dentro de 240 días al poseedor de la Letra cuando le abone los 1000€. Hay que remarcar que para el Estado, que siempre es el sujeto pasivo en este tipo de operaciones, esta operación financiera ha sido una operación de descuento (**régimen financiero de descuento matemático** del 2.5% anual) ya que "descuenta" sus Letras, es decir, vende un certificado de curso legal que valdrá 1000€ dentro de 240 días por 983.606€.

2. *Calcúlese el valor monetario de una cámara digital que ofrece una entidad financiera al depositar 8900€ durante un año, teniendo en cuenta que la operación se pacta bajo un régimen de descuento comercial del 2% anual.*

SOLUCIÓN: En este caso el valor de la cámara V es el precio total de la operación financiera de descuento:

$$(C,0)\underset{d=0.02}{\sim}(8900,1)$$

siendo C el líquido descontado. Por tanto:

$$V=\Delta C=C'-C\text{, con } C'=8900\text{ €.}$$

En consecuencia:

$$C=8900-V$$

y por tanto:

$$(8900-V,0)\underset{d=0.02}{\sim}(8900,1).$$

Así pues:

$$8900-V=8900\cdot(1-0.02\cdot 1)$$

y:

$$V=8900\cdot 0.02=178\text{ €.}$$

Mientras que para la entidad financiera (que es el sujeto pasivo) la operación es de descuento, para el inversor (el sujeto activo) la operación es de interés (**régimen financiero de interés simple a tanto anticipado** del 2%) ya que cobra 178€ por "anticipado" (la cámara) en el momento de suscribir el depósito. Este es el régimen financiero de interés más habitual en las operaciones financieras de "pago en especie". Hay que hacer notar que este valor V de la cámara no tiene por qué coincidir con su precio de mercado (nótese que si el tanto de descuento d varía también lo hace V).[28]

[28] Puede decirse, por tanto, que V es el precio "financiero" de la cámara.

3. *Calcúlese:*

a. *El tanto anual de interés simple vencido de una operación de depósito que consiste en invertir, durante 270 días, 2000€ para obtener 2050€.*

b. *El tanto anual de descuento comercial de una operación de descuento de un efecto de comercio de nominal 6000€ efectivos dentro de medio año y que, descontado hoy, se obtiene un líquido de 5850€.*

SOLUCIÓN: a) Cabe plantear, en este caso, la operación financiera:

$$(2000,0)\underset{i}{\sim}\left(2050,\frac{270}{365}\right).$$

Así pues:

$$2050 = 2000\left(1 + i \cdot \frac{270}{365}\right)$$

de donde:

$$i = \frac{\left(\frac{2050}{2000}\right) - 1}{\left(\frac{270}{365}\right)} = 0.03379629 \simeq 3.38\%.$$

b) Ahora, hay que plantear la operación financiera:

$$(5850,0)\underset{d}{\sim}\left(6000,\frac{1}{2}\right).$$

Así pues:

$$5850 = 6000\left(1 - d \cdot \frac{1}{2}\right)$$

de donde:

$$d = 2\left(1 - \frac{5850}{6000}\right) = 0.05 = 5\%.$$

En ambos casos, los tantos de interés simple vencido i y de descuento comercial d son **tantos de valoración** de las dos operaciones financieras.[29]

---

[29] Es muy importante tener en cuenta que una operación financiera no posee un único tanto de valoración, pues éste depende del régimen financiero que se haya escogido para pactarla.

4. *Al responsable financiero de una empresa se le ofrecen dos alternativas para descontar sus efectos comerciales:*

- *Descontarlos al 14% anual de descuento comercial sin gastos.*
- *Descontarlos al 12% anual con unos gastos del 0.4% sobre el nominal.*

Frente a esta disyuntiva, ¿cuál sería la alternativa más rentable?

SOLUCIÓN: Si N denota el nominal de un efecto comercial de plazo:

$$\Delta T = T' - T = t$$

el líquido descontado C_1 bajo la primera opción sería:

$$C_1 = N \cdot (1 - d \cdot t) = N \cdot (1 - 0.14 \cdot t)$$

mientras que con la segunda opción, con unos gastos de $g = 0.4\%$ sobre el nominal N, sería igual a:

$$\begin{aligned} C_2 &= N \cdot (1 - d \cdot t) - g \cdot N = N \cdot (1 - 0.12 \cdot t) - 0.004 \cdot N = \\ &= N \cdot (0.996 - 0.12 \cdot t). \end{aligned}$$

Veamos, en primer lugar, cuándo las dos opciones son indiferentes, es decir, cuándo $C_1 = C_2$. Es evidente que, en este caso, ha de darse la igualdad:

$$N \cdot (1 - 0.14 \cdot t) = N \cdot (0.996 - 0.12 \cdot t)$$

y, por tanto, que:

$$t = \frac{1 - 0.996}{0.14 - 0.12} = 0.2 \text{ años.}$$

Así pues, si el plazo de los efectos comerciales es de 2 meses y 12 días (0.2 años) las dos alternativas son iguales. Por contra, si el plazo es superior, pongamos por caso 1 año $(t = 1)$, la situación sería distinta ya que:

$$C_1 = N \cdot (1 - 0.14 \cdot 1) = N \cdot 0.86 < N \cdot 0.876 = N \cdot (0.996 - 0.12 \cdot 1) = C_2.$$

Consecuentemente, para plazos superiores a 2 meses y 12 días es más rentable la segunda opción mientras que para plazos inferiores lo es la primera.

5. *Un particular dispone de dos cuentas bancarias, la primera de las cuales le da un 3% de interés simple anual y la otra un interés anual capitalizable semestralmente al mismo tanto. Si en las dos cuentas depositó un capital inicial de 1000€, determínese las dos cuantías al cabo de un cuatrimestre.*

SOLUCIÓN: La operación financiera asociada a la primera cuenta es:

$$(1000,0)\underset{i=0.03}{\sim}\left(C',\frac{1}{3}\right).$$

Por tanto:

$$C' = 1000\cdot\left(1+0.03\cdot\frac{1}{3}\right)=1010\text{€}.$$

La segunda responde a la operación financiera:

$$(1000,0)\underset{i_2=0.03}{\sim}\left(C'',\frac{1}{3}\right).$$

Puesto que $I_2 = 0.03/2 = 0.015$, se tiene que:

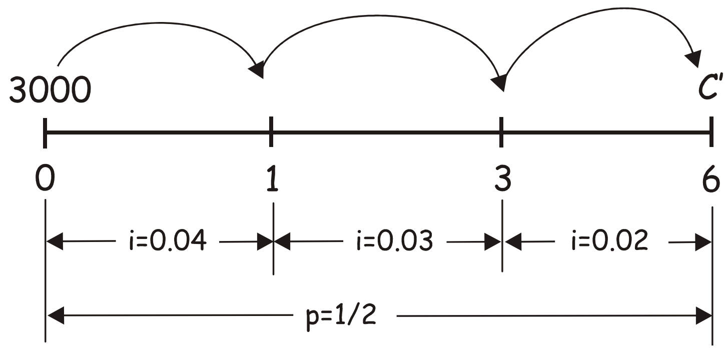
$$C'' = 1000\cdot(1+0.015)^{2\cdot\frac{1}{3}} = 1009.975\text{€}.$$

Como vemos, la primera inversión es la más rentable. Por eso, no siempre es cierto que el régimen de interés compuesto sea más rentable que el simple al mismo tanto de interés anual. En general, si comparamos el régimen de interés compuesto de periodo p a tanto constante $i>0$ con el de interés simple al mismo tanto, nos daremos cuenta que para aquellas operaciones financieras de plazo inferior a un periodo es preferible el de interés simple.[30] En cambio, pasa lo contrario para operaciones con un plazo superior a un periodo. Es evidente que, cuando el plazo es exactamente igual a un periodo, los dos regímenes son equivalentes.

[30] Por eso es más rentable que nos apliquen en un régimen de interés compuesto el convenio lineal que el exponencial sobre el residuo.

6. *Calcúlese la cuantía monetaria que se obtiene, al cabo de seis años, al depositar 3000€ en una cuenta bancaria que da un interés del 4% anual capitalizable semestralmente el primer año, un 3% los dos siguientes y un 2% los tres últimos.*

SOLUCIÓN: Gráficamente, el problema consiste en encontrar la cuantía C' de forma que:



En primer lugar, hay que calcular el capital acumulado al final del primer año. Este capital es:

$$3000 \cdot \left(1 + 0.04 \cdot \frac{1}{2}\right)^{\frac{1-0}{1/2}} = 3121.2€.$$

Así pues, al final del tercer año tendríamos un capital acumulado de:

$$3121.2 \cdot \left(1 + 0.03 \cdot \frac{1}{2}\right)^{\frac{3-1}{1/2}} = 3312.728€$$

y al final del sexto año un capital de:

$$C' = 3312.728 \cdot \left(1 + 0.02 \cdot \frac{1}{2}\right)^{\frac{6-3}{1/2}} = 3516.527€.$$

Esto es así gracias al principio de escindibilidad que satisface el factor financiero del interés compuesto. Nótese que se obtiene la misma cuantía directamente a través de la expresión:

$$C' = 3000 \cdot \left(1 + 0.04 \cdot \frac{1}{2}\right)^{\frac{1-0}{1/2}} \left(1 + 0.03 \cdot \frac{1}{2}\right)^{\frac{3-1}{1/2}} \left(1 + 0.02 \cdot \frac{1}{2}\right)^{\frac{6-3}{1/2}} = 3516.527€.$$

7. *A un particular, que acude a una entidad financiera con la intención de invertir 7000€ durante 4 años, se le ofrecen dos alternativas:*
   - *Invertirlos al 4.5% anual de interés simple.*
   - *Invertirlos al 4.25% de interés anual capitalizable mensualmente.*

En estas condiciones determínese: a) El capital que se obtendrá al cabo de los 4 años en cada una de las dos alternativas. b) Los tipos de interés efectivos anuales asociados. c) La mejor opción de las dos.

SOLUCIÓN: a) En la primera de las dos opciones debemos considerar la operación financiera $(7000,0)\underset{i=4.5\%}{\sim}(C',4)$ y, por tanto:

$$C' = 7000 \cdot (1 + 0.045 \cdot 4) = 8260\text{€}.$$

En la segunda opción hay que tener presente la operación financiera dada por $(7000,0)\underset{i_{12}=4.25\%}{\sim}(C'',4)$. Puesto que $I_{12} = i_{12}/12 = 0.0425/12 = 0.00354166$, se deduce que:

$$C'' = 7000 \cdot (1 + 0.0354166)^{12(4-0)} = 8294.64\text{€}.$$

b) Para calcular el tanto efectivo anual $I_1^{(1)}$ asociado a la primera opción cabe plantear la operación financiera $(7000,0)\underset{I_1^{(1)}}{\sim}(8260,4)$. Por tanto:

$$8260 = 7000 \cdot \left(1 + I_1^{(1)}\right)^{1\cdot 4} = 7000 \cdot \left(1 + I_1^{(1)}\right)^4$$

de donde:

$$I_1^{(1)} = (8260/7000)^{\frac{1}{4}} - 1 \simeq 4.22\%.$$

Finalmente, podemos calcular el tanto efectivo anual $I_1^{(2)}$ asociado a la segunda opción a partir de la igualdad:

$$I_1^{(2)} = (1 + I_{12})^{\frac{12}{1}} - 1 = 0.04333763 \simeq 4.33\%.$$

c) Es evidente que la segunda opción es preferible a la primera, tanto si atendemos a los capitales obtenidos al final de los cuatro años como si comparamos los tantos efectivos anuales asociados.

8. *De un capital colocado al 5% anual de interés anual compuesto durante 2 años ha resultado un importe que supera en 200€ al que se habría obtenido colocando el mismo capital a un interés simple del mismo tanto anual y durante el mismo plazo. Determínese la cuantía de dicho capital.*

SOLUCIÓN: Sea C el capital inicial. Si C' es la cuantía que se obtiene con la primera de las operaciones financieras:

$$(C,0)\underset{I_1=5\%}{\sim}(C',2)$$

entonces la segunda es, precisamente:

$$(C,0)\underset{i=5\%}{\sim}(C'-200,2)$$

ya que a un interés simple al tanto anual del 5% obtenemos 200€ menos. En consecuencia:

$$C' = C\cdot(1+I_1)^{T'-T} = C\cdot(1+0.05)^2 = C\cdot 1.1025$$

y:

$$C'-200 = C\cdot\left(1+i\cdot(T'-T)\right) = C\cdot(1+0.05\cdot 2) = C\cdot 1.1.$$

Así pues, de estas dos ecuaciones se deduce que:

$$C\cdot 1.1 = C'-200 = (C\cdot 1.1025)-200$$

de donde:

$$C\cdot(1.1025-1.1) = 200$$

y:

$$C = \frac{200}{1.1025-1.1} = 80000\text{€}.$$

Así pues, el montante monetario a invertir en la cuenta que da un 5% anual sería de 80000€.[31]

[31] Si no se especifica el régimen financiero, un 5% anual a secas es un 5% de interés compuesto anual.

9. *Un capital de 20000€ se invierte al 4% nominal acumulable por semestres y otro de 6000€ al 1% trimestral. Calcúlese el capital que tendríamos que invertir en una única cuenta bancaria que da el 3.75% anual capitalizable cuatrimestralmente si queremos obtener, al cabo de 5 años, el mismo importe que se obtiene conjuntamente con las otras dos inversiones.*

SOLUCIÓN: Ya que el tanto efectivo de la primera de las inversiones es igual a:

$$I_2 = \frac{i_2}{2} = \frac{0.04}{2} = 0.02$$

el de la segunda es:

$$I_4 = 0.01$$

y el de la tercera es:

$$I_3 = \frac{i_3}{3} = \frac{0.0375}{3} = 0.0125$$

deducimos que el capital monetario C' que se obtiene con las dos primeras es igual a la suma:

$$\begin{aligned} C' &= 20000 \cdot (1 + I_2)^{2\cdot(5-0)} + 6000 \cdot (1 + I_4)^{4\cdot(5-0)} = \\ &= 20000 \cdot (1 + 0.02)^{10} + 6000 \cdot (1 + 0.01)^{20} = \\ &= 31701.03€. \end{aligned}$$

Así pues, el capital C que debemos invertir en la cuenta bancaria durante 5 años al 3.75% anual acumulable por cuatrimestres satisface la equivalencia financiera:

$$(C,0) \underset{I_3=0.0125}{\sim} (31701.03,5).$$

Por tanto:

$$31701.03 = C \cdot (1 + I_3)^{3\cdot(5-0)} = C \cdot (1 + 0.0125)^{15} = C \cdot 1.20482918$$

y:

$$C = \frac{31701.03}{1.20482918} = 26311.64\,€.$$

10. *Una persona que poseía un efecto comercial de nominal 10000€ y que vencía el 30 de junio de 2008, lo vendió el 1 de octubre de 2006 por su valor descontado en esa fecha según un régimen de descuento comercial del 12% anual e inmediatamente colocó la cuantía obtenida en una cuenta bancaria al 12% anual acumulable por semestres. a) Calcúlese el líquido obtenido por la venta del efecto si había unos gastos financieros del 0.5% sobre el nominal. b) Determínese el saldo que tendrá la cuenta bancaria el 30 de junio de 2008. c) ¿Es rentable esta operación?*

SOLUCIÓN: a) Ya que el tanto de descuento es del $d = 12\% = 0.12$, que hay unos gastos del $g = 0.5\%$ sobre el nominal de 10000€ y que el plazo de la operación de descuento es de 21 meses (los que median entre el 1 de octubre de 2006 y el 30 de junio de 2008), el líquido descontado C es de:

$$C = 10000 \cdot \left(1 - 0.12 \cdot \frac{21}{12}\right) - 0.005 \cdot 10000 = 7850€.^{32}$$

b) Así pues, la operación financiera de inversión que se debe plantear es:

$$(7850,0) \underset{i_2 = 12\%}{\sim} \left(C', \frac{21}{12}\right)$$

siendo C' el saldo acumulado en la cuenta bancaria el 30 de junio de 2008, cuenta que se abrió el 1 de octubre de 2006 con una imposición inicial del líquido descontado de 7850€. Puesto que:

$$I_2 = \frac{i_2}{2} = \frac{0.12}{2} = 0.06$$

deducimos que:

$$C' = 7850 \cdot (1 + I_2)^{2\left(\frac{21}{12} - 0\right)} = 7850 \cdot (1 + 0.06)^{2\left(\frac{21}{12}\right)} = 9625.874€.$$

c) Como puede verse la operación de venta del efecto y posterior inversión en la cuenta bancaria no es rentable.

---

[32] Obsérvese que 21/12 es el plazo de la operación de descuento medido en años.

3. RENTAS FINANCIERAS

3.1 Concepto y clasificación de las rentas financieras

En muchos casos como, por ejemplo, en un préstamo de tipo hipotecario o en un plan de jubilación, las operaciones financieras tienen la prestación y/o la contraprestación formadas por más de un capital financiero (es lo que hemos definido en el primer tema como operación financiera compleja o parcialmente compleja). Pues bien, suele ser habitual que el cobro o pago de de las cuantías de estos capitales se produzca de forma periódica en el tiempo. Cuando esto es así, decimos que la prestación (o la contraprestación, según el caso) forman una **renta financiera**.[33]

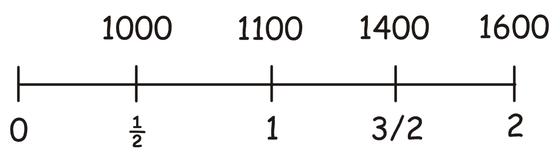
Definición. *Una **renta financiera** es todo conjunto finito (o infinito) de capitales financieros* $\{(C_1,T_1),\ldots,(C_r,T_r),\ldots\}$ *diferidos de manera periódica en el tiempo. En otras palabras, que existe una constante* $P > 0$ *tal que:*

$$T_r - T_{r-1} = P \text{, para todo } r > 1 .$$

Por definición, la cuantía C_r *es el **término** r-ésimo,* P *es el **periodo** y la constante* $M = 1/P$ *es la **frecuencia** de la renta.*

<u>Ejemplo</u>: $\{(1000,1/2),(1100,1),(1400,3/2),(1600,2)\}$ *es una renta financiera.*

SOLUCIÓN: Se trata de una renta de 4 términos, de periodo $P = 1/2$ y de frecuencia $M = 2$. Gráficamente:



[33] Hay que remarcar que una renta financiera no es una operación financiera.

En general, las rentas financieras pueden clasificarse siguiendo una serie de criterios relacionados con su estructura. Así pues:

1. En función del número de términos tenemos las:
    1.1. **Rentas temporales**, cuando sea finito.
    1.2. **Rentas perpetuas**, cuando sea infinito.
2. En función de la naturaleza de los términos tenemos las:
    2.1. **Rentas constantes**, cuando son iguales.
    2.2. **Rentas variables**, en caso contrario.
3. En función del origen temporal de la renta tenemos las:
    3.1. **Rentas inmediatas**, cuando coincide con el origen temporal 0.
    3.2. **Rentas diferidas**, cuando es posterior.
4. En función del vencimiento o disponibilidad de los términos tenemos las:
    4.1. **Rentas vencidas**, cuando vencen al final de cada periodo.
    4.2. **Rentas anticipadas**, cuando lo hacen al inicio.
5. En función de la periodicidad de la renta tenemos las:
    5.1. **Rentas mensuales**, cuando el periodo es de un mes.
    5.2. **Rentas trimestrales**, cuando es de un trimestre.
    5.3. **Rentas semestrales**, cuando es de un semestre.
    5.4. **Rentas anuales**, cuando es de un año.[34]

    y así sucesivamente.

Como podemos ver, la renta financiera del ejemplo anterior es una renta temporal variable, inmediata y vencida (o diferida un semestre y anticipada[35]) y semestral.

---

[34] Las rentas anuales se conocen también por el nombre de **anualidades**.

[35] Nótese que toda renta inmediata y vencida puede ser vista como diferida un periodo y anticipada. Sin embargo, lo usual es tratarla como inmediata y vencida.

Ejemplo: *Analícese la tipología de les rentas financieras temporales:*

a. $\left\{\left(1000,\frac{1}{3}\right),\left(1500,\frac{2}{3}\right),(400,1),\left(2000,1+\frac{1}{3}\right)\right\}$.

b. $\left\{\left(200,\frac{1}{12}\right),\left(200,\frac{1}{6}\right),\ldots,(200,15)\right\}$.

c. $\left\{(50,0),\left(50,\frac{1}{3}\right),\left(50,\frac{2}{3}\right),(50,1)\right\}$.

d. $\left\{(1500,1),\left(1500,1+\frac{1}{2}\right),(1500,2),\left(1500,2+\frac{1}{2}\right),(1500,3)\right\}$.

e. $\left\{(100,0),\left(105,\frac{1}{4}\right),\left(110,\frac{1}{2}\right),\left(115,\frac{3}{4}\right),(120,1),\ldots,(200,5)\right\}$.

SOLUCIÓN: a) Es una renta variable, inmediata y vencida, y cuatrimestral de 4 términos. En este caso:

$$P = 1/3 \text{ o } M = 3 \text{ y } n = 4.$$

b) Es una renta constante, inmediata y vencida, y mensual con $12 \cdot 15 = 180$ términos. Así pues:

$$P = 1/12 \text{ o } M = 12 \text{ y } n = 180.$$

c) Se trata ahora de una renta constante, inmediata y anticipada, y cuatrimestral de 4 términos también. En este caso:

$$P = 1/3 \text{ o } M = 3 \text{ y } n = 4.$$

d) Se trata de una renta constante, semestral, diferida medio año (pues su origen está en el primer semestre a contar desde el origen temporal 0) y vencida, de 5 términos. Por tanto:

$$P = 1/2 \text{ o } M = 2 \text{ y } n = 5.$$ [36]

e) Se trata de una renta variable, inmediata y anticipada, y trimestral de 20 términos. En consecuencia:

$$P = 1/4 \text{ o } M = 4 \text{ y } n = 20.$$

---

[36] Obsérvese que también podría ser vista como una renta diferida un año y anticipada como hemos indicado más arriba.

3.2. Valoración de las rentas financieras: valor actual y valor final de una renta

Vamos a estudiar, desde un punto de vista general, la estructura valorativa de una renta financiera temporal.[37] A tal fin, es necesario acudir al concepto de valor de un conjunto de capitales financieros que ya hemos visto. Recuérdese que el valor de un conjunto finito de capitales $\{(C_1,T_1),\ldots,(C_n,T_n)\}$ en un diferimiento T', y según un factor financiero $f(T,T')$, es igual a la cuantía C' de su suma financiera en T':

$$C' = \sum_{r=1}^{n} C_r \cdot f(T_r,T').$$

Definición. *El **valor actual** de una renta financiera temporal:*

$$\{(C_1,T_1),\ldots,(C_n,T_n)\}$$

*según un régimen financiero dado es su valor en el origen temporal 0 y su **valor final** será su valor al final del último periodo.*[38] *El valor actual suele denotarse por V_0 y el valor final por S_n.*

Para facilitar el cálculo de V_0 y de S_n consideraremos el tanto efectivo de interés periódico I_M de frecuencia la de la renta equivalente al tanto efectivo asociado al régimen financiero inicial. Por ejemplo, si este fuera I_m, el tanto efectivo a considerar I_M sería igual a:

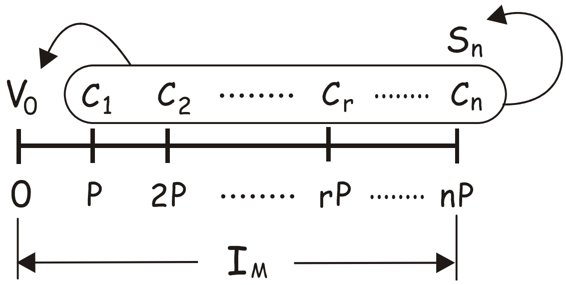
$$I_M = (1+I_m)^{\frac{m}{M}} - 1.$$[39]

[37] La valoración de la renta perpetua la trataremos en el apartado de las rentas constantes.

[38] Que seria en el último diferimiento T_n si la renta es vencida.

[39] Véase el apartado 2.3 del tema anterior.

Veremos, en primer lugar, cuáles son el valor actual y final de una **renta temporal**, **inmediata** y **vencida**. Dichos valores nos permitirán calcular los de los otros tipos de rentas. El esquema general de una tal renta es:



Nótese que el diferimiento T_r asociado al término r-ésimo C_r de una renta inmediata y vencida es $T_r = rP$. Esta igualdad surge del hecho de que $T_1 = P$ y que, en general, vale la relación $T_r - T_{r-1} = P$.

Propiedad. *El valor actual V_0 y final S_n de la renta financiera temporal, inmediata y vencida $\{(C_1,P),(C_2,2P),\ldots,(C_r,rP),\ldots,(C_n,nP)\}$ al tanto efectivo de valoración I_M asociado a la periodicidad de la misma son:*

1. $V_0 = C_1(1+I_M)^{-1} + C_2(1+I_M)^{-2} + \cdots + C_n(1+I_M)^{-n} = \sum_{r=1}^{n} C_r(1+I_M)^{-r}$.

2. $S_n = C_1(1+I_M)^{n-1} + C_2(1+I_M)^{n-2} + \cdots + C_{n-1}(1+I_M) + C_n = \sum_{r=1}^{n} C_r(1+I_M)^{n-r}$.

Obsérvese que el valor final S_n es igual al valor actual V_0 de la renta capitalizado n periodos:

$$S_n = V_0 \cdot (1+I_M)^n$$

y que el valor actual V_0 es igual al valor final S_n actualizado n periodos:

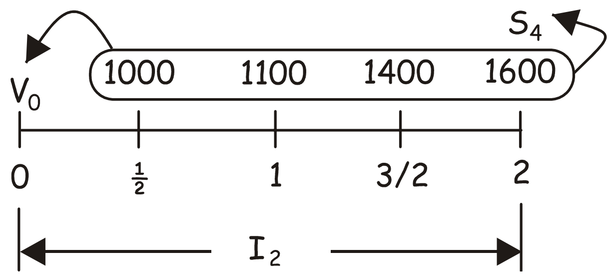
$$V_0 = S_n \cdot (1+I_M)^{-n}.$$

Ejemplo: *Calcúlense el valor actual y final de la renta financiera:*

$$\left\{\left(1000,\frac{1}{2}\right),(1100,1),\left(1400,\frac{3}{2}\right),(1600,2)\right\}$$

según un régimen financiero de interés compuesto del 2% trimestral.

SOLUCIÓN: Ya sabemos que se trata de una renta temporal, inmediata y vencida de 4 términos $(n=4)$ semestral $(M=2)$. Gráficamente:



Así pues, si queremos aplicar las fórmulas anteriores, hemos de considerar el tanto efectivo semestral I_2 equivalente al efectivo trimestral $I_4=2\%=0.02$ asociado al régimen financiero inicial. Ese tanto es:

$$I_2=(1+I_4)^{\frac{4}{2}}-1=1.02^2-1=0.0404.$$

Por tanto:

$$V_0=\sum_{r=1}^{4}C_r(1+I_2)^{-r}=1000\cdot(1.0404)^{-1}+1100\cdot(1.0404)^{-2}+$$
$$+1400\cdot(1.0404)^{-3}+1600\cdot(1.0404)^{-4}=4586.143€$$

y:

$$S_4=\sum_{r=1}^{4}C_r(1+I_2)^{4-r}=1000\cdot(1.0404)^{3}+1100\cdot(1.0404)^{2}+$$
$$+1400\cdot(1.0404)^{1}+1600=5373.398€$$

que coincide con:

$$S_4=V_0(1+I_2)^4=4586.143\cdot(1.0404)^4=5373.398€.$$

Nótese también que:

$$V_0=S_4(1+I_2)^{-4}=5373.398\cdot(1.0404)^{-4}=4586.143€.$$

Veamos cómo, a través de ejemplos concretos, podemos valorar cualquier renta financiera temporal a partir de las fórmulas anteriores. Para ello es esencial recurrir al esquema gráfico de la renta que se trate.

Ejemplo: *Calcúlense el valor actual y final de las rentas trimestrales:*

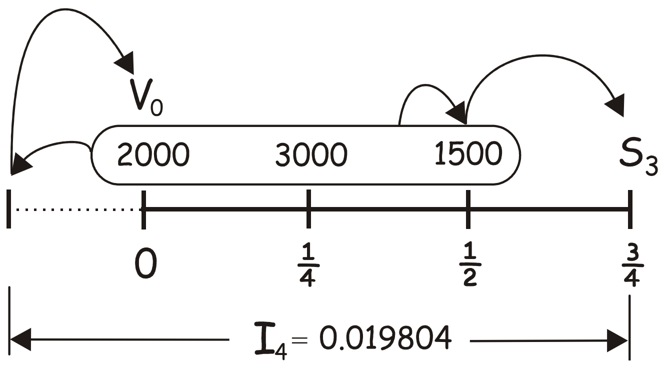
a. $\left\{(2000,0),\left(3000,\frac{1}{4}\right),\left(1500,\frac{1}{2}\right)\right\}$

b. $\left\{\left(2000,\frac{3}{4}\right),(3000,1),\left(1500,\frac{5}{4}\right)\right\}$

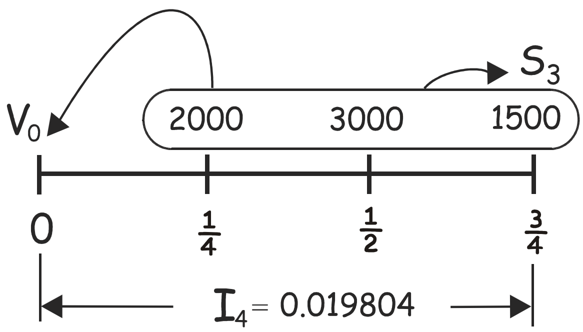
c. $\left\{(2000,1),\left(3000,1+\frac{1}{4}\right),\left(1500,1+\frac{1}{2}\right)\right\}$ [40]

al tanto efectivo de valoración asociado $I_4 = 0.019804$.

SOLUCIÓN: a) En este caso, se trata de la renta inmediata y anticipada:



Obsérvese que esta renta trimestral se encuentra "desplazada" un periodo a la izquierda respecto a la renta inmediata y vencida trimestral $(M = 4)$ de tres términos $(n = 3)$ asociada:



[40] Trátese como si fuera una renta anticipada.

Calculemos, en primer lugar, el valor actual y final de esta renta. Puesto que el tanto efectivo de valoración correspondiente es $I_4 = 0.019804$, se deduce que:

$$V_0 = 2000(1.019804)^{-1} + 3000(1.019804)^{-2} + 1500(1.019804)^{-3} = 6260.075€$$

y que:

$$S_3 = V_0 \cdot (1 + 0.019804)^3 = 6639.41€.$$

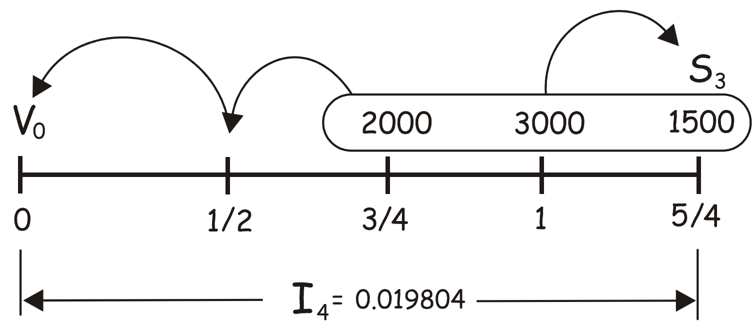
Estos valores hemos de tenerlos presentes a lo largo del ejemplo. Nótese ahora que los valores de la renta inmediata y anticipada que queremos hallar son los de esta renta capitalizados un periodo,[41] es decir, que:

$$V_0 = 6260.076 \cdot (1 + I_4)^1 = 6260.075 \cdot (1.019804) = 6384.05€$$

y que:

$$S_3 = 6639.41 \cdot (1 + I_4)^1 = 6639.41 \cdot (1.019804) = 6770.90€.$$

b) Se trata ahora de la renta trimestral diferida y vencida:



Obsérvese que esta renta coincide con la inmediata y vencida del caso anterior desplazada medio año a la derecha. Por tanto, su valor actual es el de esta renta actualizado medio año, es decir, 2 trimestres. Así pues, ahora:

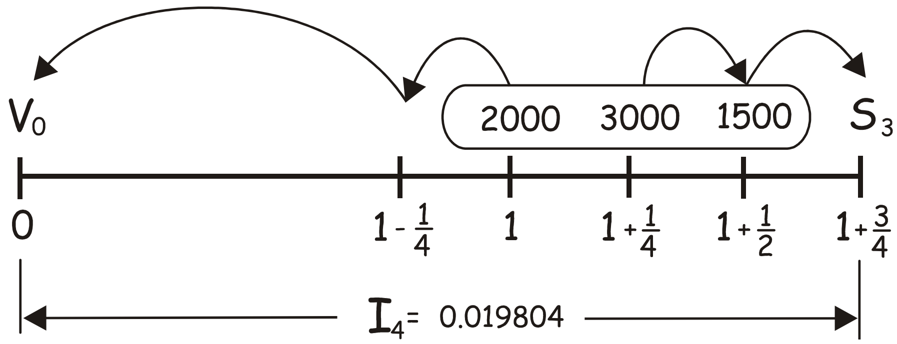
$$V_0 = 6260.075 \cdot (1 + I_4)^{-2} = 6260.075 \cdot (1.019804)^{-2} = 6019.30€.$$

Como podemos comprobar gráficamente, su valor final es el mismo que el de la renta inmediata y vencida asociada. Por tanto $S_3 = 6639.41€$.

---

41 Véase el gráfico inicial.

c) Se trata de la renta diferida 1 año y anticipada:



Obsérvese ahora que esta renta trimestral se encuentra desplazada tres periodos (1 año menos un trimestre) a la derecha respecto a la inmediata y vencida asociada. Por tanto, el valor actual que buscamos es el de esta renta actualizado tres periodos. En otras palabras:

$$V_0 = 6260.075 \cdot (1 + I_4)^{-3} = 6260.075 \cdot (1.019804)^{-3} = 5902.41€.$$

Como podemos ver, su valor final se obtendrá capitalizando el de la renta inmediata y vencida un periodo:

$$S_3 = 6639.41 \cdot (1 + I_4)^{1} = 6639.41 \cdot (1.019804) = 6770.90€.$$

Con este método es obvio que se puede valorar esta renta diferida con independencia de si lo es 1 año (anticipada) como nos dice el enunciado del ejemplo, o 9 meses (vencida).

Así pues, conociendo las fórmulas del valor actual y del valor final de las rentas temporales, inmediatas y vencidas podemos valorar cualquier otra renta financiera temporal siguiendo un proceso de resolución semejante al que hemos llevado a cabo en este ejemplo.

3.3. Rentas financieras constantes

El hecho de que las rentas financieras constantes aparezcan en la mayoría de las operaciones del mercado dinerario justifica el que les dediquemos un apartado específico. Recordemos, de entrada, la definición de renta constante.

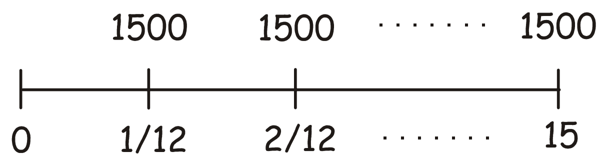
Definición. *Una* ***renta financiera constante*** *es un conjunto finito o infinito de capitales financieros de la forma:*

$$\{(\alpha, T_1), \ldots, (\alpha, T_r), \ldots\}$$

de manera que existe una constante $P > 0$ *tal que* $T_r - T_{r-1} = P$.

De manera análoga al caso general, la constante P es el periodo y $M = 1/P$ la frecuencia de la renta constante.

<u>Ejemplo</u>: *La renta financiera:*

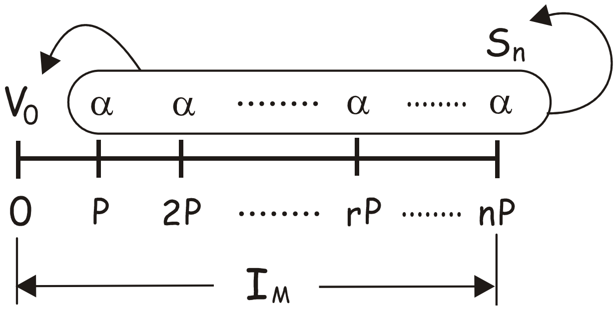


es una renta constante.

SOLUCIÓN: En efecto, se trata de una renta temporal inmediata y vencida, constante y mensual de término general igual a $\alpha = 1500$€ y que, además, tiene $n = 12 \cdot 15 = 180$ términos.

Lo que a nosotros nos interesa de este tipo de rentas es, obviamente, su estructura valorativa y ésta se va a obtener como un caso particular de la de las rentas temporales, inmediatas y vencidas en general.

En efecto, veamos a continuación cuáles son el valor actual y final de una **renta constante temporal**, **inmediata** y **vencida**. Gráficamente:

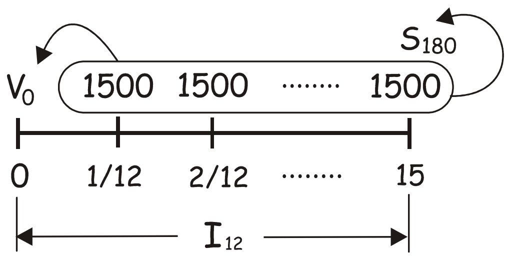


Propiedad. *El valor actual V_0 y final S_n de una renta temporal constante de término general α, inmediata y vencida, de n términos y valorada al tanto efectivo de interés I_M asociado son:*

1. $V_0 = \alpha \cdot \dfrac{1-(1+I_M)^{-n}}{I_M} = \alpha \cdot a_{\overline{n}|I_M}$.

2. $S_n = V_0(1+I_M)^n = \alpha \cdot \dfrac{(1+I_M)^n - 1}{I_M} = \alpha \cdot s_{\overline{n}|I_M}$.

<u>Ejemplo</u>: *Calcúlense el valor actual y final de la renta mensual:*



si el tanto efectivo de valoración asociado es del $I_{12} = 0.6\%$.

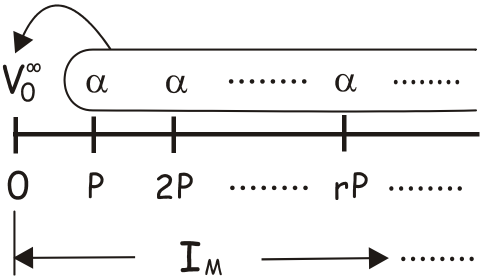
SOLUCIÓN: En este caso $\alpha = 1500$ € y $n = 180$. Así pues:

$$V_0 = 1500 \cdot a_{\overline{180}|0.006} = 1500\left(\frac{1-(1+0.006)^{-180}}{0.006}\right) = 164826.7\text{ €}$$

y:

$$S_{180} = 1500 \cdot s_{\overline{180}|0.006} = 1500\left(\frac{(1+0.006)^{180}-1}{0.006}\right) = 483798.024\text{ €}.$$

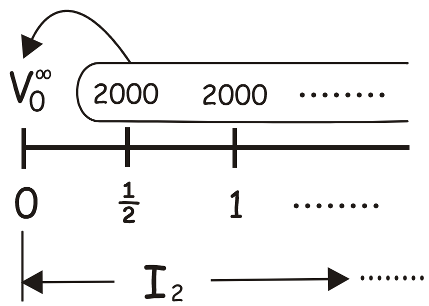
Veamos, finalmente, cuál es el valor actual V_0^{∞} de una **renta constante perpetua**, **inmediata** y **vencida.**[42] El esquema gráfico de una tal renta es:



Propiedad. *El valor actual V_0^{∞} de una renta perpetua constante de término general α, inmediata y vencida, y valorada al tanto efectivo de interés I_M asociado a la frecuencia de la renta es:*

$$V_0^{\infty} = \alpha \cdot \frac{1}{I_M}.$$

<u>Ejemplo</u>: *Calcúlese el valor actual de la renta perpetua semestral:*



valorada al 9% anual.

SOLUCIÓN: Puesto que $I_1 = 0.09$ y $M = 2$ se tiene que:

$$I_2 = (1 + I_1)^{\frac{1}{2}} - 1 = 1.09^{0.5} - 1 = 0.04403065.$$

Así pues:

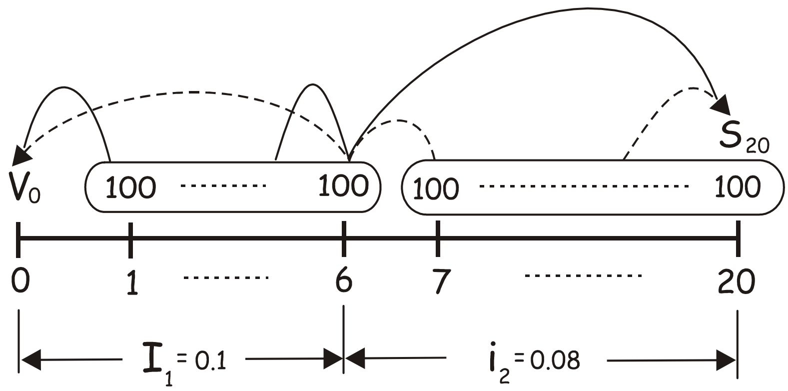
$$V_0^{\infty} = 2000 \cdot \left(\frac{1}{I_2}\right) = \frac{2000}{0.04403065} = 45422.904\,€.$$

[42] Es evidente que una renta perpetua no tiene valor final.

3.4. Ejercicios resueltos

1. *Calcúlese el valor actual y el valor final de una renta financiera de 20 términos anuales de 100€, inmediata y vencida, a un interés del 10% anual los 6 primeros años y del 8% anual pagable por semestres el resto.*

SOLUCIÓN: El esquema de la renta es, gráficamente:



Ya que la renta es anual, empezaremos calculando el tanto efectivo anual I_1 de los 14 últimos años. Puesto que $i_2 = 0.08$ tenemos que:

$$I_2 = 0.08/2 = 0.04 \text{ y } I_1 = (1+I_2)^{\frac{2}{1}} - 1 = (1.04)^2 - 1 = 0.0816.$$

Así pues, y teniendo en cuenta el cambio de valoración que se produce al final de los 6 primeros años, el valor actual V_0 de la renta será igual al valor actual $V_0^{'}$ de los 6 primeros términos más el valor actual $V_0^{''}$ de los 14 últimos actualizado 6 periodos (años). Por tanto:

$$V_0 = V_0^{'} + V_0^{''}(1+0.1)^{-6} = \left(100 \cdot a_{\overline{6}|0.1}\right) + \left(100 \cdot a_{\overline{14}|0.0816}\right)(1+0.1)^{-6} = 896.6\text{€}.$$

Finalmente, y por el mismo motivo que antes, el valor final S_{20} será igual al valor final S_6 capitalizado 14 periodos (años) más el valor final S_{14} de los últimos 14 términos. Así pues:

$$S_{20} = S_6(1+0.0816)^{14} + S_{14} = \left(100 \cdot s_{\overline{6}|0.1}\right) \cdot (1.0816)^{14} + 100 \cdot s_{\overline{14}|0.0816} = 4763.08\text{€}.$$

Nótese que el valor final podría haberse obtenido también como:

$$S_{20} = V_0 \cdot (1+0.1)^6 (1+0.0816)^{14} = 4763.08\text{€}.$$

2. *Una persona compra hoy un apartamento y paga al contado la mitad de su valor. Para el resto, el vendedor le propone pagar por vencido 500€ mensuales durante los próximos 2 años y 50000€ al cabo de 3 años. Con estos datos:*
    a. *¿Se puede saber el precio del apartamento al contado?*
    b. *¿Y si sabemos que la financiación le resulta al comprador a un 8% efectivo anual?*

SOLUCIÓN: a) Con los datos iniciales es imposible conocer el precio al contado del apartamento pues se necesita un régimen financiero con el que valorar los pagos.

b) Sin embargo, sabiendo que se van a valorar al 8% efectivo anual, esto ya es posible. Denotaremos por P el precio al contado del apartamento. Fijémonos que el esquema de la operación financiera asociada a la compra/venta del inmueble será:

$$\left(\frac{P}{2},0\right) \underset{I_1=0.08}{\sim} \left\{\left(500,\frac{1}{12}\right),\ldots,(500,2)\right\} \cup \{(50000,3)\}.$$ [43]

Así pues, y puesto que la renta es mensual, hay que tener presente el tanto efectivo mensual equivalente al 8% anual que es igual a:

$$I_{12} = (1+I_1)^{\frac{1}{12}} - 1 = (1.08)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0.006434.$$

En estas condiciones, tendremos que $P/2$ es igual al valor actual de los 24 pagos mensuales de 500€ más el valor a día de hoy de los 50000€:

$$\frac{P}{2} = 500 \cdot a_{\overline{24|}0.006434} + 50000(1+0.08)^{-3} = 50778.07\text{ €}.$$

Por consiguiente, el precio del apartamento al contado es de:

$$P = 2 \cdot 50778.07 = 101556.14\text{ €}.$$

[43] Nótese que se trata de una operación financiera parcialmente compleja.

3. *Una persona desea constituir un fondo de jubilación que será de aquí a 10 años y, por ello, se plantea tres alternativas durante ese plazo:*
   - *Ingresar al inicio de cada mes 240€.*
   - *Ingresar al final de cada trimestre 725€.*
   - *Ingresar 12000€ de aquí a 2 años y 18000€ de aquí a 8 años y medio.*

Con estos datos, determínese la alternativa más rentable si el fondo proporciona un 5% efectivo anual.

SOLUCIÓN: La primera alternativa consiste en calcular el valor final en $T' = 10$ de la renta mensual inmediata y anticipada de 120 términos:

$$\left\{(240,0),\left(240,\frac{1}{12}\right),\ldots,\left(240,9+\frac{11}{12}\right)\right\}$$

al tanto de valoración $I_{12} = (1+I_1)^{\frac{1}{12}} - 1 = (1.05)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0.0040741$. Por tanto:

$$S_{120} = 240 \cdot s_{\overline{120}|0.0040741} \cdot (1+0.0040741)^1 = 37198.035\,€.$$[44]

La segunda de las alternativas pasa por calcular el valor final en $T' = 10$ de la renta trimestral de 40 términos, inmediata y vencida:

$$\left\{\left(725,\frac{1}{4}\right),\ldots,(725,10)\right\}$$

al tanto de valoración $I_4 = (1+I_1)^{\frac{1}{4}} - 1 = (1.05)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0.0122722$. Por tanto:

$$S_{40} = 725 \cdot s_{\overline{40}|0.0122722} = 37152.86\,€.$$

Para la última alternativa hay que obtener el valor C' en el diferimiento $T' = 10$ del conjunto de capitales:

$$\left\{(12000,2),\left(18000,8+\frac{1}{2}\right)\right\}$$

que es $C' = 12000(1+0.05)^8 + 18000(1+0.05)^{1+\frac{1}{2}} = 37096.20\,€$. Así pues, la primera de las alternativas es la mejor.

[44] Nótese que hay que capitalizar un mes el valor final de la renta inmediata y vencida asociada.

4. *Suponga que quiere comprarse una casa dentro de 5 años. Para ello decide abrir una cuenta-vivienda en la cual irá depositando, a partir de hoy y cada 3 meses hasta el momento de la compra, una cantidad fija con objeto de hacer frente al importe de la entrega inicial que se cree que ascenderá a 40000€. Calcúlese la cuantía de esas aportaciones si la cuenta paga un 5% anual acumulable mensualmente.*[45]

SOLUCIÓN: Puesto que $i_{12} = 0.05$, se tiene que el tanto efectivo de interés asociado será $I_{12} = 0.05/12 = 0.0041\widehat{6}$ y que el tanto efectivo trimestral equivalente asociado es:

$$I_4 = (1 + I_{12})^{\frac{12}{4}} - 1 = 0.01255215\,.$$

Por tanto, debe plantearse la operación financiera parcialmente compleja:

$$\left\{(\alpha,0),\left(\alpha,\frac{1}{4}\right),\left(\alpha,\frac{2}{4}\right),\left(\alpha,\frac{3}{4}\right),\ldots,(\alpha,5)\right\}\underset{I_4}{\sim}(40000,5)$$

siendo α el montante de las aportaciones trimestrales. Como vemos, la prestación es una renta constante de 21 términos y de periodicidad trimestral. Si la contemplamos como una renta inmediata y vencida de 20 términos más el capital $(\alpha,0)$, se tendrá que los 40000€ han de coincidir con el valor de $(\alpha,0)$ capitalizado 20 trimestres más el valor final de dicha renta, es decir, que:

$$40000 = \alpha \cdot (1 + 0.01255215)^{20} + \alpha \cdot s_{\overline{20}|0.01255215}$$

de donde:

$$\alpha = \frac{40000}{(1.01255215)^{20} + s_{\overline{20}|0.01255215}} = 1676.748€.$$

Nótese que α satisface también la ecuación:

$$40000 = \alpha \cdot s_{\overline{21}|0.01255215}\,.$$

[45] Este ejemplo es un caso típico de **reconstrucción sucesiva de un capital** siendo la entrega inicial el capital y la reconstrucción los pagos trimestrales.

5. *Considérese la compra de un coche hoy, valorado en 10000€, a pagar en cuatro plazos cuyos vencimientos son a los 60 días, 120 días, 180 días y 240 días, de manera que cada pago sea el doble del anterior. Si la valoración se efectúa al 7.5% de interés anual acumulable mensualmente, hállese el conjunto de capitales financieros que nos permiten efectuar dicha compra (considérese el año comercial de 360 días).*[46]

SOLUCIÓN: Al estar los pagos diferidos periódicamente en el tiempo (cada dos meses), se trata de amortizar el valor del coche mediante una renta temporal, inmediata y vencida de 4 términos, y de frecuencia $M = 6$. Dado que $i_{12} = 0.075$, se tiene que $I_{12} = 0.075/12 = 0.00625$ y:

$$I_6 = (1 + I_{12})^{\frac{12}{6}} - 1 = (1.00625)^2 - 1 = 0.01253906\,.$$

Así pues, si α denota el primer pago, el esquema de la operación será:

$$(10000,0) \underset{I_6}{\sim} \left\{ \left(\alpha, \frac{1}{6} \right), \left(2\alpha, \frac{2}{6} \right), \left(4\alpha, \frac{3}{6} \right), \left(8\alpha, \frac{4}{6} \right) \right\}.$$

Por tanto, 10000€ será el valor actual de una renta variable, inmediata y vencida, de periodicidad bimestral y de 4 términos. En consecuencia:

$$\begin{aligned} 10000 &= \alpha \cdot (1 + 0.01253906)^{-1} + 2\alpha \cdot (1 + 0.01253906)^{-2} + \\ &+ 4\alpha \cdot (1 + 0.01253906)^{-3} + 8\alpha \cdot (1 + 0.01253906)^{-4} = \alpha \cdot 14.40263484 \end{aligned}$$

de donde:

$$\alpha = \frac{10000}{14.40263484} = 694.317\,€.$$

Es decir, que los cuatro pagos bimestrales serán de 694.317€, 1388.635€, 2777.270€ y 5554.539€.

[46] Este ejemplo es un caso particular de **amortización sucesiva de un capital** siendo el valor del coche el capital que se amortiza periódicamente mediante los cuatro pagos.

6. *Una sociedad de crédito concede a un particular un préstamo de 30000€ a pagar en 48 cuotas mensuales constantes y vencidas a partir de la fecha de concesión. Determínese: a) El valor de las cuotas si la operación de préstamo se ha pactado a un TIN*[47] *del 9.90%. b) El TAE de la operación anterior teniendo en cuenta que hay unas comisiones de apertura y de estudio del 1.10% sobre el nominal cada una.*

SOLUCIÓN: a) Puesto que $\text{TIN} = i_{12} = 0.099$, entonces:

$$I_{12} = 0.099/12 = 0.00825$$

y las 48 cuotas (términos) α del préstamo serán de:

$$\alpha = \frac{30000}{a_{\overline{48}|0.00825}} = \frac{30000}{39.50291737} = 759.438\,€.$$

b) Para obtener el TAE de la operación de préstamo se ha de calcular, en primer lugar, el tanto efectivo mensual I_{12} asociado a una renta de 48 cuotas mensuales de 759.438€ cuyo valor actual coincide con la cuantía del préstamo, 30000€, menos las comisiones de apertura y de estudio que son de:

$$\text{Comisión de apertura} = \text{Comisión de estudio} = 1.10\% \cdot 30000 = 330\,€.$$

Por tanto, cabe plantear la siguiente ecuación de equilibrio:

$$30000 - (330 + 330) = 29340 = 759.438 \cdot a_{\overline{48}|I_{12}} = 759.438 \cdot \frac{1 - (1 + I_{12})^{-48}}{I_{12}}$$

de donde se obtiene un tanto efectivo mensual de:

$$I_{12} = 0.00923275.$$[48]

Finalmente, el TAE de la operación del préstamo es:

$$I_1 = (1 + I_{12})^{\frac{12}{1}} - 1 = (1.00923275)^{12} - 1 = 0.11659586$$

es decir, un 11.66% anual aproximadamente.

[47] El **TIN** de una operación financiera es el tanto de interés nominal con el que se pacta sin tener en cuenta los gastos y las comisiones.

[48] Para la obtención de este tanto se ha utilizado el programa informático Mathcad.

7. *Supóngase que una determinada explotación agraria rinde, cada mes, un montante medio neto de 5000€ que recibe el propietario o, en su defecto, sus herederos de forma indefinida. En estas condiciones:*
    a. *¿Podemos valorar de alguna manera la explotación?*
    b. *¿Y si nos dicen que el tanto de valoración es del 8% anual? ¿Y si el tipo de interés anual baja un punto porcentual?*

SOLUCIÓN: a) Según se desprende del enunciado podemos considerar que los rendimientos forman una renta perpetua constante de 5000€ mensuales. Así pues, es lícito argumentar que el valor de la explotación coincide con el valor actual de esta renta perpetua y es evidente que sin un tanto de valoración no podemos hacerlo.

b) Suponiendo ahora que nos dicen que el tanto de valoración es del 8% anual podemos valorar la explotación a través del valor actual V_0^{∞} de la renta en cuestión. Ya que se tiene que $I_1 = 0.08$, el tanto efectivo mensual será:

$$I_{12} = (1 + I_1)^{\frac{1}{12}} - 1 = (1.08)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0.0064340\,.$$

Así pues, el valor de la explotación agraria es de:

$$V_0^{\infty} = \frac{5000}{I_{12}} = \frac{5000}{0.00643403} = 777117.918\,€.$$

Si el tanto de interés anual i_1 baja un punto porcentual, tendremos ahora que $I_1 = i_1 = 7\% = 0.07$. En esta tesitura, $I_{12} = 0.00565415$ y:

$$V_0^{\infty} = \frac{5000}{I_{12}} = \frac{5000}{0.00565415} = 884306.218\,€.$$

Este ejercicio pone de manifiesto el hecho de que las rentas perpetuas nos permiten valorar "financieramente"[49] aquellos bienes económicos con cierta voluntad de permanencia en el tiempo. Obsérvese que si el tipo de interés baja (aumenta), el valor del bien sube (baja).

[49] Nótese que el valor de la explotación cambia si lo hace el tipo de interés.

8. *Una persona desea adquirir un solar valorado en 40000€. Para hacer frente a este pago dispone, por un lado, de un montante de 4700€ que es el líquido descontado hoy, bajo un régimen de descuento comercial del 9% anual con unos gastos del 0.1% sobre el nominal, de una cartera de efectos comerciales que vencen de aquí a 9 meses, y, por otro, del saldo de una cuenta bancaria que rinde un 5% efectivo anual que abrió hace hoy 6 años y en la cual ha ido ingresando 400€ trimestrales por anticipado desde la apertura. Si por el resto pendiente a pagar pide un préstamo que debe amortizar mediante 5 semestralidades constantes y pagables por vencido al 10% nominal pagable mensualmente, determínese: a) El nominal del efecto. b) El saldo acumulado en la cuenta. c) El importe de las mensualidades del préstamo.*

SOLUCIÓN: a) El nominal N de la cartera de efectos comerciales satisface la ecuación de equilibrio:

$$4700 = N \cdot \left(1 - 0.09 \cdot \frac{9}{12}\right) - 0.001 \cdot N \text{, de donde } N = 5045.625\text{€}.$$

b) Sabiendo que $I_4 = (1+0.05)^{1/4} - 1 = 0.01227223$, el saldo hoy de la cuenta es de $S_{24} = 400 \cdot s_{\overline{24}|0.01227223} \cdot (1+0.01227223) = 11221.081$ € ya que coincide con el valor final S_{24} de una renta constante anticipada de 24 trimestralidades.

c) Ya que el resto pendiente por pagar del solar es precisamente la diferencia $40000 - (4700 + S_{24}) = 24078.918$€, y que el tanto semestral asociado al tanto mensual $I_{12} = 0.1/12 = 0.008\widehat{3}$ es:

$$I_2 = (1+I_{12})^{\frac{12}{2}} - 1 = \left(1.008\widehat{3}\right)^6 - 1 = 0.05105331$$

la semestralidad α del préstamo será de:

$$\alpha = 24078.918 / a_{\overline{5}|0.05105331} = 5577.827 \text{ €}$$

pues el resto pendiente de 24078.918€ coincide con el valor actual de las 5 semestralidades.

9. *Hace 2 años, la sociedad financiera X concedió un préstamo personal a 10 años al señor Y de nominal 30000€ y a un tipo de interés del 8% anual capitalizable mensualmente. A día de hoy la sociedad X, una vez cobrada la mensualidad correspondiente, decide traspasar los derechos sobre el préstamo a un banco comercial, pactándose que se valorarán hoy las mensualidades pendientes de amortizar al 10% efectivo anual. Con el líquido obtenido por este traspaso y con el descuento de una cartera de efectos de comercio de vencimiento a los 3 meses, la sociedad X compra mobiliario por valor de 50000€. En estas condiciones, calcúlese: a) La mensualidad pactada con el señor Y que amortiza el préstamo. b) El valor monetario del traspaso del préstamo al banco comercial. c) El nominal de la cartera de efectos si el descuento se lleva a cabo bajo un régimen de descuento comercial al 9% anual y con unos gastos del 0.25% sobre el nominal.*

SOLUCIÓN: a) Ya que $I_{12} = i_{12}/12 = 0.08/12 = 0.00\overset{\frown}{6}$, las 120 mensualidades constantes que amortizan el préstamo serán de:

$$\alpha = 30000 / a_{\overline{120}|0.00\overset{\frown}{6}} = 363.983\,€.$$

b) Puesto que el efectivo mensual I_{12} equivalente a un 10% anual es:

$$I_{12} = (1 + I_1)^{\frac{1}{12}} - 1 = (1 + 0.1)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0.00797414$$

el valor a día de hoy de las 96 mensualidades que quedan por amortizar (el valor monetario del traspaso del préstamo) será de:

$$R = 363.983 \cdot a_{\overline{96}|0.00797414} = 24351.481€.$$

c) Puesto que el líquido descontado de la cartera de efectos de nominal N coincide con la diferencia entre los 50000€ del pago del mobiliario y los 24351.481 del traspaso tendremos que:

$$25648.519 = 50000 - 24351.481 = N\left(1 - 0.09 \cdot \frac{3}{12}\right) - 0.0025 \cdot N$$

de donde $N = 25648.519/\left(1 - 0.09 \cdot (3/12) - 0.0025\right) = 26306.173€.$

10. *El señor X abrió, hace 2 años, una cuenta corriente en la que depositó las mensualidades anticipadas de un alquiler de 600€ durante el primer año, incrementándose en un 5% durante el segundo. Además, ingresó a los 9 meses de la apertura el importe por el descuento de un efecto comercial de nominal 20000€, con vencimiento a los 18 meses, y que se descontó en régimen de descuento comercial al 9% anual. El saldo acumulado en la cuenta lo entrega, hoy, como entrada en la compra de un coche con el compromiso de pagar por el resto aplazado 250€ mensuales durante 4 años. En estas condiciones, calcúlese: a) El líquido obtenido por el descuento si hubo unos gastos del 0.3% sobre el nominal del efecto. b) El saldo acumulado en la cuenta corriente si ha dado un interés del 3% anual capitalizable mensualmente. c) El valor a día de hoy del coche si la financiación se pactó al 6% anual.*

SOLUCIÓN: a) El líquido descontado C del efecto de nominal 20000€ será:

$$C = 20000\left(1 - 0.09 \cdot \frac{18}{12}\right) - 0.003 \cdot 20000 = 17240\,€.$$

b) El saldo S de la cuenta está formado por el valor a día de hoy de la renta de 12 mensualidades de 600€ del primer año, de la de 12 mensualidades de $600 + 0.05 \cdot 600 = 630\,€$ del segundo y del líquido del efecto comercial capitalizado 15 meses. Puesto que $I_{12} = i_{12}/12 = 0.03/12 = 0.0025$, entonces:

$$S = 600 \cdot s_{\overline{12}|0.0025}(1+0.0025)^{13} + 630 \cdot s_{\overline{12}|0.0025}(1+0.0025) + 17240(1+0.0025)^{15} =$$
$$= 33122.586€.$$

c) Puesto que el tanto efectivo mensual equivalente al tanto anual del 6% es $I_{12} = (1+I_1)^{\frac{1}{12}} - 1 = (1.06)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0.00486755$, el resto aplazado R en la venta del coche es de:

$$R = 250 \cdot a_{\overline{48}|0.00486755} = 10678.181\,€.$$

Por tanto, el valor a día de hoy del coche es de $S + R = 43800.767\,€$.

11. *El señor X murió el pasado 15/05/2003 y sus herederos desearían valorar su patrimonio financiero. En esa fecha, dicho patrimonio estaba compuesto por: una cuenta bancaria A que abrió el 01/05/2003 con una imposición inicial de 1000€ y que abona un 2.75% de interés simple anual; una cuenta bancaria B que abrió el 01/03/2000 y que paga un 4% nominal pagable mensualmente, y en la que venía realizando imposiciones mensuales constantes desde el inicio de su apertura con el objeto de disponer de 60000€ el 31/12/2003; y, por último, una renta de 500€ que recibía al final de cada mes como consecuencia de un préstamo que había concedido a un amigo hacía algún tiempo (estas mensualidades las tenía que recibir el señor X o sus herederos hasta el 30/06/2006). En estas condiciones, hállese: a) El saldo acumulado en la cuenta A el día del óbito del señor X. b) El importe de la mensualidad que se venía depositando en la cuenta B, teniendo presente que el último ingreso lo realizaría el 31/12/2003. c) El saldo acumulado en la cuenta bancaria B el día del óbito del señor X. d) El valor ese día de todas las mensualidades pendientes de amortizar del préstamo concedido a su amigo si el tanto de valoración es del 3% anual.*

SOLUCIÓN: a) El saldo es $\text{Saldo}_A = 1000\left(1+0.0275\cdot(15/365)\right) = 1001.130$€.

b) Puesto que $I_{12} = 0.04/12 = 0.00\widehat{3}$ y que el plazo de B es de 46 meses (del 01/03/200 hasta el 31/12/2003) tenemos $\alpha = 60000/s_{\overline{46}|0.00\widehat{3}} = 1209.071$€.

c) El saldo de B el 15/05/2003 será el valor de las 39 imposiciones hechas efectivas (hasta el 01/05/2003 inclusive), es decir, que:

$$\text{Saldo}_B = \left(1209.071\cdot s_{\overline{39}|0.00\widehat{3}}\right)\left(1+0.00\widehat{3}\right)^{1/2} = 50350.421\text{€}.$$

d) Ya que $I_{12} = (1+0.03)^{1/12} - 1 = 0.00246627$ y que quedan 38 mensualidades por recibir (del 31/05/2003 hasta el 31/06/2008), el valor será de:

$$\text{Valor del préstamo} = \left(500\cdot a_{\overline{38}|0.00246627}\right)\left(1+0.00246627\right)^{1/2} = 18137.876\text{€}.$$

12. *Un empresario ha de hacer frente a un pago de 75000€ dentro de 3 años y, a tal fin, diseña la siguiente estrategia: en primer lugar, depositará hoy 50000€ en una cuenta bancaria; en segundo lugar, pedirá, en el momento de satisfacer el pago, un préstamo amortizable semestralmente a un interés efectivo anual del 7%, de plazo tres años, por la diferencia entre el valor de la deuda y del saldo acumulado en la cuenta. En estas condiciones, determínese: a) El saldo acumulado en dicha cuenta si está ha rendido un interés del 4% acumulable mensualmente el primer año y un 3% semestral el resto del plazo. b) El valor de las semestralidades que amortizan el préstamo que debe solicitar. c) Las nuevas semestralidades pendientes de amortizar si al cabo de año y medio de vida del préstamo el tipo de interés anual baja un punto porcentual.*

SOLUCIÓN: a) Ya que $I_{12} = 0.04/12 = 0.00\widehat{3}$, el saldo de la cuenta será de:

$$\text{Saldo} = \left(50000 \cdot \left(1+0.00\widehat{3}\right)^{12\cdot 1}\right)\left(1+0.03\right)^{2\cdot 2} = 58568.189\text{€}.$$

b) Puesto que el nominal del préstamo es de $75000 - \text{Saldo} = 16431.811$€, y que el tanto semestral es $I_2 = \left(1+0.07\right)^{1/2} - 1 = 0.03440804$, el valor de las 6 semestralidades será:

$$\alpha = 16431.811 / a_{\overline{6|}0.03440804} = 3077.735\text{€}.$$

c) En el tercer semestre (al cabo de 1 año y medio), el resto pendiente por amortizar coincide con el valor actual de las tres semestralidades pendientes de hacer efectivas. Por tanto $\text{Resto} = 3077.735 \cdot a_{\overline{3|}0.03440804} = 8632.456$€. Así pues, y ya que el nuevo tanto efectivo semestral de valoración es:

$$I_2 = \left(1+I_1\right)^{\frac{1}{2}} - 1 = \left(1+0.06\right)^{0.5} - 1 = 0.02956301$$

puesto que el tanto anual I_1 baja del 7% al 6%, las nuevas semestralidades del préstamo serían ahora de:

$$\alpha' = \text{Resto} / a_{\overline{3|}0.02956301} = 3049.272\text{€}.$$

4. APLICACIÓN: PRÉSTAMOS AMORTIZABLES POR EL SISTEMA FRANCÉS

4.1 Concepto y elementos característicos

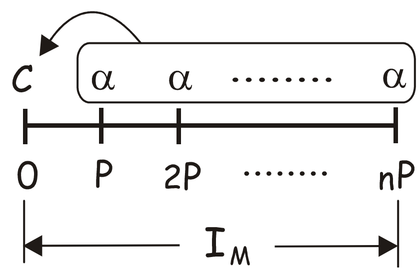
En general, un **préstamo** es una operación financiera en la que el sujeto activo cede un capital (**nominal** del préstamo) a cambio de recibir, del sujeto pasivo y periódicamente, unas cuantías monetarias, es decir, una renta financiera temporal.

Definición. *Un* ***préstamo amortizable por el sistema francés*** *es un préstamo financiero en el que las cuantías que el sujeto pasivo devuelve al activo de forma periódica son constantes y comprenden los intereses devengados durante el periodo y una parte del nominal. En decir, que la cuantía constante α del periodo r-ésimo del préstamo (**término amortizativo r-ésimo**) es:*

$$\alpha = Y_r + A_r$$

*siendo Y_r y A_r, respectivamente, los intereses devengados (**cuota de interés**) y la parte de término que amortiza el nominal (**cuota de capital**) en dicho periodo.*

Así pues, el esquema de un préstamo de este tipo de nominal C, de n términos amortizativos α, de periodicidad P (o de frecuencia $M = 1/P$) y al tanto efectivo de valoración I_M sería:



4.2. Cuadro de amortización de un préstamo amortizable por el sistema francés y ejemplos

Por tanto, teniendo presente que el nominal C del préstamo es el valor actual de los n términos amortizativos α, se deduce que:

$$\alpha = \frac{C}{a_{\overline{n}|I_M}}.$$

Como hemos indicado, en cada periodo r una parte del término amortizativo r-ésimo constante α, Y_r, se destina al pago de intereses (la cuota de interés) y el resto, A_r, a amortizar una parte del nominal (la cuota de capital). Pues bien, hay que tener presente que, en este tipo de préstamos, la cuota de interés Y_r se calcula sobre el nominal o **resto pendiente** de amortizar al final del periodo anterior R_{r-1} según la igualdad:

$$Y_r = I_M \cdot R_{r-1}$$

que el **total amortizado** hasta ese periodo, M_r, es la suma del total amortizado en el periodo anterior más la cuota de capital del periodo:

$$M_r = M_{r-1} + A_r \text{, con } M_0 = 0 \text{ y } M_n = C$$

y que el **resto pendiente** de amortizar al final del periodo es igual a la cuantía prestada menos el total amortizado hasta ese momento:

$$R_r = C - M_r \text{, con } R_0 = C \text{ y } R_n = 0.$$ [50]

Todas estas magnitudes se pueden disponer en un **cuadro de amortización** en la forma:

r	α	Y_r	A_r	M_r	R_r

[50] Puede probarse que este resto es igual al valor en el diferimiento r-ésimo rP de los $n-r$ términos amortizativos que faltan por pagar, es decir, que $R_r = \alpha \cdot a_{\overline{n-r}|I_M}$.

Ejemplo: *Elabórese el cuadro de amortización de un préstamo amortizable por el sistema francés de nominal 60000€, destinado a la compra de maquinaria industrial, y con una duración de 3 años sabiendo que se amortizará mediante el pago de semestralidades constantes y vencidas al tanto nominal de interés del 6% anual pagadero semestralmente.*[51]

SOLUCIÓN: Ya que $i_2 = 0.06$ y que $M = 2$, tendremos que el tanto efectivo de valoración del préstamo es:

$$I_2 = \frac{i_2}{2} = 0.03.$$

Por tanto, el término amortizativo constante del préstamo de seis términos (6 semestres) será igual a:

$$\alpha = \frac{C}{a_{\overline{n}|I_M}} = \frac{60000}{a_{\overline{6}|0.03}} = \frac{60000}{\left(\frac{1-(1.03)^{-6}}{0.03}\right)} = 11075.85€.$$

En este caso, y aplicando las fórmulas anteriores, el cuadro de amortización de este préstamo sería:

r	α	Y_r	A_r	M_r	R_r
0	0	0	0	0	60000
1	11075.85	1800	9275.85	9275.85	5072.415
2	11075.85	1521.724	9554.125	18829.975	41170.024
3	11075.85	1235.10	9840.75	28670.724	31329.275
4	11075.85	939.878	10135.972	38806.696	21193.303
5	11075.85	635.799	10440.051	49246.747	10753.252
6	11075.85	322.597	10753.252	60000	0

[51] Para la elaboración del cuadro de amortización se ha utilizado el programa Mathcad.

Veamos ahora lo que sucede cuando el tipo de interés no es constante a lo largo de la vida del préstamo lo que constituye, en la práctica, uno de los escenarios más frecuentes (es lo que se denomina **préstamo amortizable por el sistema francés a tanto de interés variable**). Este es un préstamo con las mismas características que el anterior con la diferencia de que se pactan, en el origen de la operación, los subplazos en los que se revisará el tanto de interés y la forma en la que se hará. Pueden darse dos situaciones distintas:

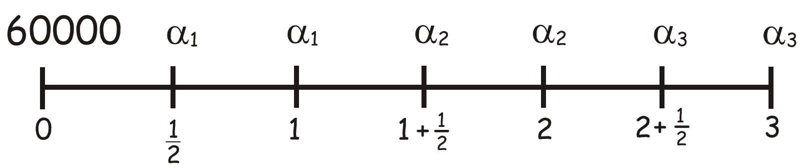
1. Se pactan, en el origen de la operación, los subplazos y los tantos de interés que regirán en cada uno de ellos.
2. Se pactan, en el origen de la operación, los subplazos, el tanto de interés a aplicar en el primero de ellos y el índice de referencia sobre el que se calcularán los tantos de valoración para los subplazos restantes. Una forma de proceder alternativa a ésta es aquella en la que, en el momento de realizar la revisión, se mantiene el término amortizativo inicial y se alarga o acorta el plazo de la operación en función de la variación de los tipos (son los denominados préstamos de **cuota fija** o **blindada**[52]).

Debemos señalar que los índices de referencia aceptados actualmente por el Banco de España para los préstamos de tipo hipotecario son: el TAE de los préstamos para vivienda libre de cajas y bancos, el tipo medio conjunto de entidades de crédito, el indicador CECA de tipos activos, la rentabilidad interna de deuda pública, el MIBOR a 1 año y el Euribor a 1 año. De todos ellos, el Euribor es el más utilizado en la actualidad. Veamos un ejemplo ilustrativo.

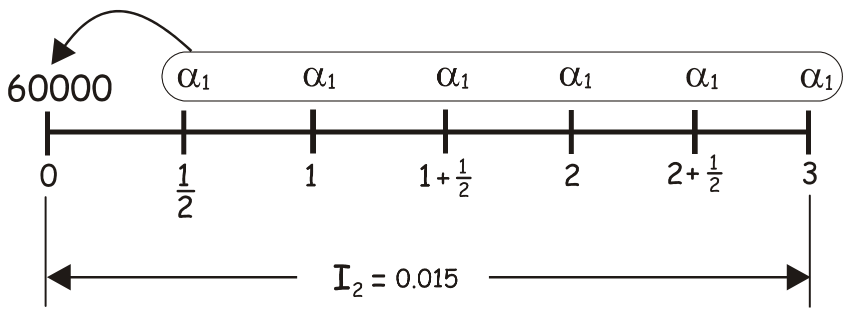
[52] Estos tipos de préstamos no los vamos a ver.

Ejemplo: *Suponga que una entidad bancaria le concede un préstamo de tipo hipotecario de nominal 60000€ y de duración 3 años a amortizar cada semestre y por vencido, con un tanto de interés inicial del 3% anual pagadero semestralmente y con el compromiso efectivo de revisarlo al inicio de cada año añadiendo medio punto al Euribor a 1 año (supondremos para simplificar que este índice en los dos próximos años es, respectivamente, del 2.075% y del 2.125%). En estas condiciones, determine el cuadro de amortización de su préstamo.*

SOLUCIÓN: El esquema de este préstamo hipotecario es:



Dado que el tanto nominal de interés durante el primer año es $i_2 = 0.03$, el tanto efectivo de interés semestral será $I_2 = i_2 / 2 = 0.015$. Para calcular el término α_1 se considerará un préstamo amortizable por el sistema francés de 6 semestralidades al tanto efectivo semestral de $I_2 = 0.015$ y de nominal 60000€. Esquemáticamente:



En estas condiciones, se tiene que:

$$\alpha_1 = 60000 / a_{\overline{6|}0.015} = 10531.513€.$$

Por otro lado, el tipo de interés efectivo anual durante el segundo año será:

$$I_1 = \text{Euribor} + 0.5\% = 0.02075 + 0.005 = 0.02575$$

con un tanto efectivo de interés semestral asociado igual a:

$$I_2 = (1 + I_1)^{\frac{1}{2}} - 1 = \sqrt{1.02575} - 1 = 0.01279317\ .$$

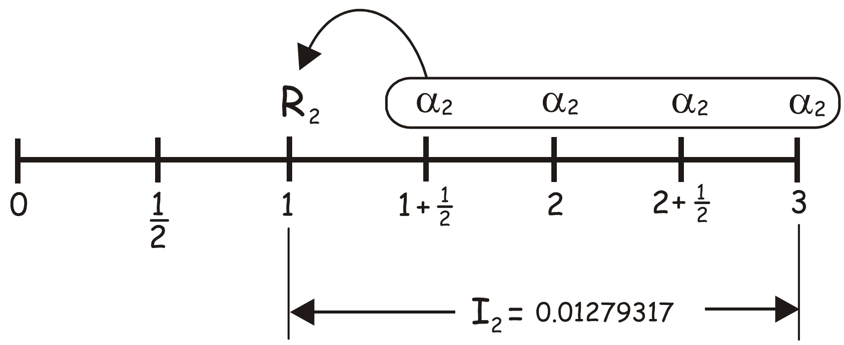
Para calcular el término amortizativo α_2 del segundo año se considerará un préstamo amortizable por el sistema francés de 4 semestralidades, con un tanto semestral $I_2 = 0.01279317$ y con un nominal igual al resto pendiente por amortizar al final del primer año. Este resto pendiente, R_2, se calcula a partir de la fórmula antes indicada:

$$R_r = \alpha \cdot a_{\overline{n-r|}I_M}$$

considerando las cuatro semestralidades α_1 que restan por amortizar y el tipo de interés anterior al revisado, $I_2 = 0.015$. Por tanto:

$$R_2 = \alpha_1 \cdot a_{\overline{4|}I_2} = 10531.513 \cdot a_{\overline{4|}0.015} = 40592.502€.$$

Así pues, y de forma esquemática:



En consecuencia:

$$\alpha_2 = \frac{R_2}{a_{\overline{4|}0.01279317}} = \frac{40592.502}{\left(\dfrac{1-(1.01279317)^{-4}}{0.01279317}\right)} = 10474.755€.$$

Por otro lado, el tipo de interés efectivo anual durante el tercer año será:

$$I_1 = \text{Euribor} + 0.5\% = 0.02125 + 0.005 = 0.02625$$

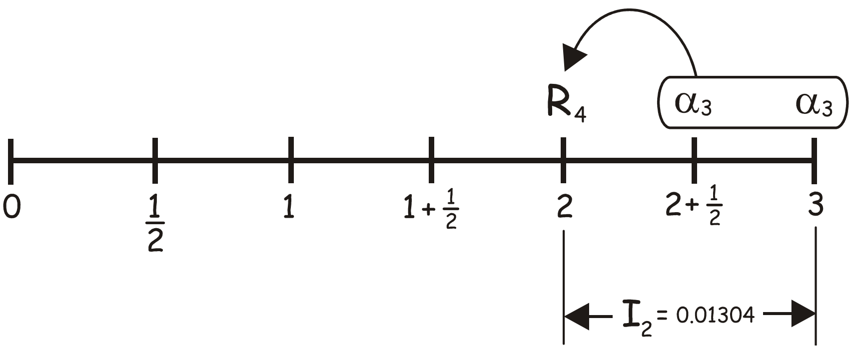
con un tanto efectivo de interés semestral asociado igual a:

$$I_2 = (1 + I_1)^{\frac{1}{2}} - 1 = \sqrt{1.02625} - 1 = 0.01303997 .$$

Finalmente, el término amortizativo α_3 del tercer y último año se calculará considerando un préstamo que se amortiza por el sistema francés de 2 semestralidades, con un tanto efectivo semestral $I_2 = 0.01304$, y de nominal el resto pendiente que queda por amortizar al final del segundo año. Este resto pendiente, R_4, puede calcularse también a partir de la fórmula que acabamos de utilizar. Por consiguiente:

$$R_4 = \alpha_2 \cdot a_{\overline{2}|I_2} = 10474.755 \cdot a_{\overline{2}|0.01279317} = 20554.244\,€.$$ [53]

De forma esquemática:



Por tanto:

$$\alpha_3 = \frac{R_4}{a_{\overline{2}|0.01304}} = \frac{20554.244}{\left(\dfrac{1-(1.01304)^{-2}}{0.01304}\right)} = \frac{20554.244}{1.96154925} = 10478.576\,€.$$

[53] Nótese que para el cálculo de este resto se han de tener en cuenta las dos semestralidades α_2 que restan por amortizar y el tipo de interés anterior $I_2 = 0.01279317$.

En definitiva, pues, el cuadro de amortización resultante del préstamo de tipo hipotecario calculado a través del programa Mathcad será:

r	α	Y_r	A_r	M_r	R_r
0	0	0	0	0	60000
1	10531.513	900	9631.513	9631.513	50368.487
2	10531.513	755.527	9775.986	19407.498	40592.502
3	10474.755	519.307	9955.448	29362.946	30637.054
4	10474.755	391.945	10082.810	39445.756	20554.244
5	10478.576	268.027	10210.549	49656.305	10343.695
6	10478.576	134.881	10343.695	60000	0

5. ÍNDICE ANALÍTICO

6. BIBLIOGRAFÍA

- ALEGRE, P. y otros. (1995) *Ejercicios resueltos de Matemática de las operaciones financieras* (2ª ed.). Madrid: AC.

- ALEGRE, P. y otros. (1995) *Matemáticas empresariales*. Madrid: AC.

- GIL PELÁEZ, L. (1987) *Matemática de las operaciones financieras*. Madrid: AC.

- RODRÍGUEZ, A. (1994) *Matemática de la financiación*. Barcelona: Ediciones S.

- RODRÍGUEZ, A. (1998) *Fundamentos de la Matemática financiera*. Barcelona: Gráficas Rey, S. L.