



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

**SISTEMA DE FUNCIONS
ITERADES I DIMENSIÓ
FRACTAL**

Autora: MINERVA BERENGUER NAVARRO

Directora: Dr. Núria Fagella Rabionet

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 19 de gener de 2020

Abstract

Throughout this paper, we will study some of the most relevant characteristics of the geometrical objects that are called *fractals*, such as the fractal dimension, although we will focus on the ones which are constructed from a iterated function system (IFS), which we are going to define from contraction mappings on the space made up of the compact sets of a complete metric space.

The first part of the document consists of an introduction and some of the very-well known geometrical constructions of some fractals. Later we will see some concepts that will allow us to demonstrate the Theorem of the Collage, which claims that given a iterated function system, exists a compact set which is fix under the union of those contraction functions valued in this set. We will also explain a random iterated algorithm in order to construct a fractal and, finally, we will study the fractal dimension and its applications.

Resum

Al llarg d'aquest treball estudiarem algunes de les propietats més rellevants dels objectes geomètrics que reben el nom de *fractals*, com la dimensió fractal. Ens centrarem en aquells generats a partir d'un sistema de funcions iterades (IFS), que definirem a partir de funcions contractives en l'espai de compactes d'un espai mètric complet.

La primera part de l'escrit consisteix en una petita introducció i l'explicació d'algunes construccions geomètriques d'alguns fractals. Posteriorment veurem alguns conceptes que ens permetran demostrar el Teorema del Collage, el qual ens afirma que donat un sistema de funcions iterades, existeix un compacte fix per la unió d'aquestes funcions evaluades en aquest compacte. Explicarem també una forma aleatòria de construir un fractal i, finalment, estudiarem la dimensió fractal i les seves aplicacions.

Índex

1	INTRODUCCIÓ	1
2	CONSTRUCCIONS D'ALGUNS FRACTALS	5
2.1	Construccions geomètriques	5
2.2	Iteració aleatòria: El Joc del Caos per polígons	10
3	PRELIMINARS	13
3.1	Espais mètrics	13
3.1.1	Convergència i convergència uniforme	16
3.1.2	Espai mètric de Hausdorff	16
3.2	Teorema del punt fix	21
4	IFS I EL TEOREMA DEL COLLAGE	25
4.1	Teorema del Collage	27
5	ALGORISME ALEATORI: EL JOC DEL CAOS	29
6	DIMENSIÓ FRACTAL	31
6.1	Dimensió de Hausdorff	34
6.2	Dimensió de Minkowski	38
6.3	Relació entre la dimensió de Hausdorff i la dimensió de Minkowski	42
6.4	Càlcul de la dimensió	43
7	APLICACIONS	47

1 INTRODUCCIÓ

Com descriuríeu l'estructura geomètrica d'un núvol? O d'un bosc? O d'un floc de neu? I com calcularíeu el perímetre d'una costa? La geometria clàssica ens proporciona una primera aproximació de l'estructura de certs objectes físics com els anteriorment esmentats però no és una descripció precisa. Aquesta observació de Benoit Mandelbrot de l'existència d'una espècie de "geometria de la natura" va obrir durant el segle XX una nova forma d'explicar el nostre entorn. Però gràcies a aquest fet, una branca de la geometria menys comuna, i equivalentment, diferent a la geometria euclidiana va esdevenir àrea d'estudi de molts matemàtics.

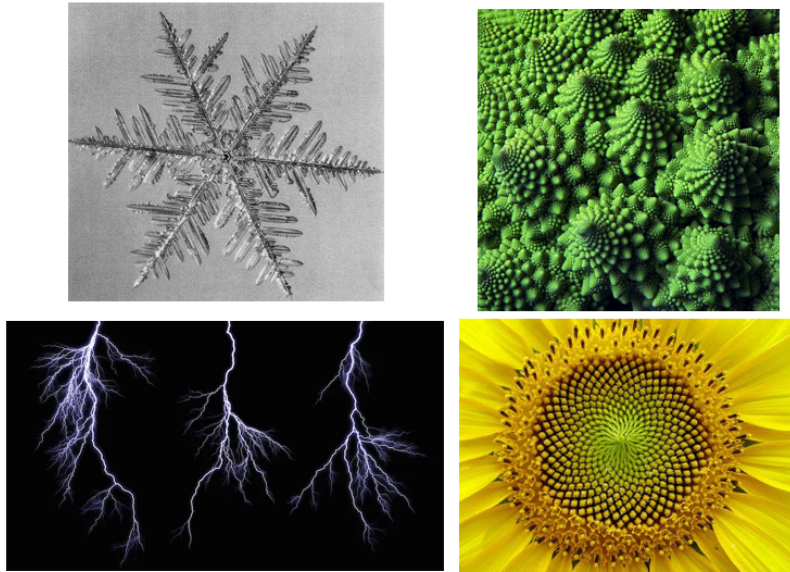


Figura 1: Estructures fractals a la natura: la primera imatge mostra un floc de neu; la segona, un romanesco; la tercera, llamps i per últim, un gira-sol.

Encara i així, la història d'aquests objectes geomètrics no s'inicia al segle XX, sinó al segle XVII mitjançant els conceptes de recursivitat. Durant els segles posteriors, amb l'estudi de les funcions contínues però no diferenciables per part de Karl Weierstrass, Georg Cantor va introduir una nova funció, ψ , tal que $\psi' = 0$ a excepció d'un conjunt de punts $\{x_n\}$, que actualment es coneix com el *conjunt de Cantor*. Aquest conjunt presenta característiques geomètriques sorprenents, com per exemple que té mesura de Lebesgue 0, encara que és un conjunt infinit i no numerable, i com que és autosemblant. D'una manera informal, un conjunt és autosemblant si una part d'aquest és igual o aproximadament semblant al conjunt sencer. Formalment, es diu que un conjunt A és autosemblant si existeixen

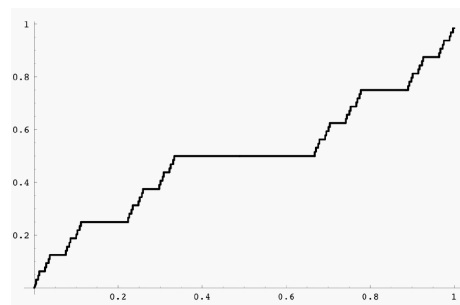


Figura 2: Gràfica de la funció ψ .

un nombre finit d'homeomorfismes no exhaustius $\{F_1, \dots, F_n\}$ tal que $A = \bigcup_{i=1}^n F_i(A)$.

A principis del segle XX, el matemàtic Helge von Koch va construir geomètricament el que coneixem com la corba de Koch. El seu principal objectiu era donar una forma alternativa per tal de verificar que efectivament existien funcions contínues no diferenciables, una forma que fes servir la geometria bàsica. Així com G. Cantor va nodrir-se del treball de K. Weierstrass, H. von Koch va fer-ho de Henri Poincaré i dels seus estudis sobre sistemes dinàmics no-lineals, que amb el temps van esdevenir l'inici d'una nova branca de les matemàtiques anomenada la teoria del caos. Els fractals apareixen sovint com a conjunts invariants dels sistemes dinàmics. Per aquest motiu es diu que existeix una relació entre la teoria del caos i la geometria fractal.

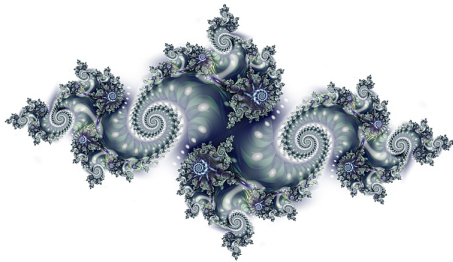


Figura 3: Conjunt de Julia.

L'any 1918, Felix Hausdorff va ampliar la definició de dimensió topològica que permetia a un conjunt qualsevol tenir dimensió no entera. Aquesta nova definició és un dels conceptes fonamentals per entendre els fractals tal i com els coneixem avui en dia. Al mateix temps, dos matemàtics francesos, Pierre Fatou i Gaston Julia van desenvolupar resultats importats per la geometria fractal relacionats amb la iteració de funcions al pla complex. Aquests estudis van proporcionar els conceptes de conjunts atractors i repulsors i es van formalitzar els conjunts de Julia i Fatou, que mostren els valors amb un comportament caòtic i estable, respectivament.

Finalment, durant la dècada dels 60, Benoit Mandelbrot va començar a escriure sobre l'autosemblança en el seu treball *'How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension'* i l'any 1975 va encunyar la paraula **fractal** per referir-se a aquestes figures geomètriques. Per definir aquest terme, Mandelbrot escriu al seu llibre *The Fractal Geometry of Nature* la següent definició

"A fractal is by definition a set for which the Hausdorff dimension strictly exceeds the topological dimension",

i per tant, caracteritza un fractal per la seva dimensió no entera. Encara i així, aquesta definició va resultar ser insuficient ja que exclou una sèrie de conjunts que s'han de considerar com objectes fractals. És el cas de les corbes de Peano i Hilbert. Aquestes figures parteixen d'una línia i mitjançant la recursivitat, finalment "omplen" el pla. Encara que la seva dimensió de Hausdorff és 2, són objectes fractals.

Després d'aquest treball, Mandelbrot va dedicar-se a estudiar els treballs de Julia i de Fatou, i mitjançant la il·lustració dels conjunts de Julia i Fatou amb ordinadors, va pensar en dibuixar els punts del pla complex, $c \in \mathbb{C}$, tals que el conjunt de Julia per la funció $f_c(z) = z^2 + c$ és connex. És a dir, defineix el conjunt que coneixem com el *conjunt de Mandelbrot*, $M = \{c \in \mathbb{C} : f_c^n(z) \not\rightarrow \infty \text{ quan } n \rightarrow \infty\}$ (veure figura 5). Aquest conjunt, en general no és estrictament autosemblant, sinó que és quasi autosemblant, ja que es poden trobar còpies petites i lleugerament diferents d'aquest conjunt a escales arbitràriament petites. És més, si ens aproximem a certes regions de la frontera, obtenim diferents conjunt de Julia.

Com ja hem dit al principi de la introducció, Mandelbrot va veure que la geometria fractal era útil per modelar i representar els fenòmens de la natura com



Figura 4: Benoît Mandelbrot.

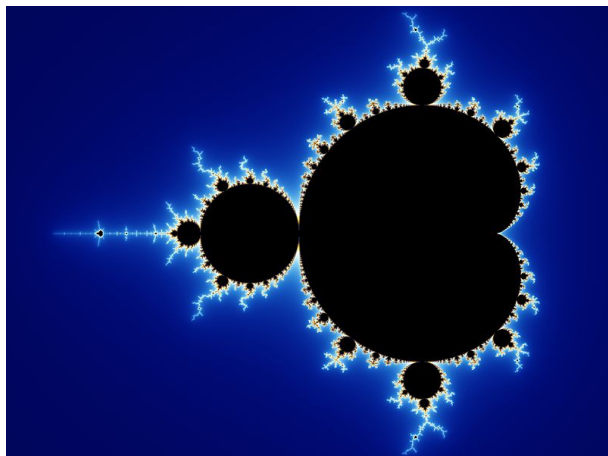


Figura 5: Conjunt de Mandelbrot.

per exemple per descriure la forma d'un floc de neu. És més, tant la geometria fractal com alguns conceptes de la teoria del caos que estan relacionats amb aquesta geometria poseeixen una connexió amb àmbits de la física, la medicina o inclús per l'estudi de la dinàmica de poblacions.

Des de finals dels anys 70 els fractals han estat presents en la investigació matemàtica amb matemàtics com Michael Barnsley, Adrien Douady, John H. Hubbard, i Dennis Sullivan entre molts d'altres.

Actualment es defineix un fractal com un objecte que mostra autosemblança, exacta o estadísticament, mostrant així una certa complexitat a l'hora de descriure'l. La dimensió de Hausdorff ens proporciona informació sobre aquesta complexitat, i normalment sol ser no entera. Per aquest motiu, Mandelbrot va definir-los dient que un fractal és un conjunt tal que la seva dimensió de Hausdorff és estrictament més gran que la dimensió topològica. També s'associa els fractals amb el concepte de recursivitat, ja que alguns d'aquests es construeixen a partir de processos iteratius de funcions.

Així doncs, al llarg d'aquest escrit tractarem d'establir les bases per poder entendre totes aquestes idees. Al capítol 2 estudiarem els fractals més coneguts, generats recursivament o de forma aleatòria, i observarem certes característiques que ens seran útils posteriorment. En el següent capítol, estudiarem l'espai mètric on "viuen" els fractals, així com el concepte de convergència en aquest espai mètric, i enunciaré i demostraré el teorema del punt fix de Banach. Al capítol 4 ens centrarem en els fractals generats a partir d'un sistema de funcions iterades i veurem el teorema del Collage amb algunes conseqüències d'aquest. A continuació explicarem un algorisme aleatori que genera fractals sota certes condicions. Al capítol 6 estudiarem les dimensions de Hausdorff i de Minkowski (també anomenada la dimensió del recompte de caixes), veurem si existeix alguna relació entre ambdues i donarem algun exemple de com calcular-les. Finalment, enunciaré una sèrie d'aplicacions de la teoria desenvolupada al llarg de tot el treball.

2 CONSTRUCCIONS D'ALGUNS FRACTALS

En aquest capítol veurem alguns exemples de fractals i de com construir-los. Tots els fractals que presentarem a continuació són subconjunts de \mathbb{R} o de \mathbb{R}^2 , encara que posteriorment veurem que no és necessari treballar en aquests espais. El seu anàlisi i la qüestió de perquè són realment fractals els anirem desgranant al llarg del treball. Per aquest motiu, només els introduïrem sense fer-ho d'una manera rigorosa, sinó d'una manera informal.

2.1 Construccions geomètriques

CONJUNT DE CANTOR

Un dels fractals més coneguts i fàcils de construir és el subconjunt de \mathbb{R} anomenat **conjunt de Cantor**, que apareix sovint de manera natural a moltes branques de les matemàtiques, en especial als sistemes dinàmics. Aquest fractal va ser observat per Georg Cantor l'any 1883, encara que ja havia estat estudiat l'any 1875 per Henry John Stephen Smith.

Per construir-lo, partim de l'interval $C_0 = [0, 1]$. Sigui ara C_1 el conjunt que obtenim eliminant el terç del mig de l'interval $[0, 1]$. És a dir $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Si tornem a eliminar el terç del mig d'ambdós intervals, obtenim C_2 i equivalentment, $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{7}{9}, \frac{2}{3}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. Reiterant aquest procés, construïm el conjunt C_k , eliminant els terços del mig dels intervals de C_{k-1} (veure figura 6). Conseqüentment, el conjunt C_k està format per 2^k intervals de longitud $(\frac{1}{3})^k$. Aleshores, es defineix el conjunt de Cantor com el límit de la seqüència dels conjunts C_k . Més concretament, com que els conjunts C_k són compactes no buits de \mathbb{R} i satisfan que $C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots$, tenim que la intersecció d'aquests és no buida i per tant, podem definir el conjunt de Cantor com $C = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_k$.

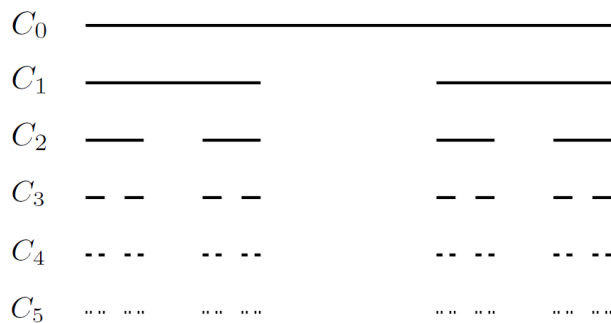


Figura 6: Construcció del conjunt de Cantor C mitjançant l'eliminació reiterada del terç del mig dels intervals.[1]

Es pot observar que el conjunt de Cantor és autosemblant ja que conté còpies d'ell mateix però a diferents escales i per tant, cada component connexa de C és geomètricament similar a C . Per exemple, la part C en l'interval $[0, \frac{1}{3}]$ i la part en l'interval $[\frac{2}{3}, 1]$ són geomètricament similars a C , però a escala $\frac{1}{3}$. També tenim que cada part de C en els diferents intervals que conformen C_2 són com C però a escala $\frac{1}{9}$. I així successivament.

Si ens fixem, pot semblar que quan fem el límit d'aquests conjunts, el cardinal de C hagi de ser pròxim a 0, ja que hem anat eliminant petits intervals de $[0, 1]$ però els extrems d'aquest interval sempre romanen. A més, si calculem la longitud de C , en el sentit de la mesura de Lebesgue, obtenim

$$\text{long}(C) = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{long}(C_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} 2^k \left(\frac{1}{3}\right)^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 0.$$

Això és conseqüència del comportament continu de la mesura de Lebesgue respecte les successions monòtones de conjunts mesurables gràcies a la seva σ -additivitat. En particular, el següent resultat és el que ens permet justificar l'afirmació anterior:

Proposició 2.1. *Si $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$ és una successió decreixents de conjunts mesurables i si per algun j , $m(E_k) < \infty$, aleshores*

$$m\left(\bigcap_{j \geq 1} E_k\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} m(E_k).$$

Però en realitat, el conjunt C és no numerable ja que existeix una bijecció entre C i el conjunt de nombres reals \mathbb{R} . Per veure-ho, primerament caracteritzarem els punts x que pertanyen al conjunt de Cantor. Ho farem a partir de la representació dels nombres en base 3. Recordem que per qualsevol $x \in \mathbb{R}$, existeix una representació de x en base 3, $x = (a_N \dots a_0 . a_{-1} \dots)_3$, on

$$x = \sum_{j=-\infty}^N a_j 3^j,$$

amb $a_j \in \{0, 1, 2\}$, per qualsevol j . Si ens fixem, $\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{3}$ tenen dues expressions diferents en base 3. Això és degut a que la suma $\sum_{j \leq 0} a_j 3^j$ és una sèrie geomètrica de raó $\frac{1}{3}$ si $a_j = 1, \forall j$ o bé, de raó $\frac{2}{3}$ si $a_j = 2, \forall j$ i per tant podem expressar aquests dos nombres com $\frac{1}{3} = (0.1)_3 = (0.02222 \dots)_3$ i $\frac{2}{3} = (0.2)_3 = (0.12222 \dots)_3$. En realitat, això succeeix per a tots els nombres racionals de la forma $\frac{m}{3^k}$. Per conveni, agafem l'expressió que compleix que $a_j \neq 1, \forall j$.

Així doncs, enunciem el següent resultat:

Proposició 2.2. *Sigui $x \in [0, 1]$. Aleshores $x \in C$ si i només si l'expressió de x en base 3 no conté el dígit 1. És a dir,*

$$x \in C \Leftrightarrow x = a_1 3^{-1} + a_2 3^{-2} + a_3 3^{-3} + \dots, \text{ on } a_i \in \{0, 2\}, \forall i \geq 1.$$

Demostració. Per veure-ho, només cal tenir en compte que per obtenir C_1 , cal eliminar de $C_0 = [0, 1]$ l'interval $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, que està format pels nombres tals que $a_1 = 1$ ja que

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{3} + \sum_{j=-\infty}^{-2} a_j 3^j \leq \frac{2}{3}.$$

Gràcies al conveni esmentat anteriorment, els nombres $\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{3}$ també satisfan que $a_1 \neq 1$. Pel mateix raonament, per obtenir C_2 cal eliminar de C_1 els intervals $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ i $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, els quals estan formats pels nombres satisfan que $a_2 \neq 1$ en l'expressió en base 3. Per tant, C_2 està format pels nombres que en la seva expressió en base 3, ni a_1 ni a_2 són el dígit 1. Reiterant l'argumentació, obtenim que els punts que pertanyen a C són justament els punts de $[0, 1]$ tals que no contenen cap dígit 1 en la seva expressió en base 3. \square

Un cop vista aquesta caracterització dels nombres que pertanyen al conjunt de Cantor, ja podem construir una funció bijectiva entre C i $[0, 1]$. Aquesta consisteix en que a cada nombre de C , $x \in C$, se li fa correspondre la seva expressió en base 2. És a dir, només cal reemplaçar cada dígit 2 pel dígit 1, o en llenguatge matemàtic

$$f\left(\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k 3^{-k}\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{a_k}{2} 2^{-k},$$

on $\forall k \in \mathbb{N}, a_k \in \{0, 2\}$. Aquesta assignació és efectivament una funció bijectiva ja que podem expressar cada $y \in [0, 1]$ de forma binària i podem transformar aquesta expressió en base 3, i per tant, existeix $x \in C$ tal que y és la imatge de x .

Com a curiositat, observar que encara que existeixi una bijecció entre el conjunt de Cantor i l'interval $[0, 1]$, C té mesura de Lebesgue 0 i l'interval $[0, 1]$, 1.

Una altra caracterització del conjunt de Cantor és mitjançant el que s'anomena *sistema de funcions iterades* (veure el capítol 4).

Proposició 2.3. *Siguin $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dues funcions definides com $f_1(x) = \frac{x}{3}$, $f_2(x) = \frac{x+2}{3}$. Aleshores tenim que $C = f_1(C) \cup f_2(C)$.*

Demostració. Clarament veiem que per la pròpia construcció dels conjunts C_k , tenim que $C_k = f_1(C_{k-1}) \cup f_2(C_{k-1})$, $\forall k \geq 1$ (veure figura 7).

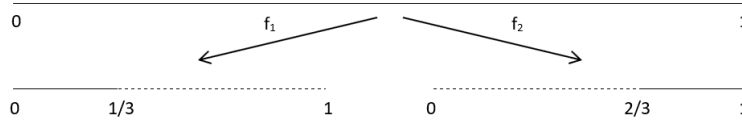


Figura 7: Representació de $f_1(C_0)$ i $f_2(C_0)$.

Vegem ara les dues inclusions de la igualtat $C = f_1(C) \cup f_2(C)$:

a) $f_1(C) \cup f_2(C) \subseteq C$: Sigui $x \in f_1(C) \cup f_2(C)$. Aleshores o $x \in f_1(C)$ o bé $x \in f_2(C)$. Suposem que $x \in f_1(C)$ (anàlogament per l'altre cas). Llavors $3x \in C$. Per la definició de C , tenim que $3x \in C_k$, per tot k i per tant $x \in f_1(C_k)$, $\forall k \geq 0$. Però ja hem dit que $C_k = f_1(C_{k-1}) \cup f_2(C_{k-1})$ i com a conseqüència, $x \in C_{k+1}$, $\forall k \geq 0$. Conseqüentment, $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_{k+1} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_k = C$, és a dir, $x \in C$.

b) $C \subseteq f_1(C) \cup f_2(C)$: Sigui $x \in C$. Per la definició de C , tenim que $x \in C_k$, $\forall k \geq 0$. En particular, $x \in C_1$ i per tant, $x \in [0, \frac{1}{3}]$ o bé $x \in [\frac{2}{3}, 1]$. Suposem que $x \in [0, \frac{1}{3}]$ (anàlogament per l'altre cas). Aleshores, gràcies al fet que $C_k = f_1(C_{k-1}) \cup f_2(C_{k-1})$, $\forall k \geq 1$, tenim $x \in C_k = f_1(C_{k-1}) \cup f_2(C_{k-1})$, $\forall k \geq 1$. Però $f_2(C_{k-1}) \subseteq f_2([0, 1]) = [\frac{2}{3}, 1]$, fet que implica que $x \in f_1(C_{k-1})$ ja que hem suposat que $x \in [0, \frac{1}{3}]$, i conseqüentment $3x \in C_{k-1}$. Com que això se satisfà per qualsevol $k \geq 1$, tenim que $3x \in \bigcap_{k \geq 1} C_{k-1} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_k = C$ i per tant, $x \in f_1(C)$.

Ara bé, si $x \in [\frac{2}{3}, 1]$, amb el mateix argument arribem a que $x \in f_2(C)$.

En ambdós casos, obtenim que $x \in f_1(C) \cup f_2(C)$.

Per tant, arribem a la conclusió que $C = f_1(C) \cup f_2(C)$. □

Més endavant veurem que, de fet, el conjunt de Cantor C és l'únic compacte del pla que satisfà aquesta propietat (veure capítol 4).

CORBA DE KOCH

Aquest fractal també és un dels més coneguts per la seva fàcil construcció geomètrica i per ser un dels primers en ser estudiat. La **corba de Koch** va ser descrit per Helge von Koch l'any 1904 a l'article titulat '*Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire*'.

El procés de construcció consisteix en eliminar el terç del mig de cada segment i substituir-lo per dos segments formant un angle de 60° . És a dir, partim d'un segment E_0 de longitud 1 (per exemple $[0, 1]$). El dividim en 3 i eliminem el troç del mig, substituint aquest per un triangle equilàter però sense la base, obtenint així E_1 . Fem el mateix per construir E_2 però ara amb els 4 segments que conformen E_1 i així reiteradament. D'una forma breu, per obtenir E_k cal reemplaçar el terç del mig de cada segment que conforma E_{k-1} per 2 segments en forma de triangle equilàter. Quan k és prou gran, les corbes E_{k-1} i E_k només es diferencien per petits detalls i a mesura que $k \rightarrow \infty$, la seqüència de les corbes $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ s'aproxima a una corba (el concepte de *convergència* el formalitzarem a la secció 3.1.1). Aquesta curva és la *corba de Koch* (veure figura 8).

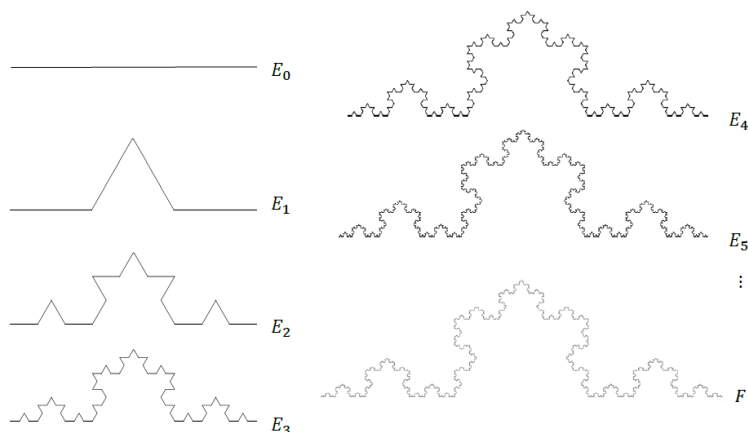


Figura 8: Construcció de la corba de Koch F . A cada iteració, el terç del mig de cada interval és reemplaçat per dos segments en forma de triangle equilàter.

La corba de Koch F és autosemblant pel mateix raonament que el de la secció anterior. Però també tenim que encara que a aquest fractal se li anomena "corba", la corba de Koch F és massa irregular per tenir tangents en el sentit clàssic de la definició.

És fàcil comprovar que E_k està format per 4^k segments de longitud $\frac{1}{3^k}$. Per tant, si fem tendir $k \rightarrow \infty$, obtenim que la longitud de F és

$$\text{long}(F) = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{long}(E_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} 4^k \left(\frac{1}{3^k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^k = \infty.$$

És més, qualsevol subconjunt de F té també longitud infinita. En canvi, F no té àrea. Aquestes propietats són algunes de les diferències més visibles en comparació amb els objectes euclidians més comuns.

Si en lloc de començar a partir d'un segment, partim d'un triangle equilàter i repetim el procés descrit per cada costat del triangle, obtenim el que s'anomena **floc de neu de Koch** (veure figura 9).

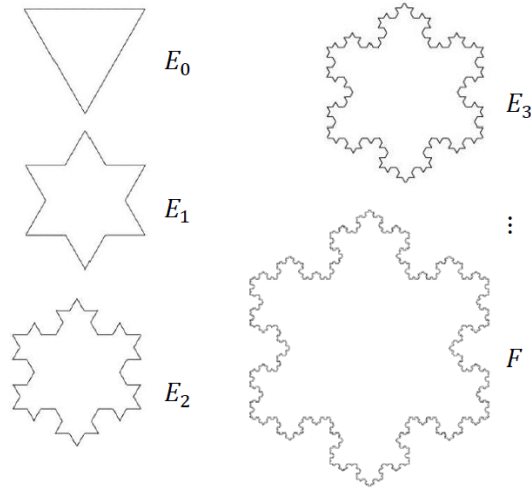


Figura 9: Construcció del flocc de neu de Koch F .

TRIANGLE DE SIERPIŃSKI

El següent exemple de fractal és el conjunt del pla anomenat **triangle de Sierpiński**. Encara que el nom és degut al matemàtic Waclaw Sierpiński, apareixen figures similars en alguns mosaics de diferents esglésies situades a Itàlia datats del segle XIII.

La construcció geomètrica del triangle de Sierpiński comença a partir d'un triangle equilàter ple, és a dir el triangle juntament amb la regió que envolta, amb els costats de longitud 1, al qual anomenarem T_0 . A continuació dividim el triangle en 4 triangles més petits de la següent manera: agafem els punts mitjos de cada costat del triangle i els unim (com si forméssim un triangle). Tot seguit, eliminem el triangle que queda entre mig. Obtenim així que els costats dels 3 nous triangles siguin de longitud $\frac{1}{2}$, és a dir, són iguals a T_0 però a escala $\frac{1}{2}$. Anomenarem T_1 als tres triangles units pels punts mitjos dels costats de T_0 . A continuació fem el mateix procediment a cada un d'aquest 3 triangles que conformen T_1 i obtenim T_2 . I així reiteradament obtenim una seqüència de subconjunts de T_0 , $\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ (veure figura 10). El triangle de Sierpiński és el "límit" de la seqüència dels conjunts T_k . Com que la seqüència $\{T_k\}_k$ és decreixent, i equivalentment $T_0 \supseteq T_1 \supseteq T_2 \supseteq \dots$, podem definir aquest fractal com $T = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} T_k$.



Figura 10: Construcció del triangle de Sierpiński T . En aquesta il·lustració només es mostra fins a la quarta iteració, i equivalentment, T_0, T_1, T_2, T_3 i T_4 .

Com en el cas de la corba de Koch, les propietats geomètriques de T són paradigmàtiques. D'una banda, tenim que tots els costats dels triangles que conformen T_n , també formen part de les iteracions següents, i equivalentment formaran part de T_k , per tot $k \geq n$. Com a conseqüència el triangle de Sierpiński T està format, com a mínim, per tots aquests costats. A l'iterat T_k tenim 3^k triangles, on cadascun d'aquests conté 3 costats de longitud $(\frac{1}{2})^k$. Per tant, el perímetre de T com a mínim és $3^k \cdot 3 \cdot (\frac{1}{2})^k$, per tot $k \in \mathbb{N}$. Si fem tendir $k \rightarrow \infty$, obtenim que $\lim_{k \rightarrow \infty} 3^k \cdot 3 \cdot (\frac{1}{2})^k = 3 \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} (\frac{3}{2})^k = \infty$.

D'altra banda, considerant que l'iterat T_k conté 3^k triangles on cada costat és de longitud $(\frac{1}{2})^k$, tenim que l'àrea de T_k és de $3^k \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot ((\frac{1}{2})^k)^2$. Si fem tendir $k \rightarrow \infty$, obtenim que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 3^k \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot ((\frac{1}{2})^k)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} 3^k \cdot ((\frac{1}{2})^2)^k = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} (\frac{3}{4})^k = 0.$$

Tal i com hem fet pel conjunt de Cantor, el triangle de Sierpiński també es pot caracteritzar mitjançant un sistema de funcions iterades. La demostració d'aquesta proposició es realitza de manera anàloga a la de la proposició 2.3, tenint en compte que, per inducció, $T_{k+1} = f_1(T_k) \cup f_2(T_k) \cup f_3(T_k)$, per tot $k \in \mathbb{N}$.

Proposició 2.4. *Siguin $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tres funcions definides com*

$$f_1(x, y) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y), \quad f_2(x, y) = (\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}y) \quad i \quad f_3(x, y) = (\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{4}).$$

Aleshores tenim que $S = f_1(S) \cup f_2(S) \cup f_3(S)$.

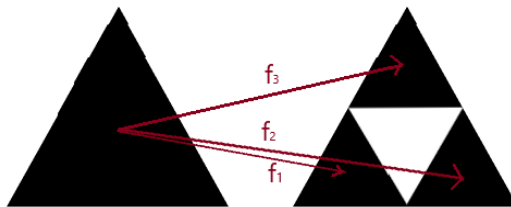


Figura 11: Representació de $f_1(T_0) \cup f_2(T_0) \cup f_3(T_0)$.

2.2 Iteració aleatòria: El Joc del Caos per polígons

Per últim, explicarem una manera menys òbvia de contruir un fractal que parteix dels vèrtexs d'un polígon regular i un punt qualsevol dins aquest polígon. Per fer més senzilla l'explicació, considerarem els vèrtexs d'un triangle equilàter.

Així doncs, anomenarem A , B i C els vèrtexs d'un triangle equilàter i al punt aleatori inicial p_1 . Considerem qualsevol generador aleatori uniforme sobre el conjunt dels vèrtexs del triangle, és a dir, sobre $\{A, B, C\}$. Llavors, marquem el punt mig del segment que uneix el punt inicial i el vèrtex que ens proporciona el generador aleatori (veure figura 12). Aquest nou punt l'anomenem p_2 . Aleshores el joc consisteix en repetir aquest procés. És a dir, per cada iteració, agafem el punt mig del segment que uneix p_k amb el vèrtex que ens surt del generador i l'anomenem p_{k+1} . Repetint aquest procés un nombre prou gran de vegades, la figura que obtenim cada cop s'assembla més al triangle de Sierpiński descrit en la secció anterior que té vèrtexs A , B i C .

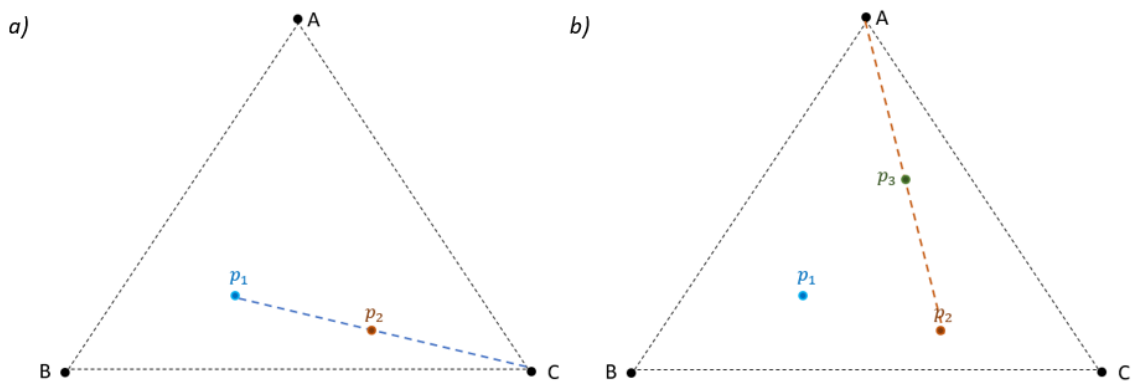


Figura 12: A la imatge a) es pot veure el primer pas de la construcció aleatòria, suposant que el vèrtex proporcionat pel generador és C ; a la imatge b), el segon pas de la construcció aleatòria suposant que el vèrtex és A .

Aleshores anomenem P a aquesta figura. Si ens fixem, tal i com passava amb el triangle de Sierpiński, P es pot expressar a partir d'un sistema de funcions iterades. Si escollim $f_1(x, y) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y)$, $f_2(x, y) = (\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}y)$ i $f_3(x, y) = (\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{4})$, on considerem que els vèrtex del triangle són $A = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $B = (0, 0)$ i $C = (1, 0)$, aleshores tenim que $P = f_1(P) \cup f_2(P) \cup f_3(P)$. Efectivament, vegem-ho:

- Si $p \in P$, aleshores existeix $q \in P$ tal que $p = f_i(q)$, per un cert $i = 1, 2, 3$. Això és degut a la pròpia construcció de P . Per tant, tenim que $p \in f_1(P) \cup f_2(P) \cup f_3(P)$.
- Si $p \notin P$, aleshores tenim que per qualsevol $i = 1, 2, 3$, no existeix $q \in P$ tal que $p = f_i(q)$. Per tant, $p \notin f_1(P) \cup f_2(P) \cup f_3(P)$.

Per aquest motiu, P és la unió de tres còpies escalades d'ell mateix (veure figura 13).

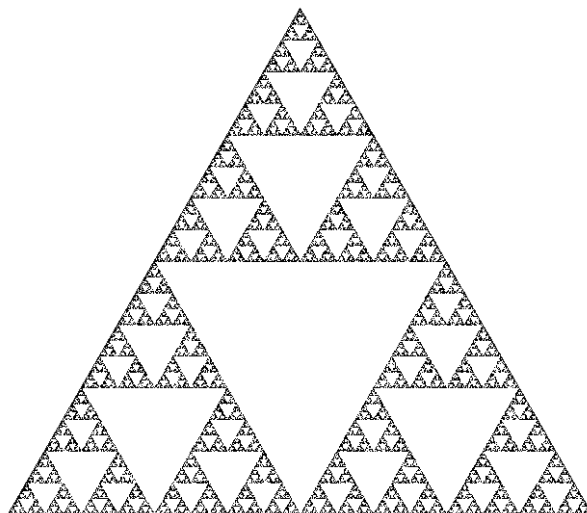


Figura 13: Figura que ens queda al cap d'iterar el procés 36000 vegades.

Aquest procés no és únic, ja que podem escollir com a polígon inicial un quadrat o qualsevol polígon regular (de fet, veurem que no cal escollir un polígon). També podem

modificar la distància a la qual escollim el següent punt. És a dir, en el cas explicar anteriorment, hem agafat el punt mig entre el punt i el vèrtex del triangle corresponent, i equivalentment a una distància $\frac{1}{2}$ del vèrtex, però podríem haver escollit qualsevol distància $r \in (0, 1)$. Com en l'exemple que hem posat abans, en algun d'aquests casos el resultat que obtenim és un fractal (veure la figura 14).

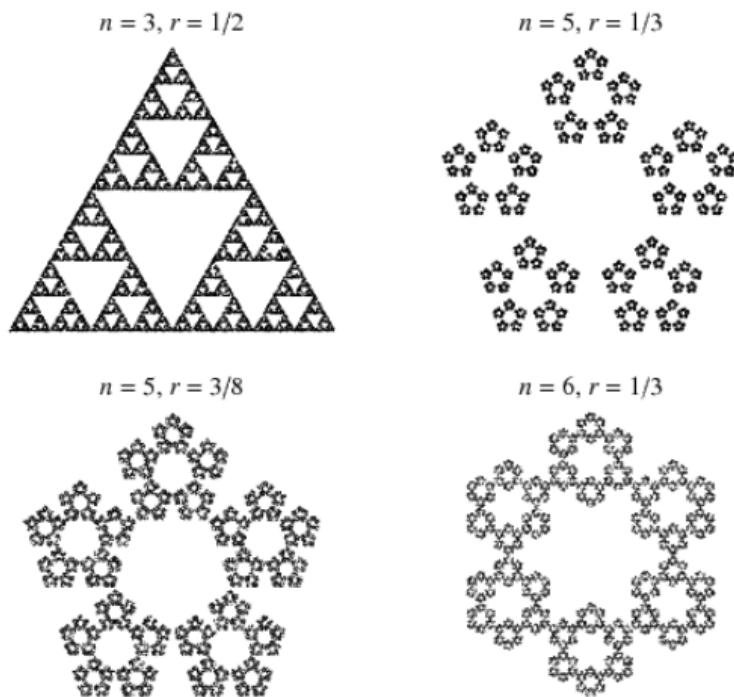


Figura 14: Exemples de construccions fractals mitjançant El Joc del Caos.

Obtenim així un fractal d'una forma menys usual. El motiu pel qual obtenim aquest fractal reiterant el procés anteriorment descrit s'explicarà més endavant (veure secció 5).

3 PRELIMINARS

Al llarg de capítol anterior, hem explicat, a partir de diferents mètodes, construccions de diferents fractals, però tots els exemples proposats eren subconjunts del pla. En aquest capítol estudiarem l'espai mètric on realment "viuen" els fractals, així com les definicions d'espai mètric, convergència o espai de Banach. L'objectiu és establir els conceptes necessaris per tal de poder arribar a demostrar el Teorema del Collage a la secció 4.1.

3.1 Espais mètrics

El primer concepte que hem de definir és el de *mètrica*.

Definició 3.1. *Sigui X un conjunt. Definim una **mètrica**, també anomenada **distància**, com una aplicació*

$$d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$$

tal que, per a tot $x, y, z \in X$, satisfà:

- a) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- b) $d(x, y) = d(y, x)$ (*simetria*),
- c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (*desigualtat triangular*).

Exemple 3.2. Sigui $X = \mathbb{R}^n$. Diem **distància euclidiana** a la mètrica definida per

$$d(x, y) = |x - y|,$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, on $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Definició 3.3. *Sigui X un conjunt. Si d és una mètrica a X , diem que (X, d) és un **espai mètric**.*

Hi ha dos conceptes que utilitzarem al llarg del capítol. Per aquest motiu, definim-los:

Definició 3.4. *Sigui (X, d) un espai mètric, $p \in X$ un punt qualsevol i $r > 0$. Definim una **bola oberta de centre x i radi r** com el subconjunt de X format pel punts de X que estan a una distància menor que r de p . Equivalentment, $B_r(p) = \{x \in X : d(p, x) < r\}$.*

Definició 3.5. *Sigui (X, d) un espai mètric qualsevol i $A \subseteq X$ un subconjunt qualsevol. Definim la **clausura de A** , i la denotem com \overline{A} , al conjunt $\overline{A} = \{x \in X : \forall r > 0, B_r(p) \cap A \neq \emptyset\}$. Els punts x tal que $x \in \overline{A} \setminus A$ s'anomenen **punts d'acumulació**.*

Com hem vist, el concepte de mètrica definit fins ara serveix per establir distàncies entre punts de l'espai que considerem. Però també podem considerar la distància entre un subconjunt A d'un conjunt X i un punt que no pertanyi a aquest subconjunt A o entre subconjunts de X a partir d'aquesta mètrica ja definida.

Definició 3.6. *Sigui (X, d) un espai mètric, $A \subseteq X$ un subconjunt i $x \in X$ un punt qualsevol de X . Anomenem **distància entre x i A** a l'element de $[0, \infty)$*

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y).$$

D'una manera més general, si $A, B \subseteq X$ són dos subconjunts no buits de X , definim la **distància entre A i B** com

$$d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b).$$

Proposició 3.7. *Sigui (X, d) un espai mètric i siguin $A, B \subseteq X$ dos subconjunts no buits de X . Aleshores tenim*

$$d(A, B) = \inf_{a \in A} \{d(a, B)\} = \inf_{b \in B} \{d(b, A)\}.$$

Demostració. Veurem la primera igualtat (l'altra es comprovaria anàlogament). Sigui $a \in A$. Per cada $b \in B$, tenim que $d(A, B) \leq d(a, b)$. Per tant, tenim que $d(A, B)$ és una cota inferior del conjunt $\{d(a, b) : b \in B\}$ i com a conseqüència, $d(A, B) \leq d(a, B)$. Com que $a \in A$ és arbitrari, obtenim $\forall a \in A, d(A, B) \leq d(a, B)$, fet que implica que $d(A, B)$ és una cota inferior de $\{d(a, B) : a \in A\}$ i per tant $d(A, B) \leq \inf_{a \in A} \{d(a, B)\}$.

Per la pròpia definició de $d(A, B)$, tenim que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a_\varepsilon \in A, b_\varepsilon \in B \text{ tal que } d(A, B) + \varepsilon > d(a_\varepsilon, b_\varepsilon).$$

Com $d(a_\varepsilon, B) \leq d(a_\varepsilon, b_\varepsilon)$, tenim que $d(a_\varepsilon, B) < d(A, B) + \varepsilon$ per a cada $\varepsilon > 0$. Aleshores com $\inf_{a \in A} \{d(a, B)\} \leq d(a_\varepsilon, B)$, arribem a la conclusió que

$$\forall \varepsilon > 0, \inf_{a \in A} \{d(a, B)\} < d(A, B) + \varepsilon.$$

és a dir, $\inf_{a \in A} \{d(a, B)\} \leq d(A, B)$. Per tant, si juntem les dues desigualtats, obtenim $d(A, B) = \inf_{a \in A} \{d(a, B)\}$ tal i com volíem veure. \square

Observació 3.8. La distància entre A i B no és una mètrica en el conjunt de parts de X , perquè encara que $d(A, B) \geq 0$ i $d(A, B) = d(B, A)$ per a tot $A, B \subseteq X$, no satisfà la condició $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B, \forall A, B \subseteq X$.

Per exemple a l'espai (\mathbb{R}, d) , els intervals $A = (-6, 6)$ i $B = [6, \infty)$ compleixen que $d(A, B) = 0$ però en canvi, $A \neq B$.

A continuació, enumerem una sèrie de propietats de la distància d'un punt a un conjunt en un espai mètric que ens seran útils per a la següent secció.

Proposició 3.9. *Sigui (X, d) un espai mètric, $A, B \subseteq X$ dos subconjunts no buits i $x, y \in X$ punts qualsevols de X . Aleshores se satisfà:*

- a) Si $A \subseteq B$, llavors $d(x, B) \leq d(x, A)$,
- b) $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$,
- c) $x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x, A) = 0$,
- d) $d(x, A) = d(x, \overline{A})$.

Demostració. Siguin $A, B \subseteq X$ subconjunts i $x, y \in X$ punts qualsevols.

a) Per veure aquesta propietat, suposem també que $A \subseteq B$. Aleshores tenim dos casos:

- Si $A = B$, evidentment $d(x, A) = d(x, B)$ i en particular $d(x, B) \leq d(x, A)$.

- Si $A \subsetneq B$, llavors $\exists b \in B \setminus A$ tal que $d(x, A) \geq d(x, b)$. Però sabem que $\forall z \in B$, $d(x, z) \geq \inf\{d(x, y) : y \in B\} = d(x, B)$. Per tant, tenim $d(x, B) \leq d(x, A)$ tal i com volíem.

- b) Gràcies a la desigualtat triangular de la pròpia definició de mètrica, tenim que per a tot $z \in A$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ i per tant, tenim $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, z)$, $\forall z \in A$. Conseqüentment, com això se satisfà per a tot $z \in A$, obtenim que $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A)$ i per tant tenim $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$, és a dir,

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y) \quad (3.1)$$

Per veure l'altre desigualtat, ho fem de manera anàloga, però canviant la x per la y i viceversa. És a dir, tenim que $\forall z \in A$, $d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z)$. Considerant la propietat de simetria i com la desigualtat se satisfà per tot $z \in A$, obtenim $d(y, A) \leq d(x, y) + d(x, z)$, $\forall z \in A$. Repetint l'argument anterior, tenim $d(y, A) \leq d(x, y) + d(x, A)$, és a dir,

$$-d(x, y) \leq d(x, A) - d(y, A) \quad (3.2)$$

Com a conseqüència, si juntem les desigualtats (3.1) i (3.2) obtenim $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ tal i com volíem veure.

- c) Aquesta propietat es comprova mitjançant les següents equivalències:

$$\begin{aligned} x \in \bar{A} &\Leftrightarrow \forall r > 0, B_r(x) \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall r > 0, \exists a \in A : d(x, a) < r \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \inf_{a \in A} \{d(x, a)\} = 0 \Leftrightarrow d(x, A) = 0. \end{aligned}$$

- d) Per veure l'última propietat, veiem les dues igualtats. Com que $A \subseteq \bar{A}$, per la propietat a), tenim

$$d(x, A) \geq d(x, \bar{A}). \quad (3.3)$$

Ara, sigui $y \in \bar{A}$. Per la propietat c), tenim $d(y, A) = 0$ i per tant, si $\varepsilon > 0$, llavors $0 = d(y, A) < \varepsilon$. Per definició, tenim que $\exists a \in A$ tal que $d(y, a) < \varepsilon$. Aleshores

$$d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a) < d(x, y) + \varepsilon$$

Com que ε és arbitrari, tenim que $\forall \varepsilon > 0$, $d(x, A) < d(x, y) + \varepsilon$ i, per tant, fent $\varepsilon \rightarrow 0$, obtenim $d(x, A) \leq d(x, y)$.

Com que $y \in \bar{A}$ és un punt arbitrari, arribem a la conclusió que $d(x, A) \leq d(x, y)$, $\forall y \in \bar{A}$. Conseqüentment, obtenim

$$d(x, \bar{A}) = \inf\{d(x, y) : y \in \bar{A}\} \geq d(x, A). \quad (3.4)$$

Juntant (3.3) i (3.4) obtenim $d(x, A) = d(x, \bar{A})$ com volíem provar. □

Definició 3.10. *Sigui (X, d) un espai mètric i $A \subseteq X$ un subconjunt qualsevol. Definim el **diàmetre de A** com*

$$\text{diam}(A) = \sup_{a, b \in A} d(a, b)$$

Per conveni, establim que $\text{diam}(\emptyset) = 0$.

Observació 3.11. Notem que el diàmetre pot prendre el valor ∞ . En particular, diem que un conjunt és **acotat** si el seu diàmetre no és infinit.

3.1.1 Convergència i convergència uniforme

Al llarg del capítol 2, parlàvem de construccions geomètriques per diferents fractals. En aquestes construccions hem introduït el concepte de límit o convergència d'una família de conjunts. En aquesta secció recordarem aquest concepte, el qual utilitzarem en el següent capítol. Totes aquestes definicions i resultats estan realitzats al curs d'Anàlisi Matemàtica.

Definició 3.12. *Sigui (X, d) un espai mètric i sigui $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successió tal que $x_n \in X, \forall n \in \mathbb{N}$. Diem que aquesta successió és **convergent** si*

$$\exists x \in X \text{ tal que } \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq n_0, d(x_n, x) < \epsilon.$$

Notació 1. *Denotem que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergeix a x com $x_n \rightarrow x$ o bé $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.*

Definició 3.13. *Siguin (X, d_X) i (Y, d_Y) dos espais mètrics, $\{f_n : E \subseteq X \rightarrow Y\}_{n \in \mathbb{N}}$ una família de funcions i $f : E \subseteq X \rightarrow Y$ una altra funció. Diem que la successió $(f_n)_n$ **convergeix uniformement a f** si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq n_0, \forall x \in E, d_Y(f_n(x), f(x)) < \epsilon.$$

Notació 2. *Denotem que $(f_n)_n$ convergeix uniformement a f com $f_n \rightrightarrows f$.*

També cal recordar definicions com la d'un conjunt compacte o la continuïtat d'una funció, ja que posteriorment les utilitzarem.

Definició 3.14. *Sigui (X, d) un espai mètric. Diem que $S \subseteq X$ és un **compacte a (X, d)** si tota successió $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en S conté una subsuccessió convergent a algun punt de S .*

Definició 3.15. *Siguin (X, d_X) i (Y, d_Y) dos espais mètric, $f : E \subseteq X \rightarrow Y$ una funció i $p \in E$ un punt qualsevol. Diem que f és **continua en p** si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in E, d_X(x, p) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(p)) < \epsilon$. En altres paraules, f és continua en p si $f(B_\delta(p)) \subseteq B_\epsilon(f(p))$. En particular, si f és continua en $p, \forall p \in E$, diem que f és **continua en E** .*

Corol·lari 3.16. *Siguin (X, d_X) i (Y, d_Y) dos espais mètrics, $\{f_n : E \subseteq X \rightarrow Y\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de funcions contínues i $f : E \subseteq X \rightarrow Y$ una altra funció tal que $f_n \rightrightarrows f$. Aleshores f també és continua.*

3.1.2 Espai mètric de Hausdorff

L'objectiu d'aquesta secció és tractar d'establir una mètrica en el conjunt format pels subconjunts compactes i no buits d'un espai mètric (X, d) . Aquesta mètrica s'anomena *mètrica de Hausdorff*, en honor al matemàtic que la va definir. Com ja veurem més endavant, l'espai mètric de Hausdorff és l'espai on "viuen" els fractals.

Primerament, definim uns conceptes que utilitzarem per tal de definir la mètrica de Hausdorff.

Definició 3.17. *Sigui (X, d) un espai mètric. Donats $A, B \subseteq X$ dos subconjunts acotats i no buits, es defineix*

$$\varphi(A, B) = \sup_{a \in A} \{d(a, B)\}.$$

Observació 3.18. Cal tenir en compte que aquesta funció no és simètrica ja que els conjunts $\{d(a, B) : a \in A\}$ i $\{d(b, A) : b \in B\}$ no són iguals.

A continuació, enumerem una sèrie de propietats d'aquesta funció $\varphi(A, B)$.

Teorema 3.19. *Sigui (X, d) un espai mètric i siguin $A, B \subseteq X$ dos subconjunts acotats i no buits. Aleshores se satisfà que*

- a) $\varphi(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \subseteq \overline{B}$,
- b) $\varphi(A, C) \leq \varphi(A, B) + \varphi(B, C)$,
- c) Si $A \subseteq B$, aleshores $\varphi(A, C) \leq \varphi(B, C)$ i $\varphi(C, B) \leq \varphi(C, A)$.

Demostració. a) Veiem les dues implicacions per separat:

\Rightarrow : Suposem doncs que $\varphi(A, B) = 0$ i sigui $a \in A$. Aleshores per definició tenim que $d(a, B) \leq \varphi(A, B) = 0$ i com a conseqüència, $d(a, B) = 0$. Però sabem, per la propietat c) de la proposició 3.9, tenim $x \in \overline{B}$. Com $a \in A$ és arbitrari, obtenim que $A \subseteq \overline{B}$.

\Leftarrow : Suposem ara que $A \subseteq \overline{B}$ i sigui novament $a \in A$. Aleshores per hipòtesi, $a \in \overline{B}$ i per la propietat c) de la proposició 3.9, tenim $d(a, B) = 0$. Com abans, com que $a \in A$ és un punt arbitrari, tenim que per tot $a \in A$, $d(a, B) = 0$ i conseqüentment $\varphi(A, B) = \sup\{d(a, B) : a \in A\} = 0$.

- b) Sigui $a \in A, b \in B$. Per la propietat b) de la proposició 3.9 tenim que $d(a, C) - d(b, C) \leq d(a, b)$ i equivalentment, $d(a, C) \leq d(a, b) + d(b, C)$. Com que a no depèn de b i a més, b és arbitrari, tenim que

$$d(a, C) \leq \{d(a, b) + d(b, C) : b \in B\}$$

D'aquesta darrera desigualtat, obtenim les següents:

$$d(a, C) \leq \inf\{d(a, b) + d(b, C) : b \in B\} \leq \inf\{d(a, b) : b \in B\} + \inf\{d(b, C) : b \in B\} \leq d(a, B) + \sup\{d(b, C) : b \in B\} \leq \varphi(A, B) + \varphi(B, C).$$

Com a és qualsevol punt de A , tenim que $\{d(a, C) : a \in A\} \leq \varphi(A, B) + \varphi(B, C)$ i conseqüentment, obtenim que $\varphi(A, C) \leq \varphi(A, B) + \varphi(B, C)$.

- c) Suposem que $A \subseteq B$, fet que implica que $\{d(a, C) : a \in A\} \subseteq \{d(b, C) : b \in B\}$ i per tant, $\varphi(A, C) \leq \varphi(B, C)$. Per altra banda, sigui $c \in C$ un punt qualsevol. Com que $A \subseteq B$, per la propietat a) de la proposició 3.9 obtenim $d(c, B) \leq d(c, A) \leq \varphi(C, A)$ i per tant com que $c \in C$ és un punt qualsevol, tenim $\forall c \in C, d(c, B) \leq \varphi(C, A)$ i com a conseqüència $\varphi(C, B) = \{d(c, B) : c \in C\} \leq \varphi(C, A)$.

□

Proposició 3.20. *Sigui (X, d) un espai mètric i siguin $A, B \subseteq X$ dos subconjunts acotats i no buits. Si $\{A_i\}_{i \in I}$ i $\{B_i\}_{i \in I}$ són dues famílies no buides formades per subconjunts acotats i no buits de X i tals que $\bigcup_{i \in I} A_i$ i $\bigcup_{i \in I} B_i$ també són acotats, llavors se satisfà:*

$$\varphi\left(\bigcup_{i \in I} A_i, \bigcup_{i \in I} B_i\right) \leq \sup_{i \in I} \{\varphi(A_i, B_i)\}.$$

Demostració. Per veure-ho, agafem $a \in \bigcup_{i \in I} A_i$ qualsevol. Aleshores $\exists j \in I$ tal que $a \in A_j$.

Per la propietat a) de la proposició 3.9, tenim que $d(a, \bigcup_{i \in I} B_i) \leq d(a, B_j)$. Com que

$a \in \bigcup_{i \in I} A_i$ és un punt arbitrari, aquesta última desigualtat es compleix per tot $a \in \bigcup_{i \in I} A_i$

i per tant, $\varphi(\bigcup_{i \in I} A_i, \bigcup_{i \in I} B_i) \leq \varphi(A_j, B_j) \leq \sup_{i \in I} \{\varphi(A_i, B_i)\}$. \square

Ara, un cop definida la funció φ i enunciades algunes de les seves propietats més importants, podem definir l'anomenada *mètrica de Hausdorff*. Com ja sabem, necessitem un espai on definir aquesta mètrica. Denotarem aquest espai com $\mathcal{L}(X)$ i és l'espai format per els subconjunts compactes no buits de X , on (X, d) és un espai mètric.

Definició 3.21. *Sigui (X, d) un espai mètric. Aleshores definim el conjunt $\mathcal{L}(X)$ com*

$$\mathcal{L}(X) = \{A \subseteq X : A \neq \emptyset, A \text{ és compacte}\}.$$

Teorema 3.22. *Sigui (X, d) un espai mètric. La funció $\mathcal{H} : \mathcal{L}(X) \times \mathcal{L}(X) \rightarrow [0, \infty)$ definida com*

$$\mathcal{H}(A, B) = \max\{\varphi(A, B), \varphi(B, A)\},$$

*per a cada $A, B \in \mathcal{L}(X)$, és una mètrica sobre el conjunt $\mathcal{L}(X)$ i es coneix com la **mètrica de Hausdorff**.*

Demostració. Per tal de veure que \mathcal{H} és una mètrica sobre $\mathcal{L}(X)$, cal comprovar les 4 condicions de la definició. Per tant, siguin $A, B, C \in \mathcal{L}(X)$ qualsevols. Llavors:

a) Com que $\varphi(A, B) \geq 0$ i $\varphi(B, A) \geq 0$, per la pròpia definició de la funció φ , tenim que $\mathcal{H}(A, B) \geq 0$.

b) Per veure aquesta condició, cal tenir en compte que com $A, B \in \mathcal{L}(X)$, aleshores $A = \overline{A}$ i $B = \overline{B}$ (ja que són tancats), i que per la propietat a), tenim $\varphi(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \subseteq \overline{B}$. Per tant,

$$\mathcal{H}(A, B) = 0 \Leftrightarrow \varphi(A, B) = 0 \text{ i } \varphi(B, A) = 0 \Leftrightarrow A \subseteq \overline{B} = B \text{ i } B \subseteq \overline{A} = A \Leftrightarrow A = B.$$

c) Com que $\mathcal{H}(A, B) = \max\{\varphi(A, B), \varphi(B, A)\}$, clarament tenim que $\mathcal{H}(A, B) = \mathcal{H}(B, A)$.

d) Gràcies a la propietat b), tenim que $\varphi(A, C) \leq \varphi(A, B) + \varphi(B, C)$ i $\varphi(C, A) \leq \varphi(C, B) + \varphi(B, A)$. Per tant:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(A, C) &= \max\{\varphi(A, C), \varphi(C, A)\} \leq \\ &\max\{\varphi(A, B) + \varphi(B, C), \varphi(C, B) + \varphi(B, A)\} \leq \\ &\leq \max\{\varphi(A, B), \varphi(B, A)\} + \max\{\varphi(B, C), \varphi(C, B)\} = \mathcal{H}(A, B) + \mathcal{H}(B, C) \end{aligned}$$

Per tant, hem vist les quatre condicions tal i com volíem veure. Com a conseqüència, obtenim que la funció \mathcal{H} és una mètrica en l'espai $\mathcal{L}(X)$. \square

A continuació, donarem dues equivalències de la mètrica de Hausdorff que ens permetran entendre millor aquesta noció.

Teorema 3.23. *Sigui (X, d) un espai mètric i siguin $A, B \in \mathcal{L}(X)$. Aleshores se satisfà que*

$$\mathcal{H}(A, B) = \sup_{a \in A, b \in B} \{d(a, B), d(b, A)\}.$$

Demostració. Sabem que $\{d(a, B), d(b, A) : a \in A, b \in B\} = \{d(a, B) : a \in A\} \cup \{d(b, A) : b \in B\}$. Per tant, tenim

$$\begin{aligned} \sup\{d(a, B), d(b, A) : a \in A, b \in B\} &= \sup\{\{d(a, B) : a \in A\} \cup \{d(b, A) : b \in B\}\} = \\ &= \max\{\sup\{d(a, B) : a \in A\}, \sup\{d(b, A) : b \in B\}\} = \\ &= \max\{\varphi(A, B), \varphi(B, A)\} = \mathcal{H}(A, B). \end{aligned}$$

Per tant, obtenim $\mathcal{H}(A, B) = \sup\{d(a, B), d(b, A) : a \in A, b \in B\}$ tal i com volíem. \square

Per veure l'altra, necessitem definir el **conjunt δ -paral·lel de A** , que denotarem per A_δ , i donar uns resultats previs.

Definició 3.24. *Siguin (X, d) un espai mètric, $A \subseteq X$ un subconjunt no buit i acotat, $x \in X$ i $\delta > 0$. Aleshores definim el **conjunt δ -paral·lel de A** com $A_\delta = \{y \in X : d(y, A) \leq \delta\}$.*

Proposició 3.25. *Siguin (X, d) un espai mètric, $A, B \subseteq X$ dos subconjunts no buits i acotats i $\delta > 0$. Llavors tenim que es compleix*

- a) *Si $\varphi(A, B) < \delta$, aleshores $A \subseteq B_\delta$,*
- b) *Si $A \subseteq B_\delta$, aleshores $\varphi(A, B) \leq \delta$,*
- c) *Si $A \subseteq B_\epsilon$, on $0 < \epsilon < \delta$, aleshores $\varphi(A, B) \leq \delta$.*

Demostració. a) Suposem doncs que $\varphi(A, B) < \delta$. Sigui $a \in A$. Llavors tenim $d(a, B) \leq \varphi(A, B) < \delta$, i equivalentment $d(a, B) < \delta$, d'on obtenim $a \in B_\delta$. Com $a \in A$ és un punt arbitrari, tenim que $A \subseteq B_\delta$.

b) Suposem ara que $A \subseteq B_\delta$ i sigui $a \in A$. Aleshores $d(a, B) \leq \delta$ i consegüentment $\varphi(A, B) = \sup\{d(a, B) : a \in A\} \leq \delta$ tal i com volíem veure.

c) Per últim, suposem que $A \subseteq B_\epsilon$. Per b), tenim que $\varphi(A, B) \leq \epsilon$ i com $0 < \epsilon < \delta$, $\varphi(A, B) < \delta$.

\square

Proposició 3.26. *Siguin (X, d) un espai mètric, $A, B \in \mathcal{L}(X)$ i $\delta > 0$. Aleshores:*

- a) *Si $\mathcal{H}(A, B) < \delta$, aleshores $A \subseteq B_\delta$ i $B \subseteq A_\delta$,*
- b) *Si $A \subseteq B_\delta$ i $B \subseteq A_\delta$, aleshores $\mathcal{H}(A, B) \leq \delta$,*
- c) *Si $A \subseteq B_\epsilon$ i $B \subseteq A_\epsilon$, on $0 < \epsilon < \delta$, aleshores $\mathcal{H}(A, B) \leq \delta$.*

Demostració. a) Suposem doncs que $\mathcal{H}(A, B) < \delta$. Llavors per definició $\varphi(A, B) < \delta$ i $\varphi(B, A) < \delta$. Per la proposició 3.25, a), obtenim que $A \subseteq B_\delta$ i $B \subseteq A_\delta$.

b) Suposem ara que $A \subseteq B_\delta$ i $B \subseteq A_\delta$. Per la proposició 3.25, b), tenim que $\varphi(A, B) \leq \delta$ i $\varphi(B, A) \leq \delta$. Per tant, $\mathcal{H}(A, B) = \max\{\varphi(A, B), \varphi(B, A)\} \leq \delta$.

- c) Per últim, suposem que $A \subseteq B_\epsilon$ i $B \subseteq A_\epsilon$. Per b), obtenim que $\mathcal{H}(A, B) \leq \epsilon$ i com $0 < \epsilon < \delta$, $\mathcal{H}(A, B) < \delta$. □

Finalment, vegem la següent definició alternativa que pot ser útil:

Teorema 3.27. *Sigui (X, d) un espai mètric i siguin $A, B \in \mathcal{L}(X)$. Aleshores tenim que se satisfà la següent igualtat:*

$$\mathcal{H}(A, B) = \inf\{\epsilon > 0 : A \subseteq B_\epsilon \text{ i } B \subseteq A_\epsilon\}.$$

Demostració. Sigui $\delta \in \{\epsilon > 0 : A \subseteq B_\epsilon \text{ i } B \subseteq A_\epsilon\}$, i equivalentment $A \subseteq B_\delta$ i $B \subseteq A_\delta$. Per la proposició 3.26, b), obtenim que $\mathcal{H}(A, B) \leq \delta$. Com δ és arbitrari, tenim que $\mathcal{H}(A, B) \leq \delta$, $\forall \delta \in \{\epsilon > 0 : A \subseteq B_\epsilon \text{ i } B \subseteq A_\epsilon\}$, i conseqüentment

$$\mathcal{H}(A, B) \leq \inf\{\epsilon > 0 : A \subseteq B_\epsilon, B \subseteq A_\epsilon\}. \quad (3.5)$$

Per veure l'altra desigualtat, comprovarem que $\mathcal{H}(A, B) \in \{\epsilon > 0 : A \subseteq B_\epsilon \text{ i } B \subseteq A_\epsilon\}$. Sigui $x = \varphi(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B)$ i $y = \varphi(B, A) = \sup_{b \in B} d(b, A)$. Aleshores, $\forall a \in A$, $d(a, B) \leq x$ i $\forall b \in B$, $d(b, A) \leq y$. Com a conseqüència, obtenim que $\forall a \in A$, $a \in B_x$ i $\forall b \in B$, $b \in A_y$, i equivalentment $A \subseteq B_x$ i $B \subseteq A_y$. Però és clar que $A_{r_1} \subseteq A_{r_2}$ si $r_1 \leq r_2$. Per tant, si agafem el màxim de x i y tindrem que $A_y \subseteq A_{\max\{x, y\}}$ i $B_x \subseteq B_{\max\{x, y\}}$. Obtenim així $A \subseteq B_{\max\{x, y\}}$ i $B \subseteq A_{\max\{x, y\}}$ i per tant, $\max\{x, y\} \in \{\epsilon > 0 : A \subseteq B_\epsilon \text{ i } B \subseteq A_\epsilon\}$. Però $\max\{x, y\} = \mathcal{H}(A, B)$. Conseqüentment obtenim

$$\inf\{\epsilon > 0 : A \subseteq B_\epsilon, B \subseteq A_\epsilon\} \leq \mathcal{H}(A, B). \quad (3.6)$$

Juntant les desigualtats (3.5) i (3.6), arribem a la conclusió que $\mathcal{H}(A, B) = \inf\{\epsilon > 0 : A \subseteq B_\epsilon \text{ i } B \subseteq A_\epsilon\}$, tal i com volíem veure. □

Per últim, veiem algunes propietats de la mètrica de Hausdorff que ens seran útils posteriorment en altres apartats.

Proposició 3.28. *Sigui (X, d) un espai mètric. Aleshores es compleix:*

- a) Si $A, B, C, D \in \mathcal{L}(X)$ tals que $C \subseteq A$ i $D \subseteq B$, llavors $\mathcal{H}(A \cup D, B \cup C) \leq \mathcal{H}(A, B)$.
- b) Si $\{A_i\}_{i \in I}$ i $\{B_i\}_{i \in I}$ són subfamílies no buides de $\mathcal{L}(X)$ tals que $\bigcup_{i \in I} A_i$ i $\bigcup_{i \in I} B_i$ són elements de $\mathcal{L}(X)$, llavors

$$\mathcal{H}\left(\bigcup_{i \in I} A_i, \bigcup_{i \in I} B_i\right) \leq \sup_{i \in I} \mathcal{H}(A_i, B_i).$$

Demostració. Per veure a), suposem que $C \subseteq A$ i $D \subseteq B$. Per la propietat c), tenim que $\varphi(A \cup D, B \cup C) \leq \varphi(A, B)$ i $\varphi(B \cup C, A \cup D) \leq \varphi(B, A)$. Conseqüentment, obtenim

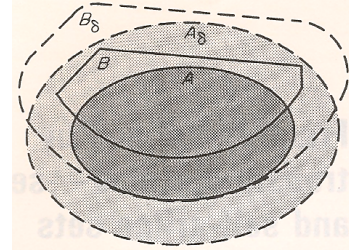


Figura 15: Exemple de conjunts A_δ i B_δ per un mateix δ .

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(A \cup D, B \cup C) &= \max \{ \varphi(A \cup D, B \cup C), \varphi(B \cup C, A \cup D) \} \leq \\ &\leq \max \{ \varphi(A, B), \varphi(B, A) \} = \mathcal{H}(A, B).\end{aligned}$$

Ara, per veure b), gràcies a la proposició 3.20, tenim $\varphi(\bigcup_{i \in I} A_i, \bigcup_{i \in I} B_i) \leq \sup \{ \varphi(A_i, B_i) : i \in I \}$ i $\varphi(\bigcup_{i \in I} B_i, \bigcup_{i \in I} A_i) \leq \sup \{ \varphi(B_i, A_i) : i \in I \}$ d'on obtenim

$$\mathcal{H}(\bigcup_{i \in I} A_i, \bigcup_{i \in I} B_i) \leq \max \{ \sup \{ \varphi(A_i, B_i) : i \in I \}, \sup \{ \varphi(B_i, A_i) : i \in I \} \}.$$

Llavors tenim dos casos:

- Si $\max \{ \sup \{ \varphi(A_i, B_i) : i \in I \}, \sup \{ \varphi(B_i, A_i) : i \in I \} \} = \sup \{ \varphi(A_i, B_i) : i \in I \}$, aleshores com $\sup \{ \varphi(A_i, B_i) : i \in I \} \leq \sup \{ \mathcal{H}(A_i, B_i) : i \in I \}$, tenim que

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\bigcup_{i \in I} A_i, \bigcup_{i \in I} B_i) &\leq \max \{ \sup \{ \varphi(A_i, B_i) : i \in I \}, \sup \{ \varphi(B_i, A_i) : i \in I \} \} = \\ &= \sup \{ \varphi(A_i, B_i) : i \in I \} \leq \sup \{ \mathcal{H}(A_i, B_i) : i \in I \}.\end{aligned}$$

- Si $\max \{ \sup \{ \varphi(A_i, B_i) : i \in I \}, \sup \{ \varphi(B_i, A_i) : i \in I \} \} = \sup \{ \varphi(B_i, A_i) : i \in I \}$, aleshores com $\sup \{ \varphi(B_i, A_i) : i \in I \} \leq \sup \{ \mathcal{H}(B_i, A_i) : i \in I \} = \sup \{ \mathcal{H}(A_i, B_i) : i \in I \}$, tenim que

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\bigcup_{i \in I} A_i, \bigcup_{i \in I} B_i) &\leq \max \{ \sup \{ \varphi(A_i, B_i) : i \in I \}, \sup \{ \varphi(B_i, A_i) : i \in I \} \} = \\ &= \sup \{ \varphi(B_i, A_i) : i \in I \} \leq \sup \{ \mathcal{H}(A_i, B_i) : i \in I \}.\end{aligned}$$

Com que en els dos casos possibles obtenim $\mathcal{H}(\bigcup_{i \in I} A_i, \bigcup_{i \in I} B_i) \leq \sup \{ \mathcal{H}(A_i, B_i) : i \in I \}$, obtenim el que volíem comprovar. \square

3.2 Teorema del punt fix

En general, el teorema del punt fix afirma que, sota certes condicions, una funció f definida d'un conjunt X en si mateix té almenys un punt fix. Existeixen diferents teoremes del punt fix, encara que el més general i el que ens interessa és el **teorema del punt fix de Banach**. El nom és degut a Stefan Banach, qui va ser el primer en enunciar-lo l'any 1922.

Abans d'enunciar-lo i demostrar-lo, cal definir uns conceptes previs tals com punt fix, funció contractiva, successió de Cauchy o espai mètric complet.

Definició 3.29. *Sigui f una funció qualsevol. Es defineix com **punt fix** de f un punt del domini de la funció f tal que la seva imatge per f és ell mateix. És a dir, diem que $x \in \text{Dom}(f)$ és un punt fix si $f(x) = x$.*

Definició 3.30. *Siguin (X, d_X) i (Y, d_Y) dos espais mètrics i sigui $f : X \rightarrow Y$ una funció qualsevol. Diem que f és una **funció contractiva** si existeix un nombre real $0 \leq k < 1$, que anomenem **factor de contracció**, tal que*

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq k d_X(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Proposició 3.31. *Siguin (X, d_X) i (Y, d_Y) dos espais mètrics i sigui $f : X \rightarrow Y$ una funció contractiva amb factor de contracció k . Aleshores f és una funció continua.*

Demostració. Siguin $x \in X$, $\epsilon > 0$ i definim $\delta = \epsilon$. Aleshores, si agafem $y \in X$ tal que $d_X(x, y) < \delta$, llavors tindrem $d_Y(f(x), f(y)) \leq k d_X(x, y) < k\delta < \epsilon$. Com que $\epsilon > 0$ és arbitrari, tenim que $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\forall y \in Y$ tal que $d_X(x, y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon$. En altres paraules, f és continua en x . Però com $x \in X$ també és arbitrari, tenim que f és continua. \square

Definició 3.32. Sigui (X, d) un espai mètric i sigui $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de nombres de X , és a dir, $x_n \in X, \forall n \in \mathbb{N}$. Diem que aquesta successió és una **successió de Cauchy** si $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m > n_0, d(x_n, x_m) < \epsilon$.

Recordem que en un espai mètric (X, d) , tota successió convergent $\{x_n : x_n \in X\}_{n \in \mathbb{N}}$ és una successió de Cauchy. El recíproc en canvi no és cert per qualsevol espai mètric.

Definició 3.33. Sigui (X, d) un espai mètric. Diem que X és un **espai mètric complet** si tota successió de Cauchy d'elements de X convergeix a un punt de X , és a dir, existeix un punt de X tal que és el límit d'aquesta successió.

El següent teorema ens sera útil més endavant per veure la convergència d'una successió en l'espai $\mathcal{L}(X)$ (la demostració d'aquest resultat va més enllà dels objectius d'aquest treball, i es pot trobar a la secció 2.5. del [7]).

Teorema 3.34. Sigui (X, d) un espai mètric. Aleshores l'espai $\mathcal{L}(X)$ és un espai complet amb la mètrica de Hausdorff.

Un cop vists aquests conceptes, procedim a enunciar el teorema que ens interessa.

Teorema 3.35 (Teorema del punt fix de Banach). Sigui (X, d) un espai mètric complet i sigui $f : X \rightarrow X$ una funció contractiva amb factor de contracció $k \in (0, 1)$. Aleshores existeix un únic punt fix de f , o equivalentment

$$\exists! x \in X \text{ tal que } f(x) = x.$$

A més, per qualsevol $x_0 \in X$, la successió $\{f^n(x_0) : n = 0, 1, 2, \dots\}$ convergeix al punt fix x . És a dir, $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0) = x$, per a tot $x_0 \in X$.

Demostració. En aquest cas, ens cal demostrar l'existència i la unicitat d'aquest punt fix. L'última afirmació del teorema es demostra posteriorment.

- a) Suposem que existeixen dos punts fixos de f , que els denotarem per x i y . És a dir, satisfan $f(x) = x$ i $f(y) = y$. Aleshores, com que f és una contracció, tenim

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

Com $k < 1$, tenim que $d(x, y) = 0$ i per definició tenim $x = y$. Per tant, si aquest punt fix existeix, és únic.

- b) Sigui $x_0 \in X$ i definim la successió $\{x_n := f(x_{n-1}) = f^n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Si veiem que aquesta és una successió de Cauchy, com que (X, d) és un espai mètric complet, tindrem que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X$ i com que f és continua pel fet de ser una funció contractiva, tenim que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = f(x)$. Però $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, d'on treiem que $f(x) = x$.

Així doncs, vegem que realment aquesta successió és de Cauchy. Primerament, cal tenir en compte que $\forall i \geq 0, d(x_{i+1}, x_i) \leq k^i d(x_1, x_0)$ ja que $d(x_{i+1}, x_i) = d(f(x_i), f(x_{i-1})) \leq kd(x_i, x_{i-1}) \leq \dots \leq k^i d(x_1, x_0)$, on apliquem reiteradament la definició de funció contractiva. Per tant, siguin $m > l$. Aleshores:

$$\begin{aligned}
d(x_m, x_l) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{l+1}, x_l) \leq \\
&\leq k^{m-1}d(x_1, x_0) + \cdots + k^l d(x_1, x_0) = \\
&= k^l d(x_1, x_0)(1 + k + \cdots + k^{m-l-1}) = \\
&= k^l d(x_1, x_0) \frac{1 - k^{m-l-1}}{1 - k} < \frac{k^l}{1 - k} d(x_1, x_0),
\end{aligned}$$

i com a conseqüència tenim que per qualsevol $\epsilon > 0$, agafem com n_0 un nombre prou gran tal que

$$\frac{k^{n_0}}{1 - k} d(x_1, x_0) < \epsilon.$$

És a dir, obtenim que $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m, l > n_0, d(x_m, x_l) < \epsilon$, i equivalentment, que la successió definida anteriorment és una successió de Cauchy tal i com volíem veure.

□

4 IFS I EL TEOREMA DEL COLLAGE

Durant el capítol 2, hem vist com, mitjançant un procés iteratiu, podem arribar a obtenir un fractal, i sota quines transformacions aquest fractal és invariant. L'objectiu de la branca determinista de la geometria fractal és precisament aquest: l'estudi dels fractals generats per transformacions simples d'un espai mètric en si mateix, o d'aquells que són invariants per aquestes transformacions. En el nostre cas, si considerem un sistema de funcions iterades, el teorema que ens proporciona informació sobre aquests aspectes s'anomena **teorema del Collage** i se l'atribueix al matemàtic Michael F. Barnsley Barnsley, que va tractar aquest tema al seu llibre *Fractals Everywhere* [8]. En aquest capítol també ens plantejarem el problema invers. És a dir, donat un fractal, intentar determinar quines funcions el generen.

El primer pas per poder veure aquests resultats és definir un sistema de funcions iterades. Posteriorment enunciem alguns resultats que ens seran útils a l'hora de demostrar aquest teorema.

Definició 4.1. *Sigui (X, d) un espai mètric complet. Un **sistema de funcions iterades** és un conjunt finit de funcions contractives de X en si mateix, i equivalentment*

$$\{f_i : X \rightarrow X : f_i \text{ és una funció contractiva}\}_{1 \leq i \leq n}, n \in \mathbb{N}.$$

Notació 3. *D'ara en endavant denotarem un sistema de funcions iterades com IFS (Iterated Function System).*

Lema 4.2. *Sigui (X, d) un espai mètric i sigui $f : X \rightarrow X$ una funció continua. Aleshores f envia $\mathcal{L}(X)$ a si mateix, o equivalentment $f(\mathcal{L}(X)) \subseteq \mathcal{L}(X)$.*

Demostració. Sigui $S \in \mathcal{L}(X)$. Aleshores cal veure que $f(S)$ és no buit i que és compacte. Com que $S \neq \emptyset$ per definició de $\mathcal{L}(X)$, tenim que $f(S) = \{f(x) : x \in S\}$ és no buit.

Ara provarem que $f(S)$ és compacte. Per veure-ho, cal comprovar que per a tota successió $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $f(S)$ conté una subsuccessió convergent a algun punt de $f(S)$. Per tant, sigui $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successió qualsevol de $f(S)$. Com $y_n \in f(S)$, tenim que $\forall n \geq 1$, $\exists x_n \in S$ tal que $f(x_n) = y_n$. Per tant, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ és una successió de S i com S és compacte, tenim que existeix una subsuccessió $\{x_{n_k}\}_{n_k}$ que convergeix a un punt $\tilde{x} \in S$. Però f és continua per hipòtesi i com a conseqüència $\{f(x_{n_k}) = y_{n_k}\}_{n_k}$ convergeix a $\tilde{y} = f(\tilde{x}) \in f(S)$ d'on treiem que existeix una subsuccessió de $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que convergeix a un punt de $f(S)$. Per tant $f(S)$ és compacte i conseqüentment $f(S) \in \mathcal{L}(X)$ tal i com volíem veure. \square

Lema 4.3. *Sigui (X, d) un espai mètric i sigui $f : X \rightarrow X$ una funció contractiva amb factor de contracció k . Aleshores la restricció $f|_{\mathcal{L}(X)}$ definida com*

$$f(B) = \{f(b) : b \in B\}, \forall B \in \mathcal{L}(X),$$

és una funció contractiva en l'espai mètric $(\mathcal{L}(X), \mathcal{H})$ amb factor de contracció k .

Demostració. Com que f és una funció contractiva, per la proposició 3.31, tenim que f és continua i pel lema anterior, obtenim que $f(\mathcal{L}(X)) \subseteq \mathcal{L}(X)$. Veiem doncs que la restricció de f sobre $\mathcal{L}(X)$ és efectivament una funció contractiva. Siguin $A, B \in \mathcal{L}(X)$. Aleshores:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(f(A), f(B)) &= \max\{\varphi(f(A), f(B)), \varphi(f(B), f(A))\} = \\ &= \max\left\{\sup_{a \in A} d(f(a), f(B)), \sup_{b \in B} d(f(b), f(A))\right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \max \left\{ \sup_{a \in A} \left(\inf_{b \in B} d(f(a), f(b)) \right), \sup_{b \in B} \left(\inf_{a \in A} d(f(b), f(a)) \right) \right\} \leq \\
&\leq \max \left\{ \sup_{a \in A} \left(\inf_{b \in B} k \cdot d(a, b) \right), \sup_{b \in B} \left(\inf_{a \in A} k \cdot d(b, a) \right) \right\} = \\
&= k \cdot \max \left\{ \sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A) \right\} = \\
&= k \cdot \max\{\varphi(A, B), \varphi(B, A)\} = k \cdot \mathcal{H}(A, B)
\end{aligned}$$

Com que $A, B \in \mathcal{L}(X)$ són arbitraris, tenim que $\mathcal{H}(f(A), f(B)) \leq k \cdot \mathcal{H}(A, B)$, $\forall A, B \in \mathcal{L}(X)$ i, per tant, $f|_{\mathcal{L}(X)}$ és una funció contractiva en l'espai mètric $(\mathcal{L}(X), \mathcal{H})$ amb factor de contracció k , tal i com volíem veure. \square

Lema 4.4. *Sigui (X, d) un espai mètric i siguin $\{f_i : \mathcal{L}(X) \rightarrow \mathcal{L}(X)\}_{1 \leq i \leq n}$ funcions contractives en l'espai mètric $(\mathcal{L}(X), \mathcal{H})$ amb factors de contracció $\{k_i\}_{1 \leq i \leq n}$ respectivament. Si definim la funció $F : \mathcal{L}(X) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ com*

$$F(B) = \bigcup_{i=1}^n f_i(B), \text{ per a tot } B \in \mathcal{L}(X),$$

aleshores F és una funció contractiva en l'espai mètric $(\mathcal{L}(X), \mathcal{H})$ amb factor de contracció $k = \max\{k_i : i = 1, \dots, n\}$. Aquesta funció rep el nom de **funció collage**.

Demostració. És fàcil veure que només cal comprovar-ho per $n = 2$ ja que l'argument per $n \geq 3$ és inductiu. Per tant, siguin $A, B \in \mathcal{L}(X)$. Llavors tenim

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(F(A), F(B)) &= \mathcal{H}(f_1(A) \cup f_2(A), f_1(B) \cup f_2(B)) \leq \max_{i=1,2} \mathcal{H}(f_i(A), f_i(B)) \leq \\
&\leq \max_{i=1,2} (k_i \cdot \mathcal{H}(A, B)) = \max\{k_1, k_2\} \cdot \mathcal{H}(A, B) = k \cdot \mathcal{H}(A, B),
\end{aligned}$$

on la primer desigualtat és deguda a la propietat a) de la proposició 3.28, tenint en compte que el suprem en aquest cas és màxim ja que és un conjunt finit, i la segona pel fet que les funcions f_i són contraccions en l'espai mètric $(\mathcal{L}(X), \mathcal{H})$. Com $A, B \in \mathcal{L}(X)$ són arbitraris, obtenim que $\mathcal{H}(F(A), F(B)) \leq k \mathcal{H}(A, B)$, $\forall A, B \in \mathcal{L}(X)$. \square

Lema 4.5. *Sigui (X, d) un espai mètric complet i sigui $f : X \rightarrow X$ una funció contractiva amb factor de contracció $0 \leq k < 1$. Si $\tilde{x} \in X$ és el punt fix de f , aleshores per tot $x \in X$*

$$d(x, \tilde{x}) \leq \frac{d(x, f(x))}{1 - k}.$$

Demostració. El primer que comprovarem és que un cop fixat $x \in X$, la funció definida per $g(y) = d(x, y)$ és una funció continua per a tot $y \in X$. Per veure-ho, fixem $x \in X$ i siguin $y \in X$ i $\epsilon > 0$. Considerem $\delta = \epsilon$ i $a \in X$ tal que $d(y, a) < \delta$. Aleshores tenim

$$|g(y) - g(a)| = |d(x, y) - d(x, a)| \leq |d(a, y)| = d(a, y) < \delta = \epsilon.$$

Per tant, tenim que $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\forall a \in X$ tal que $d(y, a) < \delta$, llavors $|g(y) - g(a)| < \epsilon$. Per tant g és continua en y i com aquest és un punt arbitrari, $g = d(x, \cdot)$ és una funció continua.

Així doncs, gràcies també al teorema del punt fix de Banach, tenim

$$d(x, \tilde{x}) = d\left(x, \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, f^n(x)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} d(f^i(x), f^{i+1}(x)),$$

on la segona igualtat és deguda al fet que la funció $g = d(x, \cdot)$ és continua. Com ja hem dit a la demostració del teorema del punt fix, sabem que $d(f^i(x), f^{i+1}(x)) \leq s^i d(x, f(x))$, $\forall i \geq 0$. Per tant, tenim que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} d(f^i(x), f^{i+1}(x)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} s^i d(x, f(x)) = d(x, f(x)) \sum_{i=0}^{\infty} s^i = d(x, f(x)) \frac{1}{1-s}.$$

Si juntem les dues desigualtats, obtenim que $d(x, \tilde{x}) \leq \frac{d(x, f(x))}{1-s}$ tal i com volíem. \square

4.1 Teorema del Collage

A continuació enunciem i demostrarem el teorema del Collage. Aquest teorema consta de dues parts: la primera ens assegura que donat un IFS qualsevol, existeix un únic subconjunt invariant per la funció collage, i la segona, restringint les condicions que ha de complir l'IFS, ens aporta informació sobre la proximitat d'un conjunt compacte qualsevol al conjunt invariant de la funció collage, sense necessitat de saber aquest conjunt.

Teorema 4.6 (Teorema del Collage). *Sigui (X, d) un espai mètric complet i sigui $\{f_i : X \rightarrow X\}_{1 \leq i \leq n}$ un IFS amb factors de contracció $0 \leq k_i < 1$, respectivament. Si definim la funció $F : \mathcal{L}(X) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ com*

$$F(A) = \bigcup_{i=1}^n f_i(A), \quad \forall A \in \mathcal{L}(X),$$

aleshores tenim que existeix un únic conjunt $B \in \mathcal{L}(X)$ tal que $B = \bigcup_{i=1}^n f_i(B)$ i se satisfà que $B = \lim_{m \rightarrow \infty} F^m(A)$, per qualsevol $A \in \mathcal{L}(X)$. Si a més, $k_i = k$, $\forall 1 \leq i \leq n$, aleshores per tot $C \in \mathcal{L}(X)$,

$$\mathcal{H}(C, B) \leq (1-k)^{-1} \mathcal{H}\left(C, \bigcup_{i=1}^n f_i(C)\right).$$

Demostració. Gràcies als lemes 4.3 i 4.4, F està ben definida i és una funció contractiva en l'espai mètric $(\mathcal{L}(X), \mathcal{H})$ amb factor de contracció $k = \max\{k_i : i = 1, \dots, n\}$. Així doncs, com $(\mathcal{L}(X), \mathcal{H})$ és un espai mètric complet, pel teorema del punt fix de Banach (teorema 3.35), tenim que existeix un únic punt fix de F , i equivalentment

$$\exists! B \in \mathcal{L}(X) \text{ tal que } B = F(B) = \bigcup_{i=1}^n f_i(B).$$

A més a més, el teorema del punt fix també ens diu que per qualsevol $A \in \mathcal{L}(X)$, la successió $\{F^n(A)\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergeix al punt fix B . És a dir, $\forall A \in \mathcal{L}(X)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(A) = B$.

D'altra banda, com que $(\mathcal{L}(X), \mathcal{H})$ és un espai mètric complet i, pel teorema anterior, la funció F és contractiva en aquest espai mètric amb factor de contracció k , aplicant el lema 4.5 obtenim que per a tot $C \in \mathcal{L}(X)$ es compleix que

$$\mathcal{H}(C, B) \leq \frac{\mathcal{H}(C, F(C))}{1-s} = (1-s)^{-1} \mathcal{H}\left(C, \bigcup_{i=1}^n f_i(C)\right).$$

□

D'aquest teorema obtenim que si $A \in \mathcal{L}(X)$ tal que $\mathcal{H}(A, F(A)) \leq \varepsilon$, aleshores se satisfà $\mathcal{H}(A, B) \leq \frac{\varepsilon}{1-s}$. Una conseqüència directa i útil d'aquest fet és que qualsevol subconjunt $A \in \mathcal{L}(X)$ pot ser aproximat per un conjunt autosemblant. Veiem a continuació doncs aquest resultat:

Corol·lari 4.7. *Sigui (X, d) un espai mètric complet i sigui $A \in \mathcal{L}(X)$. Aleshores, donat qualsevol $\varepsilon > 0$, existeix un IFS tal que $\mathcal{H}(A, B) < \varepsilon$, on B és l'atractor de l'IFS.*

Demostració. Fixem $\varepsilon > 0$. Sigui B_1, \dots, B_n una col·lecció de boles amb centre en A i radi menor o igual a $\frac{1}{4}\varepsilon$, tals que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_i$, on aquesta col·lecció finita existeix degut a que A és compacte. Per qualsevol $\delta > 0$, denotem $A_\delta = \{x \in X : d(x, a) \leq \delta, \text{ per un cert } a \in A\}$. Aleshores tenim que $\bigcup_{i=1}^n B_i \subseteq A_{\frac{1}{4}\varepsilon}$ ja que els centres de cada bola és un punt de A . Per cada $1 \leq i \leq n$, agafem f_i la funció contractiva amb factor de contracció $k_i < \frac{1}{2}$ que envia A dins de B_i . Llavors com que $f_i(A) \subseteq B_i$, tenim $\bigcup_{i=1}^n f_i(A) \subseteq A_{\frac{1}{4}\varepsilon}$ i $B_i \subseteq (f_i(A))_{\frac{1}{2}\varepsilon}$. Conseqüentment $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n (f_i(A))_{\frac{1}{2}\varepsilon}$ i per tant, obtenim $\bigcup_{i=1}^n f_i(A) \subseteq A_{\frac{1}{2}\varepsilon}$ i $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n (f_i(A))_{\frac{1}{2}\varepsilon}$ d'on, gràcies al teorema 3.27, obtenim $\mathcal{H}(A, \bigcup_{i=1}^n f_i(A)) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Per la segona part del teorema 4.6, obtenim $\mathcal{H}(A, B) \leq \varepsilon$, on B és l'atractor del IFS format per les funcions f_1, \dots, f_n . □

5 ALGORISME ALEATORI: EL JOC DEL CAOS

En el capítol anterior hem explicat una forma de generar un fractal: donat un IFS i donat qualsevol compacte, podem obtenir un conjunt compacte invariant per la transformació collage quan la apliquem recursivament un nombre infinit de vegades. Aquest conjunt és invariant per totes les funcions contractives que formen part del IFS.

Però no només hi ha una forma única de contruir un fractal tal i com hem vist al capítol 2, a l'exemple de la construcció aleatòria. En aquesta secció veurem un algorisme iteratiu aleatori que ens permetrà també obtenir els mateixos fractals que amb un IFS. Aquest algorisme, conegut com **El Joc del Caos** o iteració aleatòria, és un dels més coneguts i és fàcilment programable.

Gràcies al teorema del Collage, tenim que $B = \lim_{m \rightarrow \infty} F^m(A)$, per qualsevol $A \in \mathcal{L}(X)$, on B és l'únic conjunt $B \in \mathcal{L}(X)$ tal que $B = F(B)$. Això és equivalent a dir que per qualsevol $A \in \mathcal{L}(X)$, $\mathcal{H}(F^m(A), B) \rightarrow 0$ quan $m \rightarrow \infty$. Conseqüentment $F^m(A)$ ens proporciona una aproximació de B , per un cert m prou gran. Aleshores, per cada $m \geq 0$, podem escriure $F^m(A)$ com

$$F^m(A) = \bigcup_{I_m} f_{i_1}(f_{i_2}(\cdots(f_{i_m}(A))))), \quad (5.1)$$

on I_m és el conjunt format per totes les seqüències de la forma (i_1, \dots, i_m) amb $1 \leq i_j \leq n$, $\forall j$. Si $f_i(A) \subseteq A$ per tot $i \in \{1, \dots, n\}$, tenim que $F^m(A) \subseteq F^{m-1}(A)$ per tota $m \geq 0$ i per tant, $F^m(A)$ és una successió decreixent de compactes no buits i conseqüentment, $B = \lim_{m \rightarrow \infty} F^m(A) = \bigcap_{m \geq 0} F^m(A)$. Aleshores, considerant $x \in B$, per aquesta darrera igualtat tenim que existeix una seqüència (i_1, i_2, \dots) tal que $x \in f_{i_1}(f_{i_2}(\cdots(f_{i_m}(A))))$ per tot $m \geq 0$ i com a conseqüència, $x \in \bigcap_{m \geq 0} f_{i_1}(f_{i_2}(\cdots(f_{i_m}(A))))$. Per tant, si anomenem

$$x_{i_1, i_2, \dots} := \bigcap_{m \geq 0} f_{i_1}(f_{i_2}(\cdots(f_{i_m}(A))))),$$

obtenim que $B = \bigcup \{x_{i_1, i_2, \dots}\}$. L'expressió de $x_{i_1, i_2, \dots}$ és independent de A sempre que $f_i(A) \subseteq A$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ja que hem agafat un conjunt $A \in \mathcal{L}(X)$ arbitrari.

Per exemple, en el cas del conjunt de Cantor (veure la secció 2.1), tenim l'IFS format per les funcions $f_1(x) = \frac{1}{3}x$ i $f_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$. Si escollim $A = [0, 1]$, aleshores $F^k(A) = C_k$, on C_k és el conjunt de 2^k intervals de longitud 3^{-k} que s'obté al pas k -èssim de la construcció del conjunt de Cantor. A més, $x_{i_1, i_2, \dots}$ és el punt de C tal que la seva expressió en base 3 és de la forma $(0.a_1a_2\cdots)_3$ on $a_k = 0$ si $i_k = 1$ i $a_k = 2$ si $i_k = 2$. Si ens fixem, els conjunts $F^k(A)$ ens proporcionen la forma més habitual de construir el fractal corresponent, havent escollit adequadament el conjunt inicial. Els conjunts $f_{i_1}(f_{i_2}(\cdots(f_{i_k}(A))))$ s'anomenen *conjunts bàsics* de la construcció del fractal corresponent.

Aquesta argumentació ens dona dos mètodes per dibuixar els conjunts invariants al pla mitjançant un ordinador. El primer mètode consisteix en agafar qualsevol conjunt inicial A i dibuixar el conjunt k -èssim $F^k(A)$ a partir de l'expressió 5.1, per un cert k prou gran. El conjunt $F^k(A)$ està format per n^k petits conjunts. Si A es pot escollir com un segment tal que $f_1(A), \dots, f_n(A)$ s'uneixen per formar una corba poligonal amb els punts inicial i final iguals que els de A , aleshores la seqüència $F^k(A)$ ens dona una bona aproximació de la corba fractal a mesura que k creix. Pel segon mètode en canvi

agafem com a conjunt inicial un punt qualsevol $\{x_0\}$ i escollim una funció contractiva qualsevol de l'IFS, f_{i_1} . Definim ara $x_1 = f_{i_1}(x_0)$ i repetim el procés per x_1 , és a dir, escollim una funció contractiva qualsevol de l'IFS, f_{i_2} , i definim $x_2 = f_{i_2}(x_1)$. Repetim aquest procés: escollim f_{i_k} de l'IFS f_1, \dots, f_n a l'atzar (considerem totes les funcions amb la mateixa probabilitat de ser escollides) i definim $x_k = f_{i_k}(x_{k-1})$ per tot $k \geq 1$. Aleshores, per un k prou gran, els punts $\{x_k\}_{k \geq 0}$ estan pròxims al fractal B , ja que x_k és pròxim a $f_{i_k}(f_{i_{k-1}}(\dots(f_{i_1}(B))))$, i així aquesta seqüència de punts apareixen distribuïts aleatòriament per tot B . El dibuix d'aquesta seqüència de punts per un k prou gran ens proporciona un esbós del fractal B .

Exemple 5.1. Sigui (\mathbb{R}^2, d) l'espai euclidià i considerem el triangle equilàter de costat 1 amb vèrtex $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$ i $C = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Agafem $f_1(x, y) = (0.5x, 0.5y)$, $f_2(x, y) = (0.5x + 0.5, 0.5y)$, $f_3(x, y) = (0.5x + 0.25, 0.5y + 0.75)$, i considerem $x_0 \in \mathbb{R}^2$ un punt qualsevol dins el triangle ABC . A l'atzar, escollim una de les 3 funcions i definim $x_1 = f_{i_1}(x_0)$ per $i_1 \in \{1, 2, 3\}$. Repetim aquest procés un nombre prou gran de vegades. Aquest algorisme és el que correspon al procés explicat en la secció 2.2 que ens dona com a resultat una figura semblant al triangle de Sierpiński.

També es pot modificar el segon mètode assignant una probabilitat p_i a cada funció f_i , on $p_i \in (0, 1)$ i $p_1 + \dots + p_n = 1$. L'algorisme és el mateix, l'única diferència és que la probabilitat de l'esdeveniment $x_m = f_i(x_{m-1})$ és p_i . Es contrueix així una seqüència de punts $\{x_m\}_{m \geq 0}$ que dona una representació de l'atractor de l'IFS tal que una proporció $p_{i_1} \dots p_{i_s}$ dels punts pertàyen a la part $f_{i_1}(f_{i_2}(\dots(f_{i_s}(B))))$ per cada i_1, \dots, i_s . Aquesta distribució dels punts de la seqüència de punts $\{x_m\}_{m \geq 0}$ ens proporciona un ombrejat de l'atractor.

Exemple 5.2. Sigui (\mathbb{R}^2, d) l'espai euclidià. Agafem en aquest cas $f_1(x, y) = (0, 0.16y)$, $f_2(x, y) = (0.85x + 0.04y, -0.04x + 0.85y + 1.6)$, $f_3(x, y) = (0.2x - 0.26y, 0.23x + 0.22y + 1.6)$ i $f_4(x, y) = (-0.15x + 0.28y, 0.26x + 0.24y + 0.44)$, on a cada funció l'hi assignem les probabilitats $p_1 = 0.01$, $p_2 = 0.85$, $p_3 = 0.07$ i $p_4 = 0.07$, respectivament. Aquest algorisme ens dona com a resultat la següent figura



Aquest codi per construir el que sembla una fulla de falguera a partir d'un IFS va ser desenvolupat per Michael F. Barnsley (veure [3]) i és un exemple clar de com és pot modelitzar la natura a partir de fractals.

Observació 5.3. Els codis en C dels dos exemples proposats en aquest apartat i d'altres dos exemples similars es troben a l'annex.

6 DIMENSIÓ FRACTAL

Ja hem vist que si ens preguntem per la longitud, l'àrea o el volum, i equivalentment per la dimensió topològica d'un fractal, obtenim valors que en la geometria euclidiana no són habituals. Així doncs, hi ha algun forma de descriure'ls o de comparar dos fractals? Existeix alguna propietat que ens ajudi a determinar el seu "tamany"?

Amb aquest propòsit, es defineix la **dimensió fractal**, que tracta d'associar un fractal amb un nombre positiu, on aquest nombre quantifica la sensació de densitat del fractal en l'espai mètric on es troba. Per exemple, més endavant veurem que el triangle de Sierpiński és un fractal de dimensió aproximadament 1.585. Això ens diu que aquest fractal és 'més que una corba' però és 'menys que una superfície'. Per aquest motiu, quan calculàvem el perímetre ens donava ∞ i en canvi l'àrea era nul·la.

Hi ha moltes maneres de definir la dimensió fractal i no totes les definicions són equivalents. Dues de les definicions més conegudes, i de les quals parlarem al llarg d'aquest capítol, són la *dimensió de Hausdorff* i la *dimensió de Minkowski*. Un dels avantatges de la dimensió de Hausdorff és que està definida per qualsevol conjunt i a més es defineix a partir del concepte de *mesura exterior*. Aquest nou concepte s'ha d'imaginar com el concepte d'àrea o de volum d'una figura geomètrica qualsevol. Encara i així, molt cops resulta difícil el seu càlcul. Pel contrari, la definició de la dimensió de Minkowski és més pràctica i conseqüentment resulta més fàcil el seu càlcul. D'altra banda, donat qualsevol conjunt no sempre existeix aquesta dimensió.

Així doncs, començem definint el concepte de *mesura exterior*.

Definició 6.1. Sigui X un conjunt qualsevol i sigui $\psi : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty)$ una funció que satisfà $\psi(\emptyset) = 0$ i

- a) $\psi(A) \leq \psi(B)$, si $A \subseteq B$,
- b) $\forall \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\psi\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \psi(A_i)$.

Aleshores anomenem **mesura exterior** a la funció ψ . A més a més, si $A \subseteq X$ tal que $\psi(B) = \psi(B \cap A) + \psi(B \cap A^c)$, $\forall B \in \mathcal{P}(X)$, diem que A és **ψ -mesurable**.

Definició 6.2. Sigui (X, d) un espai mètric. Definim la **mesura exterior mètrica** com la *mesura exterior* en X , ψ , que satisfà que donats $A, B \subseteq X$ tal que $d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\} > 0$, tenim $\psi(A \cup B) = \psi(A) + \psi(B)$.

En la pròxima secció definirem el concepte que anomenarem com *mesura de Hausdorff* i enunciaré que és una *mesura exterior* (en concret, és una *mesura exterior mètrica*). Per fer-ho, primerament explicarem una manera genèrica de construir una *mesura exterior*.

Així doncs, siguin (X, d) un espai mètric, $\Omega \subseteq \mathcal{P}(X)$ i $\rho : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ tals que $\forall \varepsilon > 0$,

- a) existeix $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \Omega$ tal que $X \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ i $\text{diam}(A_i) \leq \varepsilon$,
- b) existeix $A \in \Omega$ tal que $\rho(A) \leq \varepsilon$ i $\text{diam}(A) \leq \varepsilon$.

Per cada $\varepsilon > 0$, definim la funció $\psi : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty)$ com

$$\psi_\varepsilon(A) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \rho(A_i) : \forall i \geq 1, A_i \in \Omega \text{ i } \text{diam}(A_i) \leq \varepsilon, \text{ i } A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right\} \quad (6.1)$$

És fàcil comprovar que ψ_ε és una mesura exterior:

- Degut al fet que $\emptyset \subseteq B$, $\forall B \in \Omega$ i per la condició b), $\exists A \in \Omega$ tal que $\rho(A) \leq \varepsilon$ i $\text{diam}(A) \leq \varepsilon$ per qualsevol $\varepsilon > 0$, obtenim que $\psi_\varepsilon(\emptyset) = \inf\{\rho(B) : B \in \Omega\} = 0$.
- Cal veure que $\psi_\varepsilon(A) \leq \psi_\varepsilon(B)$ si $A \subseteq B$. Clarament qualsevol recobriment de B , $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \Omega$, també és un recobriment de A ja que $A \subseteq B \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$, i per tant, agafant ínfims obtenim

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon(A) &= \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \rho(A_i) : \forall i \geq 1, A_i \in \Omega \text{ i } \text{diam}(A_i) \leq \varepsilon, \text{ i } A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right\} \leq \\ &\leq \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \rho(B_i) : \forall i \geq 1, B_i \in \Omega \text{ i } \text{diam}(B_i) \leq \varepsilon, \text{ i } B \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \right\} = \psi_\varepsilon(B). \end{aligned}$$

- Suposem $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(X)$ i $B_{ik} \in \Omega$, $\forall i, k \in \mathbb{N}$ tal que $A_i \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_{ik}$ i $\text{diam}(B_{ik}) \leq \varepsilon$, $\forall i, k \in \mathbb{N}$. Aleshores $\{B_{ik}\}_{i, k \in \mathbb{N}}$ recobreix $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$, és a dir

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_{ik} = \bigcup_{i, k \in \mathbb{N}} B_{ik},$$

i consegüentment $\psi_\varepsilon(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \rho(B_{ik})$. Com que hem escollit els conjunts $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(X)$ i $B_{ik} \in \Omega$ de forma arbitrària sota les condicions enunciades anteriorment, agafant l'ímfim de totes les sumes $\sum_{k \in \mathbb{N}} \rho(B_{ik})$ i tenint en compte que

$$\psi_\varepsilon(A_i) = \inf \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} \rho(B_{ik}) : \forall k \geq 1, B_{ik} \in \Omega \text{ i } \text{diam}(B_{ik}) \leq \varepsilon, \text{ i } A_i \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_{ik} \right\},$$

obtenim $\psi_\varepsilon(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \psi_\varepsilon(A_i)$.

Aquesta funció creix a mesura que ε decreix ja que si suposem $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_0 > 0$ i definim

$$\mathcal{S}_\varepsilon(A) := \left\{ \{A_i\} : A_i \in \Omega \text{ i } \text{diam}(A_i) \leq \varepsilon, \text{ i } A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right\},$$

obtenim que $\mathcal{S}_{\varepsilon_0}(A) \subseteq \mathcal{S}_{\varepsilon_1}(A)$ i com a conseqüència,

$$\psi_{\varepsilon_0}(A) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \rho(A_i) : \{A_i\} \in \mathcal{S}_{\varepsilon_0}(A) \right\} \geq \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \rho(A_i) : \{A_i\} \in \mathcal{S}_{\varepsilon_1}(A) \right\} = \psi_{\varepsilon_1}(A).$$

Per tant, podem dir que ψ_ε tendeix a algun element de $[0, \infty)$ quan $\varepsilon \rightarrow 0$. És a dir, $\forall A \in \mathcal{P}(X)$, existeix $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_\varepsilon(A) \in [0, \infty)$, d'on definim la funció $\psi(A) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_\varepsilon(A) = \sup_{\varepsilon > 0} \psi_\varepsilon(A)$, per qualsevol $A \in \mathcal{P}(X)$.

Teorema 6.3. *Sigui (X, d) un espai mètric. La funció ψ definida sobre $\mathcal{P}(X)$ és una mesura exterior.*

Demostració. Per demostrar això només necessitem la demostració del fet que ψ_ε és una mesura exterior. Primerament tenim que $\psi(\emptyset) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_\varepsilon(\emptyset) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 0 = 0$, per la pròpia definició de ψ . Ara, si $A \subseteq B$, aleshores $\psi(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_\varepsilon(A) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_\varepsilon(B) = \psi(B)$.

Per últim, sigui $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Aleshores tenim

$$\psi\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_\varepsilon\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \psi_\varepsilon(A_i)\right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi_\varepsilon(A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \psi(A_i),$$

on la primera desigualtat és deguda a que $\psi_\varepsilon\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \psi_\varepsilon(A_i)$ per tot $\varepsilon > 0$, mentre que la segona és gràcies a que $\psi_\varepsilon(A_i) \leq \psi(A_i)$, per tot $\varepsilon > 0$, per la pròpia definició de ψ . Juntant les 3 condicions, obtenim que ψ és una mesura exterior en X . \square

Teorema 6.4. *Sigui (X, d) un espai mètric. La funció ψ definida sobre $\mathcal{P}(X)$ és una mesura exterior mètrica.*

Demostració. Com ja hem argumentat en el teorema anterior, ψ és una mesura exterior. Per tant només ens cal veure que per a tot $A, B \in \mathcal{P}(X)$ tals que $d(A, B) > 0$, se satisfà que $\psi(A \cup B) = \psi(A) + \psi(B)$. Per la pròpia definició de mesura exterior, tenim que $\psi(A \cup B) \leq \psi(A) + \psi(B)$. Per tant veiem que $\psi(A \cup B) \geq \psi(A) + \psi(B)$.

Sigui doncs $A, B \in \mathcal{P}(X)$ tals que $d(A, B) > 0$ i agafem $\delta \leq \frac{d(A, B)}{3}$. Aleshores escollim $\{U_i\}_{i \in I}$ un conjunt tal que $\forall i \in I, U_i \in \Omega$ i $\text{diam}(U_i) \leq \delta$, i tal que $A \cup B \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$.

Si $A \cup B$ no es pot recobrir per una col·lecció numerable d'aquests conjunts, aleshores $\psi(A \cup B) = +\infty$ i ja hem acabat. Per tant, suposem que $\psi(A \cup B) < +\infty$. Aleshores per cada $C \in \{U_i\}_{i \in I}$, tenim dos casos: o $C \cap A \neq \emptyset$, i llavors $C \cap B = \emptyset$, o bé $C \cap B \neq \emptyset$, i aleshores $C \cap A = \emptyset$. Per veure-ho, suposem que $C \cap A \neq \emptyset$ i $C \cap B \neq \emptyset$ i per tant, tenim que existeixen $a_0 \in A, b_0 \in B$ tals que $a_0 \in C \cap A$ i $b_0 \in C \cap B$ i com a conseqüència

$$d(a_0, b_0) \leq \text{diam}(C) \leq \delta \leq \frac{d(A, B)}{3} = \frac{1}{3} \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b) \leq \frac{1}{3} d(a_0, b_0),$$

d'on obtenim que $d(a_0, b_0) = 0$ i per tant $d(A, B) = 0$, fet que contradiu que $d(A, B) > 0$. Per tant, podem agafar $I = I_1 \cup I_2$ amb $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ per qualsevol recobriment com el d'abans, i escrivim $\{U_i\}_{i \in I} = \{U_{a_i}\}_{a_i \in I_1} \cup \{U_{b_i}\}_{b_i \in I_2}$, on $U_{a_i} \cap B = \emptyset$ i $U_{b_i} \cap A = \emptyset$. Conseqüentment $A \subseteq \bigcup_{a_i \in I_1} U_{a_i}$ i $B \subseteq \bigcup_{b_i \in I_2} U_{b_i}$ i per la definició de ψ_δ , obtenim

$$\sum_{i \in I} \rho(U_i) = \sum_{a_i \in I_1} \rho(U_{a_i}) + \sum_{b_i \in I_2} \rho(U_{b_i}) \geq \psi_\delta(A) + \psi_\delta(B),$$

Com que aquest argument serveix per a qualsevol conjunt numerable anteriorment esmentat, tenim que $\psi_\delta(A \cup B) \leq \psi_\delta(A) + \psi_\delta(B)$. Com que aquesta desigualtat és vàlida per qualsevol δ tal que $\delta \leq \frac{d(A, B)}{3}$, agafant $\delta \rightarrow 0$ obtenim

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \psi_\delta(A \cup B) \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} (\psi_\delta(A) + \psi_\delta(B)) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \psi_\delta(A) + \lim_{\delta \rightarrow 0} \psi_\delta(B)$$

d'on, per definició, treiem que $\psi(A \cup B) \geq \psi(A) + \psi(B)$ tal i com volíem veure. \square

6.1 Dimensió de Hausdorff

Un cop argumentat la forma general de contruir una mesura exterior mètrica, definim a continuació el concepte que ens interessa, que és la *mesura de Hausdorff*:

Definició 6.5. *Sigui (X, d) un espai mètric i siguin $s \geq 0$, $\delta > 0$. Definim l'aplicació $H_{s,\delta} : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty)$ com*

$$H_{s,\delta}(A) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam}(A_i))^s : \forall i \geq 1, A_i \in \mathcal{P}(X) \text{ i } \text{diam}(A_i) \leq \delta, \text{ i } A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right\},$$

per a cada $A \in \mathcal{P}(X)$.

Teorema 6.6. *Sigui (X, d) un espai mètric i siguin $s \geq 0$, $\delta > 0$. Aleshores la aplicació $H_s : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty)$ definida com*

$$H_s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_{s,\delta}(A)$$

és una mesura exterior mètrica i s'anomena **mesura exterior s -dimensional de Hausdorff**, o simplement **mesura de Hausdorff**.

Demostració. De l'explicació de la construcció genèrica d'una mesura exterior mètrica, triem en aquest cas ρ com diam i Ω com $\mathcal{P}(X)$. Per tant tenim que $H_{s,\delta}(A)$ representa la funció $\psi_\delta(A)$ de l'argumentació anterior. \square

A continuació enunciem dues de les propietats més rellevant que satisfà la mesura de Hausdorff i donarem alguns exemples.

Proposició 6.7. *La funció H_s és una funció decreixent respecte el paràmetre s .*

Demostració. Sigui $A \in \mathcal{P}(X)$ i $0 \leq s < t < \infty$. Fixem $0 < \delta \leq 1$ (aquesta elecció és vàlida ja que hem de veure el comportament de $H_{s,\delta}$ quan $\delta \rightarrow 0$). Aleshores tenim

$$\begin{aligned} H_{s,\delta}(A) &= \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam}(A_i))^s : \forall i \geq 1, A_i \in \mathcal{P}(X) \text{ i } \text{diam}(A_i) \leq \delta, \text{ i } A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right\} \geq \\ &\geq \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam}(A_i))^t : \forall i \geq 1, A_i \in \mathcal{P}(X) \text{ i } \text{diam}(A_i) \leq \delta, \text{ i } A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right\} = H_{t,\delta}(A). \end{aligned}$$

La desigualtat és vàlida ja que agafem l'ímfim sobre el mateix conjunt de recobriments amb diàmetres més petits o iguals que $\delta \leq 1$. Com que hem agafat δ arbitrari, tenim

$$H_s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_{s,\delta}(A) \geq \lim_{\delta \rightarrow 0} H_{t,\delta}(A) = H_t(A),$$

i per tant, si $0 \leq s < t < \infty$, tenim que $H_s(A) \geq H_t(A)$, $\forall A \in \mathcal{P}(X)$. \square

Proposició 6.8. *Siguin (X, d_X) i (Y, d_Y) dos espais mètrics i siguin $f, g : X \rightarrow Y$ funcions tals que $d_Y(f(p), f(q)) \leq K d_Y(g(p), g(q))$, per tot $p, q \in X$. Aleshores es compleix*

$$H_s(f(A)) \leq K^s H_s(g(A)), \forall A \in \mathcal{P}(X).$$

Demostració. Fixem $A \in \mathcal{P}(X)$ i siguin $\delta > 0$ i $\varepsilon > 0$. Triem una col·lecció numerable de conjunts $U_i \subseteq Y$ tals que $\text{diam}(U_i) \leq \frac{\delta}{K}$ per cada $i \in \mathbb{N}$, $g(A) \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$ i $\sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam}(U_i))^s \leq$

$H_s(g(A)) + \varepsilon$, i triem també $a \in A$ un punt qualsevol.

Com que $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ és un recobriment de $g(A)$, tenim que existeix $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $g(a) \in U_{i_0}$ i equivalentment $a \in g^{-1}(U_{i_0})$. Com a conseqüència tenim $f(a) \in f(g^{-1}(U_{i_0}))$. Com que hem triat $a \in A$ arbitrari, tenim que $\forall a \in A, \exists i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(a) \in f(g^{-1}(U_{i_0}))$ i per tant, $\{f(g^{-1}(U_i))\}_{i \in \mathbb{N}}$ és un recobriment numerable de $f(A)$.

Fixem ara $i \in \mathbb{N}$ i sigui $x, y \in f(g^{-1}(U_i))$. Per definició, existeixen $u, v \in g^{-1}(U_i)$ tals que $x = f(u)$ i $y = f(v)$. Aleshores tenim

$$d_Y(x, y) = d_Y(f(u), f(v)) \leq K d_Y(g(u), g(v)) \leq K \text{diam}(U_i),$$

on la primera desigualtat és deguda a la hipòtesi de l'enunciat i la segona ja que $g(u), g(v) \in U_i$ i per tant, $d_Y(g(u), g(v)) \leq \sup_{w, z \in U_i} d_Y(w, z) = \text{diam}(U_i)$. Per tant, com hem escollit

$x, y \in f(g^{-1}(U_i))$ arbitraris, obtenim

$$\text{diam}(f(g^{-1}(U_i))) = \sup_{x, y \in f(g^{-1}(U_i))} d_Y(x, y) \leq K \text{diam}(U_i) \leq K \frac{\delta}{K} = \delta.$$

Com que hem fixat $i \in \mathbb{N}$ qualsevol, aquesta desigualtat val per tot $i \in \mathbb{N}$.

Juntant que $\{f(g^{-1}(U_i))\}_{i \in \mathbb{N}}$ és un recobriment numerable de $f(A)$ i que per tot $i \in \mathbb{N}$, $\text{diam}(f(g^{-1}(U_i))) \leq K \text{diam}(U_i) \leq \delta$, obtenim

$$H_{s, \delta}(f(A)) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam}(f(g^{-1}(U_i))))^s \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} K^s (\text{diam}(U_i))^s \leq K^s (H_s(g(A)) + \varepsilon)$$

Com que aquesta desigualtat és vàlida per qualsevol $\delta > 0$ i $\varepsilon > 0$, fem $\delta \rightarrow 0$ i obtenim

$$H_s(f(A)) \leq K^s (H_s(g(A)) + \varepsilon),$$

i fent ara tendir $\varepsilon \rightarrow 0$ aconseguim $H_s(f(A)) \leq K^s H_s(g(A))$.

Pel mateix raonament d'arbitrarietat de $A \in \mathcal{P}(X)$, obtenim que $\forall A \in \mathcal{P}(X)$, $H_s(f(A)) \leq K^s H_s(g(A))$, tal i com volíem veure. \square

Corol·lari 6.9. *Sigui (X, d) un espai mètric. Si $A \subseteq X$ i $\lambda > 0$, aleshores $H_s(\lambda A) = \lambda^s H_s(A)$, on $\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$.*

Demostració. Aplicant la proposició 6.8, obtenim que $H_s(\lambda A) \leq \lambda^s H_s(A)$, on hem agafat $f(x) = \lambda x$ i $g(x) = x$ per tot $x \in X$, i per tant $d(f(x), f(y)) = d(\lambda x, \lambda y) = \lambda d(x, y) = \lambda d(g(x), g(y))$, $\forall x, y \in X$, d'on treiem que $K = \lambda$.

Per veure l'altra desigualtat, només cal substituir λ per $\frac{1}{\lambda}$ i A per λA i repetir l'argument. És a dir, apliquem la proposició 6.8 agafant les funcions $f(x) = x$ i $g(x) = \lambda x$ per tot $x \in X$, amb $K = \frac{1}{\lambda}$ ja que $d(f(x), f(y)) = d(x, y) = \frac{1}{\lambda} (\lambda d(x, y)) = \frac{1}{\lambda} d(\lambda x, \lambda y) = \frac{1}{\lambda} d(g(x), g(y))$, $\forall x, y \in X$, i obtenim així $H_s(A) \leq (\frac{1}{\lambda})^s H_s(\lambda A)$, i equivalentment $\lambda^s H_s(A) \leq H_s(\lambda A)$.

Juntant les dues desigualtats, obtenim que $H_s(\lambda A) = \lambda^s H_s(A)$. \square

Exemple 6.10. Sigui (X, d_X) i (Y, d_Y) dos espais mètrics i sigui $f : E \subseteq X \rightarrow Y$ una funció Lipschitz, és a dir $d_Y(f(x), f(y)) \leq k d_X(x, y)$, $\forall x, y \in E$. Aleshores tenim que $H_s(f(A)) \leq k^s H_s(A)$, per qualsevol $A \subseteq E$.

Exemple 6.11. De l'exemple anterior, també treiem que la mesura de Hausdorff és invariant per isometries. És a dir, si (X, d_X) i (Y, d_Y) són dos espais mètrics i sigui la funció $f : E \subseteq X \rightarrow Y$ tal que $d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y)$, $\forall x, y \in E$, llavors $H_s(f(A)) = H_s(A)$, per qualsevol $A \subseteq E$. En particular, és invariant per translacions i per rotacions.

Un cop definit el concepte de *mesura de Hausdorff* i havent enunciat algunes propietats d'aquesta, ja podem definir la *dimensió de Hausdorff*. Per fer-ho, primer cal tenir en compte el següent resultat:

Teorema 6.12. *Sigui (X, d) un espai mètric i agafem $s, t \in \mathbb{R}$ tals que $0 \leq s < t < \infty$. Aleshores, per qualsevol subconjunt $A \subseteq X$, se satisfà*

$$H_s(A) < \infty \Rightarrow H_t(A) = 0.$$

Demostració. Sigui $\delta > 0$ i sigui $A \subseteq X$. Aleshores per definició tenim $H_{s,\delta}(A) \leq H_s(A) < \infty$. Agafem una col·lecció numerable de conjunts $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tals que $\text{diam}(U_i) \leq \delta$ per cada $i \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$ i a més que compleixi $\sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam}(U_i))^s \leq H_{s,\delta}(A) + \varepsilon$, per un cert $\varepsilon > 0$.

Llavors obtenim

$$\begin{aligned} H_{t,\delta}(A) &\leq \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam}(U_i))^t = \sum_{i \in \mathbb{N}} ((\text{diam}(U_i))^{t-s} (\text{diam}(U_i))^s) \leq \\ &\leq \delta^{t-s} \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam}(U_i))^s \leq \delta^{t-s} (H_s(A) + \varepsilon). \end{aligned}$$

Però això és cert per qualsevol $\delta > 0$ i per $t - s > 0$. Per tant, com $H_s(A) < \infty$, si fem $\delta \rightarrow 0$, obtenim $0 \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} H_{t,\delta}(A) \leq 0$ i com a conseqüència $H_t(A) = 0$. \square

Així doncs, definim ara el concepte de *dimensió de Hausdorff*:

Definició 6.13. *Sigui (X, d) un espai mètric i sigui $A \in \mathcal{P}(X)$ un subconjunt de X . Aleshores definim la **dimensió de Hausdorff-Besicovitch de A** , o simplement **dimensió de Hausdorff de A** , com*

$$\dim_H(A) := \inf\{s \geq 0 : H_s(A) = 0\}.$$

Per conveni, si $\{s \geq 0 : H_s(A) = 0\} = \emptyset$, aleshores $\dim_H(A) = \infty$.

Observació 6.14. La dimensió de Hausdorff d'un subconjunt A d'un espai mètric (X, d) és l'únic valor $s \in [0, \infty)$ tal que

$$H_t(A) = \begin{cases} \infty & \text{per tot } 0 \leq t < s, \\ 0 & \text{per tot } t > s. \end{cases}$$

Cal tenir en compte també que si $\dim_H(A) = s$, aleshores el valor de $H_s(A)$ pot ser zero, finit o infinit (veure figura 16).

Observació 6.15. La definició d'aquesta dimensió es pot reescriure de les següents formes gràcies a l'observació feta anteriorment:

$$\begin{aligned} \dim_H(A) &= \inf\{s \geq 0 : H_s(A) = 0\} = \inf\{s \geq 0 : H_s(A) < \infty\} = \\ &= \sup\{s \geq 0 : H_s(A) > 0\} = \sup\{s \geq 0 : H_s(A) = \infty\}. \end{aligned}$$

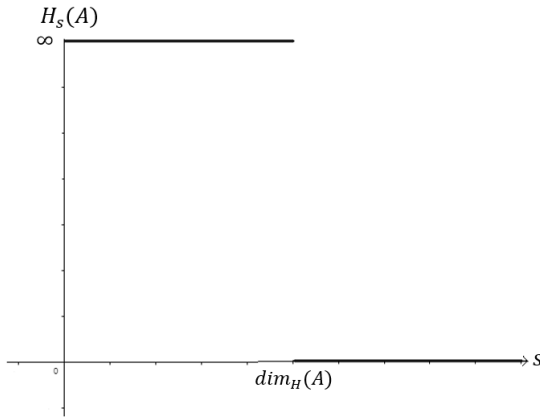


Figura 16: Gràfica de $H_s(A)$ en funció del paràmetre s . La dimensió de Hausdorff és el nombre s on la funció $H_s(A)$ "salta" de ∞ a 0.

Així doncs, enunciem algunes propietats d'aquesta dimensió:

Proposició 6.16. *Si (X, d) un espai mètric i siguin $A, B \in \mathcal{P}(X)$ dos subconjunts de X tals que $A \subseteq B$. Aleshores $\dim_H(A) \leq \dim_H(B)$.*

Demostració. Sigui $s = \dim_H(A)$. Gràcies al fet que H_s és una mesura exterior, per la condició a) de la definició, obtenim que $H_s(A) \leq H_s(B)$. Aleshores tenim dos casos:

- Si $H_s(A) = \infty$, aleshores tenim que $H_s(B) = \infty$ i per l'observació anterior, tenim que $\dim_H(B) \geq s$.
- Si $H_s(A) < \infty$, aleshores tornem a tenir dos casos més:
 - Si $H_s(B) = \infty$, com abans, gràcies a les equivalents definicions obtenim que $\dim_H(B) \geq s$.
 - Si $H_s(B) < \infty$, també degut a l'observació anterior, tenim

$$s \geq \inf\{t \geq 0 : H_t(B) < \infty\} = \dim_H(B).$$

Però com que $H_t(A) = \infty, \forall 0 \leq t < s$ i com $H_s(A) \leq H_s(B)$, obtenim que $H_t(B) = \infty, \forall 0 \leq t < s$ i conseqüentment

$$s = \inf\{t \geq 0 : H_t(B) < \infty\} = \dim_H(B).$$

En tots els casos, obtenim que $\dim_H(A) \leq \dim_H(B)$, tal i com volíem veure. \square

Proposició 6.17. *Si (X, d) un espai mètric i siguin $F_1, F_2, \dots \in \mathcal{P}(X)$ una col·lecció numerable de subconjunts de X . Aleshores*

$$\dim_H\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i\right) = \sup_{i \in \mathbb{N}}\{\dim_H(F_i)\}.$$

Demostració. Com que per cada $j \in \mathbb{N}$ tenim que $F_j \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i$, per la proposició 6.16 ob-

tenim $\dim_H(F_j) \leq \dim_H\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i\right)$ i conseqüentment $\sup_{i \in \mathbb{N}}\{\dim_H(F_i)\} \leq \dim_H\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i\right)$.

D'altra banda, si agafem $s > \dim_H(F_j), \forall j \in \mathbb{N}$, aleshores obtenim que $H_s(F_j) = 0$ per tot $j \in \mathbb{N}$ i per tant, $H_s\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i\right) = 0$, ja que gràcies a la condició b) de la definició de

mesura exterior, tenim que $H_s \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i \right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} H_s(F_i) = 0$. Com que això se satisfà per

tot $s \geq 0$ tal que $s > \dim_H(F_j)$, $\forall j \in \mathbb{N}$, obtenim doncs $\dim_H \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i \right) \leq \dim_H(F_j)$,

$\forall j \in \mathbb{N}$, i per tant, $\dim_H \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i \right) \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} \{ \dim_H(F_i) \}$.

Juntant les dues desigualtats, obtenim $\dim_H \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i \right) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \{ \dim_H(F_i) \}$. \square

Proposició 6.18. *Siguin (X, d_X) i (Y, d_Y) dos espais mètrics. Si $f : E \subseteq X \rightarrow Y$ és una funció Lipschitz, i equivalentment $\forall x, y \in E$, satisfà que $d_Y(f(x), f(y)) \leq k d_X(x, y)$, aleshores $\dim_H(f(A)) \leq \dim_H(A)$ per qualsevol $A \subseteq X$.*

Demostració. Si agafem $s \geq 0$ tal que $s > \dim_H(A)$, aleshores tenim $H_s(A) = 0$. Gràcies a l'afirmació de l'exemple 6.10, obtenim que $H_s(f(A)) \leq k^s H_s(A) = 0$ i per tant $H_s(f(A)) = 0$. Com que hem agafat $s \geq 0$ arbitrari tal que $s > \dim_H(A)$, tenim $H_s(f(A)) = 0$, $\forall s > \dim_H(A)$ i com a conseqüència $\dim_H(f(A)) \leq \dim_H(A)$. \square

6.2 Dimensió de Minkowski

En aquesta secció treballarem amb la *dimensió de Minkowski*, també anomenada *dimensió del recompte de caixes*. Tal i com hem dit a l'inici d'aquest capítol, aquesta formulació del concepte de "dimensió" és més pràctica que la dimensió de Hausdorff, però un dels inconvenients més importants és que no sempre existeix per a un conjunt donat.

Per motivar la definició de la dimensió de Minkowski, considerem un segment I de longitud 1. Per cada $n \in \mathbb{N}$, podem recobrir I per segments de longitud $\frac{1}{n}$. El nombre d'aquests segments serà, com a mínim, n . Similarment, per cada $n \in \mathbb{N}$ podem recobrir un quadrat I^2 de costat 1 per petits quadrats de costat $\frac{1}{n}$. En aquest cas, necessitaríem, com a mínim, n^2 quadrats d'aquestes característiques. Per últim, si considerem I^3 un cub de costats 1, per cada $n \in \mathbb{N}$ podem recobrir-lo per, com a mínim, n^3 cubs de costats $\frac{1}{n}$.

Si ens fixem, l'exponent del nombre de conjunts per recobrir tots aquests concorda amb la noció més tradicional de dimensió de cadascun d'aquests conjunts I^n . La dimensió del recompte de caixes generalitza aquesta idea: recobrir un conjunt A amb conjunts arbitràriament petits i determinar l'exponent s tal que, com a mínim, es necessitin aquests nombre de conjunts. El valor s és la dimensió de Minkowski de A .

Notació 4. *Siguin (X, d) un espai mètric complet, $A \in \mathcal{L}(X)$ un subconjunt compacte no buit de X i sigui $\varepsilon > 0$. Definim $N_\varepsilon(A)$ com el mínim nombre de subconjunts de X , $\{A_i \subseteq X\}_{i \in \mathbb{N}}$, tals que $\forall i \in \mathbb{N}$, $\text{diam}(A_i) \leq \varepsilon$ i $A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$.*

Cal observar que com $A \in \mathcal{L}(X)$ és un subconjunt compacte, sabem que efectivament $N_\varepsilon(A)$ existeix i, a més, és finit, ja que donada una col·lecció de subconjunts oberts de X , $\{A_i \subseteq X\}_{i \in \mathbb{N}}$, tals que per cada $i \in \mathbb{N}$, $\text{diam}(A_i) \leq \varepsilon$, i $A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$, existeix un subrecobriment finit, i equivalentment $\exists i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}$ tals que $A \subseteq \bigcup_{k=1}^n A_{i_k}$.

La idea intuïtiva darrera la definició d'aquesta dimensió és la següent: diem que un conjunt A té dimensió de Minkowski s si $N_\varepsilon(A) \approx c\varepsilon^{-s}$, per una certa constant $c > 0$, on si $f(\varepsilon)$ i $g(\varepsilon)$ són dues funcions que prenen valors reals en funció de ε , tenim que $f(\varepsilon) \approx g(\varepsilon)$ si $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(f(\varepsilon))}{\log(g(\varepsilon))} = 1$. Per tant, tenim que el valor s és equivalent a

$$s \approx \frac{\log N_\varepsilon(A) - \log c}{\log(\frac{1}{\varepsilon})},$$

però si ens fixem, $\frac{\log c}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}$ tendeix a 0 quan $\varepsilon \rightarrow 0$. Definim doncs aquesta dimensió:

Definició 6.19. Sigui (X, d) un espai mètric complet i sigui $A \in \mathcal{L}(X)$ un subconjunt compacte no buit de X . Definim la **dimensió superior de Minkowski de A** com

$$\overline{\dim}_M(A) = \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_\varepsilon(A)}{-\log \varepsilon}$$

i la **dimensió inferior de Minkowski de A** com

$$\underline{\dim}_M(A) = \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_\varepsilon(A)}{-\log \varepsilon}.$$

Si aquests dos límits existeixen i coincideixen, aleshores anomenem **dimensió de Minkowski de A** a aquest límit, és a dir:

$$\dim_M(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_\varepsilon(A)}{-\log \varepsilon}. \quad (6.2)$$

Hi ha algunes definicions equivalents de la dimensió de Minkowski, i la diferència rau en l'elecció dels possibles recobriments de A . Vegem a continuació un exemple:

Proposició 6.20. Sigui (X, d) un espai mètric complet i sigui $A \in \mathcal{L}(X)$. Sigui $x_i \in X$ i considerem els conjunts $A_i = \overline{B_{\varepsilon_i}(x_i)} \subseteq X$ tals que $A \subseteq \bigcup_{i \geq 1} \overline{B_{\varepsilon_i}(x_i)}$, on $\varepsilon_i = ar^i$, $\forall i \geq 1$,

amb $a > 0$ i $r \in (0, 1)$. Aleshores $\dim_M(A) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\varepsilon_i}(A)}{-\log \varepsilon_i}$.

Demostració. Definim $f(\varepsilon) = \max_{i \geq 1} \{\varepsilon_i : \varepsilon_i \leq \varepsilon\}$ i considerem $0 < \varepsilon \leq r$. Aleshores tenim $f(\varepsilon) \leq \varepsilon \leq f(\varepsilon)/r$ i $N_{f(\varepsilon)/r}(A) \leq N_\varepsilon(A) \leq N_{f(\varepsilon)}(A)$. Ara bé, com que $\varepsilon \leq r$, llavors tenim que $f(\varepsilon) \leq \varepsilon \leq r < 1$ i per tant també $\frac{f(\varepsilon)}{r} \leq 1$. Conseqüentment, com que a més la funció logarítmica $\log(\cdot)$ és estrictament creixent i positiva per $x \geq 1$, obtenim que

$$\frac{\log N_{f(\varepsilon)/r}(A)}{\log(1/f(\varepsilon))} \leq \frac{\log N_\varepsilon(A)}{\log(1/\varepsilon)} \leq \frac{\log N_{f(\varepsilon)}(A)}{\log(r/f(\varepsilon))}. \quad (6.3)$$

A continuació veurem que $\frac{\log N_{f(\varepsilon)/r}(A)}{\log(1/f(\varepsilon))}$ i $\frac{\log N_{f(\varepsilon)}(A)}{\log(r/f(\varepsilon))}$ tendeixen a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\varepsilon_i}(A)}{-\log \varepsilon_i}$ quan $\varepsilon \rightarrow 0$. Aleshores, primerament cal observar que si $N_\varepsilon(A) \rightarrow \infty$ quan $\varepsilon \rightarrow 0$, també tindriem que $N_{\varepsilon_i}(A) \rightarrow \infty$ quan $i \rightarrow \infty$ i per tant

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_\varepsilon(A)}{-\log \varepsilon} = 0 = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\varepsilon_i}(A)}{-\log \varepsilon_i}.$$

Ara bé, si $N_\varepsilon(A) \rightarrow \infty$ quan $\varepsilon \rightarrow 0$, llavors d'una banda tenim

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_{f(\varepsilon)/r}(A)}{\log(1/f(\varepsilon))} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\varepsilon_{i-1}}(A)}{\log(1/\varepsilon_i)} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\varepsilon_{i-1}}(A)}{\log(1/r) + \log(1/\varepsilon_{i-1})} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\varepsilon_i}(A)}{\log(1/\varepsilon_i)},$$

i d'altra banda

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_{f(\varepsilon)}(A)}{\log(r/f(\varepsilon))} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\varepsilon_i}(A)}{\log(r/\varepsilon_i)} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\varepsilon_i}(A)}{\log r + \log(1/\varepsilon_i)} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\varepsilon_i}(A)}{\log(1/\varepsilon_i)}.$$

Així doncs, pel lema del Sandwich, gràcies a (6.3), obtenim

$$\dim_M(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_\varepsilon(A)}{-\log \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_\varepsilon(A)}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\varepsilon_i}(A)}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon_i}\right)} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\varepsilon_i}(A)}{-\log \varepsilon_i}.$$

De fet, és suficient considerar qualsevol seqüència decreixent $\{\varepsilon_i > 0\}_{i \geq 1}$ tal que $\varepsilon_{i+1} \geq c\varepsilon_i$, $\forall i \geq 1$, per una certa constant $0 < c < 1$. Per veure-ho, sabem que si $\varepsilon_{i+1} \leq \varepsilon < \varepsilon_i$, aleshores com abans tenim $N_{\varepsilon_i}(A) \leq N_\varepsilon(A) \leq N_{\varepsilon_{i+1}}(A)$ i per tant

$$\frac{\log N_\varepsilon(A)}{-\log \varepsilon} \leq \frac{\log N_{\varepsilon_{i+1}}(A)}{-\log \varepsilon_i} = \frac{\log N_{\varepsilon_{i+1}}(A)}{-\log(\varepsilon_{i+1}) + \log(\varepsilon_{i+1}/\varepsilon_i)} \leq \frac{\log N_{\varepsilon_{i+1}}(A)}{-\log(\varepsilon_{i+1}) + \log c}.$$

Pel mateix raonament que abans, obtenim

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_\varepsilon(A)}{-\log \varepsilon} \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\varepsilon_i}(A)}{-\log \varepsilon_i}.$$

A més a més, com que $\varepsilon_{i+1} \geq c\varepsilon_i$, $\forall i \geq 1$, tenim que

$$\frac{\log N_\varepsilon(A)}{-\log \varepsilon} = \frac{\log N_\varepsilon(A)}{\log(1/\varepsilon)} \geq \frac{\log N_{\varepsilon_i}(A)}{\log(1/\varepsilon_{i+1})} \geq \frac{\log N_{\varepsilon_i}(A)}{\log(1/c \cdot \varepsilon_i)} = \frac{\log N_{\varepsilon_i}(A)}{-\log c - \log \varepsilon_i},$$

d'on treiem que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_\varepsilon(A)}{-\log \varepsilon} \geq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\varepsilon_i}(A)}{-\log \varepsilon_i}.$$

Per tant, juntant les dues desigualtats, veiem que efectivament la dimensió de Minkowski és $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_\varepsilon(A)}{-\log \varepsilon} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log N_{\varepsilon_i}(A)}{-\log \varepsilon_i}$. \square

A continuació, enumerem altres definicions equivalents per la dimensió de Minkowski que ens seran útils.

Proposició 6.21. *Sigui (X, d) un espai mètric complet i sigui $A \in \mathcal{L}(X)$ un subconjunt compacte no buit de X . Aleshores podem considerar $N_\varepsilon(A)$ com:*

- el mínim nombre de boles tancades de radi ε que cobreixen A ,
- el mínim nombre de cubs de costat ε que cobreixen A ,
- el nombre de cubs de costat ε d'una partició que interseca amb A ,
- el mínim nombre de subconjunts de X amb diàmetre ε que cobreixen A ,
- el nombre màxim de boles disjunes de radi ε amb centre a A .

La menys obvia d'aquestes equivalències és la última. Demostrem-la: sigui $M_\varepsilon(A)$ el nombre màxim de boles disjunctes de radi ε amb centre a A i siguin $B_1, \dots, B_{M_\varepsilon(A)}$ aquestes boles. Aleshores si $x \in A$ tenim que ha d'estar a una distància ε d'alguna bola B_i ja que en cas contrari, la bola de centre x i radi ε és podria afegir a la col·lecció de boles anteriorment esmentada. Per tant, si agafem $M_\varepsilon(A)$ boles concèntriques amb les boles $B_1, \dots, B_{M_\varepsilon(A)}$ de radi 2ε , aquestes recobreixen A i consegüentment $N_{4\varepsilon}(A) \leq M_\varepsilon(A)$.

D'altra banda, suposem que les boles E_1, \dots, E_k una col·lecció de subconjunt de X de diàmetre com a molt ε que recobreix A . Com que aquesta col·lecció ha de recobrir els centres de les boles $B_1, \dots, B_{M_\varepsilon(A)}$ i com que per cada $j = 1, \dots, k$, $\text{diam}(E_j) \leq \varepsilon$, cada bola B_i conté, com a mínim, un d'aquests conjunts E_j . Degut al fet que les boles $B_1, \dots, B_{M_\varepsilon(A)}$ són disjunctes, com a mínim tenim $M_\varepsilon(A)$ boles E_j . Consegüentment $M_\varepsilon(A) \leq N_\varepsilon(A)$.

Per tant, tenim que $N_{4\varepsilon}(A) \leq M_\varepsilon(A) \leq N_\varepsilon(A)$ i com a conseqüència

$$\frac{\log N_{4\varepsilon}(A)}{-\log \varepsilon} \leq \frac{\log M_\varepsilon(A)}{-\log \varepsilon} \leq \frac{\log N_\varepsilon(A)}{-\log \varepsilon}.$$

Prenent el límit quan $\varepsilon \rightarrow 0$ i gràcies al lema del Sandwich, obtenim

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_\varepsilon(A)}{-\log \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log M_\varepsilon(A)}{-\log \varepsilon}.$$

Com en el cas de la dimensió de Hausdorff, és fàcil veure que tant la dimensió superior de Minkowski com la inferior satisfan les següents propietats:

- Si $A \subseteq B \in \mathcal{L}(X)$, aleshores $\overline{\dim}_M(A) \leq \overline{\dim}_M(B)$ i $\underline{\dim}_M(A) \leq \underline{\dim}_M(B)$,
- Si $A, B \in \mathcal{L}(X)$, aleshores $\overline{\dim}_M(A \cup B) = \max\{\overline{\dim}_M(A), \overline{\dim}_M(B)\}$; en canvi $\underline{\dim}_M$ no ho satisfà,
- Si (X, d_X) i (Y, d_Y) són dos espais mètrics i $f : E \subseteq X \rightarrow Y$ és una funció Lipschitz, aleshores $\overline{\dim}_M(f(A)) = \overline{\dim}_M(A)$ i $\underline{\dim}_M(f(A)) = \underline{\dim}_M(A)$, per tot $A \subseteq E$.

D'altra banda, per qualsevol $A \in \mathcal{L}(X)$, tenim $\overline{\dim}_M(\overline{A}) = \overline{\dim}_M(A)$ i $\underline{\dim}_M(\overline{A}) = \underline{\dim}_M(A)$. Això és degut al fet que si $\{B_1, \dots, B_n\}$ és un conjunt finit de boles tancades de radi ε tal que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_i$, aleshores \overline{A} també està contingut en aquesta unió, ja que

si $E \subseteq F$, llavors $\overline{E} \subseteq \overline{F}$ i també perquè $\overline{\bigcup_{i=1}^n B_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{B_i}$. Per tant, el nombre mínim de boles tancades de radi ε que cobreixen A és suficient per cobrir \overline{A} .

Aquest resultat ens ajuda a veure que en general no es compleix que $\dim_M \left(\bigcup_{i=1}^n B_i \right) = \sup_i \dim_M(B_i)$. Per exemple, si considerem $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, sabem que $\overline{A} = [0, 1]$ i per tant $\overline{\dim}_M(\overline{A}) = \underline{\dim}_M(\overline{A}) = 1$, d'on obtenim $\overline{\dim}_M(A) = \underline{\dim}_M(A) = 1$ per l'argumentació anterior. D'aquesta darrera igualtat treiem que no tot conjunt numerable té dimensió 0. A més, la dimensió de cada punt racional de l'interval $[0, 1]$ clarament és 0. Per tant, si denotem cadascun d'aquests punts com x_i per cada $i \in \mathbb{N}$, obtenim

$$0 = \sup_i \dim_M(x_i) < \dim_M \left(\bigcup_{i=1}^n x_i \right) = \dim_M(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = \dim_M(A) = 1.$$

6.3 Relació entre la dimensió de Hausdorff i la dimensió de Minkowski

És important entendre la relació entre les dues dimensions esmentades. Si ens fixem, la definició 6.19 ens diu que $N_\varepsilon(A) \approx \varepsilon^{-s}$ per ε prou petit i on $s = \dim_M(A)$. Per tant, tenim $N_\varepsilon(A)\varepsilon^{\tilde{s}} \rightarrow \infty$ si $\tilde{s} < s = \dim_M(A)$ i $N_\varepsilon(A)\varepsilon^{\tilde{s}} \rightarrow 0$ si $\tilde{s} > s = \dim_M(A)$. Però podem pensar $N_\varepsilon(A)\varepsilon^s$ com

$$N_\varepsilon(A)\varepsilon^s = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \varepsilon^s : \forall 1 \leq i \leq n, A_i \in \mathcal{P}(X) \text{ i } \text{diam}(A_i) \leq \varepsilon, A \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i \right\}.$$

Aquesta expressió és semblant a la de $H_{s,\varepsilon}$ i per tant, aquesta possible comparació ens podria ajudar a determinar quina relació existeix entre les dues dimensions.

Un cop feta aquesta observació, vegem-ho d'una forma formal. Considerem (X, d) un espai mètric complet i sigui $A \in \mathcal{L}(X)$ un subconjunt compacte no buit de X . Si A es pot recobrir per $N_\varepsilon(A)$ subconjunts de X tals que el seu diàmetre és més petit o igual a ε , aleshores per la definició 6.5 tenim que $H_{s,\varepsilon}(A) \leq \varepsilon^s N_\varepsilon(A)$.

Si $H_s(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_{s,\varepsilon}(A) > 1$, aleshores $\log N_\varepsilon(A) + s \log \varepsilon > 0$ per ε prou petit. Com a conseqüència, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_\varepsilon(A)}{-\log \varepsilon} \geq s$ i per tant tenim

$$\dim_H(A) \leq \underline{\dim}_M(A) \leq \overline{\dim}_M(A).$$

Com hem escollit un subconjunt $A \in \mathcal{L}(X)$ arbitrari, tenim que aquesta última desigualtat se satisfà per qualsevol $A \in \mathcal{L}(X)$.

Per tant, obtenim el següent resultat:

Teorema 6.22. *Sigui (X, d) un espai mètric complet i sigui $A \in \mathcal{L}(X)$ un subconjunt compacte no buit de X . Aleshores se satisfà $\dim_H(A) \leq \underline{\dim}_M(A) \leq \overline{\dim}_M(A)$. A més, si $\underline{\dim}_M(A) = \overline{\dim}_M(A)$, aleshores $\dim_H(A) \leq \dim_M(A)$.*

Demostració. Com que per la pròpia definició de les dimensions superior i inferior de Minkowski tenim $\underline{\dim}_M(A) \leq \overline{\dim}_M(A)$, només cal veure la desigualtat $\dim_H(A) \leq \underline{\dim}_M(A)$. D'una manera semblant al que hem explicat abans, si recobrim A per $N_\varepsilon(A)$ subconjunts de X tals que el seu diàmetre és ε , aleshores per la definició 6.5 tenim que $H_{s,\varepsilon}(A) \leq \varepsilon^s N_\varepsilon(A)$. Conseqüentment, fent $\varepsilon \rightarrow 0$ obtenim $H_s(A) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^s N_\varepsilon(A)$.

Considerem ara els valors de s tals que $H_s(A) > 1$. Aleshores $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^s N_\varepsilon(A) \geq H_s(A) > 1$ i conseqüentment, per un cert ε prou petit tenim $\varepsilon^s N_\varepsilon(A) > 1$. Prenent logaritmes a cada costat obtenim

$$\log(\varepsilon^s N_\varepsilon(A)) > \log 1 = 0 \Leftrightarrow \log N_\varepsilon(A) + s \log \varepsilon \Leftrightarrow \frac{\log N_\varepsilon(A)}{-\log \varepsilon} > s.$$

Per tant, obtenim que $s \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_\varepsilon(A)}{-\log \varepsilon}$ i com a conseqüència $\dim_H(A) \leq \underline{\dim}_M(A)$.

Clarament, com que $\dim_H(A) \leq \underline{\dim}_M(A) \leq \overline{\dim}_M(A)$, si $\underline{\dim}_M(A) = \overline{\dim}_M(A)$, aleshores $\dim_H(A) = \dim_M(A)$ per la pròpia definició de dimensió de Minkowski. \square

Aquesta proposició ens permet estimar una cota superior de la dimensió de Hausdorff mitjançant la dimensió de Minkowski (i en cas de no existir, la dimensió inferior o superior de Minkowski). Aquesta dimensió és més fàcil de calcular ja que per recobrir $A \in \mathcal{L}(X)$ es

poden agafar subconjunts del mateix diàmetre, mentre que la dimensió de Hausdorff s'han de considerar també els de diferent diàmetre. Aquesta afirmació és fàcil de comprovar gràcies a l'observació feta a l'inici de la secció i tenint en compte la definició 6.5:

$$N_\varepsilon(A)\varepsilon^s = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \varepsilon^s : \forall 1 \leq i \leq n, A_i \in \mathcal{P}(X) \text{ i } \text{diam}(A_i) \leq \varepsilon, \text{ i } A \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i \right\}$$

$$H_{s,\varepsilon}(A) = \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam}(A_i))^s : \forall i \geq 1, A_i \in \mathcal{P}(X) \text{ i } \text{diam}(A_i) \leq \varepsilon, \text{ i } A \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right\}.$$

6.4 Càlcul de la dimensió

Com ja hem explicat en la introducció d'aquest capítol, a continuació calcularem, mitjançant la teoria donada en les tres seccions anteriors, la dimensió fractal dels exemples del capítol 2. En aquests tres, l'espai mètric on treballem és l'espai mètric euclidià. Per tant, per qualsevol subconjunt $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tenim que $\text{diam}(A) = \sup_{a,b \in A} |a - b|$.

Així doncs, començem amb el conjunt de Cantor explicat a la secció 2.1. Primerament calculem la seva dimensió de Hausdorff:

Proposició 6.23. *Sigui $C \subseteq [0, 1]$ el conjunt de Cantor i agafem $s = \log 2 / \log 3$. Aleshores $\dim_H(C) = s$ i $\frac{1}{2} \leq H_s(C) \leq 1$.*

Demostració. És suficient veure que $\frac{1}{2} \leq H_s(C) \leq 1$, ja que com hem vist a l'observació 6.14, $H_{\tilde{s}}(C) = \infty$ si $\tilde{s} < \dim_H(C)$ i $H_{\tilde{s}}(C) = 0$ si $\tilde{s} > \dim_H(C)$.

Vegem primer que $H_s(C) \leq 1$: ja hem vist que per cada $k \geq 0$, el conjunt C_k està format per 2^k intervals de longitud $(\frac{1}{3})^k$, els quals anomenarem intervals bàsics. Gràcies a aquest recobriment, per cada k , si considerem A_i cada un d'aquests intervals bàsics, obtenim

$$H_{s,(1/3)^k}(C) \leq \sum_i (\text{diam}(A_i))^s = \sum_i ((\frac{1}{3})^k)^s = 2^k (\frac{1}{3})^{ks}.$$

Com que $s = \frac{\log 2}{\log 3}$, tenim $H_{s,(1/3)^k}(C) \leq 2^k (\frac{1}{3})^{ks} = 1$. Conseqüentment, fent tendir $k \rightarrow \infty$, obtenim $H_s(C) \leq 1$.

Vegem ara que $\frac{1}{2} \leq H_s(C)$: comprovarem que per qualsevol recobriment $\{A_i\}$ de C se satisfà $\sum_i (\text{diam}(A_i))^s \geq \frac{1}{2} = (\frac{1}{3})^s$, ja que si això es compleix tindrem que l'ímfim

d'aquestes sumes és major o igual a $\frac{1}{2}$, i per tant $H_s(C) \geq \frac{1}{2}$. Per veure-ho, és suficient suposar que els conjunts del recobriment són subintervals de $[0, 1]$ i com que C és compacte per ser intersecció de compactes (veure secció 2.1), només cal considerar una col·lecció finita de subintervals tancats de $[0, 1]$. Per tant, sigui $\{A_i\}_{i=1,\dots,n}$ aquesta col·lecció que recobreix C . Aleshores per cada i , agafem $k_i \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{k_i+1} \leq \text{diam}(A_i) < \left(\frac{1}{3}\right)^{k_i}. \quad (6.4)$$

Com que la distància d'un interval bàsic a un altre en el conjunt C_{k_i} és, com a mínim, $(1/3)^{k_i}$, tenim que A_i pot intersecar com a molt un dels intervals de C_{k_i} . Així doncs, per

construcció, si $j \geq k_i$ tenim que A_i interseca com a molt 2^{j-k_i} intervals bàsics de C_j , o gràcies a les desigualtats 6.4:

$$2^{j-k_i} = 2^j \left(\frac{1}{3}\right)^{s k_i} = 2^j \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{k_i}\right)^s \leq 2^j 3^s \text{diam}(A_i)^s.$$

Com que això val per qualsevol $j \geq k_i$, podem escollir j prou gran per tal que per tot $i \in \{1, \dots, n\}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{j+1} \leq \text{diam}(A_i)$. Per tant, la col·lecció $\{A_i\}_{i=1, \dots, n}$ interseca els 2^j intervals bàsics de longitud $\left(\frac{1}{3}\right)^{-j}$ que conformen C_j . Conseqüentment, obtenim que $2^j \leq \sum_{i=1}^n 2^j 3^s \text{diam}(A_i)^s$, d'on treiem que $\sum_i (\text{diam}(A_i))^s \geq \left(\frac{1}{3}\right)^s = \frac{1}{2}$. D'aquesta desigualtat obtenim que $H_s(C) \geq \frac{1}{2}$, tal i com volíem veure. \square

A continuació, calculem la seva dimensió de Minkowski:

Proposició 6.24. *Sigui $C \subseteq [0, 1]$ el conjunt de Cantor i agafem $s = \log 2 / \log 3$. Aleshores $\underline{\dim}_M(C) = \overline{\dim}_M(C) = s$ i conseqüentment $\dim_M(C) = s$.*

Demostració. Per demostrar que efectivament la dimensió de Minkowski del conjunt de Cantor és $\log 2 / \log 3$, veurem que $\underline{\dim}_M(C) \geq \frac{\log 2}{\log 3}$ i que $\overline{\dim}_M(C) \leq \frac{\log 2}{\log 3}$ i per tant, com que $\underline{\dim}_M(C) \leq \overline{\dim}_M(C)$, obtindrem el resultat que busquem.

Comencem doncs amb la primera desigualtat. Agafem $\varepsilon > 0$ tal que $\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} \leq \varepsilon < \left(\frac{1}{3}\right)^k$, per un cert k . Llavors qualsevol interval de longitud ε interseca, com a molt, amb un interval bàsic de longitud $\left(\frac{1}{3}\right)^k$ del conjunt C_k . Com que C_k està format per 2^k intervals bàsics, tenim que com a mínim haurem d'agafar 2^k intervals de longitud ε per tal de recobrir C . Com a conseqüència obtenim que $N_\varepsilon(C) \geq 2^k$ i per tant

$$\underline{\dim}_M(C) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_\varepsilon(C)}{-\log \varepsilon} \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{-\log \left(\frac{1}{3}\right)^k} = \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{\log 3^k},$$

i aplicant la regla de l'Hôpital, com que $\frac{d}{dx}(\log a^x) = \frac{1}{a^x} a^x \log a = \log a$, obtenim

$$\underline{\dim}_M(C) \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{\log 3^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

D'altra banda, com que, per cada $k \geq 1$, el conjunt C_k es pot recobrir per 2^k intervals de longitud $(1/3)^k$, si $\varepsilon \in \left(\left(\frac{1}{3}\right)^k, \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right)$, llavors $N_\varepsilon(C) \leq 2^k$. Conseqüentment obtenim

$$\overline{\dim}_M(C) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_\varepsilon(C)}{-\log \varepsilon} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{-\log \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{\log 3^{k-1}},$$

i com abans, aplicant la regla de l'Hôpital, obtenim

$$\overline{\dim}_M(C) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{\log 3^{k-1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Per tant, aconseguim $\underline{\dim}_M(C) \geq \frac{\log 2}{\log 3}$ i $\overline{\dim}_M(C) \leq \frac{\log 2}{\log 3}$, i per tant, com ja hem dit al començament de la demostració, tenim que $\underline{\dim}_M(C) = \overline{\dim}_M(C) = \frac{\log 2}{\log 3}$. Com a conseqüència, $\dim_M(C) = \frac{\log 2}{\log 3}$. \square

Si ens fixem, en el cas del conjunt de Cantor la dimensió de Hausdorff i la dimensió de Minkowski coincideixen i el seu valor és $\dim_H(C) = \dim_M(C) = \log 2 / \log 3$.

L'argumentació utilitzada per calcular la dimensió del conjunt de Cantor es pot fer servir per a qualsevol subconjunt d'un espai mètric (X, d) . Si suposem que $A \subseteq X$ es pot recobrir per m_k conjunts de diàmetre menor o igual a ε_k , on $\varepsilon_k \rightarrow 0$ quan $k \rightarrow \infty$, llavors $\dim_H(A) \leq \underline{\dim}_M(A) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\log m_k}{-\log \varepsilon_k}$ i a més si $\varepsilon_{k+1} \geq a\varepsilon_k$, per una certa $a \in (0, 1)$, tenim que $\overline{\dim}_M(A) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\log m_k}{-\log \varepsilon_k}$. Si també se satisfà que $m_k(\varepsilon_k)^s \rightarrow \infty$ quan $k \rightarrow \infty$, tenim que $H_s(A) < \infty$ ja que $H_{s, \varepsilon_k}(A) \leq m_k(\varepsilon_k)^s$ i per tant quan $k \rightarrow \infty$ tenim que $H_s(A)$ tendeix a un valor finit. A l'exemple anterior, gràcies a aquest argument haguéssim obtingut que $\dim_H(C) \leq \log 2 / \log 3$.

Encara i així, veure la desigualtat inversa és més complicat. Per trobar una fita inferior cal veure que per qualsevol recobriment de A , $\{A_i\}_{i \in I}$, tal que $\text{diam}(A_i) \leq \varepsilon$, $\forall i \in I$, se satisfà $\sum_{i \in I} (\text{diam}(A_i))^s \geq a$, per una certa constant $a > 0$. Però la dificultat rau en el fet que aquests recobriments poden ser molt diferents.

Una manera de facilitar els càlculs de la dimensió d'un subconjunt de (X, d) és treballant amb un IFS i el punt fix que ens resulti d'aquest (veure la secció 4). A continuació enunciaré un teorema que ens ajudarà a calcular aquestes dimensions. Com que majoritàriament treballarem amb l'espai euclidià, enunciaré el teorema per aquest espai en concret. La demostració d'aquest es pot trobar al llibre '*FRactal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*' de Kenneth Falconer [2] a les pàgines 117-120.

Teorema 6.25 (Teorema de les dimensions per IFS). *Sigui $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ l'espai mètric euclidià, sigui $\{f_1, \dots, f_m\}$ un IFS on els factors de contracció són k_1, \dots, k_m respectivament i sigui A l'atractor d'aquest IFS. Suposem que aquestes funcions satisfan que existeix un obert acotat i no buit, $B \subseteq \mathbb{R}^n$, tal que $\bigcup_{i=1}^m f_i(B) \subseteq B$ i tal que $f_i(B) \cap f_j(B) = \emptyset$ per $i \neq j$. Aleshores $\dim_H(A) = \dim_M(A) = s$, on s compleix la següent equació*

$$\sum_{i=1}^m (k_i)^s = 1 \quad (6.5)$$

i a més per aquest valor s se satisfà $0 < H_s(A) < \infty$.

Gràcies a aquest teorema, donat qualsevol IFS $\{f_1, \dots, f_m\}$ tal que el factor de contracció de totes aquestes funcions és k , tenim que si existeix un obert acotat i no buit, $B \subseteq \mathbb{R}^n$, tal que $\bigcup_{i=1}^m f_i(B) \subseteq B$ i $f_i(B) \cap f_j(B) = \emptyset$ per $i \neq j$, aleshores

$$\dim_H(A) = \dim_M(A) = -\frac{\log m}{\log k} = \frac{\log m}{\log\left(\frac{1}{k}\right)}.$$

Per tant, gràcies a aquest resultat, pel cas del conjunt de Cantor com que l'interval $I = (0, 1)$ és un obert acotat i no buit tal que $\bigcup_{i=1}^m f_i(I) \subseteq I$ i tal que $f_i(I) \cap f_j(I) = \emptyset$ per $i \neq j$, tenim que $\dim_H(C) = \dim_M(C) = \frac{\log 2}{\log 3}$ tal i com hem vist anteriorment.

A continuació estudiarem la dimensió fractal de la corba de Koch (veure secció 2.1). L'IFS que genera aquest fractal és el següent:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x, y) = \left(\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}y\right), \\ f_2(x, y) = \left(\frac{1}{6}x - \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{6}y\right), \\ f_3(x, y) = \left(\frac{1}{6}x - \frac{\sqrt{3}}{6}y + \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{6}y + \frac{\sqrt{3}}{6}\right), \\ f_4(x, y) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}y\right). \end{array} \right.$$

És fàcil comprovar que aquestes funcions són funcions contractives amb factor de contracció $\frac{1}{3}$. En particular, aquestes funcions satisfan que per tot $(a, b), (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $d(f_i(x, y), f_i(a, b)) = \frac{1}{3}d((x, y), (a, b))$ per cada i . Per l'argument fet posteriorment al teorema de les dimensions pels IFS, tenim que

$$\dim_H(F) = \dim_M(F) = \frac{\log 4}{\log \left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{\log 4}{\log 3}.$$

El mateix passa amb el triangle de Sierpiński (veure secció 2.1). En aquest cas l'IFS que genera aquest fractal està constituït per 3 funcions contractives on totes aquestes tenen factor de contracció $\frac{1}{2}$ (veure exemple 5.1). Com en l'exemple anterior doncs, obtenim que la dimensió de Hausdorff i la dimensió de Minkowski coincideixen i el seu valor és

$$\dim_H(T) = \dim_M(T) = \frac{\log 3}{\log \left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\log 3}{\log 4}.$$

7 APLICACIONES

Al llarg de tot l'escrit, hem vist que els fractals no només són objectes geomètrics curiosos sinó que també posseeixen propietats matemàtiques molt interessants. Aquestes propietats ens proporcionen moltes aplicacions, ja no només per tal de modelar la natura d'una forma més rigurosa que quan utilitzem la geometria euclidiana, també en àmbits com la tecnologia, en la medicina com a eina per el diagnòstic precoç de certes malalties, en l'economia, en l'art, en la sismologia, en l'arqueologia, etc. A continuació enunciaré algunes d'aquestes aplicacions, encara que n'hi ha moltes més.

Compressió d'imatges: Les imatges digitals estan formades per milions de píxels o punts de diferents colors, i normalment ocupen molta memòria. Per reduir aquesta memòria d'emmagatzematge, una de les formes de realitzar-ho és mitjançant el teorema del Collage. És fàcil veure que si la imatge que volem comprimir és d'un objecte autosemblant, només cal trobar un IFS que el generi. Però per les imatges reals s'ha d'anar més enllà ja que la majoria no són objectes autosemblants. Per comprimir aquestes, cal dividir la imatge a través d'una partició i per cada una de les parts, cal trobar una regió similar a la primera sota certes transformacions. Encara que es tracti d'una compressió amb pèrdua d'informació i triga molt ja que s'han de trobar les transformacions adients que defineixen la imatge, l'avantatge és que la descompressió és molt ràpida.

Antenes fractals: Aquest tipus d'antenes utilitzen un disseny fractal per tal de maximitzar el perímetre del material que pot rebre o transmetre la radiació electromagnètica dins d'una determinada superfície o volum. Moltes d'aquestes antenes fan servir l'estructura fractal com a combinació de condensadors i bobines. Gràcies a les diferents possibles combinacions, es pot triar i ajustar el disseny del fractal adient per aquesta.

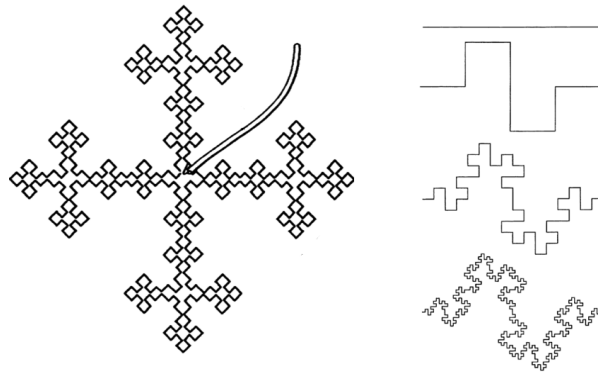


Figura 17: A la dreta, la corba de Minkowski; a l'esquerra, un exemple d'antena fractal utilitzant la corba de Minkowski.

Mecànica de fluids: Per estudiar les turbulències als fluxos s'utilitza la geometria fractal ja que tenen un comportament caòtic i molt difícil de modelar, i aquesta ajuda a entendre el comportament d'aquestes turbulències. Per exemple, una flama o un medi poros tenen una geometria complexa i per tant, s'utilitza la geometria fractal per tal d'estudiar-los.

Descripció de la natura: És impossible trobar fractals amb autosemblança exacta a la natura. Encara i així, podem modelitzar-la amb fractals d'una forma aproximada. Aquests patrons semblants als fractals es troben àmpliament distribuïts per tota la natura: des dels núvols, les muntanyes, els flocs de neu, les línies de falles geològiques o les ones, com en la ramificació dels vasos sanguinis, la ramificació dels bronquis i dels bronquiols o les rugositats de l'intestí.

Diagnòstic de certes malalties: Com hem dit en l'exemple anterior, el cos humà és massa complex per descriure'l mitjançant la geometria euclidiana. Per aquest motiu, estructures com el cervell, la part interna de l'intestí, els pulmons o la ramificació dels vasos sanguinis són descrits amb la geometria fractal. Però també la dimensió fractal pot ajudar a determinar si un pacient pateix una certa malaltia. Certes malalties danyen els teixits els quals afecten i per tant, s'ha vist que la dimensió fractal varia. Per tant, el càlcul de la dimensió fractal de certes parts del cos humà, aporta vies complementàries a les tradicionals per a fer diagnòstics preventius en diferents malalties. Vegem-ne alguns exemples:

Retinopatia diabètica: La retinopatia diabètica, causada pels alts nivells de sucre en sang que poden causar danys en els vasos sanguinis de la retina, és una de les complicacions més comunes de la diabetis. S'ha observat que la dimensió fractal (calculada mitjançant 'ImageJ') de la retina d'una persona sana és aproximadament 1.6, mentre que la dimensió fractal de la retina d'una persona amb diabetis és aproximadament 1.534, inferior a la dimensió de la retina sana. Aquests resultats són de gran importància per al diagnòstic precoç d'aquesta malaltia i a més, aquesta tècnica no invasiva es pot utilitzar per la detecció de qualsevol malaltia que afecti els vasos sanguinis de la retina. Aquest valor també pot indicar l'estadi de la malaltia i podria ser útil pel control de la malaltia.



Figura 18: Diferència entre una retina d'una persona sana i una retina d'una persona amb diabetis. En la imatge de la dreta, es pot apreciar els danys en els vasos sanguinis de la retina de la persona que pateix la diabetis.

Osteoporosi: El tall d'un os trabecular (un dels dos tipus de teixit ossi del cos humà, també anomenat os esponjós) té una estructura amb un patró ramificat. Segons estudis del Departament de Radiologia de la Universitat de Washington, es considera que la dimensió fractal d'una secció d'un os està entre 1.7 i 1.8. Aquesta dimensió es calcula a partir de la imatge digitalitzada i seguint el mètode del recompte de caixes. Una dimensió inferior a aquestes poden ser símptoma d'osteoporosi.

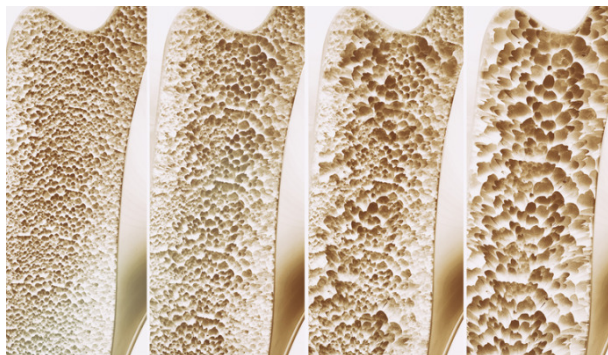


Figura 19: Diferents ossos mostren el procés d'osteoporització d'un os.

Malalties del cervell: La dimensió fractal del cervell és una mesura que complementa els estudis de volumetria cerebral i busca obtenir criteris que pot permetre a un neuròleg identificar malalties i canvis en l'evolució de les malalties. En neurologia és molt important poder mesurar els canvis de volum del cervell per apreciar el dany cerebral que el pacient pateix o ha patit. Les malalties cerebrals tendeixen a produir atrofia (pèrdua del teixit), però la seva quantificació és complexa i limitada.

Al mesurar la dimensió fractal del cervell, estem mesurant la seva complexitat i per tant, qualsevol canvi en la dimensió reflecteix canvis en l'estructura del cervell, com la que es produeix a causa de certes malalties.

Algun exemple d'aquestes malalties poden ser l'esclerosi múltiple, els ictus, les malalties neurodegeneratives, la demència, els tumors cerebrals, retard del creixement intra-uterí o les malformacions cerebrals.

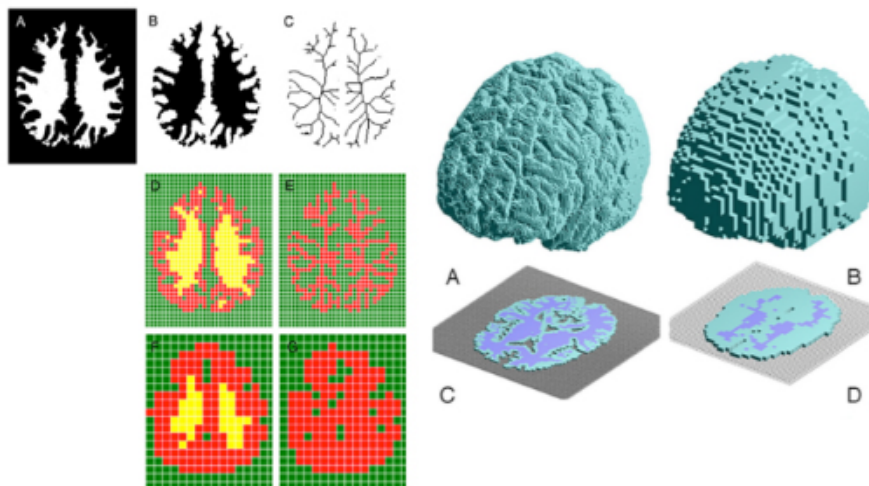


Figura 20: Diferents processos de digitalització d'imatges del cervell per tal de poder calcular la seva dimensions fractal.

Referències

- [1] Romero Schmidkte, M.(2005). *Conjunto de Cantor* [Il·lustració]. Recuperat de https://es.wikipedia.org/wiki/Conjunto_de_Cantor. Darrera consulta 16-10-2019.
- [2] Falconer, Kenneth J. *FRACTAL GEOMETRY. Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley & Sons Ltd., Baffins Lane (Chichester), 1990. 300p. ISBN 0471922870.
- [3] Fielding Barnsley, Michael. (1993). *Barnsley Fern*[Il·lustració]. Recuperat de *Fractals Everywhere*. Pàgina 90. Darrera consulta 12-12-2019.
- [4] Falconer, Kenneth J.(1990). *Julia set* [Il·lustració]. Recuperat de *FRACTAL GEOMETRY. Mathematical Foundations and Applications*.. Pàgina 198. Darrera consulta 22-10-2019.
- [5] Beyer, Dr. Wolfgang. (2013) *Mandelbrot set* [Il·lustració]. Recuperat de https://en.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot_set#/media/File:Mandel_zoom_00_mandelbrot_set.jpg. Darrera consulta 22-10-2019.
- [6] Barragán Mendoza, Franco; Romero, Armando; Sánchez-Perales, S.; Grijalva Altamirano, Víctor Manuel.(2014)*Breve Introducción a la Métrica de Hausdorff*. Fac. de Ciències Físico Matemàtiques de la BUAP, Mèxic. Recuperat de <http://www.utm.mx/postgrado/MMM/Cat%201.%20Estruct%20y%20personal%20acad%20del%20Program-MMM/4.%20LGAC-Congruencia/Cap-libro-Franco-Grijalva.pdf>. Darrera consulta 12-11-2019.
- [7] Edgar, Gerald. *MEASURE, TOPOLOGY, AND FRACTAL GEOMETRY*. Segona Edició. Department of Mathematics, The Ohio State University Columbus, 2008. 283p. ISBN 9780387747484.
- [8] Fielding Barnsley, Michael. *Fractals Everywhere*. Segona Edició. Academic Press Professional, Boston, 1993. 545p. ISBN 0120790610.
- [9] Bell, Jordan. *Hausdorff measure*. Department of Mathematics, University of Toronto, 2014. Recuperat de <http://individual.utoronto.ca/jordanbell/notes/hausdorffmeasure.pdf>. Darrera consulta 5-12-2019.
- [10] C. A. Rogers. *Hausdorff Measures*. Primera Edició. Cambridge: University Press, 1970. 187p. ISB 0521079705.
- [11] Bandt, Christoph; Viet Hung, Nguyen; Rao, Hui. *ON THE OPEN SET CONDITION FOR SELF-SIMILAR FRACTALS*. Proceedings of the American Mathematical Society. Publicat el 6 d'Octubre de 2005. Recuperat de <https://www.ams.org/journals/proc/2006-134-05/S0002-9939-05-08300-0/S0002-9939-05-08300-0.pdf>. Darrera consulta 15-12-2019.
- [12] E. Jacquin, Arnaud. *Image Coding Based on a Fractal Theory of Iterated Contractive Image Transformations*. Publicat el Gener de 1992. Recuperat de <https://pdfs.semanticscholar.org/0720/b15959c71d252c6a9331a8c1ed2695c514ac.pdf>. Darrera consulta 20-12-2019.

- [13] Lamrini Uahabi, Kaoutar; Atounti, Mohamed. *Applications of fractals in medicine*. Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series. Publicat l'any 2015. Recuperat de <https://pdfs.semanticscholar.org/ab3a/0a5bde175e501896ffab1ac8319d111bc8bf.pdf>. Darrera consulta 21-12-2019.
- [14] Fan Huang; Behdad Dashtbozorg; Jiong Zhang; Erik Bekkers; Samaneh Abbasi-Sureshjani; Tos T. J. M. Berendschot; Bart M. ter Haar Romeny1. *Reliability of Using Retinal Vascular Fractal Dimension as a Biomarker in the Diabetic Retinopathy Detection* Journal of Ophthalmology. Publicat l'any 2016. Recupertat de <https://www.hindawi.com/journals/joph/2016/6259047/>. Darrera consulta 21-12-2019.
- [15] Stone, Trevor(2018). *Chaos Game Applet*. Versió 0.2. Recupertat de <https://trevorstone.org/applets/ChaosGame.html>. Darrera consulta 27-12-2019.
- [16] Gasull, Armengol(2016). *Fractals i Medicina*. Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona. Recuperat de <http://mat.uab.cat/matmat/PDFv2016/v2016n05.pdf>. Darrera consulta 07-01-2020.

ANNEX

Programes en C per 'El Joc del Caos'

Triangle de Sierpiński

L'IFS pel triangle de Sierpinski és

$$\begin{aligned}f_1(x, y) &= \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right), \\f_2(x, y) &= \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}y\right), \\f_3(x, y) &= \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}y + \frac{3}{4}\right).\end{aligned}$$

Considerem l'IFS equiprobable. Per tant, el programari és el següent:

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>

typedef struct {
    double x, y;
} punt;

punt puntMig(punt, punt);

int main(void) {
    int n, i;
    punt puntInt, pMig;
    punt triangle[3];
    char nomSort[31];
    FILE *sor;

    printf("Nom del fitxer de sortida?\n");
    scanf("%s", nomSort);

    sor=fopen(nomSort, "w");
    if(sor==NULL) {
        printf("Error en obrir el fitxer de sortida.\n");
        ;
        exit(1);
    }

    printf("Quantes iteracions vols?\n");
    scanf("%d", &n);

    triangle[0].x=-1.;
    triangle[0].y=-1.;
    triangle[1].x=0.;
    triangle[1].y=1.;
    triangle[2].x=1.;
```

```

    triangle [2].y=-1.;

    for (i=0; i<3; i++)
        fprintf (sor , " %10.3le %10.3le\n", triangle [i].
            x, triangle [i].y);

    puntInt.x=0.25;
    puntInt.y=0.50;
    pMig=puntInt ;

    srand (( unsigned ) time ( NULL ) );

    i=0;

    while (i<=n) {
        puntInt=pMig;
        pMig=puntMig ( puntInt , triangle [ rand () % 3 ] );
        fprintf ( sor , " %10.3le %10.3le\n", pMig.x, pMig
            .y);
        i++;
    }
    return 0;
}

punt puntMig ( punt prim , punt seg ) {
    punt mig;

    mig.x=(prim.x+seg.x) / 2.;
    mig.y=(prim.y+seg.y) / 2.;

    return mig;
}

```

El resultat per 36000 iteracions és el següent:

Conjunt de Cantor al pla

L'IFS pel conjunt de cantor però al pla és

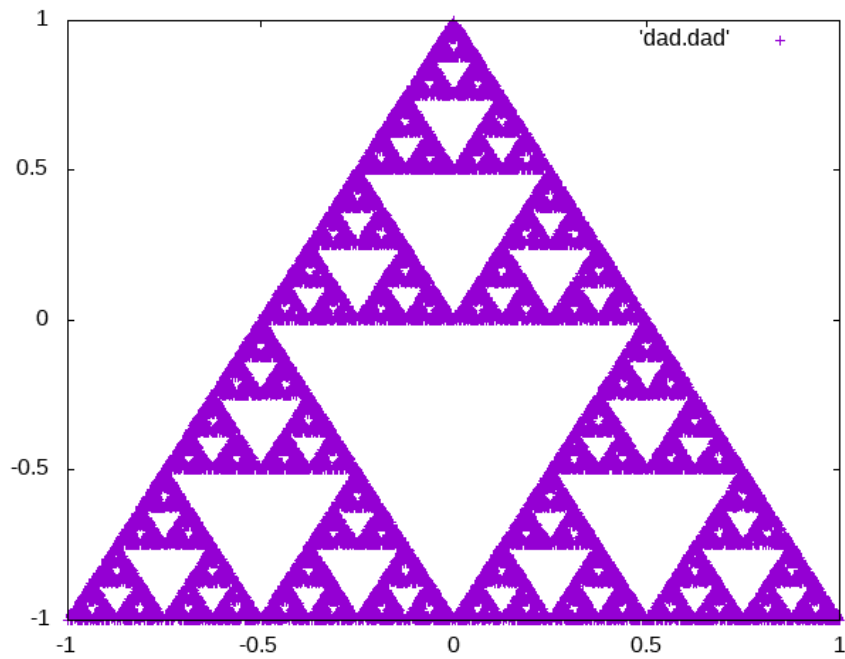
$$\begin{aligned}
 f_1(x, y) &= \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right), \\
 f_2(x, y) &= \left(\frac{1}{2}x + 1, \frac{1}{2}y\right), \\
 f_3(x, y) &= \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y + 1\right), \\
 f_4(x, y) &= \left(\frac{1}{2}x + 1, \frac{1}{2}y + 1\right).
 \end{aligned}$$

Considerem l'IFS equiprobable. Per tant, el programari és el següent:

```

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

```



```

#include <time.h>

typedef struct{
    double x, y;
} punt;

punt fun1(punt);
punt fun2(punt);
punt fun3(punt);
punt fun4(punt);
punt iterSeg(punt, double);

int main(void){
    int n, i;
    double prob;
    punt puntAnt, puntSeg;
    char nomSort[31];
    FILE *sor;

    printf("Nom del fitxer de sortida?\n");
    scanf("%s", nomSort);

    sor=fopen(nomSort, "w");
    if(sor==NULL){
        printf("Error en obrir el fitxer de sortida.\n");
        ;
        exit(1);
    }
}

```

```

printf (" Quantes iteracions vols?\n");
scanf (" %d", &n);

printf (" Dona les coordenades de x_0\n");
scanf (" %le %le", &puntSeg.x, &puntSeg.y);

fprintf (sor, " %10.3le %10.3le\n", puntSeg.x, puntSeg.y
);

srand((unsigned)time(NULL));

i=0;
while(i<=n){
    puntAnt=puntSeg;
    prob=rand()/((double)RANDMAX);
    puntSeg=iterSeg(puntAnt, prob);
    fprintf (sor, " %10.3le %10.3le\n", puntSeg.x,
        puntSeg.y);
    i++;
}
return 0;
}

punt fun1(punt pla){
    punt seg;

    seg.x=0.4*pla.x;
    seg.y=0.4*pla.y;

    return seg;
}

punt fun2(punt pla){
    punt seg;

    seg.x=0.4*pla.x+1;
    seg.y=0.4*pla.y+0;

    return seg;
}

punt fun3(punt pla){
    punt seg;

    seg.x=0.4*pla.x+0;
    seg.y=0.4*pla.y+1;

    return seg;
}

```

```

}

punt fun4(punt pla){
    punt seg;

    seg.x=0.4*pla.x+1;
    seg.y=0.4*pla.y+1;

    return seg;
}

punt iterSeg(punt ant, double r){
    punt seg;
    if(r<0.25){
        seg=fun1(ant);
    }else{
        if(r<0.5){
            seg=fun2(ant);
        }else{
            if(r<0.75){
                seg=fun3(ant);
            }else{
                seg=fun4(ant);
            }
        }
    }
    return seg;
}

```

El resultat per 36000 iteracions és el següent:

Falguera de Barnsley

L'IFS per la falguera de Barnsley és

$$\begin{aligned}
 f_1(x, y) &= (0, 0.16y), \\
 f_2(x, y) &= (0.85x + 0.04y, -0.04x + 0.85y + 1.6), \\
 f_3(x, y) &= (0.2x - 0.26y, 0.23x + 0.22y + 1.6), \\
 f_4(x, y) &= (-0.15x + 0.28y, 0.26x + 0.24y + 0.44).
 \end{aligned}$$

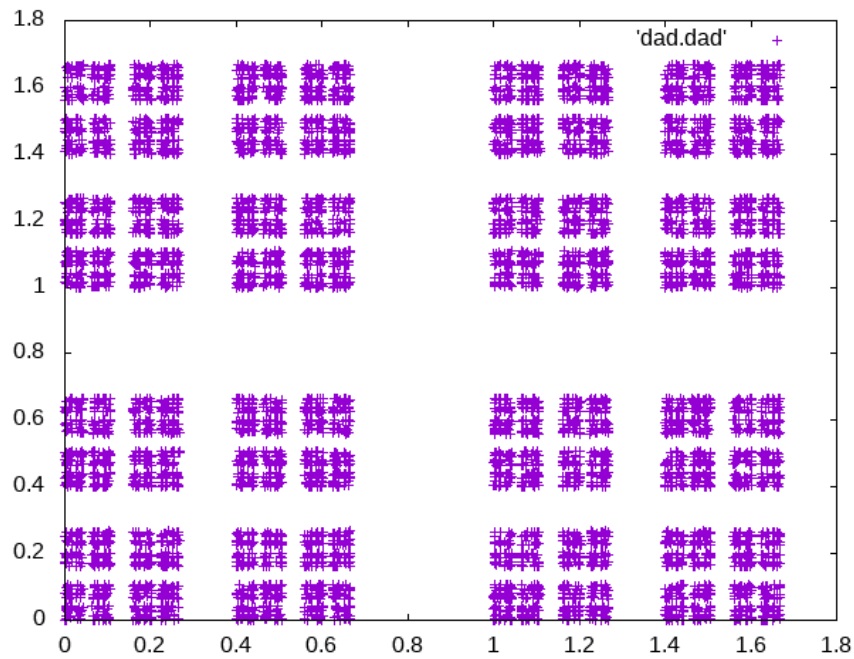
Considerem l'IFS amb les probabilitats $p_1 = 0.01$, $p_2 = 0.85$, $p_3 = 0.07$ i $p_4 = 0.07$. Per tant, el programari és el següent:

```

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>

typedef struct{
    double x, y;
} punt;

```



```

punt fun1(punt);
punt fun2(punt);
punt fun3(punt);
punt fun4(punt);
punt iterSeg(punt, double);

int main(void){
    int n, i;
    double prob;
    punt puntAnt, puntSeg;
    char nomSort[31];
    FILE *sor;

    printf("Nom del fitxer de sortida?\n");
    scanf("%s", nomSort);

    sor=fopen(nomSort, "w");
    if(sor==NULL){
        printf("Error en obrir el fitxer de sortida.\n");
        ;
        exit(1);
    }

    printf("Quantes iteracions vols?\n");
    scanf("%d", &n);

    printf("Dona les coordenades de x_0\n");

```

```

scanf ( " %le %le " , &puntSeg.x , &puntSeg.y );

fprintf ( sor , " %10.3le %10.3le\n " , puntSeg.x , puntSeg.y
        );

srand ( ( unsigned ) time ( NULL ) );

i = 0;
while ( i <= n ) {
    puntAnt = puntSeg ;
    prob = rand ( ) / ( ( double ) RANDMAX ) ;
    puntSeg = iterSeg ( puntAnt , prob ) ;
    fprintf ( sor , " %10.3le %10.3le\n " , puntSeg.x ,
            puntSeg.y ) ;
    i ++ ;
}
return 0 ;
}

punt fun1 ( punt pla ) {
    punt seg ;

    seg.x = 0 . ;
    seg.y = 0.5 * pla.y ;

    return seg ;
}

punt fun2 ( punt pla ) {
    punt seg ;

    seg.x = 0.42 * pla.x - 0.42 * pla.y ;
    seg.y = 0.42 * pla.x + 0.42 * pla.y + 0.2 ;

    return seg ;
}

punt fun3 ( punt pla ) {
    punt seg ;

    seg.x = 0.42 * pla.x + 0.42 * pla.y ;
    seg.y = 0.42 * pla.y - 0.42 * pla.x + 0.2 ;

    return seg ;
}

punt fun4 ( punt pla ) {
    punt seg ;

```



```

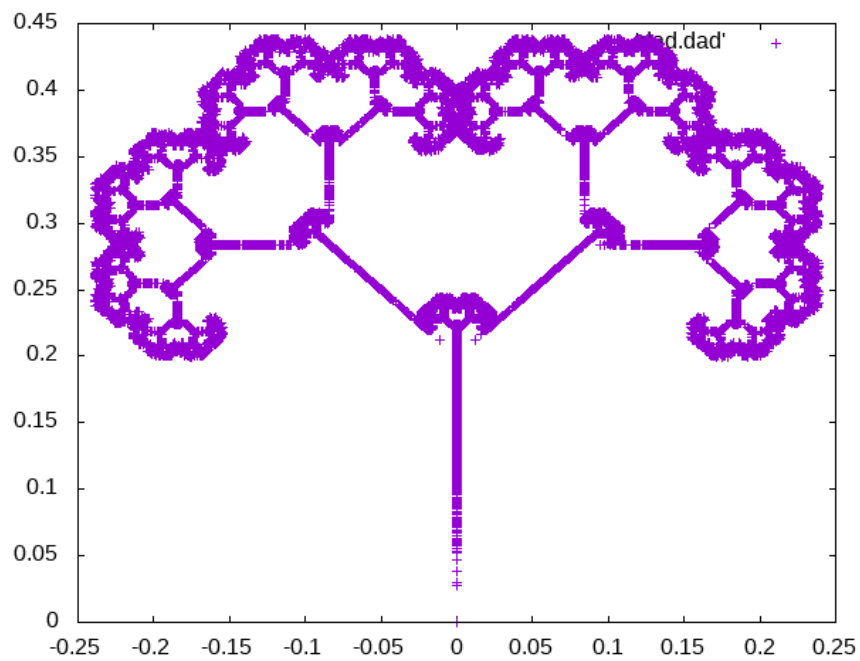
    seg.x=0.1*pla.x;
    seg.y=0.1*pla.y+0.2;

    return seg;
}

punt iterSeg(punt ant, double r){
    punt seg;
    if(r<0.05){
        seg=fun1(ant);
    }else{
        if(r<0.45){
            seg=fun2(ant);
        }else{
            if(r<0.85){
                seg=fun3(ant);
            }else{
                seg=fun4(ant);
            }
        }
    }
    return seg;
}
}

```

El resultat per 36000 iteracions és el següent:



Arbre fractal

L'IFS per construir un arbre fractal és

$$\begin{aligned}f_1(x, y) &= (0, 0.5y), \\f_2(x, y) &= (0.42x - 0.42y, 0.42x + 0.42y + 0.2), \\f_3(x, y) &= (0.42x + 0.42y, -0.42x + 0.42y + 0.2), \\f_4(x, y) &= (0.1x, 0.1y + 0.2).\end{aligned}$$

Considerem l'IFS amb les probabilitats $p_1 = 0.05$, $p_2 = 0.4$, $p_3 = 0.4$ i $p_4 = 0.15$. Per tant, el programari és el següent:

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>

typedef struct {
    double x, y;
} punt;

punt fun1(punt);
punt fun2(punt);
punt fun3(punt);
punt fun4(punt);
punt iterSeg(punt, double);

int main(void) {
    int n, i;
    double prob;
    punt puntAnt, puntSeg;
    char nomSort[31];
    FILE *sor;

    printf("Nom del fitxer de sortida?\n");
    scanf("%s", nomSort);

    sor=fopen(nomSort, "w");
    if(sor==NULL){
        printf("Error en obrir el fitxer de sortida.\n");
        ;
        exit(1);
    }

    printf("Quantes iteracions vols?\n");
    scanf("%d", &n);

    printf("Dona les coordenades de x_0\n");
    scanf("%le %le", &puntSeg.x, &puntSeg.y);

    fprintf(sor, "%10.3le %10.3le\n", puntSeg.x, puntSeg.y
    );
}
```

```

srand((unsigned)time(NULL));

i=0;
while(i<=n){
    puntAnt=puntSeg;
    prob=rand()/((double)RANDMAX);
    puntSeg=iterSeg(puntAnt, prob);
    fprintf(sor, "%10.3le %10.3le\n", puntSeg.x,
        puntSeg.y);
    i++;
}
return 0;
}

punt fun1(punt pla){
    punt seg;

    seg.x=0.;
    seg.y=0.16*pla.y;

    return seg;
}

punt fun2(punt pla){
    punt seg;

    seg.x=0.85*pla.x+0.04*pla.y;
    seg.y=0.85*pla.y-0.04*pla.x+1.6;

    return seg;
}

punt fun3(punt pla){
    punt seg;

    seg.x=0.2*pla.x-0.26*pla.y;
    seg.y=0.23*pla.x+0.22*pla.y+1.6;

    return seg;
}

punt fun4(punt pla){
    punt seg;

    seg.x=0.28*pla.y-0.15*pla.x;
    seg.y=0.26*pla.x+0.24*pla.y+0.44;

    return seg;
}

```

```

}
punt iterSeg(punt ant, double r){
    punt seg;
    if(r<0.01){
        seg=fun1(ant);
    }else{
        if(r<0.86){
            seg=fun2(ant);
        }else{
            if(r<0.93){
                seg=fun3(ant);
            }else{
                seg=fun4(ant);
            }
        }
    }
    return seg;
}
}

```

El resultat per 36000 iteracions és el següent:

