



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Teoria de Donaldson i aplicacions
a les varietats topològiques de
dimensió 4

Autor: Héctor Cancio Andel

Director: Dr. Javier José Gutiérrez Marín
Realitzat a: Departament de Matemàtiques
i Informàtica

Barcelona, 19 de gener de 2020

Abstract

The aim of this dissertation is to introduce the world of topological four-manifolds. The main result is Donaldson's Theorem, which can be used to prove the existence of topological manifolds that admit no differentiable structure.

First of all we will give preliminaries based on algebraic topology (cohomology mainly), following with tools of differential geometry (vector bundles, connections and the basics of gauge theories). In the most important part of this project we will check the proof of Donaldson's Theorem and the definition of Donaldson's invariants. We will use these results in order to see examples of manifolds that cannot have any differentiable structure as well as the construction of an exotic \mathbb{R}^4 and various vanishing theorems.

Resum

L'objectiu d'aquesta dissertació és donar una introducció al món de les varietats topològiques de dimensió 4. El resultat principal és el Teorema de Donaldson, el qual pot ser utilitzat per provar l'existència de varietats topològiques que no admeten estructura diferenciable.

Primer donarem preliminars de topologia algebraica (cohomologia principalment), seguits d'eines de geometria diferencial (fibrats vectorials, connexions i els fonaments de les teories gauge). En la part més important del projecte presentarem la demostració del Teorema de Donaldson i la definició dels invariants de Donaldson. Utilitzarem aquests resultats per a veure exemples de varietats que no poden tenir cap estructura diferenciable així com la construcció d'un \mathbb{R}^4 exòtic i diversos teoremes d'anul·lació.

Agraïments

En primer lloc vull agrair al Dr. Javier José Gutiérrez Marín la seva ajuda i l'atenció que m'ha brindat en la elaboració d'aquesta memòria. També agraeixo el suport de la meua família i amics en la realització del treball i en general en els estudis del grau; en especial a la meua mare per la seva paciència i dedicació i al meu pare que em va motivar a seguir el camí de la ciència.

Índex

1	Introducció	1
1.1	Motivació	1
1.2	Estructura de la Memòria	3
1.3	Notacions i convencions	4
2	Homologia, cohomologia i la forma d'intersecció	5
2.1	Definicions dels grups d'homologia i de cohomologia	5
2.2	Construccions	6
2.3	La forma d'intersecció	12
3	Instantons i l'equació de Yang-Mills	15
3.1	Fibrats, connexions i curvatura	15
3.2	L'acció de Yang-Mills	20
3.3	Instantons en \mathbb{R}^4	22
4	Teorema de Donaldson	25
4.1	Diagonalització de la forma d'intersecció	25
4.2	Invariants de Donaldson	27
4.3	Teoria de Seiberg-Witten	29
5	Aplicacions de la teoria de Donaldson	32
5.1	La forma d'intersecció E_8	32
5.2	Un \mathbb{R}^4 exòtic	34
5.3	Teoremes d'anul·lació	36
6	Conclusions	39
	Referències	40

1 Introducció

1.1 Motivació

L'estudi de les varietats topològiques de dimensió quatre han suposat la descoberta d'importants teoremes sobre l'admissió d'estructures diferenciables. Localment aquestes varietats són equivalents a \mathbb{R}^n i sobre elles es poden definir coordenades locals que anomenem *cartes*. L'equivalència fonamental entre aquestes varietats són els homeomorfismes. Recobrint la varietat amb cartes obtenim un *atles*, i demanant que el canvi de cartes sigui diferenciable obtenim una *estructura diferenciable*. Una varietat topològica amb una estructura diferenciable s'anomena varietat diferenciable. L'equivalència associada a les varietats diferenciables són els difeomorfismes. Una de les preguntes més bàsiques que sorgeixen en introduir aquests conceptes és la següent: quantes estructures diferenciables diferents (no difeomorfes) es poden trobar en una varietat topològica?

Les varietats topològiques de dimensió 3 o inferior admeten sempre una única estructura diferenciable així que la pregunta la traslladem a dimensions més altes. Durant els anys setanta del segle passat es van trobar invariants per a classificar varietats diferenciables de dimensió 5 o superior. En particular les varietats compactes de dimensió més gran o igual a 5 admeten un nombre finit d'estructures diferenciables. Tot i els avenços en dimensió superior, el cas de les varietats topològiques de dimensió 4 va romandre estancat durant anys. Després d'alguns resultats que van permetre començar a avançar en aquest camp, el punt clau es va produir a l'any 1986 amb el *teorema de Donaldson*, principal objecte d'aquest treball. A vista d'ocell aquest resultat afirma que certa forma bilineal anomenada forma d'intersecció (un invariant associat a les varietats topològiques compactes i orientables de dimensió 4) diagonalitza sobre \mathbb{Z} per a varietats diferenciables. Gràcies a aquests resultats es van poder trobar molts exemples de varietats topològiques de dimensió 4 que no admeten cap estructura diferenciable. A més s'obria la porta a la construcció dels anomenats \mathbb{R}^4 *exòtics*, varietats topològiques homeomorfes però no difeomorfes a \mathbb{R}^4 .

Tot i que \mathbb{R}^4 és una de les varietats topològiques més simples realment suposa un exemple sorprenent com a varietat diferenciable. De fet, \mathbb{R}^n admet una única estructura diferenciable per a $n \neq 4$ però \mathbb{R}^4 en té un nombre infinit no numerable. Una altre varietat que pot servir d'exemple és S^n . En la següent taula obtinguda de [Per06, Ch.3] es poden veure el nombre d'estructures diferenciables $s(n)$ que admet. Per a $n = 4$ es coneix que hi ha com a mínim una estructura diferenciable, però es desconeix el nombre exacte i si aquest és finit o infinit.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$s(n)$	1	1	1	?	1	1	28	2	8	6	992	1

Taula 1: Nombre d'estructures diferenciables de S^n .

Les tècniques utilitzades per a demostrar el teorema de Donaldson s'extremen de les anomenades *teories gauge*. Aquestes teories provenen de la física, on s'utilitzen per a descriure el model estàndard de la física de partícules i altres teories quàntiques de camps. Tot i que d'origen llunyà, aquestes eines poden ser interpretades a través de la geometria diferencial mitjançant fibrats i connexions per a treure conclusions sobre la topologia de les varietats

de dimensió 4. De forma més concreta, una teoria gauge ve donada per un G -fibrat sobre una varietat diferenciable, on G és un grup de Lie, i una connexió A definida en aquest fibrat. Per als nostres objectius utilitzarem com a grups d'estructura $U(n)$ o $SU(n)$. En aquests casos parlem de *teoria de Yang-Mills*. D'especial importància seran certes connexions anomenades instantons, que sorgiran com les solucions de certes equacions relatives a la curvatura de la connexió A o, de forma equivalent, com certs punts crítics del funcional d'acció de la teoria de Yang-Mills. L'espai dels instantons té unes propietats topològiques que ens permetran treure conclusions sobre la forma d'intersecció i les condicions per a que aquesta diagonalitzi sobre \mathbb{Z} .

Amb aquestes idees Donaldson va ser capaç de trobar nous invariants per a classificar varietats topològiques compactes de dimensió 4 que van portar a la descoberta dels teoremes d'anul·lació, entre d'altres. Tot i l'èxit d'aquests invariants, van resultar difícils de calcular a la pràctica, i a l'any 1994 es va trobar una alternativa provinent, altre cop, de la física. L'anomenada *teoria de Seiberg-Witten* ofería uns altres invariants més fàcils de determinar i totalment equivalents als que va descobrir Donaldson. L'idea era molt semblant a la de la teoria de Donaldson: s'utilitzava una teoria de Yang-Mills supersimètrica i s'estudiava l'espai de solucions de certes equacions per a treure conclusions sobre la topologia de les varietats de dimensió 4. Es va veure que aquestes equacions incloïen, de certa manera, els instantons de la teoria de Yang-Mills. Encara que aquesta teoria és un avenç molt important dins aquesta àrea, la demostració original de Donaldson sobre la diagonalització de la forma d'intersecció segueix sent interessant per a entendre bé la connexió entre els instantons i la topologia de les varietats de dimensió 4.

1.2 Estructura de la Memòria

L'objectiu principal és poder donar la demostració del teorema de Donaldson i veure algunes aplicacions representatives. D'aquesta manera la memòria està organitzada en quatre parts. En les dues primeres es desenvoluparan les eines estrictament necessàries per al teorema i en les dues últimes es donaran els principals resultats del treball.

En el primer capítol presentarem alguns preliminars de topologia algebraica. Recordarem la definició dels grups d'homologia i de cohomologia singulars d'un espai topològic i resumirem les eines que utilitzarem posant l'èmfasi en la cohomologia. En aquest sentit repassarem en format breu, sense prova, algunes construccions com la successió de Mayer-Vietoris, la cohomologia relativa, els morfismes induïts... Acabarem el capítol introduïnt la forma d'intersecció, un invariant que té paper protagonista tant en l'enunciat com en la demostració del teorema de Donaldson, així com en algunes propietats entre aquest invariant i els cobordismes.

Seguirem desenvolupant les eines més fonamentals del treball al segon capítol amb la teoria de Yang-Mills. En el primer apartat recordarem els conceptes de fibrat, connexió i curvatura per tal de definir el concepte d'instantó. Després estudiarem les equacions de Yang-Mills i veurem que els instantons són punts crítics de l'anomenada acció de Yang-Mills, el funcional d'acció d'on provenen les equacions amb el mateix nom. Com a conclusió del capítol donarem l'exemple dels instantons en \mathbb{R}^4 utilitzant el llenguatge que ens proporcionaran els quaternions, dels qual farem una petita introducció. Com a conseqüència obtindrem que l'espai dels instantons és no buit.

El resultat principal de la memòria vindrà enunciat i demostrat en el tercer capítol. Començarem amb la part més tècnica de la prova del teorema de Donaldson, la qual estarà resumida per tal de centrar-nos en les idees fonamentals del teorema. Aquestes seran presentades en el mateix apartat. Després construirem els invariants de Donaldson i presentarem de forma breu la teoria de Seiberg-Witten per a que el lector pugui veure cap a on s'ha dirigit amb el temps l'àrea de les varietats topològiques de dimensió 4.

Finalment, en el quart capítol veurem algunes aplicacions del teorema de Donaldson. Escollirem tres aplicacions representatives. En la primera provarem l'existència de varietats topològiques que no admeten cap estructura diferenciable mitjançant la forma d'intersecció E_8 . Veurem amb detall que la varietat $M_{E_8} \# M_{E_8}$ n'és un exemple i donarem sense prova els enunciats dels teoremes de Freedman i de Rokhlin per a comprendre el context històric en el que apareix el teorema de Donaldson. En el següent apartat parlarem dels \mathbb{R}^4 exòtics i en donarem una construcció per després veure una forma d'obtenir-ne més a partir d'una operació anomenada *suma final*. La tercera aplicació seran els teoremes d'anul·lació, on veurem algunes condicions sota les quals els invariants de Donaldson s'anul·len.

1.3 Notacions i convencions

Al llarg d'aquest document utilitzarem algunes notacions que poden portar a confusió o que potser són poc habituals en altres àrees. Per aquest motiu presentem algunes convencions que seguirem.

- A la part de topologia algebraica utilitzarem X per a escriure un espai topològic qualsevol. Denotarem per $f_{\#}$, $f^{\#}$ els morfismes a nivell de cadenes i cocadenes, respectivament, i per f_* , f^* els morfismes a nivell d'homologia i de cohomologia, respectivament.
- Quan parlem de fibrats, connexions i curvatura utilitzarem ∇ per una connexió i Ω per la seva curvatura però quan siguem dins el context de la teoria de Yang-Mills utilitzarem A i F_A , respectivament. En algun moment puntual també s'utilitzarà una notació creuada: ∇ per la connexió i F_{∇} per la seva curvatura. Quedarà clar per context quin parell de notacions estem utilitzant en tot moment. De manera semblant farem servir d_{∇} i d_A per les derivades covariants exteriors.
- Els parèntesis $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tindran diverses interpretacions: en la majoria del treball seran el morfisme d'evaluació però en el tercer capítol apareixeran els parèntesis que denotaran el producte escalar en un espai addient i en la part final del cinquè capítol denotarà certes formes bilineals especificades en el text.

Finalment presentem una petita llista de símbols que es poden prestar a confusió per a facilitar la lectura del treball. A la dreta consta la primera pàgina després d'aquesta en la qual apareix el símbol en qüestió.

Símbol	Significat	Pàgina
\smile	Producte cup	10
\frown	Producte cap	10
$[v_0, \dots, v_n]$	Símplex amb vèrtexs ordenats: $v_0 < \dots < v_n$	10
σ	Símplex singular	5
$\sigma(M)$	Signatura de la varietat topològica M	12
$(a : b : \dots)$	Coordenades homogènies de $\mathbb{C}P^n$	7
$\overline{\mathbb{C}P^n}$	$\mathbb{C}P^n$ amb l'orientació oposada	12
$\mathcal{A}_{E,g}$	Espai de les connexions ASD	20
$\mathcal{M}_{E,g}$	Espai de moduli de connexions ASD	20
$\overline{\mathcal{M}}_{E,g}$	Compactificació de \mathcal{M}	26
$\hat{\mathcal{M}}_{E,g}$	Espai de moduli de connexions ASD irreductibles	27
\mathcal{M}	Espai de moduli dels monopols	30
\mathcal{M}^0	Espai de moduli dels monopols amb punt base	30
$M \# N$	Suma connexa de varietats topològiques	33
$M \natural N$	Suma final de varietats topològiques	36

2 Homologia, cohomologia i la forma d'intersecció

2.1 Definicions dels grups d'homologia i de cohomologia

Començarem donant els preliminars necessaris de topologia algebraica que aplicarem més endavant. Primer parlarem dels complexos de cadenes de forma algebraica i donarem la definició de l'homologia d'un complex de cadenes de manera abstracta. Després passarem a la construcció dels grups d'homologia d'un espai topològic i farem la contrapart d'aquestes definicions per la cohomologia.

Definició 2.1. *Sigui R un anell commutatiu unitari. Un complex de cadenes de R -mòduls és un parell (M_*, ∂_*) on M_n és una successió de R -mòduls amb $n \geq 0$ i $\partial_n : M_n \rightarrow M_{n-1}$ són morfismes de R -mòduls tals que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ per a tot $n \geq 1$. L'escriurem de la següent manera:*

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+2}} M_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} M_n \xrightarrow{\partial_n} M_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

Si M_* és un complex de cadenes de R -mòduls definim els n -cicles i les n -voves de M_* com els sub- R -mòduls de M_n donats per $Z_n(M_*) = \ker \partial_n$ i $B_n(M_*) = \text{im } \partial_{n+1}$, respectivament. Observem que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ implica $B_n(M_*) \subseteq Z_n(M_*)$, fet que motiva la següent definició.

Definició 2.2. *Per a tot $n \geq 0$, el R -mòdul d'homologia n -èssim d'un complex de cadenes de R -mòduls (M_*, ∂_*) està definit com:*

$$H_n(M_*) = Z_n(M_*)/B_n(M_*).$$

Passem a definir l'homologia singular d'un espai topològic X . Donat n un enter no negatiu definim un n -símplex com:

$$\Delta^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \leq x_i \leq 1, x_0 + \dots + x_n = 1\}.$$

Anomenarem n -símplex singular a tota aplicació contínua $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$. Aquestes aplicacions generen un grup abelià lliure que denotarem per $S_n(X)$.

Definició 2.3. *L'operador vora és un morfisme de grups $\partial_n : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$ donat per:*

$$\partial_n \sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \circ \delta_i,$$

on $\delta_i : \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$ amb $0 \leq i \leq n$ és l'aplicació contínua definida com:

$$\delta_i(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1}).$$

Fent un petit càlcul es pot comprovar que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ de forma que el parell $(S_*(X), \partial_*)$ és un complex de cadenes de grups abelians.

Definició 2.4. *Sigui X un espai topològic i n un enter no negatiu. Definim el n -èssim grup d'homologia singular $H_n(X)$ de X com el grup d'homologia n -èssim del complex de cadenes $(S_*(X), \partial_*)$, és a dir:*

$$H_n(X) = H_n(S_*(X)).$$

Arribats fins aquest punt anem a contruir els grups de cohomologia d'un espai topològic seguint les passes que hem fet anteriorment amb l'homologia.

Definició 2.5. *Sigui R un anell commutatiu unitari. Un complex de cocadenes de R -mòduls és un parell (M^*, δ^*) on M^n és una successió de R -mòduls amb $n \geq 0$ i $\delta^n : M^n \rightarrow M^{n+1}$ són morfismes de R -mòduls tals que $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$ per a tot $n \geq 1$. L'escriurem de la següent manera:*

$$\dots \xleftarrow{\delta^{n+1}} M^{n+1} \xleftarrow{\delta^n} M^n \xleftarrow{\delta^{n-1}} M^{n-1} \xleftarrow{\delta^{n-2}} \dots$$

De manera anàloga amb el que fèiem en els complexos de cadenes, podem definir els n -cocicles i les n -covores com $Z^n(M^*) = \ker \delta^n$ i $B^n(M^*) = \text{im } \delta^{n-1}$, respectivament. L'igualtat $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$ implica $B^n(M^*) \subseteq Z^n(M^*)$ amb la qual cosa podem donar la següent definició.

Definició 2.6. *Per a tot $n \geq 0$, el R -mòdul de cohomologia n -èssim d'un complex de cocadenes de R -mòduls (M^*, δ^*) està definit com:*

$$H^n(M^*) = Z^n(M^*)/B^n(M^*).$$

Anem a definir la cohomologia singular d'un espai topològic X . Si $(S_*(X), \partial_*)$ és un complex de cadenes de grups abelians aleshores podem definir un complex de cocadenes que denotarem per $(S^*(X), \delta^*)$ prenent el dual. És a dir, $S^n(X) = \text{Hom}(S_n(X), R)$ amb l'operador covora $\delta^n : S^n(X) \rightarrow S^{n+1}(X)$ donat per $\delta^n = \text{Hom}(\partial_n, R)$ formen un complex de cocadenes de grups abelians ja que l'igualtat $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ dóna lloc a $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$.

Definició 2.7. *Sigui X un espai topològic i n un enter no negatiu. Definim el n -èssim grup de cohomologia singular $H^n(X)$ de X com el grup de cohomologia n -èssim del complex de cocadenes $(S^*(X), \delta^*)$, és a dir:*

$$H^n(X) = H^n(S^*(X)).$$

2.2 Construccions

Ara introduïrem algunes eines que utilitzarem en properes seccions i capítols. Presentarem la successió de Mayer-Vietoris així com la cohomologia relativa, entre d'altres. Alguns d'aquests resultats no seran demostrats. Les proves es poden trobar en [\[Hat02\]](#).

Teorema 2.8. *Sigui X un espai topològic recobert pels interiors de dos subespais A i B . Aleshores tenim la successió exacta llarga:*

$$\dots \rightarrow H_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial_*} H_n(A \cap B) \xrightarrow{(i_*, j_*)} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{k_* - l_*} H_n(X) \rightarrow \dots$$

on $i : A \cap B \rightarrow A$, $j : A \cap B \rightarrow B$, $k : A \rightarrow X$ i $l : B \rightarrow X$ són inclusions.

Anomenarem *successió de Mayer Vietoris en homologia* a l'anterior successió exacta llarga. El següent resultat és l'anàleg en cohomologia singular.

Teorema 2.9. *Sigui X un espai topològic recobert pels interiors de dos subespais A i B . Aleshores tenim la successió exacta llarga:*

$$\dots \rightarrow H^n(X) \xrightarrow{k^* \oplus l^*} H^n(A) \oplus H^n(B) \xrightarrow{i^* - j^*} H^n(A \cap B) \xrightarrow{\partial^*} H^{n+1}(X) \rightarrow \dots$$

on $i : A \rightarrow A \cap B$, $j : B \rightarrow A \cap B$, $k : X \rightarrow A$ i $l : X \rightarrow B$.

Com abans, direm *successió de Mayer-Vietoris en cohomologia* per referir-nos a la successió exacta llarga del teorema anterior. Tot seguit farem un parell d'exemples d'aplicació centrats en la cohomologia, que tindrà molt més protagonisme que l'homologia alhora de provar el teorema de Donaldson. També seran uns exemples que sortiran en la següent secció. El primer serà de caire més teòric.

Exemple 2.10. Utilitzarem la successió de Mayer-Vietoris per a demostrar que si X i Y són dos espais topològics aleshores $H^n(X \sqcup Y) \cong H^n(X) \oplus H^n(Y)$ per a tot n . Tenim:

$$\dots \longrightarrow H^{n-1}(X \cap Y) \longrightarrow H^n(X \sqcup Y) \longrightarrow H^n(X) \oplus H^n(Y) \longrightarrow H^n(X \cap Y) \longrightarrow \dots$$

En tenir una unió disjunta $X \sqcup Y$ llavors $X \cap Y = \emptyset$. Tenint en compte que $H^n(\emptyset) = 0$ per a tot n :

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow H^n(X \sqcup Y) \longrightarrow H^n(X) \oplus H^n(Y) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

Així doncs obtenim un isomorfisme $H^n(X \sqcup Y) \cong H^n(X) \oplus H^n(Y)$ per a tot n .

Exemple 2.11. Calcularem la cohomologia de $\mathbb{C}P^n$. Primer, observem que $\mathbb{C}P^n = U \cup V$ on U i V són oberts definits com:

$$U = \{(z_0 : \dots : z_n) \in \mathbb{C}P^n \mid z_0 \neq 0\},$$

$$V = \mathbb{C}P^n \setminus \{(1 : 0 : \dots : 0)\}.$$

Recordem que $(z_0 : \dots : z_n)$ denoten les coordenades homogènies d'un punt de $\mathbb{C}P^n$. Com que estem sota les hipòtesis del teorema de Mayer-Vietoris, tenim:

$$\dots \longrightarrow H^p(\mathbb{C}P^n) \longrightarrow H^p(U) \oplus H^p(V) \longrightarrow H^p(U \cap V) \longrightarrow H^{p+1}(\mathbb{C}P^n) \longrightarrow \dots$$

Donat que U és contractible a un punt x , V és homotòpicament equivalent a $\mathbb{C}P^{n-1}$ i $U \cap V$ ho és a S^{2n-1} llavors podem escriure:

$$\dots \longrightarrow H^p(\mathbb{C}P^n) \longrightarrow H^p(\{x\}) \oplus H^p(\mathbb{C}P^{n-1}) \longrightarrow H^p(S^{2n-1}) \longrightarrow H^{p+1}(\mathbb{C}P^n) \longrightarrow \dots$$

Si $1 < p < 2n - 1$ obtenim:

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow H^p(\mathbb{C}P^n) \longrightarrow H^p(\mathbb{C}P^{n-1}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

Per tant tenim un isomorfisme $H^p(\mathbb{C}P^n) \cong H^p(\mathbb{C}P^{n-1})$. Fem el cas $p = 1$ tenint en compte que en ser $\mathbb{C}P^n$ connex aleshores $H^0(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow H^1(\mathbb{C}P^n) \longrightarrow H^1(\mathbb{C}P^{n-1}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

Per exactitud, $H^1(\mathbb{C}P^n) \cong H^1(\mathbb{C}P^{n-1})$ i iterant, $H^1(\mathbb{C}P^n) \cong H^1(\mathbb{C}P^0) = 0$. Finalment per a $p = 2n - 1$:

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow H^{2n-1}(\mathbb{C}P^n) \longrightarrow H^{2n-1}(\mathbb{C}P^{n-1}) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow H^{2n}(\mathbb{C}P^n) \longrightarrow H^{2n}(\mathbb{C}P^{n-1}) \longrightarrow \dots$$

Com que la dimensió de $\mathbb{C}P^{n-1}$ és $2(n-1) = 2n-2$ aleshores $H^{2n-1}(\mathbb{C}P^n) = H^{2n}(\mathbb{C}P^{n-1}) = 0$. Com a conseqüència $H^{2n-1}(\mathbb{C}P^n) = 0$ i obtenim l'isomorfisme $H^{2n}(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{Z}$. Com a conclusió, la cohomologia de $\mathbb{C}P^n$ és:

$$H^p(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p \text{ parell } 0 \leq p \leq n, \\ 0 & \text{en altre cas.} \end{cases}$$

A partir d'aquí comentarem algunes eines més en format breu.

Cohomologia relativa. Si A és un subespai d'un espai topològic X definim $S_n(X, A) := S_n(X)/S_n(A)$. Tenim la successió exacta curta:

$$0 \longrightarrow S_n(A) \longrightarrow S_n(X) \longrightarrow S_n(X, A) \longrightarrow 0.$$

Aplicant $\text{Hom}(\cdot, G)$ i definint $S^n(X, A; G) = \text{Hom}(S_n(X, A), G)$ obtenim la successió exacta curta:

$$0 \longleftarrow S^n(A; G) \longleftarrow S^n(X; G) \longleftarrow S^n(X, A; G) \longleftarrow 0.$$

Ara, tenim l'operador covora $\delta^{n+1} : S^n(X, A; G) \rightarrow S^{n+1}(X, A; G)$ de forma que podem definir la *cohomologia relativa* de la manera ja habitual: $H^n(X, A; G) = \ker \delta^n / \text{im } \delta^{n-1}$. Donada la successió exacta curta anterior podem escriure una successió exacta llarga en cohomologia:

$$\dots \longrightarrow H^n(X, A; G) \longrightarrow H^n(X; G) \longrightarrow H^n(A; G) \longrightarrow H^{n+1}(X, A; G) \longrightarrow \dots$$

Morfismes induïts. Considerem X, Y espais topològics i $f : X \rightarrow Y$ una aplicació contínua. f s'estén a un morfisme de grups $f_{\#} : S_n(X) \rightarrow S_n(Y)$ donat per:

$$f_{\#} \left(\sum_i s_i \sigma_i \right) = \sum_i s_i f_{\#}(\sigma_i),$$

on $\sigma_i : \Delta^n \rightarrow X$ és un n -símplex singular. A més tenim que $f_{\#}$ commuta amb l'operador vora:

$$\partial f_{\#} = f_{\#} \partial.$$

L'anterior igualtat implica que l'homologia es pot veure com un functor covariant de la categoria dels espais topològics en la categoria dels grups abelians. $f_{\#}$ envia cicles a cicles i vores a vores amb la qual cosa indueix un morfisme de grups $f_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$. Quan dualitzem aquest procediment obtenim una aplicació a nivell de cocadenes $f^{\#} : S^n(Y) \rightarrow S^n(X)$ de forma que l'anterior aplicació commuta també amb l'operador covora:

$$\delta f^{\#} = f^{\#} \delta.$$

Així doncs $f^{\#}$ indueix un morfisme de grups $f^* : H^*(Y) \rightarrow H^*(X)$. D'aquesta manera la cohomologia es pot veure com un functor contravariant en la categoria dels espais topològics en la categoria dels grups abelians.

Invariància homotòpica. Utilitzant el punt anterior tenim que si X i Y són dos espais topològics i $f, g : X \rightarrow Y$ dues aplicacions homotòpiques entre elles aleshores indueixen morfismes $f_*, g_* : H^*(X) \rightarrow H^*(Y)$ i $f^*, g^* : H^*(Y) \rightarrow H^*(X)$ de manera que $f_* = g_*$ i $f^* = g^*$. És a dir, l'homologia i la cohomologia són invariants per homotopies.

Teoremes dels coeficients universals. Fins ara hem considerat que els elements dels grups de cadenes i cocadenes siguin \mathbb{Z} -combinacions lineals dels elements de la base, però no hi ha cap motiu per limitar-nos a considerar coeficients enters. En general, podem fer la construcció dels grups d'homologia i de cohomologia utilitzant coeficients en un grup abelià G . Els denotarem per $H_n(X; G)$ i $H^n(X; G)$. Si no especifiquem el grup de coeficients i escrivim $H_n(X)$ i $H^n(X)$ llavors ens estarem referint als coeficients enters com fins

ara. La relació que hi ha entre els grups d'homologia i de cohomologia amb coeficients enters i amb coeficients en un grup abelià general l'estableix el teorema del coeficient universal. En tenim dues versions, una en homologia i una altre en cohomologia:

- Si M és un complex de cadenes de grups abelians lliures aleshores tenim la successió exacta curta:

$$0 \longrightarrow H_n(M) \otimes G \longrightarrow H_n(M; G) \longrightarrow \text{Tor}(H_{n-1}(M), G) \longrightarrow 0.$$

- Si un complex de cadenes M té grups d'homologia $H_n(M)$, aleshores els grups de cohomologia $H^n(M; G)$ amb coeficients en G del complex de cocadenes $\text{Hom}(M_n, G)$ venen determinats per la successió exacta curta:

$$0 \longrightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(M), G) \longrightarrow H^n(M; G) \longrightarrow \text{Hom}(H_n(M), G) \longrightarrow 0.$$

En l'enunciat dels dos teoremes en trobem els functors Tor i Ext. Anem a donar la seva definició. Denotarem per R un anell i A, B són R -mòduls.

Considerem la resolució projectiva:

$$\cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

Podem formar un nou complex de cadenes si traiem A i fem producte tensorial per la dreta amb B :

$$\cdots \longrightarrow P_2 \otimes_R B \longrightarrow P_1 \otimes_R B \longrightarrow P_0 \otimes_R B \longrightarrow 0.$$

Definim el functor $\text{Tor}_i^R(A, B)$ com l'homologia de l'anterior complex de cadenes en la posició i , per a cada i .

De manera semblant, considerem la resolució injectiva:

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow I^2 \longrightarrow \cdots$$

Si traiem B i apliquem el functor Hom obtenim:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(A, I^0) \longrightarrow \text{Hom}_R(A, I^1) \longrightarrow \text{Hom}_R(A, I^2) \longrightarrow \cdots$$

Definim el functor $\text{Ext}_R^i(A, B)$ com la cohomologia de l'anterior complex de cocadenes en la posició i , per a cada i .

Cohomologia de de Rham. Sigui M una varietat diferenciable. Denotem per $\Omega^k(M)$ l'espai de les k -formes diferencials en M . Considerem el complex de cocadenes:

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \xrightarrow{d} \cdots$$

Aquest complex està ben definit ja que tenim definida una aplicació anomenada derivada exterior $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ que compleix $d^2 = 0$. Direm que una k -forma diferencial α és *tancada* si $d\alpha = 0$ i *exacta* si existeix una $(k-1)$ -forma diferencial β tal que $d\beta = \alpha$. Observem que totes les formes exactes són tancades en virtut de la propietat $d^2 = 0$. Tot i així no totes les formes tancades són exactes. Definim el *k-èssim grup de cohomologia de de Rham* com la cohomologia del complex de cocadenes anterior, és a dir, $H_{dR}^k(M) = Z^k(M)/B^k(M)$, on $Z^k(M) = \ker(d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M))$ és l'espai de les

k -formes diferencials tancades i $B^k(M) = d\Omega^{k-1}(M)$ és l'espai de les k -formes diferencials exactes.

Els grups de cohomologia $H_{dR}^k(M)$ són isomorfs a $H^k(M; \mathbb{R})$ per a tot k . Aquest resultat és conegut com a *teorema de de Rham*. Si $\omega \in H_{dR}^k(M)$ i $c \in H_k(M)$ aleshores l'isomorfisme ve donat pel morfisme d'integració:

$$[\omega] \mapsto \int_c \omega.$$

La definició d'aquests grups de cohomologia també funciona en el cas que tinguem formes diferencials complexes. Aquesta segona versió dels grups de cohomologia de de Rham la distingirem del cas real mitjançant la notació $H_{dR}^k(M; \mathbb{C})$.

Producte cup. Utilitzarem cohomologia en un anell de coeficients R . Siguin $a \in S^p(X; R)$ i $b \in S^q(X; R)$, definim el *producte cup* com:

$$(a \smile b)(\sigma) = a(\sigma|_{[v_0, \dots, v_p]}) b(\sigma|_{[v_p, \dots, v_{p+q}]}) ,$$

on $\sigma : \Delta^{p+q} \rightarrow X$ és un símplex singular. Tot seguit veurem que aquesta aplicació indueix un producte cup en cohomologia $\smile : H^p(X; R) \times H^q(X; R) \rightarrow H^{p+q}(X; R)$. Per fer-ho observem que si $\sigma : \Delta^{p+q+1} \rightarrow X$ es un altre símplex singular aleshores:

$$\begin{aligned} (\delta a \smile b)(\sigma) &= \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i a(\sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{p+1}]}) b(\sigma|_{[v_{p+1}, \dots, v_{p+q+1}]}) , \\ (-1)^p (a \smile \delta b)(\sigma) &= \sum_{i=p}^{p+q+1} (-1)^i a(\sigma|_{[v_0, \dots, v_p]}) b(\sigma|_{[v_p, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{p+q+1}]}) . \end{aligned}$$

Sumant obtenim $\delta(a \smile b) = \delta a \smile b + (-1)^p (a \smile \delta b)$. Gràcies a aquesta igualtat podem concloure:

1. El producte cup de dos cocicles és un cocicle. En efecte, si a i b són cocicles aleshores $\delta a = 0$ i $\delta b = 0$ amb la qual cosa $\delta(a \smile b) = \delta a \smile b + (-1)^p (a \smile \delta b) = 0 \smile b + (-1)^p (a \smile 0) = 0$, és a dir, $a \smile b$ és un cocicle.
2. El producte cup d'un cocicle amb una covora o a l'inrevés és una covora ja que si a és un cocicle i b una covora com que $\delta a = 0$ llavors $\delta(a \smile b) = \delta a \smile b + (-1)^k (a \smile \delta b) = (-1)^p (a \smile \delta b)$, cosa que implica $a \smile \delta b = (-1)^{-p} \delta(a \smile b)$.

En definitiva, s'indueix un producte cup en cohomologia $\smile : H^p(X; R) \times H^q(X; R) \rightarrow H^{p+q}(X; R)$ que és associatiu i distributiu, propietats que hereda del producte cup a nivell de cocadenes.

Dualitat de Poincaré. Anem a veure la relació que hi ha entre l'homologia i la cohomologia en el cas de tenir una varietat topològica compacta i orientable. L'idea és construir una aplicació $H^k(M; R) \rightarrow H_{n-k}(M; R)$ que esdevindrà un isomorfisme. Per a fer-ho utilitzarem l'anomenat *producte cap*.

Si tenim un espai topològic X , definim el producte cap com una aplicació $\frown : S_k(X; R) \times S^l(X; R) \rightarrow S_{k-l}(X; R)$ donada per $\sigma \frown \varphi = \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_l]}) \sigma|_{[v_l, \dots, v_k]}$ amb $l \leq k$, $\sigma : \Delta^k \rightarrow X$ i $\varphi \in S^l(X; R)$. Per veure que aquesta aplicació indueix un producte cap en

homologia i cohomologia utilitzarem la fórmula $\partial(\sigma \frown \varphi) = (-1)^l(\partial\sigma \frown \varphi - \sigma \frown \delta\varphi)$. Es demostra per un càlcul directe que es pot veure a [Hat02, p.240]. D'aquesta fórmula es dedueix que el producte cap d'un cicle i d'un cocicle és un cicle i si $\partial\sigma = 0$ aleshores $\partial(\sigma \frown \varphi) = \pm(\sigma \frown \delta\varphi)$ amb la qual cosa el producte d'un cicle amb una covora és una vora. Finalment si $\delta\varphi = 0$ llavors $\partial(\sigma \frown \varphi) = \pm(\partial\sigma \frown \varphi)$, per tant el producte cap d'una vora i un cocicle és una vora. En definitiva, el producte cap indueix una aplicació $\frown: H_k(X; R) \times H^l(X; R) \rightarrow H_{k-l}(X; R)$ que és R -lineal en cada variable i que seguirem anomenant producte cap.

Abans d'enunciar el teorema de dualitat de Poincaré, necessitem un parell de conceptes més. Primer, una R -orientació d'una varietat topològica M és una assignació d'un generador de $H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$ per cada $x \in M$. D'altre banda, la classe fonamental de M és un element $[M] \in H_n(M; R)$ tal que la seva imatge en $H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$ és un generador per cada $x \in M$. La seva existència està demostrada al teorema 3.26 de [Hat02].

Teorema 2.12. *Sigui M una varietat topològica i R -orientable amb classe fonamental $[M] \in H_n(M; R)$. Aleshores l'aplicació $D: H^k(M; R) \rightarrow H_{n-k}(M; R)$ definida per $D(\alpha) = [M] \frown \alpha$ és un isomorfisme per a tot k .*

2.3 La forma d'intersecció

Un dels ingredients fonamentals a la prova del teorema de Donaldson és la forma d'intersecció. Aquest és un invariant que es fa servir per a classificar certs tipus de varietats topològiques. En aquesta secció la definirem i veurem les seves principals propietats, en especial la que es relaciona amb els cobordismes.

L'aplicació $\langle \cdot, \cdot \rangle : S^n(X) \times S_n(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ donada per $\langle \varphi, \psi \rangle = \varphi(\psi)$ induïx una aplicació $\langle \cdot, \cdot \rangle : H^n(X; \mathbb{R}) \times H_n(X; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ que anomenarem *morfisme d'evaluació*.

Definició 2.13. *Sigui M una varietat topològica compacta i orientable de dimensió 4. La forma d'intersecció és la forma bilineal simètrica $Q_M : H^2(M; \mathbb{Z}) \times H^2(M; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ donada per $Q_M(a, b) = \langle a \smile b, [M] \rangle$.*

També utilitzarem la notació $Q_M(a, b) = (a \smile b)[M]$. Si a més suposem que M és simplement connexa aleshores la seva topologia es simplifica molt. En aquest cas tenim $H_0(M) \cong \mathbb{Z}$ i $H_1(M) \cong \pi_1(M)/[\pi_1(M), \pi_1(M)] \cong 0$. A més obtenim que $H_2(M)$ és lliure de torsió. Així doncs $H^2(M) \cong \text{Hom}(H_2(M), \mathbb{Z}) \cong H_2(M)$. Finalment aplicant la dualitat de Poincaré, $H_4(M) \cong \mathbb{Z}$ i $H_3(M) \cong 0$.

El nom que rep la forma d'intersecció ve justificat per la següent interpretació geomètrica. Si afegim l'hipòtesi de ser varietat diferenciable a M llavors podem representar cada classe $s \in H_2(M)$ com una superfície Σ compacta i orientable. En concret, existeix un embedding (diferenciable) $\iota : \Sigma \hookrightarrow M$ tal que $\iota_*([\Sigma]) = s$, on Σ és la classe fonamental de Σ . Ara, si $s_1, s_2 \in H_2(M)$ estan representades per superfícies Σ_1 i Σ_2 respectivament, aleshores les dues superfícies s'intersequen de forma transversal i el producte cup de les classes duals és:

$$[\Sigma_1] \cdot [\Sigma_2] = \sum_{p \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2} \varepsilon(p),$$

on $\varepsilon(p) = +1$ si les orientacions de $T_p \Sigma_1$ i $T_p \Sigma_2$ donen l'orientació de $T_p M$ i $\varepsilon(p) = -1$ en cas contrari.

Anem a parlar de l'invariant més important associat a la forma d'intersecció: la seva signatura. En ser Q_M una forma bilineal simètrica aleshores diagonalitza sobre \mathbb{R} , fet que ens porta a donar la següent definició.

Definició 2.14. *Sigui b^+ (resp. b^-) la dimensió d'un subespai maximal on Q_M és definida positiva (resp. definida negativa). Definim la signatura σ de M com la signatura de Q_M , és a dir, $\sigma(M) = b^+ - b^-$.*

Ara veurem alguns exemples de formes d'intersecció i de signatures. Podríem començar prenent $M = S^4$ per ser és el cas més simple però com que $H_2(S^4) \cong H^2(S^4) \cong 0$ llavors la forma d'intersecció no té interès. És per això que donarem exemples una mica més complexos.

Exemple 2.15. Calculem la forma d'intersecció de $\mathbb{C}P^2$. Utilitzant l'exemple que hem tractat a l'anterior secció tenim $H^2(\mathbb{C}P^2) = \mathbb{Z}\{l\}$ on l és una classe tal que $l \cdot l = 1$ i el seu dual de Poincaré és la classe fonamental d'una recta projectiva $[L] = [\mathbb{C}P^1]$. Donada una segona recta projectiva L' diferent de L llavors la seva intersecció $L \cap L'$ es un punt. Això implica $Q_{\mathbb{C}P^2} = (+1)$. Observem que la seva signatura és $\sigma(\mathbb{C}P^2) = +1$. Si denotem

per $\overline{\mathbb{C}P^2}$ el pla projectiu complex amb l'orientació oposada aleshores seguint el mateix argument tenim $Q_{\overline{\mathbb{C}P^2}} = (-1)$ i la seva signatura és $\sigma(\overline{\mathbb{C}P^2}) = -1$.

Exemple 2.16. Considerem ara $M = S^2 \times S^2$. Tenim $H_2(S^2 \times S^2) = \mathbb{Z}^2$, i està generat per $a = [S^2 \times \{x\}]$ i $b = [\{x\} \times S^2]$, on x és un punt. Calculant obtenim que la forma d'intersecció en la base $\{a, b\}$ és:

$$Q_{S^2 \times S^2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si diagonalitzem obtenim els valors propis $+1$ i -1 . Per tant $\sigma(S^2 \times S^2) = 0$.

Exemple 2.17. Com a últim exemple donarem la superfície $K3$ ². La definim com el conjunt $K3 = \{(z_1 : z_2 : z_3 : z_4) \in \mathbb{C}P^3 \mid z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 + z_4^4 = 0\}$. Aquesta és una superfície complexa (per tant té dimensió real 4) i la seva forma d'intersecció és:

$$Q_{K3} = \oplus 2(-E_8) \oplus 3H,$$

on la matriu H és l'anomenada *forma hiperbòlica*:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tot seguit parlarem d'algunes característiques de la forma d'intersecció que aniran sortint durant les següents seccions.

Definició 2.18. *Sigui Q_M una forma d'intersecció.*

- Anomenarem *rang* de Q_M a la dimensió de $H^2(M)$.
- Direm que Q_M és *parella* si $Q_M(a, a)$ és parell per a tot a i direm que Q_M és *senar* en cas contrari.
- Q_M serà *definida positiva* si $Q_M(a, a) > 0$ per a tot $a \neq 0$, *definida negativa* si $Q_M(a, a) < 0$ per a tot $a \neq 0$ i *indefinida* si $Q_M(a, a) > 0$ per alguns a i $Q_M(b, b) < 0$ per alguns b .
- Direm que Q_M és *unimodular* si és invertible sobre els enters.

Un dels fets que utilitzarem a la prova del teorema principal del treball és que la signatura és invariant per cobordismes.

Definició 2.19. *Siguin M i N varietats diferenciables compactes i orientables de dimensió d . Un cobordisme orientat entre M i N és una varietat diferenciable W compacta i orientable de dimensió $d + 1$ amb vora tal que $\partial W = M \sqcup \overline{N}$. En aquest cas diem que M i N són cobordants.*

Per a provar el resultat abans esmentat necessitarem un lema previ: la signatura d'una varietat és additiva.

Lema 2.20. *Siguin M i N dues varietats topològiques compactes i orientables de dimensió 4. Aleshores $\sigma(M \sqcup N) = \sigma(M) + \sigma(N)$.*

²En honor als matemàtics Kummer, Kodaira i Kähler.

Demostració. Hem de provar $\sigma(M \sqcup N) = \sigma(M) + \sigma(N)$, que és equivalent a veure $Q_{M \sqcup N} = Q_M + Q_N$. Per definició de forma d'intersecció $Q_{M \sqcup N} = (a \smile b)[M \sqcup N]$, $\sigma(M) = (a_M \smile b_M)[M]$ i $\sigma(N) = (a_N \smile b_N)[N]$ amb $[M \sqcup N] \in H^4(M \sqcup N)$, $[M] \in H^4(M)$ i $[N] \in H^4(N)$. Si aconseguim demostrar que $[M \sqcup N] = [M] + [N]$, haurem acabat. Això és equivalent a provar que $H^4(M \sqcup N) \cong H^4(M) \oplus H^4(N)$, però aquest isomorfisme és el cas $n = 4$ del primer exemple que vam veure d'aplicació de la successió de Mayer-Vietoris. Finalment:

$$Q_{M \sqcup N} = (a \smile b)[M \sqcup N] = (a \smile b)([M] + [N]) = (a \smile b)[M] + (a \smile b)[N] = Q_M + Q_N$$

□

Proposició 2.21. *Siguin M i N dues varietats diferenciables compactes i orientables de dimensió 4 cobordants. Aleshores $\sigma(M) = \sigma(N)$.*

Demostració. És suficient veure que $M \sqcup N$ té signatura 0 ja que en aquest cas utilitzant el lema anterior i pel fet que $Q_{\bar{M}} = -Q_M$ implica $\sigma(\bar{M}) = -\sigma(M)$ tenim:

$$0 = \sigma(M \sqcup N) = \sigma(M) + \sigma(\bar{N}) = \sigma(M) - \sigma(N) \Rightarrow \sigma(M) = \sigma(N)$$

Sigui W un cobordime de M a N . W té vora $\partial W = M \sqcup \bar{N}$. Volem demostrar que $\sigma(\partial W) = 0$. Considerem el següent diagrama commutatiu:

$$\begin{array}{ccccc} H^2(W; \mathbb{R}) & \xrightarrow{i^*} & H^2(\partial W; \mathbb{R}) & \xrightarrow{\delta^*} & H^3(W, \partial W; \mathbb{R}) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ H_3(W, \partial W; \mathbb{R}) & \xrightarrow{\delta_*} & H_2(\partial W; \mathbb{R}) & \xrightarrow{i_*} & H_2(W; \mathbb{R}) \end{array}$$

Les seves files són exactes i els morfismes verticals son isomorfismes per la dualitat de Poincaré. Denotem per $i : \partial W \hookrightarrow W$ l'inclusió de la vora de W en W . Anem a demostrar que Q s'anul·la en $i^*H^2(W)$. Tenim:

$$Q(i^*(a), i^*(b)) = i^*(a \smile b)[\partial W] = i^*(a \smile b)(\delta_*[W, \partial W]) = \delta^*i^*(a \smile b)[W, \partial W] = 0$$

En la primera igualtat hem fet servir que $i^*(a) \smile i^*(b) = i^*(a \smile b)$ i en l'última hem utilitzat l'exactitud de les files del diagrama anterior.

Ara, observem que per l'exactitud de la fila superior del diagrama anterior tenim $H^2(\partial W) \cong \text{im } i^* \oplus \text{im } \delta^*$. Com que $\text{im } \delta^* = \text{im } i_*$ i pel fet que i_* és el morfisme dual de i^* llavors $H^2(\partial W) \cong \text{im } i^* \oplus \text{im } i^*$. És a dir, $\dim H^2(\partial W; \mathbb{R}) = 2\dim i^*H^2(W; \mathbb{R})$.

Finalment si diagonalitzem la matriu de Q sobre \mathbb{R} obtenim una descomposició $H^2(\partial W; \mathbb{R}) = H_+^2(\partial W; \mathbb{R}) \oplus H_-^2(\partial W; \mathbb{R})$ on $H_+^2(\partial W; \mathbb{R})$ és un subespai on Q és definida positiva i $H_-^2(\partial W; \mathbb{R})$ un subespai on Q és definida negativa. Tenim $\dim H_+^2(\partial W; \mathbb{R}) = \dim H_-^2(\partial W; \mathbb{R})$ ja que en cas contrari si $\dim H_+^2(\partial W; \mathbb{R}) \geq \frac{1}{2}\dim H^2(\partial W; \mathbb{R}) + 1 = \dim i^*H^2(W; \mathbb{R}) + 1$ aleshores $i^*H^2(W; \mathbb{R})$ i $H_+^2(\partial W; \mathbb{R})$ s'intersecarien en un subespai de dimensió 1 o superior. Com a conseqüència Q no s'anul·la en $i^*H^2(W)$, cosa que és una contradicció amb el que acabem de veure. Per tant $H_+^2(\partial W; \mathbb{R})$ i $H_-^2(\partial W; \mathbb{R})$ tenen la mateixa dimensió, cosa que implica $\sigma(\partial W) = 0$. □

3 Instantons i l'equació de Yang-Mills

En aquesta secció desenvoluparem la segona eina indispensable per a demostrar el teorema de Donaldson: els instantons. Aquests són un tipus de connexions definides sobre fibrats vectorials. Per aquest motiu dedicarem un apartat a recordar els conceptes bàsics relatius als fibrats, les connexions i la seva curvatura. Seguidament definirem els instantons i veurem que són solucions de l'anomenada *equació de Yang-Mills*. Finalment donarem exemples concrets en \mathbb{R}^4 .

3.1 Fibrats, connexions i curvatura

Definició 3.1. *Sigui M una varietat diferenciable. Un fibrat vectorial de rang n és una varietat diferenciable E amb una aplicació diferenciable $\pi : E \rightarrow M$ exhaustiva tal que:*

- Cada conjunt $\pi^{-1}(x)$ és un espai vectorial real de dimensió finita.
- Per a tot punt $x \in M$ existeix un entorn obert $U \subset M$ que conté x , tenim un difeomorfisme $\varphi : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$ tal que $(\pi \circ \varphi)(x, v) = x$ per a tot $v \in \mathbb{R}^n$ i l'aplicació $v \mapsto \varphi(x, v)$ és un isomorfisme entre \mathbb{R}^n i $\pi^{-1}(x)$.

Durant el text direm espai base a M , espai total a E , morfisme de projecció a l'aplicació π i fibra a $\pi^{-1}(x)$. També utilitzarem E_x com a notació alternativa a $\pi^{-1}(x)$. Anomenarem *secció* de E a tota aplicació diferenciable $s : M \rightarrow E$ tal que $\pi \circ s = \text{Id}_M$. Denotarem per $\Gamma(E)$ l'espai vectorial de seccions de E .

Un dels exemples més habituals de fibrat vectorial és el *fibrat tangent* TM sobre una varietat diferenciable M . Com a conjunt es defineix mitjançant l'unió disjunta dels espais tangents T_pM a cada punt $p \in M$:

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM.$$

En aquest exemple la projecció $\pi : TM \rightarrow M$ ve donada per $\pi(x, v) = x$. Les seccions són els camps vectorials tangents sobre M . De manera anàloga podem parlar del *fibrat cotangent*:

$$T^*M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^*M,$$

on T_p^*M és l'espai cotangent, dual a T_pM . Ara, les seccions són 1-formes diferencials. Un tercer exemple és el *fibrat normal* d'una subvarietat diferenciable $M \subset \mathbb{R}^n$, consistent en l'assignació d'un espai normal (el complement ortogonal de T_pM) en cada punt de M .

Donat un fibrat vectorial E , hi ha un recobriment per oberts $\{U_\alpha\}$ de manera que la composició $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n$ ve donada per $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x, v) = (x, g_{\alpha\beta}v)$ on $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}(n)$. Aquestes aplicacions $g_{\alpha\beta}$ determinen el fibrat vectorial E juntament amb una condició addicional anomenada *condició de cocicle*:

$$g_{\alpha\beta}(x)g_{\beta\delta}(x)g_{\delta\alpha}(x) = \text{Id}.$$

Com que les aplicacions $g_{\alpha\beta}$ tenen la seva imatge continguda en $\text{GL}(n)$ llavors diem que E és un $\text{GL}(n)$ -fibrat i que $\text{GL}(n)$ és el grup d'estructura de E . En general, si les imatges

estan contingudes en un subgrup G de $\mathrm{GL}(n)$ aleshores diem que E és un G -fibrat³ i que hem reduït el grup d'estructura de E a G . Per als nostres propòsits ens centrarem en els fibrats vectorials que tenen espais vectorials complexos com a fibres.

Definició 3.2. *Diem fibrat vectorial complex a un fibrat vectorial E amb una aplicació lineal $J : E \rightarrow E$ tal que $J^2 = J \circ J = -\mathrm{Id}$.*

De fet, un fibrat vectorial complex el podem obtenir fent una reducció del grup d'estructura d' E a $\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(n)$.

Definició 3.3. *Una mètrica Hermítica en un fibrat vectorial complex E és una secció $h \in \Gamma(E \otimes E^*)$ tal que:*

- $h_p(\eta, \bar{\zeta}) = \overline{h_p(\zeta, \bar{\eta})}$, per a tot $\eta, \zeta \in E_p$.
- $h_p(\zeta, \bar{\zeta}) > 0$, per a tot $\zeta \in E_p \setminus \{0\}$.

Els fibrats en els que ens centrarem tindran grup d'estructura $\mathrm{U}(n)$ i $\mathrm{SU}(n)$. Recordem que aquests són els grups *unitari* i *unitari especial*, respectivament. Com a conjunts estan definits com $\mathrm{U}(n) = \{U \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(n) \mid U^\dagger U = U U^\dagger = \mathrm{Id}\}$ i $\mathrm{SU}(n) = \{U \in \mathrm{U}(n) \mid \det U = 1\}$, on \dagger denota la conjugada trasposta. Nosaltres a més els veurem amb l'estructura de grups de Lie, és a dir, els veurem com a grups i varietats diferenciables alhora.

Definició 3.4. *Un fibrat $\mathrm{U}(n)$ és un fibrat vectorial complex E amb una mètrica Hermítica h . Un fibrat $\mathrm{SU}(n)$ és un fibrat $\mathrm{U}(n)$ amb una secció o de $\Lambda^n E$ de longitud unitat.*

Ara passarem a definir connexions en fibrats vectorials. Tot i que el més habitual és introduir-les a partir del transport paral·lel, nosaltres no ho necessitarem així que seguirem un camí més abstracte.

Definició 3.5. *Sigui $E \rightarrow M$ un fibrat vectorial. Una connexió o derivada covariant en E és una aplicació $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$, que escriurem com $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$, tal que, per a tot $f, g \in C^\infty(M)$ i $a, b \in \mathbb{R}$:*

- ∇ és $C^\infty(M)$ -lineal en Y :

$$\nabla_{fX_1 + gX_2} Y = f \nabla_{X_1} Y + g \nabla_{X_2} Y.$$

- ∇ és \mathbb{R} -lineal en Y :

$$\nabla_X (aY_1 + bY_2) = a \nabla_X Y_1 + b \nabla_X Y_2.$$

- Es satisfà la següent regla del producte:

$$\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + X(f)Y.$$

Donat que el nostre interès està centrat en els fibrats $\mathrm{U}(n)$ i $\mathrm{SU}(n)$ tot seguit donarem una definició de connexió que preserva l'estructura d'aquests fibrats. Denotarem per $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producte escalar associat a una mètrica hermítica. Posarem E per anomenar els fibrats $\mathrm{U}(n)$ o $\mathrm{SU}(n)$, depenent del context.

³Per motius d'espai utilitzarem el concepte de G -fibrat per a elaborar els objectius principals del treball. Tot i això el lector ha de saber que tots els resultats es poden enunciar i demostrar en termes dels G -fibrats principals, concepte potser més utilitzat en la literatura.

Definició 3.6. Sigui ∇ una connexió definida en un fibrat $U(n)$. Direm que ∇ és una connexió $U(n)$ si es compleix, per a totes les seccions s_1 i s_2 :

$$d\langle s_1, s_2 \rangle = \langle \nabla s_1, s_2 \rangle + \langle s_1, \nabla s_2 \rangle.$$

De la mateixa manera si ∇ és una connexió definida en un fibrat $SU(n)$, direm que ∇ és una connexió $SU(n)$ si és una connexió $U(n)$ tal que $\nabla^{\Lambda^n E} = 0$.

A vegades també parlarem de $U(n)$ -connexió i $SU(n)$ -connexió. Una manera equivalent de donar una connexió és mitjançant una aplicació $d_\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E \otimes T^*M)$ tal que:

$$d_\nabla(fs) = fd_\nabla s + s \otimes df.$$

Sovint l'anomenarem *derivada covariant exterior*. Es compleix $\nabla_X s = (d_\nabla s)X$. També podem donar una connexió de forma local gràcies a la connexió trivial d . Si U és un obert de M llavors $E|_U \cong U \times \mathbb{R}^n$ i podem escriure:

$$\nabla = d + \omega,$$

on ω és una matriu quadrada de 1-formes d'ordre n que determina la connexió ∇ localment. L'anomenem *1-forma de connexió*. Si (e_1, \dots, e_n) és la base estàndard de \mathbb{R}^n aleshores:

$$\nabla s(x) = \sum_i \left(ds_i + \sum_j \omega_{ij} s_j \right) e_i.$$

De la mateixa manera podem donar la descripció local de d_∇ en termes de la 1-forma de connexió ω :

$$d_\nabla = d + \omega.$$

Composant dues vegades la connexió trivial d obtenim $d^2 = d \circ d = 0$ però en general $d_\nabla^2 = d_\nabla \circ d_\nabla \neq 0$. Aquest fet motiva la introducció del següent concepte:

Definició 3.7. La curvatura d'una connexió ∇ és una 2-forma $\Omega \in C^\infty(\Lambda_M^2 \otimes \text{End}(E))$ donada per $\Omega \wedge s(x) = d_\nabla^2 s(x)$.

Diem que una connexió ∇ és plana si $\Omega = 0$. En cas de que l'espai base M sigui simplement connex aleshores ∇ és trivial si i només si el fibrat E és trivial, és a dir, si és de la forma $E \cong M \times \mathbb{R}^n$.

Tot seguit donarem una fórmula per a Ω que utilitzarem en la següent secció.

Proposició 3.8. Es compleix $\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$.

Demostració. Prenent la descripció local de la derivada covariant exterior d_∇ podem escriure, per a tota secció s :

$$\begin{aligned} \Omega \wedge s &= d_\nabla(ds + \omega \wedge s) \\ &= d(ds + \omega \wedge s) + \omega \wedge (ds + \omega \wedge s) \\ &= \underbrace{d^2 s}_0 + d\omega \wedge s - \omega \wedge \overline{ds} + \omega \wedge \overline{ds} + \omega \wedge (\omega \wedge s) \\ &= d\omega \wedge s + \omega \wedge (\omega \wedge s) \\ &= d\omega \wedge s + \frac{1}{2}[\omega, \omega] \wedge s. \end{aligned}$$

Cosa que demostra la proposició. □

Recordem que si A i B són una p -forma diferencial i una q -forma diferencial respectivament aleshores $[A, B] = A \wedge B - (-1)^{pq} B \wedge A$. D'aquesta manera $[\omega, \omega] = 2\omega \wedge \omega$ i podem escriure:

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega.$$

Utilitzarem ambdues expressions segons ens calgui.

Proposició 3.9. *Es compleix l'anomenada identitat de Bianchi $d_{\nabla}\Omega = 0$.*

Demostració. Tenim:

$$\begin{aligned} d_{\nabla}\Omega &= d\Omega + [\omega, \Omega] \\ &= \underbrace{d^2\omega}_0 + \frac{1}{2}d[\omega, \omega] + [\omega, d\omega] + \frac{1}{2}[\omega, [\omega, \omega]] \\ &= \frac{1}{2}d(2\omega \wedge \omega) + [\omega, d\omega] + \frac{1}{2}[\omega, [\omega, \omega]] \\ &= -[\omega, d\omega] + [\omega, d\omega] + \frac{1}{2}[\omega, [\omega, \omega]] \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Definició 3.10. *Si E un fibrat $SU(n)$. Una transformació gauge és un automorfisme de E .*

Les transformacions gauge formen un grup amb la composició. L'anomenarem *grup gauge* i actua sobre les connexions com $\nabla \mapsto g\nabla g^{-1}$, per a tota una transformació gauge g . De forma semblant $\Omega \mapsto g\Omega g^{-1}$.

La curvatura d'un fibrat vectorial dóna lloc a importants invariants que seran realitzats com classes de cohomologia. Direm que una funció polinomial $f : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ és *invariant* si $f(M^{-1}AM) = f(A)$, per a tota $M \in GL(n)$. L'àlgebra dels polinomis invariants està generada per elements $\sigma_i(A)$ amb $i = 1, \dots, n$, que són polinomis invariants dels valors propis d' A , per a tot $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. També es pot veure que aquesta mateixa àlgebra està generada per elements de la forma $\text{Tr}(A^i)$, amb $i = 1, \dots, n$. Aquest fet serà utilitzat a la següent proposició. Ara, l'idea és veure que si f és un polinomi invariant aleshores $f(\Omega)$ defineix una classe de cohomologia en $H_{dR}^{2k}(M)$ i, a més, no depèn de la connexió.

Proposició 3.11. *Si f és un polinomi invariant de grau k aleshores $f(\Omega) \in \Omega^{2k}(M)$ és una forma tancada.*

Demostració. Abans hem probat que $\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$. Aplicant la derivada exterior en ambdós costats obtenim $d\Omega = \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega$. Com que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ llavors $\text{Tr}(\Omega \wedge \omega) = \text{Tr}(\omega \wedge \Omega)$. Per tant $\text{Tr}(d\Omega) = 0$. □

Així doncs aquesta proposició implica que $f(\Omega)$ defineix una classe de cohomologia $[f(\Omega)] \in H_{dR}^{2k}(M)$.

Proposició 3.12. *Si f és un polinomi invariant de grau k llavors $[f(\Omega)] \in H_{dR}^{2k}(M)$ no depèn de la connexió ∇ .*

Demostració. Ho demostrarem mitjançant la invariància homotòpica de la cohomologia. Siguin ∇_0 i ∇_1 dues connexions en E amb formes de curvatura Ω^0 i Ω^1 , respectivament. Prenem $\pi_1 : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ la projecció natural en el primer factor. Considerem els pullbacks $\tilde{\nabla}_0 = \pi_1^* \nabla_0$ i $\tilde{\nabla}_1 = \pi_1^* \nabla_1$ i les seves formes de curvatura $\tilde{\Omega}_0$ i $\tilde{\Omega}_1$ en $\pi_1^* E$, respectivament. Definim una nova connexió en $\pi_1^* E$ com $\tilde{\nabla} = t\tilde{\nabla}_0 + (1-t)\tilde{\nabla}_1$, per a tot $t \in [0, 1]$. Denotarem la seva curvatura per $\tilde{\Omega}$. Si $k = 0, 1$ definim les incusions $i_k : M \hookrightarrow M \times \mathbb{R}$ donades per $i_k(x) = (x, k)$. Tenim $i_k^* \tilde{\Omega} = \Omega_k$ i $i_k^* f(\tilde{\Omega}) = f(\Omega_k)$. Finalment com que i_0 i i_1 són aplicacions homotòpiques aleshores:

$$[f(\Omega_0)] = [i_0^* f(\tilde{\Omega})] = [i_1^* f(\tilde{\Omega})] = [f(\Omega_1)].$$

□

En conclusió, $[f(\Omega)] \in H_{dR}^{2k}(M)$ és un invariant del fibrat vectorial. L'anomenarem *classe característica de E* i la denotarem per $f(E)$. En el cas concret de que f sigui el polinomi

$$\left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^k \sigma_k$$

aleshores parlarem de *classes de Chern*, i les denotarem per $c_k(E)$. Finalment definim la *classe total de Chern* com $c(E) = 1 + c_1(E) + \dots + c_n(E)$. Es pot demostrar:

$$c(E) = \left[\det \left(I - \frac{1}{2\pi i} \Omega \right) \right].$$

Més endavant utilitzarem altres invariants relacionats amb les classes de Chern anomenats *classes de Pontryagin*, definides com $p_k(E) = (-1)^k c_{2k}(E \otimes \mathbb{C}) \in H^{4k}(M)$.

Ara, sigui M una varietat Riemanniana de dimensió n . L'orientació de M ens proporciona una forma de volum que localment ve donada per $\text{vol}_M = e^1 \wedge \dots \wedge e^n$, on (e^1, \dots, e^n) és una base ortonormal de T^*M .

Definició 3.13. *L'operador estrella de Hodge és l'aplicació $\star : \Lambda^k(T^*M) \rightarrow \Lambda^{n-k}(T^*M)$ determinada per la propietat $\alpha \wedge \star \beta = \langle \alpha, \beta \rangle \text{vol}_M$, on α i β són formes diferencials i $\langle \cdot, \cdot \rangle$ és el producte escalar.*

Tot seguit donarem exemples il·lustratius d'aquest operador. En ambdós suposarem que la mètrica és el producte escalar euclidià.

Exemple 3.14. Sigui (e_1, e_2, e_3) la base canònica de \mathbb{R}^3 i $(e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3)$ base de $\Lambda^2 \mathbb{R}^3$. Tenim definit l'operador estrella de Hodge $\star : \Lambda^2 \mathbb{R}^3 \rightarrow \Lambda^1 \mathbb{R}^3$. Utilitzant la seva definició podem escriure:

$$\star(e_1 \wedge e_2) = e_3, \quad \star(e_2 \wedge e_3) = e_1, \quad \star(e_1 \wedge e_3) = -e_2.$$

Per linealitat obtenim que si $u, v \in \mathbb{R}^3$ aleshores $u \times v = \star(u \wedge v)$, on \times denota el producte vectorial.

Exemple 3.15. Treballarem ara en \mathbb{R}^4 . Si (e_1, e_2, e_3, e_4) és la base canònica llavors $(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_2 \wedge e_4, e_1 \wedge e_3 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3 \wedge e_4)$ és base ortonormal de $\Lambda^3 \mathbb{R}^4$ i tindrem definit $\star : \Lambda^3 \mathbb{R}^4 \rightarrow \Lambda^1 \mathbb{R}^4$:

$$\star e_1 = -e_2 \wedge e_3 \wedge e_4, \quad \star e_2 = e_1 \wedge e_3 \wedge e_4, \quad \star e_3 = -e_1 \wedge e_2 \wedge e_4, \quad \star e_4 = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3.$$

D'altra banda una base ortonormal de $\Lambda^2\mathbb{R}^4$ és $(e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_4, e_3 \wedge e_4)$. L'operador estrella de Hodge serà una aplicació $\star : \Lambda^2\mathbb{R}^4 \rightarrow \Lambda^2\mathbb{R}^4$. Tindrem:

$$\begin{aligned}\star(e_1 \wedge e_2) &= e_3 \wedge e_4, & \star(e_1 \wedge e_3) &= -e_2 \wedge e_4, & \star(e_1 \wedge e_4) &= e_2 \wedge e_3, \\ \star(e_2 \wedge e_3) &= e_1 \wedge e_4, & \star(e_2 \wedge e_4) &= -e_1 \wedge e_3, & \star(e_3 \wedge e_4) &= e_1 \wedge e_2.\end{aligned}$$

En el cas particular $n = 4$ i $k = 2$ l'operador estrella de Hodge és un endomorfisme $\star : \Lambda^2(T^*M) \rightarrow \Lambda^2(T^*M)$. Per tant si σ és una permutació del conjunt $\{1, 2, 3, 4\}$ llavors tenim $\star(e_{\sigma(1)} \wedge e_{\sigma(2)}) = \epsilon(\sigma)e_{\sigma(3)} \wedge e_{\sigma(4)}$, on $\epsilon(\sigma)$ és la signatura de σ . Aquest fet implica $\star\star = \text{Id}$. Així doncs \star té valors propis ± 1 i obtenim la descomposició $\Lambda^2(T^*M) = \Lambda_+^2(T^*M) \oplus \Lambda_-^2(T^*M)$. De forma anàloga tenim l'operador estrella de Hodge $\star : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{n-k}(M)$ donat per $(\star\omega)(x) = \star(\omega(x))$ que en el cas $n = 4$ i $k = 2$ ens dóna una descomposició $\Omega^2(M) = \Omega_+^2(M) \oplus \Omega_-^2(M)$, on Ω_{\pm}^2 és l'espai de seccions de $\Lambda_{\pm}^2(M)$. Els elements de $\Omega_+^2(M)$ i $\Omega_-^2(M)$ són anomenats 2-formes auto-duals i 2-formes anti-auto-duals, respectivament. D'aquesta manera si A és la 1-forma de connexió⁴, la seva curvatura descomposa en una part auto-dual i en una part anti-auto dual:

$$F_A = F_A^+ + F_A^-.$$

Definició 3.16. *Sigui M una varietat Riemanniana de dimensió 4 i $E \rightarrow M$ un fibrat $\text{SU}(n)$ o $\text{U}(n)$. Anomenem connexió anti-auto-dual o instantó a tota $\text{SU}(n)$ - o $\text{U}(n)$ -connexió A tal que $F_A^+ = 0$.*

A les connexions anti-auto duals les anomenarem connexions ASD, per les sigles en anglès *Anti-Self Dual connections*. Observem que es satisfà $F_A^{\pm} = (F_A \pm \star F_A)/2$ amb la qual cosa una connexió és ASD si i només si $\star F_A = -F_A$.

En el següent capítol estudiarem la topologia de l'espai de solucions de l'equació $F_A^+ = 0$. Considerarem que dues connexions són equivalents si estan relacionades per una transformació gauge.

Definició 3.17. *Sigui $\mathcal{A}_{E,g}$ el conjunt de totes les connexions ASD i \mathcal{G} el grup de transformacions gauge. Definim l'espai de moduli de les connexions ASD com el quocient $\mathcal{M}_{E,g} = \mathcal{A}_{E,g}/\mathcal{G}$.*

Un fet important que hem volgut reflectir en la notació és que l'espai de moduli de connexions ASD depèn de la mètrica g .

3.2 L'acció de Yang-Mills

Tot seguit ens centrarem en els fibrats $\text{SU}(n)$. Localment tindrem una connexió $d_A = d + A$ on A és una 1-forma amb valors a l'àlgebra de Lie $\mathfrak{su}(n)$, formada per les matrius quadrades U tals que $U^\dagger = -U$ i tenen traça zero. Podem definir un producte escalar mitjançant la traça:

$$\langle A, B \rangle_{\mathfrak{su}(n)} = \text{Tr}(AB^\dagger).$$

⁴Tot i que fins ara utilitzàvem la notació ω per a la 1-forma de connexió i Ω per la curvatura de ∇ en aquest context és més habitual utilitzar A i F_A , respectivament. De fet ens permetrem un abús de llenguatge i direm que A és una connexió. Aquesta notació té el seu origen en Física, on A és conegut com a *potencial gauge* i F_A com a *camp gauge*.

En el cas de formes diferencials:

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{\Omega^*(M)} = \int_M \alpha \wedge \star \beta.$$

Amb aquests ingredients podem definir un funcional d'acció que estarà molt relacionat amb les connexions ASD.

Definició 3.18. *Sigui M una varietat Riemanniana compacta de dimensió 4 i $E \rightarrow M$ un fibrat $SU(n)$. L'acció de Yang-Mills es defineix com:*

$$S_{\text{YM}}(d_A) = \int_M |F_A|^2 \, d\text{vol} := \int_M \text{Tr} \, F_A \wedge \star F_A.$$

Anomenarem *connexió de Yang-Mills* a tota connexió A que sigui punt crític de l'acció de Yang-Mills, és a dir, que anul·li totes les derivades direccionals:

$$\left. \frac{d}{dt} S_{\text{YM}}(A + ta) \right|_{t=0} = 0.$$

Tot seguit demostrarem que aquesta condició és equivalent a una equació en derivades parcials en A . Ho farem seguint el fil de [Fig19, Ch.3]. Treballant localment tenim:

$$\begin{aligned} F_{A+ta} &= d(A + ta) + \frac{1}{2}[A + ta, A + ta] \\ &= dA + tda + \frac{1}{2}[A, A] + \frac{t}{2}([A, a] + [a, A]) + \frac{1}{2}t^2[a, a] \\ &= F_A + t \left(da + \frac{1}{2}([A, a] + [a, A]) \right) + \frac{1}{2}t^2[a, a] \\ &= F_A + t(da + [A, a]) + \frac{1}{2}t^2[a, a] \\ &= F_A + td_A a + \frac{1}{2}t^2[a, a]. \end{aligned}$$

Per tant:

$$\begin{aligned} |F_{A+ta}|^2 &= \left| F_A + td_A a + \frac{1}{2}t^2[a, a] \right|^2 = \left\langle F_A + td_A a + \frac{1}{2}t^2[a, a], F_A + td_A a + \frac{1}{2}t^2[a, a] \right\rangle \\ &= |F_A|^2 + 2t \langle d_A a, F_A \rangle + t^2 (|d_A a|^2 + \langle F_A, [a, a] \rangle) + t^3 \langle d_A a, [a, a] \rangle + \frac{1}{4}t^4 |[a, a]|^2. \end{aligned}$$

Apliquem el principi variacional:

$$0 = \left. \frac{d}{dt} S_{\text{YM}}(A + ta) \right|_{t=0} = \int_M \left. \frac{d}{dt} |F_{A+ta}|^2 \right|_{t=0} d\text{vol} = 2 \int_M \langle d_A a, F_A \rangle d\text{vol} = 2 \int_M \langle a, d_A^* F_A \rangle d\text{vol},$$

on d_A^* és l'adjunt formal de d_A , definit precisament per l'igualtat que acabem d'escriure. D'aquí obtenim l'equació:

$$d_A^* F_A = 0.$$

Finalment provarem que $\star d_A^* F_A = d_A \star F_A$. Com que la forma de volum és una 4-forma diferencial llavors la seva derivada exterior s'anul·la de manera que:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M d_A(a \wedge \star F_A) = \int_M (d_A a \wedge \star F_A - a \wedge d_A \star F_A) = \int_M d_A a \wedge \star F_A - \int_M a \wedge \star (d_A \star F_A) \\ &= \langle d_A a, F_A \rangle - \langle a, \star d_A \star F_A \rangle. \end{aligned}$$

D'aquí traiem que $\langle d_A a, F_A \rangle = \langle a, \star d_A \star F_A \rangle$. Observem que $\langle d_A a, F_A \rangle = \langle a, d_A^* F_A \rangle$ de forma que substituïnt a la fórmula anterior obtenim $\langle a, d_A^* F_A \rangle = \langle a, \star d_A \star F_A \rangle$ per a tota connexió a . Aquesta igualtat implica $\star d_A F_A = d_A^* F_A$. Aplicant el que acabem de provar l'equació $d_A^* F_A = 0$ s'escriu com:

$$d_A \star F_A = 0.$$

Aquesta és l'anomenada *equació de Yang-Mills*. A vegades es parla d'equacions de Yang-Mills en plural considerant també l'identitat de Bianchi $d_A F_A = 0$ tal i com es pot veure en [Nab00, Ch.2].

Proposició 3.19. *Tota connexió ASD és un mínim absolut de l'acció de Yang-Mills.*

Demostració. Tenim:

$$\begin{aligned} \int_M |F_A|^2 d\text{vol} &= \frac{1}{2} \int_M (\langle F_A, F_A \rangle + \langle \star F_A, \star F_A \rangle) \\ &= \frac{1}{2} \int_M (\langle F_A, F_A \rangle + \langle \star F_A, \star F_A \rangle + 2 \langle F_A, \star F_A \rangle - 2 \langle F_A, \star F_A \rangle) \\ &= \int_M \left(\frac{1}{2} (\langle F_A, F_A \rangle + \langle \star F_A, \star F_A \rangle + 2 \langle F_A, \star F_A \rangle) - \langle F_A, \star F_A \rangle \right) \\ &= \int_M \left(\frac{1}{2} \langle F_A + \star F_A, F_A + \star F_A \rangle - \langle F_A, \star F_A \rangle \right) \\ &\geq - \int_M \langle F_A, \star F_A \rangle. \end{aligned}$$

En definitiva, hem arribat a la desigualtat:

$$S_{YM}(d_A) = \int_M \text{Tr } F_A \wedge \star F_A \geq - \int_M \text{Tr } F_A \wedge F_A.$$

I tenim l'igualtat quan $\star F_A = -F_A$, és a dir, quan A és una connexió ASD. Per tant les connexions ASD són mínims absoluts de l'acció de Yang-Mills i, en particular, satisfan l'equació de Yang-Mills. \square

3.3 Instantons en \mathbb{R}^4

Donarem un exemple senzill d'instantó prenent de guia [Per06, Ch.12] i [Fig19, Ch.4]. Per a fer-ho utilitzarem el llenguatge dels *quaternions*. Recordem que aquests són nombres de la forma $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$ amb $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Denotarem per \mathbb{H} l'àlgebra dels quaternions. Observem que $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ mitjançant l'aplicació $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 \mapsto (q_0, q_1, q_2, q_3)$. De la mateixa manera que succeeix amb els nombres complexos, podem parlar del conjugat d'un quaternió $\bar{q} = q_0 - iq_1 - jq_2 - kq_3$ i de les seves parts real i imaginària definides com $\text{Re}(q) = q_0$ i $\text{Im}(q) = iq_1 + jq_2 + kq_3$, respectivament. La norma d'un quaternió vindrà donada per $|q|^2 = q\bar{q}$. Els quaternions poden ser identificats amb matrius de la forma següent:

$$\begin{pmatrix} q_0 + iq_1 & q_2 + iq_3 \\ -q_2 + iq_3 & q_0 - iq_1 \end{pmatrix}.$$

En cas de que els quaternions siguin unitaris, és a dir, que pertanyin al grup $\text{Sp}(1) = \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\}$ llavors aquestes matrius pertanyen a $\text{SU}(2)$. D'aquesta forma obtenim

un isomorfisme de grups de Lie $\mathrm{Sp}(1) \cong \mathrm{SU}(2)$ que indueix un isomorfisme d'àlgebres de Lie $\mathrm{Im}(\mathbb{H}) \cong \mathfrak{sp}(1) \cong \mathfrak{su}(2)$.

Ara treballarem amb el fibrat trivial $\mathbb{H} \times \mathrm{SU}(2) \cong \mathbb{R}^4 \times \mathrm{SU}(2)$. Sigui $\nabla = d + A$ una connexió $\mathrm{SU}(2)$. Com que A és una 1-forma amb valors a $\mathfrak{su}(2) \cong \mathrm{Im}(\mathbb{H})$ aleshores serà de la forma $A = \mathrm{Im}(fdq)$, on $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$. La seva curvatura vindrà donada per:

$$F_A = dA + \frac{1}{2}[A, A] = dA + A \wedge A = d \mathrm{Im}(fdq) + \mathrm{Im}(fdq) \wedge \mathrm{Im}(fdq) = \mathrm{Im}(df \wedge dq + fdq \wedge fdq)$$

Imposem l'equació $F_A^+ = 0$, que ja hem vist que és equivalent a $F_A = -\star F_A$. En components:

$$\begin{aligned} F_{01} &= F_{23}, \\ F_{02} &= -F_{13}, \\ F_{03} &= F_{12}. \end{aligned}$$

Observem que la següent 2-forma és anti-auto dual:

$$d\bar{q} \wedge dq = 2[(dq_0 \wedge dq_1 - dq_2 \wedge dq_3)i + (dq_0 \wedge dq_2 - dq_3 \wedge dq_1)j + (dq_0 \wedge dq_3 - dq_1 \wedge dq_2)k].$$

Per tant proposem una solució de l'equació $F_A = -\star F_A$ de la forma:

$$F_A = \frac{d\bar{q} \wedge dq}{(1 + |q|^2)^2}.$$

De fet F_A és la curvatura de la 1-forma:

$$A = \frac{1}{1 + |q|^2} \mathrm{Im}(\bar{q}dq).$$

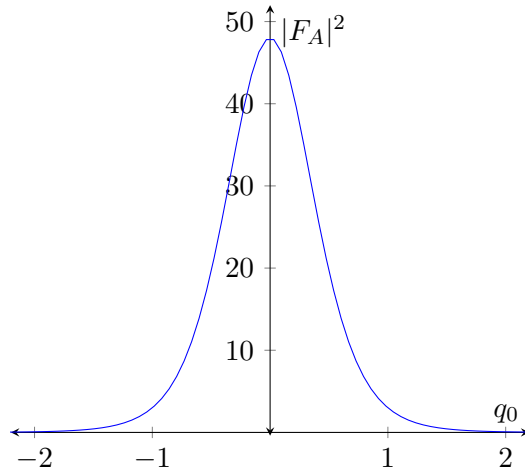
En efecte:

$$\begin{aligned} F_A &= \mathrm{Im} \left(d \left(\frac{\bar{q}}{(1 + |q|^2)^2} \right) \wedge dq + \left(\frac{\bar{q}}{(1 + |q|^2)^2} \right) dq \wedge \left(\frac{\bar{q}}{(1 + |q|^2)^2} \right) dq \right) \\ &= \mathrm{Im} \left(\frac{d\bar{q} \wedge dq}{1 + |q|^2} - \frac{\bar{q}dq + qd\bar{q}}{(1 + |q|^2)^2} \wedge \bar{q}dq + \frac{\bar{q}dq \wedge \bar{q}dq}{(1 + |q|^2)^2} \right) \\ &= \frac{d\bar{q} \wedge dq}{(1 + |q|^2)^2}. \end{aligned}$$

En l'últim pas hem tret la part imaginària perquè la curvatura és imaginària pura. Ara si calculem el quadrat de la norma de l'anterior curvatura obtenim:

$$|F_A|^2 = \frac{48}{(1 + |q|^2)^4}.$$

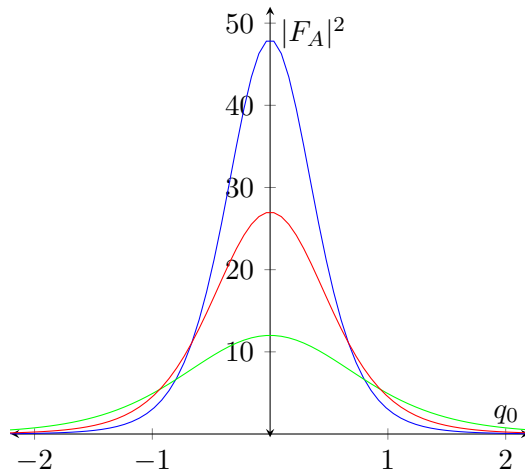
Tot i que la gràfica d'aquesta funció no la podem representar per una qüestió de dimensions el que fem és donar una secció fixant tres variables de manera que si $q_1 = q_2 = q_3 = 0$ llavors:



Diem que aquest instantó està *centrat* en 0 i té *mida* 1. Gràcies a ell podem determinar tota una família d'instantons. Per a obtenir-los de forma explícita utilitzarem l'invariància conforme de l'equació $F_A^+ = 0$. Considerem l'aplicació $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ donada per $f(q) = \lambda(q - c)$, on $\lambda > 0$ i $c \in \mathbb{H}$. Calculant el pullback $F_{f^*A} = f^*F_A$ obtenim:

$$|F_{f^*A}|^2 = \frac{48\lambda^2}{(1 + \lambda^2|q - c|^2)^4}.$$

Per a interpretar l'anterior resultat fem una gràfica de diferents instantons centrats en zero i de mida λ :



En aquesta gràfica s'han representat instantons de mides 1 (blau), 0.75 (vermell) i 0.5 (verd). Com podem observar, quan $\lambda \rightarrow 0$ la densitat de curvatura es concentra en el zero. En definitiva, a més de donar un exemple concret d'instantó, hem acabat demostrant que l'espai de solucions de l'equació $F_A^+ = 0$ és no buit, és a dir, $\mathcal{M}_{E,g} \neq \emptyset$.

4 Teorema de Donaldson

Ara anem a provar el teorema central del treball. Per a fer-ho dividirem la demostració en diferents parts que presentarem en forma de proposició i teoremes a causa de la seva longitud, tot seguint [Per06, Ch.11]. Primer parlarem de la topologia l'espai de solucions de l'equació $F_A^+ = 0$ que defineix els instantons, després l'utilitzarem per a relacionar-lo amb cert cobordisme i finalment donarem la demostració del teorema de Donaldson, basada en els resultats anteriors combinats amb raonaments que involucren la forma d'intersecció.

4.1 Diagonalització de la forma d'intersecció

Anem a veure alguns resultats relatius a la topologia de l'espai de moduli de connexions ASD i acabarem donant un cobordisme entre la varietat base M i l'unió disjunta d'un nombre finit de còpies de $\mathbb{C}P^2$. Per a fer-ho suposarem algunes propietats de l'espai de moduli $\mathcal{M}_{E,g}$. La prova es pot veure a [Per06] i a [FU84]. El lector interessat en els detalls de la part més tècnica pot consultar [Don83].

Sigui M una varietat topològica simplement connexa tal que Q_M és definida negativa. Direm que una connexió A és reductible si $A = A_1 \oplus A_2$ i irreductible en cas contrari. Llavors:

1. Existeix un subconjunt $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}_{E,g}$ format per connexions reductibles mòdul transformacions gauge de manera que \mathcal{R} conté q punts, on q és la meitat del cardinal del conjunt $C = \{c \in H^2(M) | c^2 = -1\} / \pm 1$.
2. El complementari $\mathcal{M}_{E,g} \setminus \mathcal{R}$ és una varietat diferenciable de dimensió 5.
3. Per a cada connexió reductible $s \in \mathcal{R}$ existeix un entorn U_s contenint s tal que l'homeomorfisme $(U_s, s) \rightarrow (\mathbb{C}^3/S^1, [0])$ és diferenciable en $U_s \setminus \{s\}$.
4. Existeix un obert $K \subset \mathcal{M}_{E,g}$ tal que $\mathcal{M}_{E,g} \setminus K$ conté \mathcal{R} i és compacte. A més tenim un difeomorfisme $K \cong M \times (0, 1)$.

Respecte el tercer punt observem que \mathbb{C}^3/S^1 és homeomorf a un con en $\mathbb{C}P^2$ en virtut de l'homeomorfisme

$$f : \mathbb{C}^3/S^1 \xrightarrow{\cong} \frac{\mathbb{C}P^2 \times \mathbb{R}^+}{\mathbb{C}P^2 \times \{0\}}$$

donat per $f[a, b, c] = [(a : b : c), a^2 + b^2 + c^2]$.

A partir d'ara per qüestions de comoditat revertirem l'orientació de M i suposarem que Q_M és definida positiva.

Teorema 4.1. *Sigui M una varietat topològica compacta, orientable i simplement connexa de dimensió 4 tal que Q_M és definida positiva. Aleshores existeix un cobordisme orientat entre M i l'unió disjunta de q còpies de $\mathbb{C}P^2$, on q és la meitat del cardinal del conjunt $\{x \in H^2(M) | Q(x, x) = 1\}$.*

Demostració. Utilitzant el tercer punt abans esmentat tenim un compacte $K \cong M \times (0, 1)$. A partir d'aquí podem compactificar $\mathcal{M}_{E,g}$ substituint $M \times (0, 1)$ per $M \times (0, 1/2]$. Com

a resultat obtenim un espai que anomenarem $\overline{\mathcal{M}}_{E,g}$. Ara, per a cada connexió reductible $s \in \mathcal{R}$ traiem un entorn $B_\epsilon/S^1 \subset \mathbb{C}^3/S^1 \cong U_s \subset \overline{\mathcal{M}}_{E,g}$. En conseqüència obtenim un espai compacte i orientable amb vora igual a l'unió de la varietat base M i q còpies de $\mathbb{C}P^2$, és a dir, hem obtingut un cobordisme entre M i l'unió disjunta de q còpies de $\mathbb{C}P^2$. \square

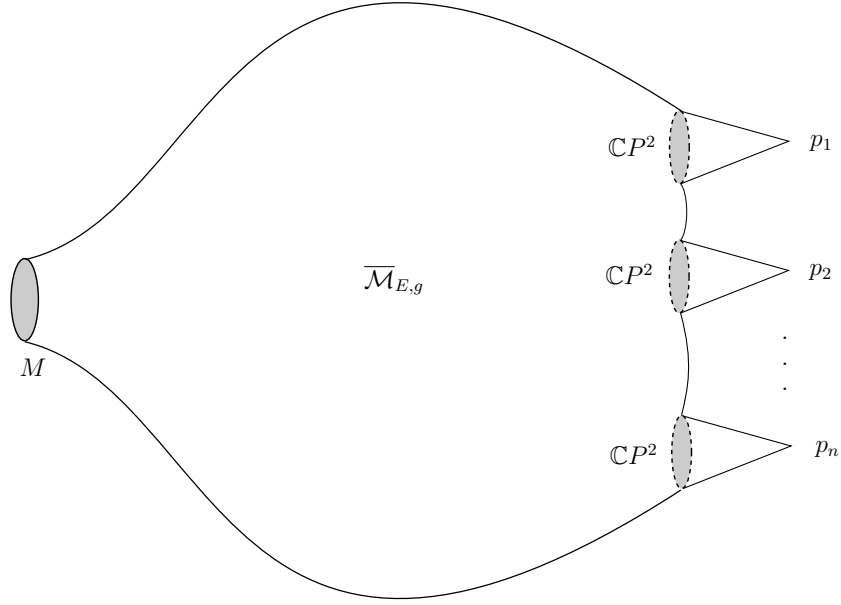


Figura 1: Topologia de l'espai de moduli dels instantons.

Proposició 4.2. *Sigui Q una forma bilineal, simètrica i definida positiva en \mathbb{Z}^n . Aleshores existeixen com a màxim n parells desordenats $\{a, -a\}$ on $a \in \mathbb{Z}^n$ tals que $Q(a, a) = 1$. L'igualtat es dona si i només si Q és equivalent a la forma estàndard $\langle 1 \rangle^n$.*

Demostració. Sigui $a \in \mathbb{Z}^n$ tal que $Q(a, a) = 1$. Aleshores l'igualtat $x = Q(x, a)a + (x - Q(x, a)a)$ dona lloc a una descomposició $\mathbb{Z}^n = \langle 1 \rangle \oplus a^\perp$. Fent inducció sobre n obtenim $\mathbb{Z}^n = \langle 1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle 1 \rangle \oplus a^\perp$. A partir d'aquesta descomposició és clar que l'igualtat de l'enunciat es donarà si i només si Q és equivalent a $\langle 1 \rangle^n$. \square

Finalment estem en disposició de veure el principal resultat del treball fent servir el teorema anterior juntament amb les proposicions que hem vist en aquesta secció.

Teorema 4.3. (Donaldson, 1983) *Sigui M una varietat diferenciable compacta, orientable i simplement connexa de dimensió 4 tal que la seva forma d'intersecció Q_M és definida positiva. Aleshores existeix una base de $H^2(M)$ en la qual Q_M diagonalitza i és equivalent a $\langle 1 \rangle^q$.*

Demostració. Utilitzant els resultats que hem vist anteriorment tenim un cobordisme entre M i l'unió disjunta de q còpies de $\mathbb{C}P^2$. Com que la signatura és invariant per cobordismes aleshores $\sigma(M) = \epsilon_1 + \dots + \epsilon_q$, on $\epsilon_i = \pm 1$ és la signatura de la còpia i -èsima de $\mathbb{C}P^2$. Donat que Q_M és definida positiva aleshores $\text{rg}(Q_M) = \sigma(Q_M) \leq q$. Pel lema, $\text{rg}(Q_M) = q$, Q_M diagonalitza i Q_M és equivalent a $\langle 1 \rangle^q$. \square

Observació 4.4. En el cas que Q_M sigui definida negativa podem aplicar igualment el teorema revertint l'orientació de M . En aquest cas, Q_M seria equivalent a $\langle -1 \rangle^q$. Ara també podem veure que les q còpies de $\mathbb{C}P^2$ han de ser orientades per tal de tenir signatura $+1$.

4.2 Invariants de Donaldson

Per a demostrar l'anterior teorema Donaldson va aplicar eines de la teoria de Yang-Mills per a treure conclusions sobre la topologia de les varietats de dimensió 4. A partir d'aquí va anar desenvolupant tota una teoria basada en eines semblants que descriurem en aquesta secció. El que farem serà contruir un conjunt d'invariants topològics basats en l'espai de moduli de connexions ASD.

Sigui E un fibrat $SU(2)$. Denotarem per $\hat{\mathcal{M}}_{E,g}$ l'espai de moduli de connexions ASD irreductibles. L'idea per a definir els invariants serà considerar una aplicació $\mu : H_2(M) \rightarrow H^2(\hat{\mathcal{M}}_{E,g})$ de manera que si $[\Sigma_1], \dots, [\Sigma_d] \in H_2(M)$ aleshores tindrem un enter:

$$\left\langle \mu(\Sigma_1) \smile \dots \smile \mu(\Sigma_d), [\hat{\mathcal{M}}_{E,g}] \right\rangle,$$

on $d = \frac{1}{2} \dim \hat{\mathcal{M}}_{E,g}$ (donat que les classes $\mu(\Sigma_i)$ són de dimensió 2). Aquest primer intent de definició, però, té alguns inconvenients:

1. L'espai de moduli $\hat{\mathcal{M}}_{E,g}$ no és compacte. Per tant no podem parlar d'una classe fonamental per tal d'avaluar-la amb $\mu(\Sigma_1) \smile \dots \smile \mu(\Sigma_d)$.
2. Cal definir l'aplicació μ de manera que l'anterior avaluació tingui sentit.

Adrecem el primer punt. Per a poder solucionar-ho el que farem serà compactificar l'espai de moduli $\hat{\mathcal{M}}_{E,g}$. No donarem els detalls de la construcció ja que no l'utilitzarem per res més. L'explicació amb tots els detalls es pot trobar a [Per06] i [FU84]. El resultat és l'anomenada *compactificació d'Uhlenbeck* $\overline{\mathcal{M}}_{E,g}$. Redefinirem el nostre invariant avaluant $\mu(\Sigma_1) \smile \dots \smile \mu(\Sigma_d)$ amb la classe fonamental $[\overline{\mathcal{M}}_{E,g}]$.

Pel que fa al segon punt, hem de donar μ . Com que hem d'enviar una classe de $H_2(M)$ a $H^2(\overline{\mathcal{M}}_{E,g})$ llavors la següent definició és natural:

$$\mu(\Sigma_i) = -\frac{1}{4} p_1(E) / [\Sigma_i].$$

L'operació $/$ està determinada d'aquesta manera. Si

$$-\frac{1}{4} p_1(E) = \sum_i \beta_i \otimes \gamma_i,$$

aleshores:

$$-\frac{1}{4} p_1(E) / [\Sigma_i] = \sum_i \langle \beta_i, [\Sigma_i] \rangle \otimes \gamma_i.$$

D'aquesta manera, $\mu(\Sigma_i)$ pertany a $H^2(\hat{\mathcal{M}}_{E,g})$. Tot i això tenim un últim obstacle: $\mu(\Sigma_i)$ hauria de pertànyer a $H^2(\overline{\mathcal{M}}_{E,g})$ i no a $H^2(\hat{\mathcal{M}}_{E,g})$ per a poder avaluar $\mu(\Sigma_1) \smile \dots \smile \mu(\Sigma_d)$ amb $[\overline{\mathcal{M}}_{E,g}]$. No donarem els detalls però tenim que l'aplicació μ es pot estendre a una aplicació $\bar{\mu} : H_2(M) \rightarrow H^2(\overline{\mathcal{M}}_{E,g})$.

Ara ja podem definir els invariants. Per qüestions tècniques suposem $4k \geq 5 + 3b_+^2(M)$ on $b_+^2(M)$ és la dimensió d'un subespai maximal definit positiu de $H^2(M; \mathbb{R})$. En aquest cas es diu que k està en el *rang estable*. Una explicació detallada del perquè d'aquesta suposició es pot veure a [DK90, Ch.9].

Definició 4.5. Anomenarem *invariants de Donaldson* a les aplicacions $\gamma_k : H_2(M) \times \dots \times H_2(M) \rightarrow \mathbb{Z}$ donades per:

$$\gamma_k(\Sigma_1, \dots, \Sigma_d) = \langle \bar{\mu}(\Sigma_1) \smile \dots \smile \bar{\mu}(\Sigma_d), [\overline{\mathcal{M}}_{E,g}] \rangle$$

Les aplicacions γ_k es poden identificar amb un polinomi a través de polarització. El resultat és una aplicació $\gamma_k : H_2(M) \rightarrow \mathbb{Z}$, que denotarem de la mateixa manera que els invariants de Donaldson, donada per $\gamma_k(\Sigma) = \langle \bar{\mu}(\Sigma) \smile \dots \smile \bar{\mu}(\Sigma), [\overline{\mathcal{M}}_{E,g}] \rangle$. L'anomenarem *polinomi de Donaldson*.

Els invariants de Donaldson compleixen les següents propietats:

1. γ_k no depèn de la mètrica escollida.
2. γ_k és una forma bilineal simètrica.
3. Si revertim l'orientació de $H_+^2(M; \mathbb{R})$ aleshores γ_k canvia de signe.
4. γ_k és invariant per difeomorfismes que preservin l'orientació de M i de $H_+^2(M; \mathbb{R})$.

Donat que hi han infinits invariants de Donaldson és convenient agrupar-los tots en una sola aplicació lineal. Si $A(M) = \text{Sym}(H_2(M) \oplus H_0(M))$ aleshores podem definir una aplicació $\mathcal{D}_M : A(M) \rightarrow \mathbb{Q}$ com:

$$\mathcal{D}_M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \gamma_k.$$

Considerem l'anterior sèrie com una suma formal, és a dir, no es preocupem per la seva convergència.

Tot seguit veurem com obtenir els invariants de Donaldson com a nombres d'intersecció. Per a fer-ho utilitzarem la notació $\hat{M}_{E,g}^k$ per a enfatitzar la dependència de $\hat{M}_{E,g}$ amb k i suposarem que per tot $0 \leq j < k$ l'espai $\hat{M}_{E,g}^{k-j}$ és una varietat diferenciable de dimensió $2d - 8j$ i que no conté connexions reductibles.

Seguint els arguments que es presenten a [DK90, Ch.9], escollim classes d'homologia en $H_2(M)$ que vindran representades per superfícies Σ_i de M . Prenem entorns tubulars $\nu(\Sigma_i)$ tals que l'intersecció de tres entorns diferents és buida, és a dir:

$$\nu(\Sigma_i) \cap \nu(\Sigma_j) \cap \nu(\Sigma_k) = \emptyset, \quad \text{per a tot } i \neq j \neq k.$$

Ara prenem una secció s_i d'un fibrat de línia sobre l'espai de moduli de connexions irreductibles (espai que conté $\hat{M}_{E,g}$), per a cada i . Denotarem per V_{Σ_i} el seu conjunt de zeros. Suposem que per qualsevol $I \subset \{1, \dots, d\}$ i qualsevol j amb $0 \leq j < k$, llavors la següent intersecció és transversal:

$$\hat{M}_{E,g}^{k-j} \cap \left(\bigcap_{i \in I} V_{\Sigma_i} \right).$$

Això implica que els elements de $\hat{M}_{E,g}^k \cap V_{\Sigma_1} \cap \dots \cap V_{\Sigma_d}$ són punts aïllats. Mitjançant arguments d'anàlisi es prova que l'anterior intersecció és compacta i per tant finita. Ara, per orientabilitat, podem assignar un signe ± 1 a cada punt de $\hat{M}_{E,g}^k \cap V_{\Sigma_1} \cap \dots \cap V_{\Sigma_d}$. Així doncs té sentit definir $\gamma_k(\Sigma_1, \dots, \Sigma_d)$ com el nombre d'intersecció de $\hat{M}_{E,g}^k \cap V_{\Sigma_1} \cap \dots \cap V_{\Sigma_d}$ i si compactifiquem ens trobem amb els invariants que hem definit anteriorment.

Si revisem un altre cop la definició dels invariants de Donaldson veurem que no són gens evidents de calcular. De fet, els exemples són bastant difícils. En la següent secció veurem una eina que va permetre simplificar els càlculs considerablement.

4.3 Teoria de Seiberg-Witten

A la tardor de l'any 1994 el físic nord-americà Edward Witten va presentar una conjectura que va canviar la forma d'aproximar-se a l'estudi de les varietats topològiques de dimensió 4. L'ara anomenada *teoria de Seiberg-Witten* resultà ser equivalent a la teoria de Donaldson però l'avantatge va ser que es podien calcular els invariants de Donaldson de forma més ràpida i donar demostracions més senzilles. En aquesta secció veurem l'idea d'aquest enfocament, basat en el de Donaldson, i enunciaré una conjectura deguda a Witten que relaciona els anomenats *invariants de Seiberg-Witten* amb els invariants de Donaldson. Seguirem [Don96], [HT97] i [Wit94], on estan tots els detalls.

Primer introduïm un grup essencial per l'estructura de la qual anem a parlar. Definim el grup $\text{Spin}^c(n)$ mitjançant la successió exacta curta:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \text{Spin}^c(n) \longrightarrow \text{SO}(n) \times \text{SU}(n) \longrightarrow 0$$

Una estructura $\text{Spin}^c(n)$ sobre una varietat Riemanniana orientable M és un parell de fibrats vectorials que denotarem per W^+ i W^- sobre M amb un isomorfisme $\Lambda^2 W^\pm = L$ on L és un fibrat de línia sobre M . Denotarem per \mathcal{S}_M el conjunt d'estructures $\text{Spin}^c(n)$ sobre M . És conegut que aquestes estructures sempre existeixen en les varietats orientables de dimensió 4.

Una connexió ∇ en L ens dóna una aplicació $D : \Gamma(W^+) \rightarrow \Gamma(W^-)$ anomenada *operador de Dirac* definida per $D^2 = D^*D = \Delta$, on Δ és l'operador laplacià en M . L'aplicació D compleix l'anomenada *fórmula de Lichnerowicz*. Tenim, per a tot $\psi \in \Gamma(W^+)$:

$$D^*D\psi = \nabla^*\nabla\psi + \frac{1}{4}R\psi - \frac{1}{2}F_\nabla^+(\psi).$$

En aquesta expressió, R denota la curvatura escalar i F_∇^+ és la parta auto-dual de la curvatura.

Tal i com es pot consultar a [Don96], l'idea de la teoria de Seiberg-Witten és semblant a la de Donaldson en el sentit que té com a objectiu treure conclusions topològiques d'una varietat a partir de l'espai de moduli de certes equacions. En el cas de la teoria de Donaldson utilitzàvem l'equació dels instantons $F_A^+ = 0$. Ara, tindrem una connexió $U(1)$ que denotarem per A en L , una secció $\psi \in \Gamma(W^+)$ i una certa forma sesquilineal $\tau : W^+ \times W^+ \rightarrow \Lambda_+^2 \otimes \mathbb{C}$. Aquestes dades ens permeten escriure les anomenades *equacions de Seiberg-Witten*:

$$\begin{aligned} D_A\psi &= 0, \\ F_A^+ &= -\tau(\psi, \psi). \end{aligned}$$

Anomenarem *monopols* a una solució (A, ψ) d'aquestes equacions. Denotarem l'espai de moduli dels monopols mòdul transformacions gauge per \mathcal{M} i l'espai de moduli dels monopols mòdul transformacions gauge que fixen un punt base per \mathcal{M}^0 . A diferència del que passava en la teoria de Donaldson, \mathcal{M} és compacte, orientable amb una bijecció entre les orientacions de \mathcal{M} i les de l'espai vectorial $H^0(M; \mathbb{R}) \oplus H^1(M; \mathbb{R}) \oplus H_+^2(M; \mathbb{R})$ i si $b_+^2 > 0$ llavors és varietat diferenciable. D'altre banda \mathcal{M}^0 és varietat diferenciable sempre. Ara, suposant que es compleixen aquestes equacions, tenim:

$$0 = D_A^* D_A \psi = \nabla_A^* \nabla_A \psi + \frac{1}{4} R \psi + \frac{1}{2} F_A^+(\psi).$$

Prenem el producte escalar L^2 per ψ . El denotem per (\cdot, \cdot) . Obtenim:

$$\int_M |\nabla_A \psi|^2 + \frac{1}{2} (F_A^+(\psi), \psi) + \frac{1}{4} R |\psi|^2 d\mu = 0.$$

Com que $(F_A^+(\psi), \psi) = -(\tau(\psi, \psi)(\psi), \psi)$ i $2\tau(\psi, \psi)(\psi) = |\psi|^2 \psi$ llavors:

$$\int_M |\nabla_A \psi|^2 + \frac{1}{4} |\psi|^4 d\mu = - \int_M \frac{1}{4} R |\psi|^2 d\mu = 0.$$

Per tant si $R \geq 0$ les solucions de les equacions de Seiberg-Witten es donen quan $\psi = 0$ i $F_A^+ = 0$. És a dir, en aquest cas recuperem l'equació dels instantons. Finalment, les equacions de Seiberg-Witten són les equacions del moviment del funcional d'acció:

$$S_{\text{SW}}(A, \psi) = \int_M |\nabla_A \psi|^2 + \frac{1}{2} |F_A|^2 + \frac{1}{8} (|\psi|^2 + R)^2 d\mu.$$

Si comparem aquesta acció amb la de la teoria de Yang-Mills veiem que la segona és un cas particular de la teoria de Seiberg-Witten. L'anterior acció es pot reescriure en els següents termes:

$$S_{\text{SW}}(A, \psi) = \int_M |D_A \psi|^2 + |F_A + \tau(\psi, \psi)|^2 d\mu + \int_M \frac{R^2}{8} d\mu + 2\pi^2 c_1(L)^2.$$

D'aquesta manera és clar que les equacions del moviment associades a aquesta acció són les equacions de Seiberg-Witten.

De la mateixa forma que succeeix amb la teoria de Donaldson, anem a definir invariants per a varietats topològiques compactes i orientables de dimensió 4. Suposem $b_+^2(M) > 1$ i fixem una orientació de $H^0(M; \mathbb{R}) \oplus H^1(M; \mathbb{R}) \oplus H_+^2(M; \mathbb{R})$. Si $b_+^2 - b^1$ és imparell aleshores la dimensió de l'espai de moduli és $2d$, on b^1 és la dimensió de $H^1(M; \mathbb{R})$. Tal com s'explica en [HT97, Ch.3], definim l'invariant de Seiberg-Witten com l'aplicació $\text{SW}_M : \mathcal{S}_M \rightarrow \mathbb{Z}$ que compleix les següents condicions:

- $\text{SW}_M(s) = 0$ si $b_+^2 - b^1$ és parell.
- Si $d < 0$, $\text{SW}_M(s) = 0$ per a tot $s \in \mathcal{S}_M$.
- Si $d = 0$, $\text{SW}_M(s) = \Sigma_{\mathcal{M}} \pm 1$ ja que en aquest cas \mathcal{M} està format per un nombre finit de punts.
- Si $d > 0$:

$$\text{SW}_M(s) = \langle c_1(\mathcal{M}^0) \smile \dots \smile c_1(\mathcal{M}^0), [\mathcal{M}] \rangle = \int_{\mathcal{M}} c_1(\mathcal{M}^0) \smile \dots \smile c_1(\mathcal{M}^0).$$

Com hem dit anteriorment, la teoria de Seiberg-Witten és equivalent a la teoria de Donaldson. L'enunciat precís ve donat per l'anomenada *conjectura de Witten*.

Conjectura. Sigui M una varietat topològica compacta i orientable de dimensió 4 amb $b_1(M) = 0$ i $b^+(M) > 1$ senar. Aleshores:

$$\mathcal{D}_M(h) = c(M) \exp\left(\frac{Q(h, h)}{2}\right) \sum_{r=1}^s (-1)^{(w^2 + K_r \cdot w)/2} \text{SW}(K_r) e^{K_r \cdot h}.$$

On $K_1, \dots, K_s \in H^2(M)$ i $c(M) = 2^{2+(7\chi(M)+11\sigma)/4}$, amb $\chi(M)$ la característica d'Euler de M i σ la seva signatura.

De la definició dels invariants de Seiberg-Witten se'n deriven les següents propietats bàsiques:

- Si $b_+^2 > 0$ llavors $\text{SW}_M(s)$ només depèn de s i $\text{SW}_M : \mathcal{S}_M \rightarrow \mathbb{Z}$ és invariant per difeomorfismes.
- $\text{SW}_M(s) = 0$ per un nombre finit de $s \in \mathcal{S}_M$.
- $\text{SW}_{M\#\overline{\mathbb{C}P^2}}$ conté la mateixa informació que SW_M .
- Si $M = N\#X$ i $b_+^2(N), b_+^2(X) > 0$ aleshores $\text{SW}_M \equiv 0$.
- Existeix una aplicació $s \mapsto \bar{s}$ anomenada *conjugació de càrrega* de manera que $c_1(L) \mapsto -c_1(L)$ i $\text{SW}_M(\bar{s}) = \pm \text{SW}_M(s)$.

Gràcies a la teoria de Seiberg-Witten es pot trobar una demostració alternativa del teorema de Donaldson que es pot trobar a [Sco05, Ch.10].

5 Aplicacions de la teoria de Donaldson

De les importants implicacions que té el teorema de Donaldson nosaltres n'explorarem tres. Primer veurem exemples concrets de varietats topològiques que no admeten estructura diferenciable, després aquests exemples ens permetran construir de manera implícita un \mathbb{R}^4 exòtic i finalment provarem alguns teoremes relatius a l'anul·lació dels invariants de Donaldson sota diferents hipòtesis.

5.1 La forma d'intersecció E_8

Per a donar exemples de varietats topològiques que no admeten cap estructura diferenciable a través del teorema de Donaldson ens cal trobar varietats compactes, orientables i simplement connexes de dimensió 4 tals que la seva forma d'intersecció sigui definida positiva però que no sigui equivalent a la forma estàndard $\langle 1 \rangle^n$. Per això introduïrem una forma d'intersecció que no hem vist fins ara. Considerem la matriu:

$$E_8 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & & & & \\ & & 1 & 2 & 1 & & & & \\ & & & 1 & 2 & 1 & & & \\ & & & & 1 & 2 & 1 & & 1 \\ & & & & & 1 & 2 & 1 & \\ & & & & & & 1 & 2 & \\ & & & & & & & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Els termes en blanc són nuls. Per a veure algunes de les propietats d'aquesta matriu efectuem les següents transformacions de files. Denotarem per F_i la fila i -èsima de la matriu E_8 i escriurem les transformacions en la forma $F_i \rightarrow F_i - \lambda F_j$ per a λ nombre real adequat i $i, j = 0, \dots, 8$. Els passos intermedis no els explicarem per motius d'espai. Es pot trobar el càlcul amb detall a [Sco05, p.126]. Fem les transformacions:

$$\begin{aligned} F_2 &\rightarrow F_2 - \frac{1}{2}F_1, & F_3 &\rightarrow F_3 - \frac{2}{3}F_2, \\ F_4 &\rightarrow F_4 - \frac{3}{2}F_3, & F_5 &\rightarrow F_5 - \frac{4}{5}F_4, \\ F_5 &\rightarrow F_5 - \frac{1}{2}F_8, & F_6 &\rightarrow F_6 - \frac{10}{7}F_5, \\ & & F_7 &\rightarrow F_7 - \frac{7}{4}F_6. \end{aligned}$$

Com a resultat obtenim la matriu diagonal:

$$D_{E_8} = \begin{pmatrix} 2 & & & & & & & & \\ & 3/2 & & & & & & & \\ & & 4/3 & & & & & & \\ & & & 5/4 & & & & & \\ & & & & 7/10 & & & & \\ & & & & & 4/7 & & & \\ & & & & & & 1/4 & & \\ & & & & & & & 2 & \end{pmatrix}.$$

Un cop diagonalitzada la matriu és immediat veure les següents propietats de E_8 :

1. És una matriu definida positiva perquè tots els seus valors propis són positius.
2. La seva signatura és 8, resultat de la diferència entre el nombre de valors propis positius (8) i el nombre de valors propis negatius (cap).
3. El seu determinant és 1, resultat del producte dels elements de la diagonal de D_{E_8} .
4. És parella.

De fet la matriu E_8 és la forma d'intersecció d'una varietat topològica. Aquest fet és conseqüència del següent resultat.

Teorema 5.1. (Freedman, 1982) *Sigui Q una forma bilineal simètrica unimodular. Aleshores existeix una varietat topològica M compacta, orientable i simplement connexa tal que $Q = Q_M$. A més:*

- *Si Q és parella aleshores M és única llevat d'homeomorfisme.*
- *Si Q és senar aleshores existeixen dues varietats no homeomorfes entre elles que tenen Q com a forma d'intersecció.*

En el nostre cas que el determinant de E_8 sigui 1 vol dir que és unimodular amb la qual cosa el teorema anterior aplica. Donat que E_8 és parella llavors estem en el primer punt del teorema i existeix una única varietat topològica amb les propietats que el teorema esmenta de manera que E_8 és la seva forma d'intersecció. Denotarem per M_{E_8} aquesta varietat topològica. No donarem la prova d'aquest teorema per no allunyar-nos massa dels nostres objectius. A [Sco05, Ch.5] es pot trobar l'idea principal de la demostració.

Ara ja estem en disposició de veure la primera aplicació del teorema de Donaldson.

Proposició 5.2. *La varietat topològica $M_{E_8} \# M_{E_8}$ no admet cap estructura diferenciable.*

Demostració. Utilitzant l'additivitat de la forma d'intersecció, tenim $Q_{M_{E_8} \# M_{E_8}} = Q_{M_{E_8}} \oplus Q_{M_{E_8}} = E_8 \oplus E_8$. Així doncs aquesta forma d'intersecció és definida positiva per ser-ho E_8 , però no diagonalitza sobre els enters perquè tampoc ho fa E_8 . Aplicant el teorema de Donaldson obtenim que $M_{E_8} \oplus M_{E_8}$ no admet cap estructura diferenciable. \square

Hom podria preguntar-se perquè no hem estudiat abans l'existència d'estructures diferenciables en M_{E_8} . El motiu és que, encara que M_{E_8} tampoc admet cap estructura diferenciable, aquest és un fet que ja era conegut abans del descobriment del teorema de Donaldson. El resultat es compleix en virtut del següent teorema.

Teorema 5.3. (Rokhlin, 1952) *Sigui M és una varietat diferenciable compacta, orientable i simplement connexa amb forma d'intersecció Q_M parella. Aleshores la signatura $\sigma(M)$ és divisible per 16.*

El lector interessat per trobar una demostració d'aquest teorema a [Sco05, Ch.11]. Abans hem vist que E_8 és parella i $\sigma(M_{E_8}) = 8$. Com que 16 no divideix 8 aleshores M_{E_8} no admet estructura diferenciable. Podem arribar a la mateixa conclusió mitjançant el teorema de Donaldson ja que E_8 és definida positiva però no és equivalent a $\langle 1 \rangle^8$. Tot i això abans hem vist que $M_{E_8} \oplus M_{E_8}$ té signatura 16 de forma que el teorema de Rokhlin

no ens permet concloure res sobre l'admissió d'estructures diferenciables de $M_{E_8} \oplus M_{E_8}$. L'importància del teorema de Donaldson radica en què ens obre la porta a molts exemples de varietats topològiques que no admeten estructures diferenciables de les quals fins aleshores no es podia saber res. De fet, ens dóna un exemple per cada forma d'intersecció no equivalent a $\langle 1 \rangle^n$.

A partir d'aquests exemples sorgeixen d'altres de manera trivial. Per exemple $m \langle 1 \rangle \# n E_8$ no admet cap estructura diferenciable per a $m > 0$ i $n \geq 0$.

5.2 Un \mathbb{R}^4 exòtic

Tot seguit presentarem una varietat diferenciable homeomorfa però no difeomorfa a \mathbb{R}^4 amb l'estructura diferenciable estàndard. És el que s'anomena \mathbb{R}^4 exòtic. Donada la complexitat de la construcció ens centrarem en l'aplicació del teorema de Donaldson i oferirem només les idees principals en les parts de caire més tècnic.

Lema 5.4. *Prenem $M = \mathbb{C}P^2 \# 9\overline{\mathbb{C}P^2}$. Aleshores no existeix cap varietat diferenciable N tal que $M = N \# \mathbb{C}P^2$ sigui una descomposició diferenciable.*

Demostració. Tenim $Q_M = (+1) \oplus 9(-1)$ respecte una base (e_0, \dots, e_9) de $H_2(M)$ tal que $Q_M(e_0, e_0) = 1$, $Q_M(e_j, e_j) = -1$ per a tot $j = 1, \dots, 9$ i $Q_M(e_j, e_k) = 0$ per a tot $j \neq k$. Considerem $\alpha = 3e_0 + e_1 + \dots + e_8 \in \langle e_0, \dots, e_8 \rangle \subset H_2(M)$. Calculant s'obté $Q_M(\alpha, \alpha) = 1$ i, per a tot $\beta = x_0 e_0 + \dots + x_9 e_9 \in H_2(M)$, es compleix $Q_M(\alpha, \beta) = 3x_0 - x_1 - \dots - x_8$. Per tant $\beta \in \langle \alpha \rangle^\perp$ si i només si $3x_0 = x_1 + \dots + x_8$. Una base de $\langle \alpha \rangle^\perp \cap \langle e_0, \dots, e_8 \rangle$ és $(e_2 - e_1, e_2 - e_3, e_4 - e_3, e_4 - e_5, e_6 - e_5, e_6 - e_7, e_8 - e_7, e_0 + e_6 + e_7 + e_8)$. La matriu de Q_M restringida a l'intersecció en aquesta base és $-E_8$, amb la qual cosa $Q_M = -E_8 \oplus (-1) \oplus (+1)$. Pel teorema de Freedman aquesta forma d'intersecció correspon a la descomposició $M = N \# \mathbb{C}P^2$, on N és la varietat diferenciable amb forma d'intersecció $Q_N = -E_8 \oplus (-1)$. Tot i això Q_N és definida negativa, per tant pel teorema de Donaldson N no admet cap estructura diferenciable. És a dir, no és possible fer una descomposició diferenciable de la forma $M = N \# \mathbb{C}P^2$. \square

La forma $-E_8 \oplus (-1)$ està definida a $\langle \alpha \rangle^\perp = H_2(N)$ de manera que α genera el segon grup d'homologia de $\mathbb{C}P^2$. En altres seccions havíem vist que les classes del segon grup d'homologia com ara α es poden representar com superfícies diferenciables compactes i orientables en M . Ara raonarem que α no es pot representar mitjançant una esfera amb un embedding diferenciable. En donarem només l'idea. Suposem que α es pot representar amb una esfera S i arribarem a una contradicció. Es pot veure que un entorn de S en M és de fet un entorn tubular de $\mathbb{C}P^1$ dins de $\mathbb{C}P^2$ tal que la seva vora consta de S^3 i del complement d'una bola oberta de dimensió 4. Podem tallar S juntament amb un entorn seu i enganxar-hi la bola de dimensió 4 de forma que obtenim una varietat diferenciable amb forma d'intersecció $-E_8 \oplus (-1)$. Com hem vist abans, això no és possible, i per tant α no es pot representar com una esfera en M amb un embedding diferenciable.

Tot i això es pot provar que α sí pot ser representat com una esfera en M amb un embedding topològic. El denotarem per Σ . Aquesta esfera té un entorn U que resulta ser un fibrat sobre S^2 i esdevé homeomorfic a un subconjunt de $\mathbb{C}P^2$. D'aquesta manera utilitzant un embedding de U en $\mathbb{C}P^2$ podem pensar l'esfera Σ dins de $\mathbb{C}P^2$. Per uns resultats de Freedman el complement $\mathbb{C}P^2 \setminus \Sigma$ és una bola de dimensió 4, per tant ho-

meomorfa a \mathbb{R}^4 . L'embedding a $\mathbb{C}P^2$ induïx una estructura diferenciable en $\mathbb{C}P^2 \setminus \Sigma$ que resultarà no ser l'estructura estàndard de \mathbb{R}^4 .

Proposició 5.5. $\mathbb{C}P^2 \setminus \Sigma$ no és difeomorfa a \mathbb{R}^4 amb l'estructura diferenciable estàndard.

Demostració. Raonem per reducció a l'absurd. Suposem que $\mathbb{C}P^2 \setminus \Sigma$ és difeomorfa a \mathbb{R}^4 amb l'estructura diferenciable estàndard. Aleshores el compacte $\mathbb{C}P^2 \setminus U$ pot ser rodejat per una 3-esfera (diferenciable) que denotarem per S' . Donat que S' està dins de U llavors podem pensar S' dins de M de manera que Σ està rodejada d'un entorn acotat per S' . Aquest entorn pot ser escindit de M i ser substituït per una bola de dimensió 4. D'aquesta manera obtenim una varietat diferenciable N amb forma d'intersecció $Q_N = -E_8 \oplus (-1)$, cosa que no és possible pel lema anterior. Com a conseqüència el compacte $\mathbb{C}P^2 \setminus U$ no pot ser rodejat per cap 3-esfera en $\mathbb{C}P^2 \setminus \Sigma$, contrastant amb el fet que al \mathbb{R}^4 estàndard sí que succeeix. Com a conclusió, $\mathbb{C}P^2 \setminus \Sigma$ no és difeomorfa a \mathbb{R}^4 amb l'estructura diferenciable estàndard. \square

De manera anàloga al procediment que acabem de veure podem contruir altres \mathbb{R}^4 exòtics. Comentarem un parell més de forma breu.

Exemple 5.6. Considerem $M = \mathbb{C}P^2 \# 10\overline{\mathbb{C}P^2}$. Aquesta varietat topològica té una forma d'intersecció Q_M que es pot escriure com $-E_8 \oplus (-1) \oplus H$. H està generat per dues classes α, β que vindran representades per dues esferes $\Sigma_\alpha, \Sigma_\beta$. Aquestes esferes es poden transportar a $S^2 \times S^2$ i el seu complementari dóna lloc a un \mathbb{R}^4 exòtic.

Exemple 5.7. De manera semblant a l'anterior exemple, considerem la superfície K3. La seva forma d'intersecció és $Q_{K3} = \oplus 2(-E_8) \oplus 3H$. Podem representar les classes que generen el terme $3H$ mitjançant esferes (embeddings topològics d'esferes). Transportant-les a $\#3S^2 \times S^2$ i fent el complementari obtenim un altre \mathbb{R}^4 exòtic.

Aquests exemples d' \mathbb{R}^4 exòtics s'anomenen \mathbb{R}^4 *grans*. També en tenim d'un segon tipus anomenats \mathbb{R}^4 *petits*. Aquesta distinció està feta en base a si existeixen o no embeddings diferenciables d'aquests \mathbb{R}^4 exòtics en compactes de l' \mathbb{R}^4 estàndard.

Ara que ja hem vist diversos exemples d' \mathbb{R}^4 exòtics ens disposem a enunciar el fet que \mathbb{R}^4 admet infinites estructures diferenciables. No farem la demostració així que el resultat es donarà per propòsits il·lustratius. Es pot trobar l'informació més ampliada a [AB07, Ch.8].

Sigui $X = \#_3S^2 \times S^2 \setminus \text{Int } D^4$. Un corollari del teorema de Freedman ens diu que un subconjunt de K3 corresponent a l'homologia de $3H$ en la seva forma d'intersecció $Q_{K3} = \oplus 2(-E_8) \oplus 3H$ es pot representar mitjançant un embedding topològic $i : X \hookrightarrow \text{K3}$ amb un entorn producte de $i(\partial X)$ de la forma $C_i = \partial(i(X)) \times \mathbb{R}$. De la mateixa manera tenim un embedding topològic $j : \text{K3} \hookrightarrow \#_3S^2 \times S^2$ amb $C_j = \partial(i(X)) \times \mathbb{R}$ tal que $U = i(X) \cup C_i$ i $V = j(X) \cup C_j$ són difeomorfs amb l'estructura diferenciable induïda. Aquest difeomorfisme $\phi : U \rightarrow V$ es pot escollir de manera que $\phi \circ i = j$.

Com que C_i és un entorn producte de $i(X)$ llavors C_i és homeomorfa a $(0, 1) \times S^2$. Denotarem per S_t l'imatge de $\{t\} \times S^3$ respecte aquest homeomorfisme en C_i , on $t \in (0, 1)$. Aleshores $i(\partial X)$ es pot expressar com l'unió dels S_t , per cada $t \in (0, \epsilon)$ amb ϵ petit. Definim:

$$U_r = i(X) \cup \bigcup_{t \in (0, r)} S_t, \quad V_r = \phi(U_r), \quad \mathbb{R}_r^4 = \#_3S^2 \times S^2 \setminus V_r.$$

Es pot demostrar que \mathbb{R}_r^4 és homeomorf a \mathbb{R}^4 per a tot $r \in (0, 1)$.

Teorema 5.8. *Siguin \mathbb{R}_r^4 i \mathbb{R}_s^4 amb $0 < r < s < 1$ dues varietats topològiques definides per l'explicació anterior. Si $r \neq s$ aleshores \mathbb{R}_r^4 i \mathbb{R}_s^4 no són difeomorfs amb les estructures diferenciables induïdes per $\#_3 S^2 \times S^2$.*

És a dir, \mathbb{R}^4 admet infinites estructures diferenciables exòtiques i aquest infinit és no numerable.

Tot seguit introduïm una nova operació topològica (la versió no-compacta de la suma connexa) que ens permetrà trobar nous \mathbb{R}^4 exòtics a partir d'altres ja coneguts.

Definició 5.9. *Siguin R, R' dos \mathbb{R}^4 exòtics i $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow R, \gamma' : [0, +\infty) \rightarrow R'$ embeddings diferenciables de rajos amb entorns tubulars $\nu \subset R$ i $\nu' \subset R'$, respectivament. Considerem els difeomorfismes $\phi : \nu \rightarrow [0, 1/2) \times \mathbb{R}^3$ i $\phi' : \nu' \rightarrow (1/2, 1] \times \mathbb{R}^3$. Definim la suma final de R i R' com:*

$$R \natural R' = R \cup_{\phi} I \times \mathbb{R}^3 \cup_{\phi'} R'.$$

La suma final ens dona un nou \mathbb{R}^4 exòtic ja que $R \natural R'$ no és difeomorf a R ni a R' . Amb aquesta definició podem enunciar el següent resultat.

Teorema 5.10. *Sigui R_s una família uniparamètrica de \mathbb{R}^4 exòtics. Aleshores el conjunt $\{R_{s,t} = R_s \natural R_t \mid s, t < +\infty\}$ defineix una família 2-paramètrica de \mathbb{R}^4 exòtics tal que existeix un embedding de $R_{s,t}$ en $R_{s',t'}$ si i només si $s \leq s'$ i $t \leq t'$.*

Observem que amb aquestes notacions $R_{0,0}$ és l' \mathbb{R}^4 estàndard.

5.3 Teoremes d'anul·lació

La tercera i última aplicació que veurem de la teoria de Donaldson consisteix en demostrar alguns resultats sobre l'anul·lació dels invariants de Donaldson. Provarem que sota condicions topològiques adequades (molt semblants a les que estem considerant en aquestes darreres seccions) en una varietat diferenciable que descompon en una suma connexa de la forma $M \# N$ es compleix $\gamma_k = 0$. Després estudiarem alguns casos particulars relatius a superfícies algebraïques complexes, resultats que fins l'aparició del teorema de Donaldson eren inaccessibles.

Primer enunciem l'anomenat *teorema de la suma connexa* el qual utilitzarem en alguns casos particulars.

Teorema 5.11. *Sigui M una varietat diferenciable compacta, orientable i simplement connexa de dimensió 4 tal que $b_2^+(M) = \dim H_2^+(M)$ és senar i suposem que M és difeomorf a $M_1 \# M_2$ (preservant l'orientació) amb $b_2^+(M_1) > 0$ i $b_2^+(M_2) > 0$. Aleshores els invariants de Donaldson de M s'anul·len.*

Proposició 5.12. *Si $m \equiv 3 \pmod{4}$ llavors els invariants de Donaldson de $m\mathbb{C}P^2 \# n\overline{\mathbb{C}P^2}$ s'anul·len.*

Demostració. Sigui $M = m\mathbb{C}P^2 \# n\overline{\mathbb{C}P^2}$. L'aplicació de conjugació complexa en $\mathbb{C}P^2$ és un difeomorfisme i indueix l'aplicació -1 en $H^2(M)$. És a dir, si e_1, \dots, e_m i f_1, \dots, f_n

són generadors de $H^2(M)$ llavors podem construir un difeomorfisme de M que indueix un automorfisme h que canvia de signe algun dels e_i . D'aquesta manera h reverteix l'orientació de H^+ i per tant γ_k canvia de signe. Quan expressem γ_k com un polinomi en els e_i i f_i tenim que cada terme diferent de zero conté e_i amb exponent senar, per a tot $i = 1, \dots, m$. De la mateixa manera quan apliquem el difeomorfisme que canvia de signe algun dels f_i llavors obtenim que cada terme en γ_k conté f_i amb exponent parell. Donat que m és senar només tenim dues possibilitats: $\gamma_k = 0$ o bé γ_k té grau imparell. Però el segon cas només passa quan $m \equiv 1 \pmod{4}$, que contradia l'hipòtesi. En conseqüència, $\gamma_k = 0$. \square

Observació 5.13. En el cas que $m \equiv 1 \pmod{4}$ també es pot concloure $\gamma_k = 0$ sempre que $m \geq 5$.

Proposició 5.14. Si $M = N\#(S^2 \times S^2)$ amb $b_2^+(M)$ senar aleshores els invariants de Donaldson de X s'anul·len.

Demostració. Si prenem $v \in H_2(X)$ complint $Q_M(v, v) = 1$ o 2 llavors la reflexió en l'hiperplà ortogonal a v

$$f_v(x) = x - 2 \left(\frac{Q_M(v, x)}{Q_M(v, v)} \right) v$$

defineix un automorfisme en $H_2(X)$. Veient els invariants de Donaldson com polinomis $\gamma_k : H_2(M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ i utilitzant que f_v reverteix l'orientació de H^+ aleshores si $Q_M(v, x) = 0$ llavors $\gamma_k = -\gamma_k = 0$. És a dir, els invariants de Donaldson s'anul·len en el subconjunt $K \subset H_2(M; \mathbb{R})$ donat per:

$$K = \bigcup_{\substack{v \in H_2(M) \\ Q_M(v, v) = 1 \text{ o } 2}} \langle v \rangle^\perp.$$

La proposició seguirà d'aquí utilitzant que K és dens en $H_2(M; \mathbb{R})$. Per a veure-ho utilitzem la classificació de formes indefinides (el teorema concret es pot trobar a [Per06, Ch.6] o en [Sco05, Ch.5]). Així doncs n'hi ha prou en comprovar els casos en que la forma sigui $(+1) \oplus (+1) \oplus (-1) \oplus (-1)$ i:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Farem el cas d'aquesta última forma a mode d'il·lustració. Hem de veure que tots els vectors enters de la forma $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ amb $\text{m.c.d.}(a_2, a_4) = 1$ estan continguts en l'adherència de K . Prenem s, t de manera que $sa_2 + ta_4 = 1$ i N un enter gran. Fixem $a' = (a_1, a_2, a_3, a_4 - \delta)$ on δ ve donat per:

$$\delta = \frac{\langle a, a \rangle + 2}{2(t - Na_2)}.$$

D'aquesta manera $a' \rightarrow a$ quan $N \rightarrow \infty$. Finalment $a' \in K$ ja que es ortogonal a $v = (s + Na_4, a_2, t - Na_2, a_4)$, que és un vector enter complint $\langle v, v \rangle = 2$. \square

Ara anem a donar un parell de resultats per a superfícies algebraiques complexes. Recordem que aquestes són superfícies complexes definides com el lloc de zeros d'un conjunt de polinomis homogenis en un espai projectiu complex. En ser superfícies complexes la seva dimensió real és 4. Anteriorment hem vist un exemple: la superfície K3.

Teorema 5.15. *Sigui M una superfície algebraica complexa compacta i simplement connexa amb $b_2^+(M)$ senar i major que 1. Aleshores, per a tot k suficientment gran, $\gamma_k \neq 0$.*

Gràcies a aquest resultat podrem demostrar de forma senzilla la següent proposició.

Proposició 5.16. *Sigui M una superfície algebraica complexa compacta, simplement connexa amb forma d'intersecció parella i $b_2^+(M)$ senar i major que 1. Suposem que M és difeomorf a $M_1 \# M_2$ (preservant l'orientació) amb $b_2^+(M_1) > 0$ i $b_2^+(M_2) > 0$. Aleshores M_1 o M_2 tenen segon grup d'homologia trivial.*

Demostració. M_1 i M_2 són compactes i simplement connexes per ser-ho M . Aplicant el teorema anterior, γ_d no s'anul·la per a d suficientment gran. Pel teorema 5.11, tenim $b_2^+(M_1) = 0$ o bé $b_2^+(M_2) = 0$. Suposem $b_2^+(M_1) = 0$ sense pèrdua de generalitat. D'aquesta manera, $b_2(M) = 0$ o M_1 té una forma d'intersecció definida negativa. Si $b_2(M) \neq 0$ llavors pel teorema de Donaldson la forma d'intersecció de M_1 és equivalent a la forma estàndard $\langle -1 \rangle^n$. Però per hipòtesi la forma d'intersecció de M és parella, cosa que implica que la forma d'intersecció de M_1 també ho és. En definitiva, no existeix cap classe x tal que $Q_{M_1}(x, x) = -1$. Per tant $b_2(M) = 0$ i $H_2(M) = 0$. \square

6 Conclusions

Tot i la complexitat tècnica de la teoria de Donaldson i en especial de la prova del teorema que porta aquest mateix nom, la memòria ha servit per veure les idees que han canviat radicalment la forma de veure les varietats topològiques de dimensió 4. La forma d'intersecció i la seva signatura són uns invariants que han provat ser fonamentals per a entendre la topologia d'aquestes varietats. Desenvolupaments en aquesta línia permeten, a més, contruir nous invariants per varietats de dimensió 4 i arribar a resultats purament topològics que abans eren inaccessibles. Com hem pogut veure en el darrer capítol aquesta teoria va més enllà de la topologia i troba aplicacions en altres àrees com ara les varietats algebraiques. Encara que ens allunya una mica del nostre objectiu aprofitem per dir que, de fet, és possible treballar amb els invariants de Donaldson mitjançant eines de geometria algebraica.

La barreja d'eines tan diferents com són la cohomologia i les teories gauge han donat com a producte una resposta fonamental a les preguntes formulades per la part més fundacional de les varietats diferenciables. Aquest capítol de l'història de la geometria i la topologia esdevé una interessant interacció entre la física i les matemàtiques. De forma més tradicional l'expectativa inicial és que la topologia doni aplicacions per a entendre millor les equacions de la física però les varietats topològiques ens presenta l'altre direcció en la qual s'apliquen idees originàries en la física per a introduir noves matemàtiques. Aquestes aplicacions no són un fet puntual d'aquesta àrea sinó que també podem trobar altres parts de la topologia on són efectives com ara en els invariants de nusos.

Per acabar farem esment al fet que la teoria de Seiberg-Witten suposa realment un gran avenç en la construcció d'invariants que distingeixin l'estructura diferenciable de les varietats. No hem dedicat massa temps a aquest tema per a poder introduir correctament les idees relatives a la teoria de Donaldson que són en les que es basen totes aquestes eines. Una continuació de l'estudi de les varietats de dimensió 4 passaria per la teoria de Seibeg-Witten i les equacions que porten el mateix nom.

Referències

- [AB07] T. Asselmeyer-Maluga and C.H. Brans. *Exotic Smoothness and Physics: Differential Topology and Spacetime Models*. World Scientific Publishing, 2007.
- [Don83] S. K. Donaldson. An application of gauge theory to four-dimensional topology. *J. Differential Geom.* 18 (1983), no. 2, 279–315.
- [Don96] S. K. Donaldson. The Seiberg-Witten Equations and 4-Manifold Topology. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, Volume 33, Number 1, January 1996.
- [DK90] S.K. Donaldson and P.B. Kronheimer. *The Geometry of Four-Manifolds*. Clarendon Press, 1990.
- [Fig19] J. Figueroa. *Gauge Theory*. Edinburgh Mathematical Physics Group, 2019. <https://empg.maths.ed.ac.uk/Activities/EKC/GaugeTheory.pdf>.
- [FU84] D. S. Freed and K.K. Uhlenbeck. *Instantons and Four-Manifolds*. Springer, 1984.
- [Hat02] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [HT97] M. Hutchings and C. H. Taubes. An introduction to the Seiberg-Witten equations on symplectic manifolds. *Symplectic Geometry and Topology (IAS/Park City Mathematics Series)* 7, p.103–142, Amer. Math. Soc., 1999.
- [Nab00] G. L. Naber. *Topology, Geometry and Gauge fields: Interactions*. Springer-Verlag, 2000.
- [Per06] T. Perutz. *Smooth four-manifolds*. Cambridge University Part III course, 2006. https://web.ma.utexas.edu/users/perutz/PDF_files/Smooth4manifolds.pdf.
- [Sco05] A. Scorpan. *The Wild World of 4-Manifolds*. American Mathematical Society, 2005.
- [Wit94] E. Witten. Monopoles and four-manifolds. *Math. Res. Lett.* 1 (1994), no. 6, 769–796.