



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

INTRODUCCIÓN A LA MECÁNICA CELESTE

Autor: Xavier De Sensi Berga

Director: Angel Jorba
Realitzat a: Departament de
Matemàtica i informàtica

Barcelona, 19 de enero de 2020

Abstract

The mechanics of celestial bodies has been studied since the origin of human reasoning, specially the planets. We have seen examples of this in the counting of lunar cycles of the primitive homo sapiens, the stars dome of the greek, or in the geocentric and heliocentric visions of our Solar system.

Nowadays, with all the avances in the fields of Maths, modern Physics and computers, the study of celestial bodies mechanics has advanced a lot. This paper aims to explain the behaviour of big mass particles attracted to each other in space, according to the laws of Keppler and Newton. This is carried out from a modern point of view and with mathematical rigor.

Resumen

Desde los orígenes del razonamiento humano se ha estudiado el movimiento de los cuerpos celestes, principalmente los planetas. Desde los primitivos homo sapiens contando los ciclos de la luna, pasando por la cúpula de estrellas con los planetas o errantes de los griegos, la visión geocentrista y la heliocentrista hasta la actualidad.

Actualmente con los avances matemáticos, la física moderna y los ordenadores el estudio de la mecánica celeste ha avanzado mucho. Este trabajo intenta explicar desde un punto moderno y utilizando la rigurosidad matemática cuál es el comportamiento de las grandes masas en el espacio que se ven atraídas la una a la otra siguiendo las leyes de Keppler y Newton.

Agradecimientos

Me gustaría comenzar con un agradecimiento general a todas aquellas personas que han mostrado interés por este trabajo, amigos, compañeros y familiares que se han interesado por el tema y me han acompañado durante este proyecto.

En especial agradecer a Angel Jorba por tutelar mi trabajo, orientarme en el inicio del mismo y trazarme un rumbo, darme libertad para seguir mi camino pero al mismo tiempo asesorarme siempre que lo he necesitado.

Por último agradecer a todo aquél que tome estas hojas en sus manos y se tome la molestia de leerlo con interés e ilusión por aprender algo nuevo.

Índice

| | |
|--|-----------|
| 1. Problema de la fuerza central | 1 |
| 1.1. Introducción | 1 |
| 1.2. Momento angular | 1 |
| 1.3. Conservación de la energía | 3 |
| 1.4. Ley del cuadrado inverso: Primera ley de Keppler | 5 |
| 1.5. Relaciones entre las constantes | 8 |
| 1.6. Orbitas bajo atracciones no-newtonianas | 10 |
| 1.7. Posición en la órbita: Caso $h = 0$ | 12 |
| 1.8. Posición en la órbita: $h \neq 0$ | 14 |
| 1.9. Posición en la órbita: Caso $h > 0$ | 17 |
| 1.10. Posición en la órbita: Caso $h < 0$ | 18 |
| 1.11. El problema de los dos cuerpos | 20 |
| 2. Problema de los n cuerpos | 23 |
| 2.1. Introducción | 23 |
| 2.2. Problema de los tres cuerpos: Coordenadas de Jacobi | 25 |
| 2.3. Soluciones de Lagrange | 29 |
| 2.4. Soluciones de Euler | 32 |
| 2.5. El problema restringido de tres cuerpos | 35 |
| 2.6. El problema circular restringido | 36 |
| 2.7. Soluciones de equilibrio | 38 |
| 2.8. Curvas de velocidad zero | 40 |
| 3. Conclusiones | 43 |

1. Problema de la fuerza central

1.1. Introducción

Comenzamos a estudiar la mecánica celeste con el problema de la fuerza central: Describir el movimiento de una partícula Q con masa m que es atraída por un centro O siguiendo la fuerza $mf(r)$. Asumiremos que la función f es continua y que $0 < r < \infty$.

Definición 1.1. *La función f se llama Ley de atracción.*

De acuerdo con la segunda ley de Newton, el movimiento de la partícula está gobernado por la ecuación

$$m\ddot{\vec{r}} = -mf(r)r^{-1}\vec{r}, \quad (1.1)$$

donde $r^{-1}\vec{r}$ es el vector unitario que va del origen O a la partícula Q . Denotamos por $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ a la velocidad, y por tanto la ecuación diferencial de segundo grado puede reescribirse como:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v}, \quad \dot{\vec{v}} = -f(r)r^{-1}\vec{r}. \quad (1.2)$$

Observamos que el valor de m se vuelve irrelevante para estudiar el sistema. Queremos estudiar las funciones $\vec{r}(t)$ y $\vec{v}(t)$ que satisfacen las ecuaciones diferenciales.

El caso especial en el que la atracción es newtoniana es el caso más importante. En este caso $f(r) = \mu r^{-2}$ donde μ es una constante positiva que depende únicamente de las unidades escogidas. En este caso el sistema de ecuaciones diferenciales es el siguiente

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v}, \quad \dot{\vec{v}} = -\mu r^{-3}\vec{r}. \quad (1.3)$$

1.2. Momento angular

En esta sección estudiaremos un vector que permanece constante en el tiempo, a este vector se lo conoce como Momento Angular.

Definición 1.2. *El momento angular \vec{L} de una partícula Q con respecto a un punto O del espacio se define como el producto vectorial de la posición \vec{r} con respecto a su cantidad de movimiento $\vec{p} = m\vec{v}$.*

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}.$$

Para simplificar la notación, desde ahora nos referiremos a $\vec{c} = \vec{r} \times \vec{v}$ como momento angular.

Lema 1.3. *Sean $\vec{r}(t)$ y $\vec{v}(t)$ dos funciones que cumplen el sistema de ecuaciones diferenciales (1.2), entonces $\vec{r} \times \dot{\vec{v}} = 0$.*

Demostración: Primero que nada, observamos que $\dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = -f(r)r^{-1}\vec{r}$ por la segunda ecuación de (1.2). Si sustituimos esta igualdad en el producto vectorial obtenemos $\vec{r} \times \dot{\vec{v}} = -f(r)r^{-1}(\vec{r} \times \vec{r}) = 0$.

Lema 1.4. *El producto vectorial $\vec{c} = \vec{r} \times \vec{v}$ es constante.*

Demostración: Calculamos el valor de la derivada de este producto vectorial:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = \vec{r} \times \dot{\vec{v}} + \dot{\vec{r}} \times \vec{v}.$$

Hemos visto en el **lema 1.3** que $\vec{r} \times \dot{\vec{v}} = 0$. Por otro lado, $\dot{\vec{r}} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{v} = 0$. Juntando estos resultados tenemos que la derivada del producto vectorial es cero, por lo tanto podemos concluir que $\vec{r} \times \vec{v}$ es un vector constante.

Teorema 1.5. Dependiendo del valor de \vec{c} podemos restringir el movimiento de la partícula Q .

(1) Si $\vec{c} \neq 0$ entonces el movimiento de la partícula Q está contenido en un plano que tiene a \vec{c} como vector normal.

(2) Si $\vec{c} = 0$ entonces el movimiento de la partícula Q está contenido en una recta.

Demostración:

La afirmación (1) se deduce inmediatamente del **lema 1.4**, como \vec{c} y \vec{r} son perpendiculares, por definición del producto vectorial, \vec{r} se mantiene perpendicular a \vec{c} a lo largo de tiempo y por tanto está contenido en el plano que tiene como vector normal a \vec{c} .

Respecto a la afirmación (2), sea \vec{u} un vector diferenciable en función del tiempo. Entonces $u^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$, si derivamos esta expresión obtenemos que $2u\dot{u} = \dot{\vec{u}} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \dot{\vec{u}} = 2\vec{u} \cdot \dot{\vec{u}}$.

Entonces, si $\vec{u} \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\vec{u}}{u} &= \frac{\dot{\vec{u}}u - \vec{u}\dot{u}}{u^2}, \\ &= \frac{\dot{\vec{u}}u^2 - \vec{u}\dot{u}u}{u^3}, \\ &= \frac{(\vec{u} \cdot \vec{u})\dot{\vec{u}} - (\vec{u} \cdot \dot{\vec{u}})\vec{u}}{u^3}, \\ &=^* \frac{(\vec{u} \times \dot{\vec{u}}) \times \vec{u}}{u^3}. \end{aligned}$$

(*) Esta última igualdad se obtiene por una propiedad del producto escalar $A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$ tomando $\vec{u} = B$ y $\dot{\vec{u}} = A = C$.

Tomamos $\vec{u} = \vec{r}$, entonces

$$\frac{d}{dt} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{(\vec{r} \times \vec{v}) \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\vec{c} \times \vec{r}}{r^3}. \quad (1.4)$$

por tanto, $\frac{d}{dt} \frac{\vec{r}}{r} = 0$ ya que $\vec{c} = 0$

En consecuencia, si $\vec{c} = 0$, entonces tenemos que $\vec{r}r^{-1}$ es constante y por tanto el movimiento de la partícula Q está contenido en una recta.

Cuando $\vec{c} \neq 0$ se introducen las coordenadas polares centradas en O ,

$$\vec{r} = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0), \quad \vec{c} = (0, 0, c).$$

Además tenemos la igualdad $r^2\dot{\theta} = c$ que se obtiene realizando el producto vectorial $\vec{r} \times \vec{v}$ en coordenadas polares

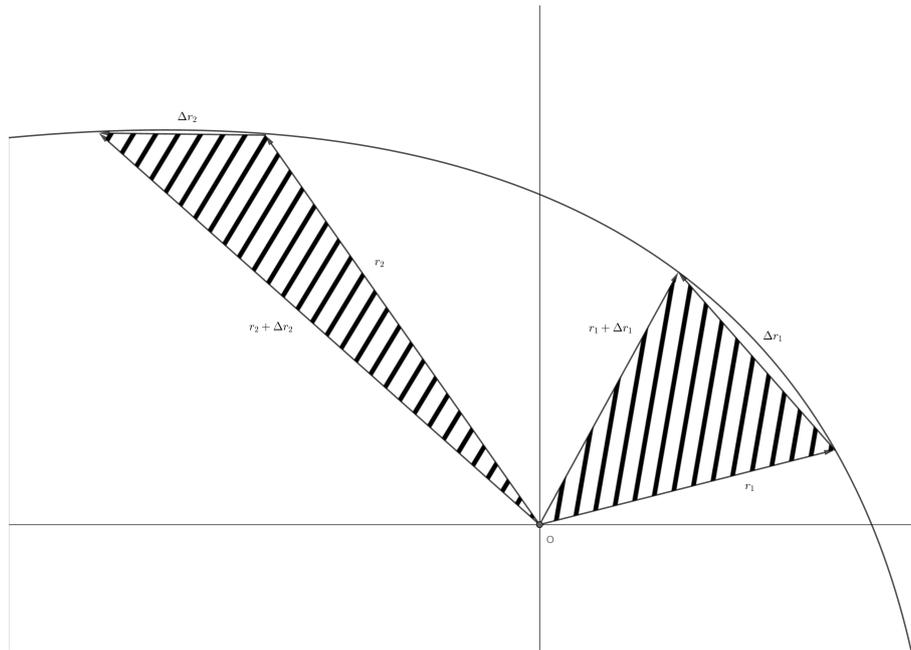
$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = (-r\dot{\theta}\sin\theta, r\dot{\theta}\cos\theta, 0).$$

$$\begin{aligned}\vec{r} \times \vec{v} &= (0, 0, r^2\dot{\theta}(\cos^2\theta + \sin^2\theta)), \\ &= (0, 0, r^2\dot{\theta}).\end{aligned}$$

Teorema 1.6. Segunda ley de Kepler: La velocidad a la que el área es barrida por el radio es constante.

Demostración: Esta propiedad se demuestra aplicando directamente la definición de área triangular y derivando en el tiempo. Esto es así porque en un instante Δt , el área barrida por \vec{r} es igual al área del triángulo formado por $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t)$.

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{|\vec{r} \times \Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \dot{\vec{r}}| = \frac{c}{2}.$$



1.3. Conservación de la energía

En este capítulo estudiaremos otra constante del sistema aún más importante, un escalar llamado energía.

Consideramos la ecuación (1.1) y multiplicamos por la derecha escalarmente por \vec{v} y obtenemos

$$\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} = -f(r)r^{-1}(\vec{r} \cdot \vec{v}).$$

Calculamos la expresión de $\vec{r} \cdot \dot{\vec{v}} = \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}$. Partiendo de la expresión $\vec{r} \cdot \vec{r} = r^2$, derivamos y obtenemos que $\vec{r} \cdot \dot{\vec{v}} = r\dot{r}$.

$$\begin{aligned}\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} &= -f(r)r^{-1}r\dot{r}, \\ &= -f(r)\dot{r}.\end{aligned}$$

integrando en ambos extremos de la ecuación, y utilizando que

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} v^2 = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} = \dot{\vec{v}} \cdot \vec{v}.$$

obtenemos la siguiente expresión:

$$\frac{1}{2} v^2 = f_1(r) + h. \quad (1.5)$$

donde $f_1(r)$ es una función cuya derivada es $-f(r)$ y h es la constante de integración que cumple la igualdad. La función $f_1(r)$ se determina de forma convencional de la siguiente manera

$$f_1(r) = \int_r^a f(x) dx.$$

donde $a = \begin{cases} \infty & \text{si la integral converge.} \\ 0 & \text{si la integral diverge con } a = \infty \text{ y converge con } a = 0. \\ 1 & \text{si la integral diverge en los casos anteriores.} \end{cases}$

En el caso $f(r) = \mu r^{-p}$ tomamos, $a = \infty$ si $p > 1$, $a = 0$ si $p < 1$ y $a = 1$ si $p = 1$. En el caso más importante, el caso newtoniano tenemos que,

$$f(r) = \mu r^{-2}, \quad f_1(r) = \mu r^{-1}. \quad (1.6)$$

Definición 1.7. La función $-mf_1(r)$ se llama energía potencial y se denota por el símbolo $-U$. Al escalar $mv^2/2$ se conoce como energía cinética y se denota por el símbolo T . Al escalar $h_1 = mh$ se denomina energía.

Teorema 1.8. Principio de la conservación de la energía: El valor de h_1 es constante y cumple la siguiente igualdad

$$T = U + h_1. \quad (1.7)$$

Demostración: Este resultado es trivialmente cierto tomando la expresión (1.5) y multiplicando por la masa de la partícula. Además, como h es constante, $h_1 = mh$ también es constante.

Lema 1.9. El teorema de conservación de la energía puede reescribirse como

$$r^2 \dot{r}^2 + c^2 = 2r^2 [f_1(r) + h].$$

Demostración: Partimos de la siguiente igualdad vectorial,

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + (\vec{a} \times \vec{b})^2 = a^2 b^2.$$

Tomamos $\vec{a} = \vec{r}$ y $\vec{b} = \dot{\vec{v}}$ y utilizamos las siguientes igualdades; $(\vec{r} \cdot \dot{\vec{v}})^2 = (r\dot{r})^2$ y $(\vec{r} \times \dot{\vec{v}})^2 = c^2$,

$$\begin{aligned}r^2 v^2 &= (\vec{r} \cdot \dot{\vec{v}})^2 + (\vec{r} \times \dot{\vec{v}})^2, \\ &= (r\dot{r})^2 + c^2.\end{aligned}$$

Sustituimos v^2 en la ecuación de la conservación de la energía

$$2r^2 [f_1(r) + h] = r^2 \dot{r}^2 + c^2.$$

1.4. Ley del cuadrado inverso: Primera ley de Kepler

En esta sección asumiremos que la partícula se mueve siguiendo la ley de gravitación de Newton y por tanto el sistema diferencial (1.2) se puede definir de la siguiente forma

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v}, \quad \dot{\vec{v}} = -\mu r^{-3} \vec{r}. \quad (1.8)$$

En el sistema existe otro vector además de \vec{c} que permanece constante, para encontrarlo, partimos de la igualdad (1.4), multiplicando por $-\mu$ a ambos extremos de la igualdad obtenemos

$$-\mu \frac{d \vec{r}}{dt r} = \vec{c} \times (-\mu r^{-3} \vec{r}).$$

de (1.8) deducimos que

$$\mu \frac{d \vec{r}}{dt r} = \dot{\vec{v}} \times \vec{c}.$$

e integrando ambas igualdades obtenemos

$$\mu \left(\vec{e} + \frac{\vec{r}}{r} \right) = \vec{v} \times \vec{c}. \quad (1.9)$$

donde \vec{e} es la constante de integración.

Definición 1.10. *El vector \vec{e} se denomina vector excentricidad.*

Tenemos que \vec{r} y \vec{c} son perpendiculares y por tanto si $\vec{c} \neq 0$ entonces \vec{e} y \vec{c} también, por tanto \vec{e} está contenido en el plano de movimiento. En el caso $\vec{c} = 0$ entonces $\vec{r}/r = -\vec{e}$, por lo que \vec{e} está contenido en la recta de movimiento.

Lema 1.11. *Sea Q una partícula que se mueve sobre el espacio siguiendo el sistema de ecuaciones diferenciales (1.8), entonces*

$$\vec{e} \cdot \vec{r} + r = c^2/\mu. \quad (1.10)$$

Demostración: Partimos de la expresión (1.9) y multiplicamos escalarmente por \vec{r}

$$\begin{aligned} \mu (\vec{e} \cdot \vec{r} + r) &= \vec{r} \cdot \vec{v} \times \vec{c}, \\ &= \vec{r} \times \vec{v} \cdot \vec{c}, \\ &= \vec{c} \cdot \vec{c}, \\ &= c^2. \end{aligned}$$

dividiendo por μ a ambos lados de la igualdad obtenemos

$$\vec{e} \cdot \vec{r} + r = c^2/\mu.$$

Hay dos posibles casos. Si $\vec{e} = 0$ entonces el módulo del radio es $r = c^2/\mu$ constante y por tanto el movimiento es circular. Además, a partir del **lema 1.9** tenemos que $v = \mu/c$, la partícula se mueve a velocidad también constante. Aplicando la ley de conservación de la energía obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{v^2}{2} &= \frac{\mu}{r} + h, \\ \frac{\mu^2}{2c^2} &= \frac{\mu^2}{c^2} + h, \\ h &= -\frac{\mu^2}{2c^2}.\end{aligned}$$

y por lo tanto la energía de la partícula es negativa. También se deduce que $2T = U$ teniendo en cuenta que $T = \mu^2/2c^2$ y $U = \mu^2/c^2$.

Si $\vec{e} \neq 0$ denotamos por ω al ángulo formado entre el eje de abscisas y \vec{e} . Si (r, θ) representa la posición de la partícula Q , denotamos el ángulo $\theta - \omega$ por f . La misma posición puede representarse por (r, f) si \vec{e} es usado como eje de abscisas. Por tanto, $\vec{e} \cdot \vec{r} = er \cos f$ y la ecuación del **lema 1.11** se puede reescribir de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}er \cos f + r &= c^2/\mu, \\ r(e \cos f + 1) &= c^2/\mu, \\ r &= \frac{c^2/\mu}{e \cos f + 1}.\end{aligned}\tag{1.11}$$

Teorema 1.12. Primera ley de Kepler: *Bajo las condiciones de una atracción newtoniana $f(r) = \mu r^{-2}$, la órbita descrita por una partícula Q es una sección cónica.*

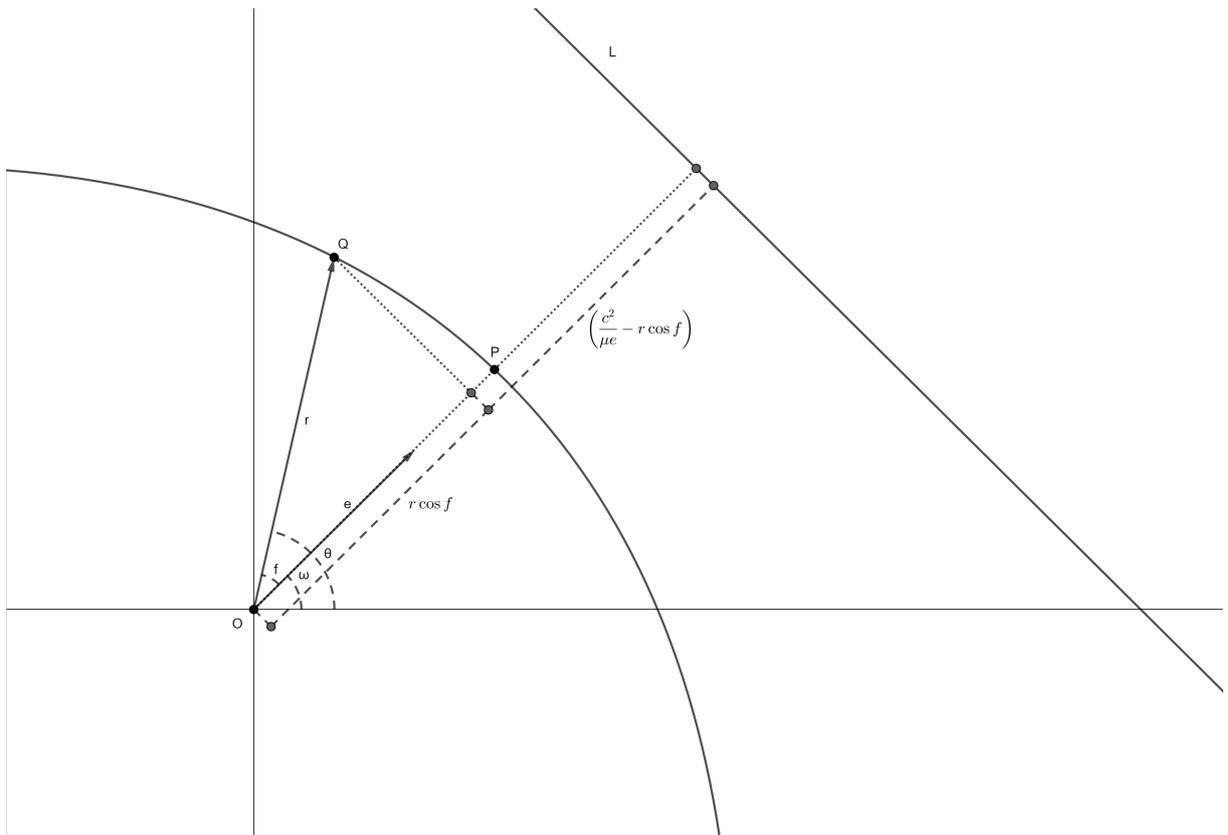
Demostración:

Si $\vec{e} = 0$, hemos visto anteriormente que la órbita de la partícula Q es circular, y por tanto, una sección cónica.

Si $\vec{e} \neq 0$ Consideramos la recta L a distancia $c^2/\mu e$ de O perpendicular a \vec{e} y en el lado de O hacia donde apunte \vec{e} , podemos reescribir la ecuación (1.11) como

$$\begin{aligned}r &= \frac{c^2/\mu}{e \cos f + 1}, \\ r(e \cos f + 1) &= c^2/\mu, \\ r &= \frac{c^2}{\mu} - r e \cos f, \\ r &= e \left(\frac{c^2}{\mu e} - r \cos f \right).\end{aligned}$$

Este resultado demuestra que la distancia de la partícula Q desde O es e veces la distancia desde L , en otras palabras $\|OQ\| = e\|QL\|$, teniendo en cuenta que la distancia entre un punto y una recta es la mínima distancia entre el punto y cualquier punto de la recta. Esto concuerda con una de las definiciones de sección cónica y por tanto podemos deducir que la partícula se mueve en una sección cónica con excentricidad e y uno de sus focos en O .



De la ecuación (1.11) deducimos que el valor de r es mínimo cuando $f = 0$ dado que $e > 0$. Por lo tanto, el vector \vec{e} tiene módulo igual a la excentricidad y apunta al punto P de la órbita en la que la partícula se encuentra más próxima al foco.

Definición 1.13. Al punto P se le llama pericentro, al ángulo f anomalía verdadera.

El pericentro recibe varios nombres dependiendo de la fuente de atracción O , en el caso del Sol se llama perihelio, en el de la tierra, perigeo, y en el caso de una estrella, periastro.

En resumen, hemos visto que:

- Si $c = 0$ la órbita cae en una recta.
- Si $e = 0$ en una circunferencia.
- Si $0 < e < 1$ tenemos una elipse
- Si $e = 1$ una parábola
- Si $e > 1$ la órbita cae en una branca de hipérbola convexa al foco.

Además, del resultado visto anteriormente $r^2 \dot{\theta} = c$ observamos que si $c \neq 0$, entonces $\dot{\theta} = \dot{f} > 0$ y por tanto la dirección del movimiento de la partícula Q sobre la órbita es constante.

1.5. Relaciones entre las constantes

Tomando coordenadas para el vector posición y vector velocidad, $\vec{r} = (x, y, z)$ y $\vec{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$ obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales siguiente

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha, & \dot{\alpha} &= -f(r) r^{-1} x, \\ \dot{y} &= \beta, & \dot{\beta} &= -f(r) r^{-1} y, & r^2 &= x^2 + y^2 + z^2. \\ \dot{z} &= \gamma, & \dot{\gamma} &= -f(r) r^{-1} z,\end{aligned}$$

Todas estas funciones son continuas y derivables y por tanto existe una única solución del problema de Cauchy con condiciones iniciales $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$ y $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$.

En el caso de una atracción newtoniana sabemos que \vec{c} , \vec{e} y h permanecen constantes y pueden determinarse a partir de \vec{r}_0 y \vec{v}_0 de la siguiente manera

$$\vec{c} = \vec{r}_0 \times \vec{v}_0, \quad \vec{e} = \mu^{-1} (\vec{v}_0 \times \vec{c}) - r_0^{-1} \vec{r}_0, \quad h = v_0/2 - \mu r_0.$$

Lema 1.14. *Con las condiciones newtonianas del problema de la fuerza central tenemos la siguiente igualdad entre las constantes del sistema,*

$$\mu^2 (e^2 - 1) = 2hc^2.$$

Demostración: Para comenzar, elevamos al cuadrado la expresión (1.9) y utilizando que $(\vec{v} \times \vec{c})^2 = v^2 c^2$, debido a que \vec{c} y \vec{v} son perpendiculares, y obtenemos

$$\mu^2 \left(\vec{e} + \frac{\vec{r}}{r} \right)^2 = v^2 c^2.$$

Descomponiendo el cuadrado de la suma tenemos que

$$\mu^2 \left(e^2 + \frac{2}{r} \vec{e} \cdot \vec{r} + 1 \right) = v^2 c^2.$$

Utilizando la expresión $v^2 = 2h + 2\mu/r$ que resulta de multiplicar por dos la ecuación de conservación de la energía y utilizando la ecuación (1.10) obtenemos que

$$\begin{aligned}\mu^2 \left(e^2 + \frac{2}{r} \vec{e} \cdot \vec{r} + 1 \right) &= v^2 c^2, \\ \mu^2 \left[e^2 + \frac{2}{r} \left(\frac{c^2}{\mu} - r \right) + 1 \right] &= \left(2h + 2\frac{\mu}{r} \right) c^2, \\ \mu^2 \left(e^2 + \frac{2c^2}{r\mu} - 1 \right) &= 2hc^2 - \frac{2\mu c^2}{r}, \\ \mu^2 (e^2 - 1) + \frac{2\mu c^2}{r} &= 2hc^2 + \frac{2\mu c^2}{r}, \\ \mu^2 (e^2 - 1) &= 2hc^2.\end{aligned}$$

Observación: Este resultado es consistente con el resultado obtenido en el apartado anterior, si $e = 1$, entonces $c = 0$ y si $e = 0$, entonces $h = -\mu^2/2c$. Además, si $c \neq 0$, entonces $e < 1$, $e = 1$ o $e > 1$ concuerda con $h < 0$, $h = 0$ o $h > 0$ respectivamente.

Lema 1.15. Si $h, c \neq 0$ y sea a es el semieje mayor de la cónica, entonces

$$a = \frac{1}{2}\mu|h|^{-1}. \quad (1.12)$$

Demostración: La condición $h \neq 0$ es equivalente a que $e \neq 1$ debido al resultado anterior.

Caso $0 < e < 1$ o caso elíptico; hemos visto que e corresponde a la excentricidad de la cónica y por tanto, tenemos que $a = r_m + ea$, donde r_m corresponde a la distancia del centro de atracción O al pericentro P . Por (1.11) tomando $f = 0$, obtenemos la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{\mu(e+1)} + ea &= a, \\ \frac{c^2}{\mu(1-e^2)} &= a. \end{aligned}$$

aplicando el **lema 1.14** obtenemos la siguiente ecuación

$$\frac{-\mu}{2h} = a.$$

como en este caso, la energía del sistema es negativa, podemos reescribir este resultado como

$$a = \frac{1}{2}\mu|h|^{-1}.$$

Caso $e > 1$ o caso hiperbólico; tenemos en este caso que $ae = r_m + a$. Utilizando nuevamente (1.11) obtenemos que:

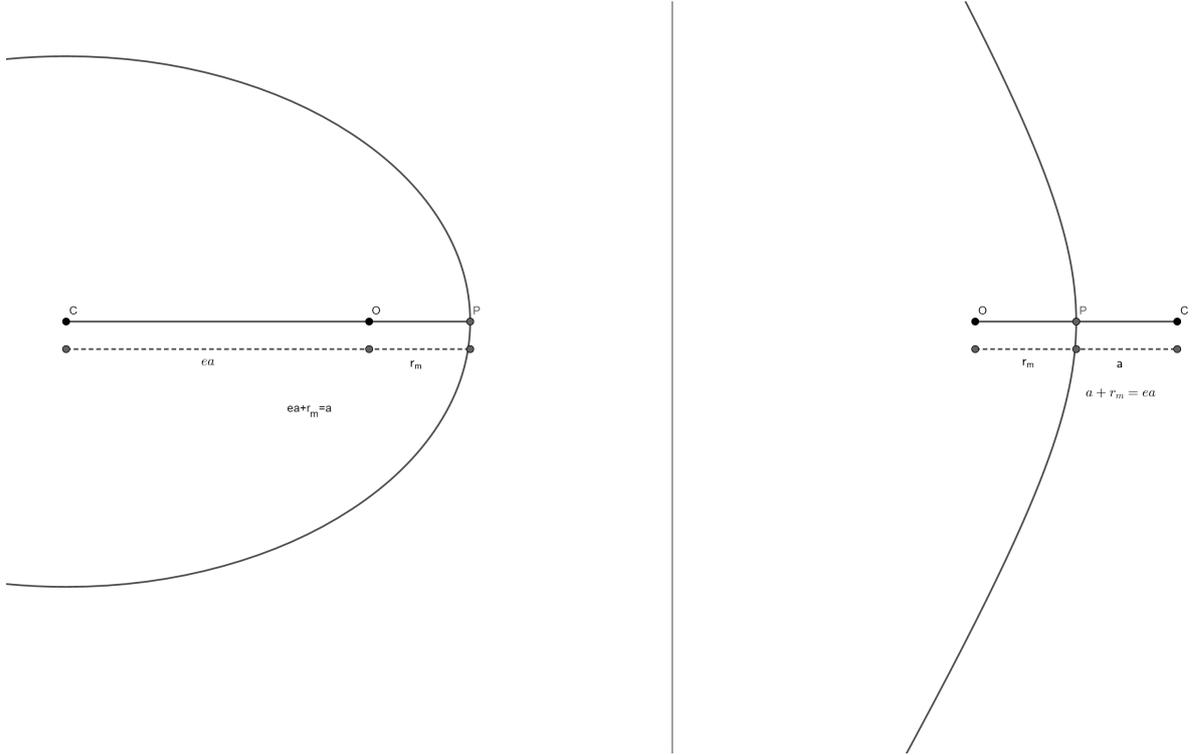
$$\begin{aligned} \frac{c^2}{\mu(e+1)} + a &= ae, \\ \frac{c^2}{\mu(e^2-1)} &= a. \end{aligned}$$

aplicando el **lema 1.14** obtenemos la siguiente ecuación

$$\frac{\mu}{2h} = a.$$

como en este caso, la energía del sistema es positiva, podemos reescribir este resultado como

$$a = \frac{1}{2}\mu|h|^{-1}.$$



Juntando este resultado con la ecuación de la conservación de la energía,

$$\begin{cases} v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right) & \text{si } h > 0. \\ v^2 = \frac{2\mu}{r} & \text{si } h = 0. \\ v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) & \text{si } h < 0. \end{cases}$$

Tenemos dos vectores de \mathbb{R}^3 y una constante en \mathbb{R} , por lo que en total son 7 constantes, debido al lema (1.14) y a que $\vec{c} \cdot \vec{e} = 0$, tenemos 5 constantes independientes, veremos más adelante que en efecto el grado de libertad es 5.

1.6. Órbitas bajo atracciones no-newtonianas

Si $c = 0$, hemos visto que la órbita es una recta, por lo tanto en esta sección consideramos que $c \neq 0$ y además asumiremos que $f(r)$ tiene derivada continua.

Primero que nada, hablaremos del caso circular, es decir, $r = r_0$ constante, por la ley de conservación de la energía tenemos que el módulo de la velocidad también es constante $v = v_0$. La aceleración normal en el plano de movimiento es v_0^2/r_0 y debe estar equilibrada con la atracción ejercida por $f(r)$, por lo tanto tenemos que $v_0^2 = r_0 f(r)$. Sabemos que \vec{r} y \vec{v} son perpendiculares, juntando este resultado con $\vec{r} \times \vec{v} = \vec{c}$, obtenemos que $rv = c$, $r_0 v_0 = c$ y por tanto, $c^2 = r_0^3 f(r_0)$.

Por el **lema 1.9** y utilizando que $\dot{r} = 0$, deducimos que $c^2 = 2r^2 [f_1(r) + h]$. Podemos definir el movimiento circular a través de estas dos ecuaciones.

$$c^2 = r_0^3 f(r_0), \quad c^2 = 2r_0^2 [f_1(r_0) + h]. \quad (1.13)$$

Lema 1.16. *En el caso general del problema de la fuerza central tenemos el siguiente resultado*

$$\ddot{r} - c^2 r^{-3} = -f(r).$$

Demostración: Partimos de la igualdad $\vec{r} \cdot \vec{r} = r^2$ y derivando se obtiene $r\dot{r} = \vec{r} \cdot \dot{\vec{v}}$ derivando nuevamente se obtiene que

$$r\ddot{r} + \dot{r}^2 = (\vec{r} \cdot \dot{\vec{v}}) + (\vec{v} \cdot \vec{v}) = (\vec{r} \cdot \dot{\vec{v}}) + v^2.$$

Utilizando el **lema 1.9** obtenemos que

$$\begin{aligned} r^2\dot{r}^2 + c^2 &= 2r^2[f_1(r) + h], \\ r^2\dot{r}^2 + c^2 &= r^2v^2, \\ \dot{r}^2 + c^2r^{-2} &= v^2. \end{aligned}$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación original,

$$\begin{aligned} r\ddot{r} + \dot{r}^2 &= (\vec{r} \cdot \dot{\vec{v}}) + \dot{r}^2 + c^2r^{-2}, \\ r\ddot{r} &= (\vec{r} \cdot \dot{\vec{v}}) + c^2r^{-2}. \end{aligned}$$

Como $\dot{\vec{v}} = -f(r)r^{-1}\vec{r}$ tenemos que $(\vec{r} \cdot \dot{\vec{v}}) = -f(r)r^{-1}(\vec{r} \cdot \vec{r}) = -rf(r)$ y por tanto

$$r\ddot{r} = -rf(r) + c^2r^{-2}.$$

$$\ddot{r} - c^2r^{-3} = -f(r).$$

La solución $r = r_0$, el movimiento circular, es una solución del lema anterior. Además dados los valores de r y \dot{r} a $t = 0$, como esta es una solución del problema de Cauchy y la función f es continua y derivable, en particular localmente Lipschitz y utilizando el teorema de existencia y unicidad de soluciones maximales, esta es la única posibilidad.

En el caso general, partimos del lema anterior y sustituimos la dependencia de la ecuación con respecto al tiempo utilizando la igualdad $r^2\dot{\theta} = c$ y el cambio de variable $r = \rho^{-1}$. Derivando obtenemos que $\dot{r} = -\rho^{-2}\dot{\rho} = -\rho^{-2}\rho'\dot{\theta} = -\rho^{-2}\rho'c\rho^{-2} = -c\rho'$ donde (\prime) representa la derivada respecto a θ . Por último $\ddot{r} = -c\rho''\dot{\theta} = -c^2\rho''\rho^2$. La ecuación del **lema 1.16** se convierte en

$$\rho'' + \rho = c^{-2}\rho^{-2}f\left(\frac{1}{\rho}\right). \quad (1.14)$$

En general no se puede resolver ρ en términos de θ de forma reconocible, estudiaremos unos casos especiales.

Supongamos que $f(r) = \mu r^{-2}$, el caso newtoniano, entonces $\rho'' + \rho = \mu/c^2$ y ρ es de la forma $(\mu/c^2) + A \cos \theta + B \sin \theta$ y su inversa, \vec{r} tiene la forma de (1.11) tomando $f = \theta - \omega$.

Otro caso sencillo es $f(r) = \mu r^{-3}$. Tenemos que $\rho'' + \rho = \mu c^{-2}\rho$ o equivalentemente $\rho'' + (1 - \mu c^{-2})\rho = 0$. Las soluciones de este sistema son $A \sin\left(\theta\sqrt{1 - \mu c^{-2}}\right) + B \cos\left(\theta\sqrt{1 - \mu c^{-2}}\right)$. Este último cálculo está hecho con *Wolfram Alpha*.

1.7. Posición en la órbita: Caso $h = 0$

En esta sección volvemos a estudiar el problema de la fuerza central en el caso de una atracción newtoniana. Como hemos visto en la sección 1.5, dados \vec{r}_0 y \vec{v}_0 , el movimiento queda completamente determinado, dado que estos valores nos permiten determinar \vec{c} y \vec{e} . Ahora nos centraremos en determinar dónde se encuentra la partícula en un instante t_1 .

Utilizaremos un cambio de variable sobre t a una unidad ficticia de tiempo u , $t = t(u)$.

Definición 1.17. *Esta nueva variable de tiempo u se denomina anomalía excéntrica.*

Partimos de la expresión del lema (1.9) teniendo en cuenta que en el caso newtoniano $f_1(r) = \mu/r$.

$$(r\dot{r})^2 + c^2 = 2(\mu r + hr^2). \quad (1.15)$$

Se escoge u de manera que $r\dot{u}$ sea igual a una constante k ,

$$u = k \int_T^t \frac{d\tau}{r(\tau)}. \quad (1.16)$$

Donde T y k son valores que determinaremos más adelante. Utilizando la regla de la cadena deducimos la siguiente igualdad,

$$\dot{r} = \frac{dr}{du} \dot{u} = \frac{dr}{du} kr^{-1},$$

Utilizando estos resultados obtenemos que,

$$k^2 (r')^2 + c^2 = 2(\mu r + hr^2), \quad (1.17)$$

donde $(')$ representa la derivada parcial de r con respecto a la anomalía excéntrica u .

El tratamiento de esta ecuación depende del signo de h , en este apartado estudiaremos el caso de $h = 0$, y escogemos el valor de la constante $k^2 = \mu$, así pues la ecuación (1.17) queda de la siguiente manera

$$(r')^2 + \frac{c^2}{\mu} = 2r. \quad (1.18)$$

Derivando esta expresión respecto a u a ambos lados de la igualdad observamos que $r'r'' = r'$. Sabemos que $r' \neq 0$ debido a que en ese caso tendríamos que r sería constante, y hemos observado que este caso sólo se da con energías negativas, dividiendo la expresión anterior por r' obtenemos que $r'' = 1$. Por lo tanto, r es cuadrática sobre u y podemos expresarlo como $r = \frac{1}{2}(u - u_0)^2 + A$.

Sustituyendo esto en la ecuación (1.18) vemos que

$$(u - u_0)^2 + \frac{c^2}{\mu} = (u - u_0)^2 + A.$$

y por tanto tenemos que $A = c^2/2\mu$.

Además, como u está determinada salvo una constante arbitraria, podemos suponer que $u_0 = 0$ y por tanto

$$r = \frac{1}{2} \left(u^2 + \frac{c^2}{\mu} \right).$$

De acuerdo con (1.16), $du/dt = k/r$ y por tanto cuando $u = 0$ y $t = T$ obtenemos,

$$\begin{aligned} k \int_T^t dt &= \int_0^u r du, \\ &= \frac{1}{2} \int_0^u \left(u^2 + \frac{c^2}{\mu} \right) du. \end{aligned}$$

o equivalentemente, debido a que $k^2 = \mu$

$$\sqrt{\mu}(t - T) = \frac{1}{6}u^3 + \frac{c^2}{2\mu}u.$$

En resumen,

$$\sqrt{\mu}(t - T) = \frac{1}{6}u^3 + \frac{c^2}{2\mu}u, \quad r = \frac{1}{2} \left(u^2 + \frac{c^2}{\mu} \right). \quad (1.19)$$

Observamos de la primera ecuación que t es una función de u estrictamente creciente. Por tanto, esta ecuación tiene una solución única para u en términos de t .

Lema 1.18. *El sistema de ecuaciones (1.19) cumple la ecuación diferencial definida al principio de la sección (1.15) cuando la energía de la partícula es nula, es decir $h = 0$.*

Demostración: Utilizando que $\frac{du}{dt} = kr^{-1}$ por (1.16) y derivando la segunda ecuación de (1.19) obtenemos que $\dot{r} = u\dot{u} = ukr^{-1}$. Por tanto $\dot{r}r = \sqrt{\mu}u$, si sustituimos esto en la (1.15) tomando $h = 0$,

$$\begin{aligned} \mu u^2 + c^2 &= \mu \left(u^2 + \frac{c^2}{\mu} \right), \\ &= \mu u^2 + c^2. \end{aligned}$$

Para interpretar el significado de la constante T vamos a separar en casos;

Si $c \neq 0$ y $h = 0$ entonces $e = 1$ y obtenemos la órbita de una parábola

$$r = \frac{c^2/\mu}{1 + \cos f}. \quad (1.20)$$

El valor mínimo de r es $c^2/2\mu$ y coincide con $f = 0$, pero este coincide con $u = 0$ o equivalentemente $t = T$. Por lo tanto T es el instante de tiempo en el que la partícula está más próxima a la fuente de atracción.

Definición 1.19. *El instante de tiempo $t = T$ en el que la partícula está más próxima a la fuente de atracción se llama tiempo de paso por el pericentro.*

Esto puede ocurrir para cualquier valor de t pero, dado que $\dot{f} > 0$, sólo ocurrirá una vez.

Si $c = 0$, el sistema de ecuaciones anterior se simplifica,

$$6\sqrt{\mu}(t - T) = u^3, \quad r = \frac{1}{2}u^2. \quad (1.21)$$

El instante $t = T$ coincide con la colisión contra la fuente de atracción. Si $T > 0$ la colisión ocurre después del instante inicial, el movimiento luego del instante T ya no está controlado por las ecuaciones originales por lo que solo podemos considerar el movimiento para $-\infty < t < T$. En el caso $T < 0$, la partícula inicial el movimiento en el instante $t = T$ y por lo tanto solo podemos hablar del movimiento en el intervalo $T < t < \infty$.

En resumen: Para localizar la partícula en un tiempo dado t con unas condiciones iniciales \vec{r}_0 y \vec{v}_0 , utilizando que $du/dt = kr^{-1}$ y (1.19) obtenemos que $\dot{r} = u\dot{u} = ukr^{-1}$. Por tanto $(\vec{r} \cdot \vec{v}) = \dot{r}r = \sqrt{\mu}u$. El valor de u_0 viene dado cuando $t = 0$ a partir de la ecuación $\sqrt{\mu}u_0 = (\vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0)$, Sustituyendo u_0 y $t = 0$ en la primera ecuación de (1.19) obtenemos el valor de T . Finalmente, resolvemos nuevamente la primera ecuación de (1.19) para t y sustituimos el valor de u encontrado en la segunda.

Ahora tenemos dos posibilidades;

Si $c = 0$, el valor de r queda completamente determinado.

Si $c \neq 0$, de la ecuación (1.20) deducimos que hay dos posibles valores de f para cada valor de r . Tomamos f positivo si $t > T$ y f negativo en caso contrario. Entonces, las coordenadas (r, f) determinan la posición de la partícula completamente.

1.8. Posición en la órbita: $h \neq 0$

Cuando $h \neq 0$, tenemos las siguientes posibles órbitas:

- Lineal, cuando $\vec{c} = 0$.
- Hiperbólica, cuando $\vec{c} \neq 0$ y $h > 0$.
- Elíptica, cuando $\vec{c} \neq 0$ y $h < 0$.

En esta sección nos centramos en localizar la partícula en la órbita en un cierto tiempo t .

Lema 1.20. *Definimos la función $\rho(u)$ de la siguiente manera*

$$e\rho = a + \sigma(h)r. \quad (1.22)$$

La ecuación diferencial (1.17) se puede reescribir de la siguiente manera:

$$(\rho')^2 - \sigma(h)\rho^2 = -\sigma(h).$$

$$\text{donde } \sigma(h) = \begin{cases} +1 & \text{si } h > 0. \\ -1 & \text{si } h < 0. \end{cases}$$

Demostración: Partimos de la ecuación diferencial (1.17) y definimos la constante $k^2 = 2|h|$, o equivalentemente utilizando (1.12), $k^2 = \mu/a$. Dividiendo por k^2 la ecuación diferencial obtenemos que

$$\begin{aligned} (r')^2 + \frac{c^2 a}{\mu} &= 2ar + \frac{2a}{\mu} h r^2, \\ (r')^2 + \frac{c^2 a}{\mu} &= 2ar + \frac{h}{|h|} r^2, \\ (r')^2 + \frac{c^2 a}{\mu} &= 2ar + \sigma(h) r^2. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Utilizando (1.12) en la igualdad del lema (1.14) obtenemos que

$$\begin{aligned} \mu^2 (e^2 - 1) &= 2hc^2, \\ 2a|h| (e^2 - 1) \mu &= 2hc^2, \\ a (e^2 - 1) \sigma(h) &= \frac{c^2}{\mu}. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Sumando $\sigma(h) a^2$ a ambos lados de la igualdad en la expresión (1.23) encontrada antes y sustituyendo por el resultado (1.24) obtenemos que

$$\begin{aligned} (r')^2 + \frac{c^2 a}{\mu} + \sigma(h) a^2 &= 2ar + \sigma(h) r^2 + \sigma(h) a^2, \\ (r')^2 + a^2 (e^2 - 1) \sigma(h) + \sigma(h) a^2 &= 2ar + \sigma(h) r^2 + \sigma(h) a^2, \\ (r')^2 + a^2 \sigma(h) [(e^2 - 1) + 1] &= \sigma(h) [a + \sigma(h) r]^2, \\ (r')^2 + a^2 \sigma(h) e^2 &= \sigma(h) [a + \sigma(h) r]^2. \end{aligned}$$

Utilizando el cambio de variable definido en el lema deducimos que

$$e a \rho' = \sigma(h) r'.$$

Reemplazando r y r' en la ecuación diferencial por ρ y ρ' obtenemos que

$$\begin{aligned} (r')^2 + a^2 \sigma(h) e^2 &= \sigma(h) [a + \sigma(h) r]^2, \\ e^2 a^2 (\rho')^2 + a^2 \sigma(h) e^2 &= \sigma(h) e^2 a^2 \rho^2, \\ (\rho')^2 + \sigma(h) &= \sigma(h) \rho^2, \\ (\rho')^2 - \rho^2 \sigma(h) &= -\sigma(h). \end{aligned}$$

Si descartamos las soluciones triviales $\rho = \pm 1$, las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales son $\rho = \cosh(u + k_1)$ cuando $h > 0$ y $\rho = \cos(u + k_2)$ si $h < 0$. De acuerdo con (1.16), aún no hemos fijado un valor para T y por tanto podemos hacerlo de manera que $k_1 = k_2 = 0$.

Teorema 1.21. *En el problema de la fuerza central, cuando la energía total no es cero y su órbita no cae en una recta, es decir $h \neq 0$ y $\vec{c} \neq 0$, la posición de la partícula Q en cada instante t viene determinada por las ecuaciones;*

$$r = a [e \cosh (u) - 1], \quad n(t - T) = e \sinh (u) - u \quad \text{si } h > 0, \quad (1.25)$$

$$r = a [1 - e \cos (u)], \quad n(t - T) = u - e \sin (u) \quad \text{si } h < 0, \quad (1.26)$$

donde $n = k/a$ o equivalentemente $n = \mu^{1/2} a^{-3/2}$.

Demostración:

Caso $h > 0$; En este caso tenemos que $\rho = \cosh u$ y aplicando la definición de ρ obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{a + r}{ea} &= \cosh (u), \\ r &= a [e \cosh (u) - 1]. \end{aligned}$$

Utilizando la definición de u (1.16) podemos observar que

$$\begin{aligned} \int_T^t k dt &= \int_0^u r du, \\ k(t - T) &= a \int_0^u [e \cosh (\tau) - 1] d\tau, \\ \frac{k}{a}(t - T) &= e \sinh (u) - u. \end{aligned}$$

Caso $h < 0$; En este caso tenemos que $\rho = \cos u$ y aplicando la definición de ρ obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{a - r}{ea} &= \cos (u), \\ r &= a [1 - e \cos (u)]. \end{aligned}$$

Utilizando la definición de u (1.16) podemos observar que

$$\begin{aligned} \int_T^t k dt &= \int_0^u r du, \\ k(t - T) &= a \int_0^u [1 - e \cos (\tau)] d\tau, \\ \frac{k}{a}(t - T) &= u - e \sin (u). \end{aligned}$$

Por último, definimos $n = k/a$. Anteriormente hemos calculado que $k^2 = \mu/a$ y sustituyéndolo en la definición de n obtenemos que $n = \mu^{1/2} a^{-3/2}$.

Definición 1.22. *A la constante $n = \mu^{1/2} a^{-3/2}$ se la llama movimiento medio.*

Observamos que si $u = 0$ entonces $t = T$ y $r = a|e - 1|$. Este resultado proviene de la ecuación de la órbita obtenida a partir de (1.11) utilizando la siguiente propiedad ya provada $c^2 = \mu a|e^2 - 1|$,

$$r = \frac{a|e^2 - 1|}{1 + e \cos f}. \quad (1.27)$$

Esto es así cuando $\vec{c} \neq 0$, en ese caso T es el paso porcentual de la definición (1.19). Cuando $\vec{c} = 0$ tenemos que $e = 1$ y entonces si $r = 0$, $t = T$, es decir, la colisión entre la masa Q y el centro de atracción sucede en el instante $t = T$.

1.9. Posición en la órbita: Caso $h > 0$

En el caso de una partícula Q que se mueve con energía positiva atraída por un centro O , la órbita que describe es hiperbólica si $c \neq 0$ y una semirrecta cuando $c = 0$ y el movimiento se rige por las ecuaciones (1.25),

$$r = a [e \cosh(u) - 1], \quad n(t - T) = e \sinh(u) - u. \quad (1.28)$$

Para encontrar la partícula en un tiempo t dadas la posición y la velocidad de la partícula en el instante $t = 0$, r_0 y v_0 , procedemos de la siguiente manera. Primero, buscamos el valor u_0 utilizando la siguiente igualdad:

$$\vec{r} \times \vec{v} = r\dot{r} = rr'\dot{u} = rr'kr^{-1} = kr' = \sqrt{\mu a} e \sinh u.$$

Recordemos que $\dot{u} = kr^{-1}$ y $k^2 = \mu/a$ por la forma en la que se han definido, $a = \frac{1}{2} \frac{\mu}{h}$ como hemos visto en (1.12) y el procedimiento para encontrar el valor de las constantes del sistema \vec{c} , \vec{e} y h están explicados al principio de la sección 5.

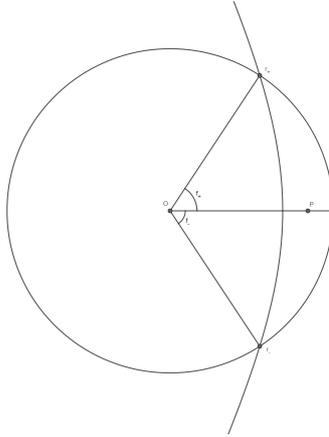
Una vez tenemos el valor de u_0 , utilizamos esta información cuando $t = 0$ para encontrar el valor de T a partir de la segunda ecuación de (1.28). Luego, buscamos el valor de u en el instante t utilizando la misma ecuación conociendo T , cabe destacar que este cálculo se realiza de forma numérica porque la expresión resultante no suele tener una solución que se pueda resolver matemáticamente. Utilizando ahora la primera ecuación encontramos el valor de r . Una vez tenemos esto existen dos posibilidades;

Si $c = 0$, entonces la órbita está contenida en una recta y la posición de la partícula en el instante t está completamente determinada. El instante $t = T$ corresponde con la colisión de la partícula con el centro de atracción por lo que solo tiene sentido estudiar la partícula en el intervalo $t > T$ si $T < 0$ o $t < T$ si $T > 0$.

Si $c \neq 0$, la órbita no está determinada completamente y utilizamos la ecuación,

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos f}.$$

para determinar el valor de f , esta ecuación proviene de (1.27), esta ecuación para un valor determinado de r tiene dos soluciones, claramente tenemos que tomar $f > 0$ si $t > T$ y $f < 0$ si $t < T$. Así pues, la posición de la partícula Q está completamente determinado por el par (r, f) .



Definición 1.23. Al valor $l = n(t - T)$ se le llama anomalía media.

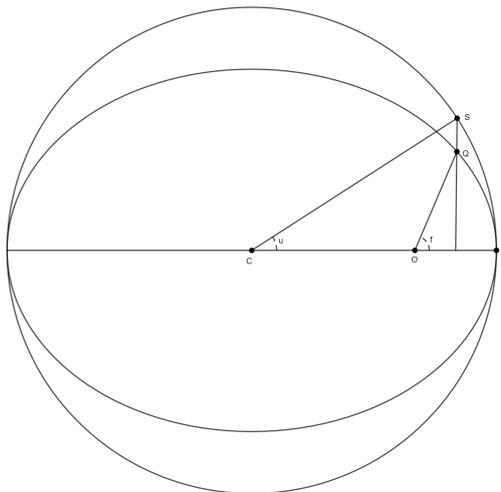
1.10. Posición en la órbita: Caso $h < 0$

En el caso de una partícula Q que se mueve con energía positiva atraída por un centro O , la órbita que describe es una elipse si $c \neq 0$ y una semirrecta cuando $c = 0$ y el movimiento se rige por las ecuaciones (1.26),

$$r = a[1 - e \cos(u)], \quad l = u - e \sin(u). \quad (1.29)$$

donde l es la anomalía media de la definición (1.23).

El valor definido de u anteriormente, tiene un sentido geométrico en el caso de una órbita elíptica. Sea O el centro de atracción, P el pericentro y C el centro de la elipse. Sea Q la posición de la partícula dentro de la órbita con una anomalía verdadera f . Proyectamos el punto Q sobre la circunferencia de centro C y radio CP perpendicular a esta recta CP . Entonces, el ángulo PCS es u .



En este caso, cuando la partícula Q se mueve sobre una elipse, es decir, $c \neq 0$, u y f son 2π periódicas y las definimos dentro del intervalo $-\pi < u, f \leq \pi$ y el movimiento de

Q se repite cada vez que la partícula pasa por el pericentro P . Por tanto T no es única, tomamos este valor a partir del siguiente criterio: Si $t = 0$ y $f_0 > 0$, es decir, si la partícula está en la mitad superior de la elipse, tomamos T como el primer valor anterior a $t = 0$ en el que la partícula pasa por el pericentro P . En caso de que $t = 0$ y $f_0 < 0$, es decir, si la partícula está en la mitad inferior de la elipse, tomamos T como el primer valor posterior a $t = 0$ en el que la partícula pasa por el pericentro P .

Para encontrar la partícula en un tiempo t dadas la posición y la velocidad de la partícula en el instante $t = 0$, r_0 y v_0 , procedemos de la siguiente manera. Primero, buscamos el valor u_0 utilizando la siguiente igualdad:

$$\vec{r} \times \vec{v} = \sqrt{\mu a e} \sin u.$$

Una vez tenemos el valor de u_0 , utilizamos esta información cuando $t = 0$ para encontrar el valor de T a partir de la segunda ecuación de (1.29).

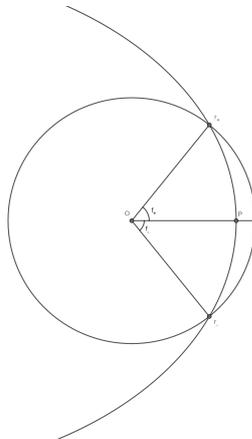
Luego, buscamos el valor de u en el instante t utilizando la misma ecuación conociendo T , cabe destacar que este cálculo se realiza de forma numérica porque la expresión resultante no suele tener una solución que se pueda resolver matemáticamente. Utilizando ahora la primera ecuación encontramos el valor de r . Una vez tenemos esto existen dos posibilidades;

Si $c = 0$, entonces la órbita está contenida en una recta y la posición de la partícula en el instante t está completamente determinada. El instante $t = T$ corresponde con la colisión de la partícula con el centro de atracción y se debe hacer un razonamiento análogo al de la sección anterior, como $\vec{r}_0 \times \vec{v}_0 = r_0 \dot{r}_0$, la colisión sucede en $T > 0$ si $\dot{r}_0 < 0$ y $T < 0$ si $\dot{r}_0 > 0$.

Si $c \neq 0$, la órbita no está determinada completamente y utilizamos la ecuación,

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}.$$

para determinar el valor de f , esta ecuación proviene de (1.19), esta ecuación para un valor determinado de r tiene dos soluciones, claramente tenemos que tomar $f > 0$ si $t > T$ y $f < 0$ si $t < T$. Así pues, la posición de la partícula Q está completamente determinado por el par (r, f) .



1.11. El problema de los dos cuerpos

En esta sección estudiamos una ampliación del problema de la fuerza central, el problema de los dos cuerpos. Se intenta describir el movimiento de un sistema de dos partículas moviéndose afectadas por su atracción gravitatoria mutua.

Sea O un punto fijo en el espacio que tomamos como centro de referencia, m_1 y m_2 las masas de las dos partículas, \vec{r}_1 y \vec{r}_2 sus posiciones y r la distancia entre ellos, es decir, $r = \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|$. De acuerdo con la ley de gravitación universal de Newton, las fuerzas de atracción entre las partículas es $Gm_1m_2r^{-2}$, donde G es una constante que depende de las unidades escogidas. Las ecuaciones diferenciales del movimiento son

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{r}, \quad m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \frac{Gm_2m_1}{r^2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{r}. \quad (1.30)$$

y asumimos que los valores iniciales de \vec{r}_1 , \vec{r}_2 , $\dot{\vec{r}}_1$ y $\dot{\vec{r}}_2$ son conocidos.

Se puede reducir el problema al problema de la fuerza central por el siguiente procedimiento conocido como reducción a coordenadas relativas. Dividimos la primera ecuación de (1.30) por m_1 y la segunda por m_2 , luego restamos la primera a la segunda y tomando $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ obtenemos que

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_1 &= \frac{Gm_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \\ \ddot{\vec{r}}_2 &= -\frac{Gm_1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \\ \ddot{\vec{r}} &= -G(m_1 + m_2)r^{-3}\vec{r}. \end{aligned}$$

Por tanto, podemos reescribir las ecuaciones (1.30) de la siguiente manera,

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu r^{-3}\vec{r}, \quad \mu = G(m_1 + m_2). \quad (1.31)$$

Los valores iniciales de \vec{r} y $\dot{\vec{r}}$ se puede deducir fácilmente a partir de \vec{r}_1 , \vec{r}_2 , $\dot{\vec{r}}_1$ y $\dot{\vec{r}}_2$. Este nuevo sistema es el problema de la fuerza central con un valor específico de μ , por tanto, toda la teoría estudiada con anterioridad se puede aplicar. Cada partícula se mueve como si fuese una unidad de masa atraída por la otra partícula, con $\mu = G(m_1 + m_2)$. La órbita de cada una de las partículas vista desde la otra se llama órbita relativa. La ecuación (1.31) no cambia reemplazando \vec{r} por $-\vec{r}$ y por tanto las orbitas relativas son geoméricamente idénticas.

Existe otro procedimiento llamado reducción a coordenadas baricéntricas. Primero que nada, observamos de (1.30) que si sumamos ambas ecuaciones, el resultado es cero.

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} - \frac{Gm_1m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{Gm_1m_2}{r^3} (\vec{r} - \vec{r}) = 0.$$

Tomamos

$$\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}.$$

Este vector \vec{r}_c es el vector posición del centro de masas O' de las dos partículas. Por la regla de la cadena, podemos observar que $\ddot{\vec{r}}_c = 0$ y que por tanto, este punto O' se mueve sobre una recta de la forma

$$\vec{r}_c = \vec{a}t + \vec{b}. \quad (1.32)$$

donde \vec{a} y \vec{b} son vectores constantes determinados por las condiciones iniciales. Este resultado nos da el principio de conservación del momento lineal: El centro de masas se mueve sobre una recta con velocidad uniforme. El sistema (1.30) tiene grado doce, dos ecuaciones vectoriales en \mathbb{R}^3 de segundo grado, además los vectores \vec{a} y \vec{b} nos proporcionan seis constantes del movimiento más.

Para determinar estas seis constantes, movemos el centro de coordenadas a O' reemplazando \vec{r}_1 por $\vec{r}_1 - \vec{r}_c$ y \vec{r}_2 por $\vec{r}_2 - \vec{r}_c$. Como $\ddot{\vec{r}}_c = 0$, las ecuaciones (1.30) no se ven afectadas por este cambio. Ahora tenemos fijado el centro de coordenadas en centro de masas O' que se mueve de acuerdo con (1.32), renombramos a este centro por O . Tenemos, por propiedades del centro de masas, las siguientes igualdades

$$r = r_1 + r_2, \quad m_1 r_1 = m_2 r_2, \quad m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0. \quad (1.33)$$

Lema 1.24. *Se puede reescribir el sistema de ecuaciones (1.30) como ecuaciones independientes utilizando como sistema de referencia el centro de masas de la siguiente manera*

$$\ddot{r}_1 = - (Gm_2^3 M^{-2}) r_1^{-3} \vec{r}_1, \quad \ddot{r}_2 = - (Gm_1^3 M^{-2}) r_2^{-3} \vec{r}_2. \quad (1.34)$$

donde $M = m_1 + m_2$.

Demostración: Partimos de las ecuaciones del movimiento (1.30) y operamos utilizando las propiedades (1.33)

$$\begin{aligned} \ddot{r}_1 &= \frac{Gm_2}{r^3} \vec{r}, \\ &= \frac{G}{(r_1 + r_2)^3} (m_2 \vec{r}_2 - m_2 \vec{r}_1), \\ &= - \frac{Gm_2^3}{(m_2 r_1 + m_2 r_2)^3} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_1), \\ &= - \frac{Gm_2^3}{(m_2 r_1 + m_1 r_1)^3} \vec{r}_1 (m_1 + m_2), \\ &= - \frac{Gm_2^3}{r_1^3 (m_2 + m_1)^3} \vec{r}_1 (m_1 + m_2), \\ &= - \frac{Gm_2^3}{r_1^3 (m_2 + m_1)^2} \vec{r}_1, \\ &= - \frac{Gm_2^3 M^{-2}}{r_1^3} \vec{r}_1. \end{aligned}$$

El caso de \ddot{r}_2 es análogo.

Estas ecuaciones describen un sistema diferencial como (1.1) para un caso particular de μ . En conclusión, el centro de masas se mueve uniformemente y cada una de las partículas se mueve con respecto al centro de masas como fuese atraído por este con $\mu = Gm_2^3 M^{-2}$ en el caso de la primer partícula y $\mu = Gm_1^3 M^{-2}$ para la segunda.

Fijado el centro de coordenadas como el centro de masas, se define la energía potencial como $-U^*$ donde

$$U^* = Gm_1 m_2 r^{-1}. \quad (1.35)$$

y la energía cinética T^* como

$$T^* = \frac{1}{2} (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2). \quad (1.36)$$

También podemos definir la energía potencial y cinética para cada una de las partículas, en este caso tenemos

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - G m_1 m_2^3 M^{-2} r_1^{-1} \equiv T_1 - U_1. \\ h_2 &= \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - G m_2 m_1^3 M^{-2} r_2^{-1} \equiv T_2 - U_2. \end{aligned}$$

Podemos observar que utilizando (1.33)

$$T^* = T_1 + T_2, \quad U^* = U_1 + U_2.$$

En el caso de la energía cinética, el resultado es inmediato, para la energía potencial debemos realizar algunos cálculos;

$$\begin{aligned} U_1 + U_2 &= \frac{G m_1 m_2^3}{M^2 r_1} + \frac{G m_2 m_1^3}{M^2 r_2}, \\ &= \frac{G m_1 m_2^3}{(m_1 + m_2)^2 r_1} + \frac{G m_2 m_1^3}{(m_1 + m_2)^2 r_2}, \\ &= \frac{G m_1 m_2^3 r_1}{(r_1 m_1 + r_1 m_2)^2} + \frac{G m_2 m_1^3 r_2}{(r_2 m_1 + r_2 m_2)^2}, \\ &= \frac{G m_1 m_2^3 r_1}{(r_2 m_2 + r_1 m_2)^2} + \frac{G m_2 m_1^3 r_2}{(r_2 m_1 + r_1 m_1)^2}, \\ &= \frac{G m_1 m_2^3 r_1}{m_2^2 (r_2 + r_1)^2} + \frac{G m_2 m_1^3 r_2}{m_1^2 (r_2 + r_1)^2}, \\ &= \frac{G m_1 m_2 r_1}{r^2} + \frac{G m_2 m_1 r_2}{r^2}, \\ &= G m_1 m_2 r^{-2} (r_1 + r_2), \\ &= G m_1 m_2 r^{-1}. \end{aligned}$$

También podemos determinar una relación entre los tres tipos de energía de cada una de las partículas y su masa, la relación es la siguiente

$$h_1/h_2 = U_1/U_2 = T_1/T_2 = m_2/m_1.$$

Para demostrar este resultado, nuevamente utilizamos las igualdades obtenidas en (1.33) y, recordamos que derivando y aplicando la regla de la cadena, obtenemos que estas igualdades también son ciertas cambiando r_1 por v_1 y r_2 por v_2 .

$$\begin{aligned} \frac{T_1}{T_2} &= \frac{m_1 v_1^2}{m_2 v_2^2} = \frac{m_2 v_2 v_1}{m_1 v_1 v_2} = \frac{m_2}{m_1}. \\ \frac{U_1}{U_2} &= \frac{G m_1 m_2^3 M^{-2} r_1^{-1}}{G m_2 m_1^3 M^{-2} r_2^{-1}} = \frac{m_2^2 r_2}{m_1^2 r_1} = \frac{m_2 m_1 r_1}{m_1^2 r_1} = \frac{m_2}{m_1}. \\ \frac{h_1}{h_2} &= \frac{T_1 - U_1}{T_2 - U_2} = \frac{\frac{m_2}{m_1} (T_2 - U_2)}{T_2 - U_2} = \frac{m_2}{m_1}. \end{aligned}$$

2. Problema de los n cuerpos

2.1. Introducción

En este capítulo estudiaremos el problema de los n cuerpos que es una extensión del problema de los dos cuerpo. En este caso tenemos n masas m_i que se mueven afectadas por una fuerza de atracción producida por las otras masas, $Gm_j m_i r_{ji}^{-2}$ donde r_{ij} es la distancia entre la masa i -ésima y j -ésima. Suponemos también que $n \neq 2$. Sea O el origen de coordenadas, y sean \vec{r}_i y \vec{v}_i la posición y la velocidad de la partícula i -ésima respectivamente. Según la segunda ley de Newton, la partícula i -ésima cumple la ecuación

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{Gm_k m_i}{r_{ki}^2} \frac{\vec{r}_k - \vec{r}_i}{r_{ki}}. \quad (2.1)$$

Teorema 2.1. *Existe un único conjunto $\{\vec{r}_i(t)\}_{i=1, \dots, n}$ de funciones de intervalo máximo $-t_2 < t < t_1$ que contiene el instante $t = 0$ que cumple*

- (i) $\vec{r}_i(t)$ cumple la ecuación diferencial (2.1) para $-t_2 < t < t_1$.
- (ii) $\vec{r}_i(t)$ y $\vec{v}_i(t)$ son consistentes con las condiciones iniciales cuando $t = 0$.
- (iii) Si el intervalo $-t_2 < t < t_1$ es diferente de $-\infty < t < \infty$, entonces $r(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow t_1$ si t_1 es finito y $r(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow t_2$ si t_2 es finito.

Demostración: Teniendo en cuenta que las ecuaciones diferenciales definidas en (2.1) cumple que son continuas y diferenciables respecto cada coordenada del vector \vec{r} , en particular son localmente Lipschitz, aplicando el teorema de existencia y unicidad de soluciones maximales de ecuaciones diferenciales y el teorema de aproximación a la frontera, obtenemos el resultado del teorema.

Se puede deducir que $\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = 0$ ya que dentro de esta suma se encuentra para cada $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tanto $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ como $\vec{r}_j - \vec{r}_i$ que se anulan dos a dos. Si denotamos por M la suma de las masas $\sum_i m_i$ y \vec{r}_c el centro de masas $M^{-1} \sum_i m_i \vec{r}_i$, entonces, derivando dos veces y aplicando la regla de la cadena obtenemos que $\ddot{\vec{r}}_c = 0$. Por tanto, igual que en el problema de los dos cuerpos, \vec{r}_c se mueve uniformemente $\vec{r}_c = \vec{a}t + \vec{b}$, esto es, la conservación del momento lineal en el caso de n partículas.

Igual que en el problema de los dos cuerpos, movemos el centro de coordenadas a \vec{r}_c haciendo un cambio de notación de \vec{r}_i a $\vec{r}_i - \vec{r}_c$ y como $\ddot{\vec{r}}_c = 0$ las ecuaciones (2.1) no se ven alteradas.

Ahora vamos a centrarnos en la energía de las partículas y el teorema de la conservación de la energía. Definimos la energía potencial de la partícula i -ésima como

$$U = \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{Gm_j m_k}{r_{jk}}. \quad (2.2)$$

esta definición es consistente con la definida en el caso del problema de los dos cuerpos.

Definición 2.2. *El gradiente de la energía potencial en la dirección de la partícula k -ésima \vec{r}_k es*

$$\Delta_k U = \left[\frac{\partial U}{\partial x_k}, \frac{\partial U}{\partial y_k}, \frac{\partial U}{\partial z_k} \right].$$

Lema 2.3. Las ecuaciones (2.1) se pueden reescribir como

$$m_k \ddot{\vec{r}}_k = \Delta_k U. \quad (2.3)$$

Demostración: Vamos a calcular el valor de una de estas derivadas parciales, el resto de derivadas parciales se resuelven por simetría.

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{j=1}^n \frac{Gm_j m_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2}}, \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{Gm_j m_k x_k}{\left(\sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2}\right)^3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que x_k representa el movimiento en el eje x de la partícula, cada parcial da el mismo escalar en la dirección de la derivada parcial y se puede concluir que,

$$\Delta_k U = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \frac{Gm_k m_i}{r_k^3} \vec{r}_k.$$

Definición 2.4. La energía cinética del sistema T se define como $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k v_k^2$.

Teorema 2.5. En el problema de los n cuerpos, la energía total del sistema se conserva, es decir,

$$T = U + h. \quad (2.4)$$

donde h es una constante y T y U son las definidas anteriormente.

Demostración: A partir del lema anterior podemos deducir que

$$\sum_k m_k \dot{\vec{r}}_k \cdot \ddot{\vec{r}}_k = \sum_k \Delta U \cdot \frac{d\vec{r}_k}{dt}.$$

la parte derecha de la igualdad se puede reescribir realizando el producto escalar como

$$\sum_k \left[\frac{\partial U}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y_k} \frac{dy_k}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z_k} \frac{dz_k}{dt} \right].$$

así pues, la parte derecha de la igualdad es \dot{U}

Derivando T obtenemos la parte izquierda de la igualdad, utilizando que $v_k^2 = (\dot{\vec{r}}_k \cdot \dot{\vec{r}}_k)$.

$$\dot{T} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_k m_k (\dot{\vec{r}}_k \cdot \dot{\vec{r}}_k) \right) = \sum_k m_k (\dot{\vec{r}}_k \cdot \ddot{\vec{r}}_k).$$

Por tanto obtenemos que

$$\dot{T} = \dot{U}.$$

Por tanto $T = U + h$ donde h es la constante de integración.

Definición 2.6. Se define el momento de inercia $2I$ del sistema a través de la fórmula

$$I = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k r_k^2.$$

Otra constante importante del sistema es el vector momento angular, este vector es el análogo del que ya conocemos del primer capítulo pero en el caso de n cuerpos. A partir de la ecuación (2.1) y considerando que $\vec{r}_k \times \dot{\vec{r}}_k = 0$ obtenemos que

$$\sum_{k=1}^n m_k \left(\vec{r}_k \times \ddot{\vec{r}}_k \right) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{Gm_j m_k}{r_{jk}^3} (\vec{r}_j \times \vec{r}_k).$$

La parte de la derecha de la igualdad es cero ya que $\vec{r}_m \times \vec{r}_n = -(\vec{r}_n \times \vec{r}_m)$. Integrando esta expresión obtenemos que

$$\vec{c} = \sum_{k=1}^n m_k (\vec{r}_k \times \vec{v}_k). \quad (2.5)$$

Definición 2.7. El vector \vec{c} , que es constante por definición, se le conoce como vector momento angular.

2.2. Problema de los tres cuerpos: Coordenadas de Jacobi

En el caso especial $n = 3$, las ecuaciones (2.1) se escriben como

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \frac{Gm_1 m_2}{r_{12}^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \frac{Gm_1 m_3}{r_{13}^3} (\vec{r}_3 - \vec{r}_1), \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= \frac{Gm_1 m_2}{r_{12}^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) + \frac{Gm_2 m_3}{r_{23}^3} (\vec{r}_3 - \vec{r}_2), \\ m_3 \ddot{\vec{r}}_3 &= \frac{Gm_1 m_3}{r_{13}^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_3) + \frac{Gm_2 m_3}{r_{23}^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_3). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Estudiamos el movimiento de este sistema considerando el movimiento de m_2 relativo a m_1 usando el vector $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ y el movimiento de m_3 relativo al centro de masas O' de m_1 y m_2 . Este centro de masas se encuentra en

$$\frac{m_2 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = -\frac{m_3 \vec{r}_3}{m_1 + m_2}.$$

Utilizando la conservación del momento lineal $m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 = 0$.

La posición $\vec{\rho}$ de m_3 relativa a este centro de masas es $\vec{r}_3 + (m_1 + m_2)^{-1} m_3 \vec{r}_3$ o, si operamos,

$$\begin{aligned} \vec{\rho} &= \vec{r}_3 + (m_1 + m_2)^{-1} m_3 \vec{r}_3, \\ &= \left(1 + \frac{m_3}{m_1 + m_2} \right) \vec{r}_3, \\ &= \left(\frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 + m_2} \right) \vec{r}_3, \\ &= M\mu^{-1} \vec{r}_3. \end{aligned}$$

donde $\mu = m_1 + m_2$ y $M = \mu + m_3 = m_1 + m_2 + m_3$.

Lema 2.8. *Podemos expresar los vectores $\vec{r}_3 - \vec{r}_1$ y $\vec{r}_3 - \vec{r}_2$ en función de \vec{r} y $\vec{\rho}$ de la siguiente manera,*

$$\vec{r}_3 - \vec{r}_1 = \vec{\rho} + m_2\mu^{-1}\vec{r}, \quad \vec{r}_3 - \vec{r}_2 = \vec{\rho} - m_1\mu^{-1}\vec{r}.$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \vec{r}_3 - \vec{r}_1 &= \mu^{-1} [m_1 (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) + m_2 (\vec{r}_3 - \vec{r}_1)], \\ &= \mu^{-1} [m_1\vec{r}_3 - m_1\vec{r}_1 + m_3\vec{r}_3 - m_3\vec{r}_3 + m_2\vec{r}_3 - m_2\vec{r}_1], \\ &= \mu^{-1} (M\vec{r}_3 - m_3\vec{r}_3 - m_1\vec{r}_1 - m_2\vec{r}_1), \\ &= \mu^{-1} (M\vec{r}_3 + m_2\vec{r}_2 - m_2\vec{r}_1), \\ &= \mu^{-1} (M\vec{r}_3 + m_2\vec{r}), \\ &= \mu^{-1} M\vec{r}_3 + m_2\mu^{-1}\vec{r}, \\ &= \vec{\rho} + m_2\mu^{-1}\vec{r}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_3 - \vec{r}_2 &= \mu^{-1} [m_1 (\vec{r}_3 - \vec{r}_2) + m_2 (\vec{r}_3 - \vec{r}_2)], \\ &= \mu^{-1} [m_1\vec{r}_3 - m_1\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 - m_3\vec{r}_3 + m_2\vec{r}_3 - m_2\vec{r}_2], \\ &= \mu^{-1} (M\vec{r}_3 - m_3\vec{r}_3 - m_1\vec{r}_2 - m_2\vec{r}_2), \\ &= \mu^{-1} (M\vec{r}_3 + m_1\vec{r}_1 - m_1\vec{r}_2), \\ &= \mu^{-1} (M\vec{r}_3 - m_1\vec{r}), \\ &= \mu^{-1} M\vec{r}_3 - m_1\mu^{-1}\vec{r}, \\ &= \vec{\rho} - m_1\mu^{-1}\vec{r}. \end{aligned}$$

Definición 2.9. *A los vectores $\vec{\rho}$ y \vec{r} se los llama coordenadas de Jacobi.*

Lema 2.10. *El sistema diferencial (2.6) puede simplificarse a través de las coordenadas de Jacobi.*

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G\mu}{r_{12}^3} + Gm_3 \left[\frac{\vec{\rho} - m_1\mu^{-1}\vec{r}}{r_{23}^3} - \frac{\vec{\rho} + m_2\mu^{-1}\vec{r}}{r_{13}^3} \right]. \quad (2.7)$$

$$\ddot{\vec{\rho}} = -\frac{MGm_1\mu^{-1}}{r_{13}^3} (\vec{\rho} + m_2\mu^{-1}\vec{r}) - \frac{MGm_2\mu^{-1}}{r_{23}^3} (\vec{\rho} - m_1\mu^{-1}\vec{r}). \quad (2.8)$$

Demostración: *Primero veamos la igualdad (2.7). Partimos de las ecuaciones (2.6), y dividimos la primera por m_1 , la segunda por m_2 y las restamos.*

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_1 &= G\frac{m_2}{r_{12}^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + G\frac{m_3}{r_{13}^3} (\vec{r}_3 - \vec{r}_1), \\ &= G\frac{m_2}{r_{12}^3} \vec{r} + G\frac{m_3}{r_{13}^3} (\vec{\rho} + m_2\mu^{-1}\vec{r}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_2 &= G\frac{m_1}{r_{12}^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) + G\frac{m_3}{r_{23}^3} (\vec{r}_3 - \vec{r}_2), \\ &= -G\frac{m_1}{r_{12}^3} \vec{r} + G\frac{m_3}{r_{23}^3} (\vec{\rho} - m_1\mu^{-1}\vec{r}). \end{aligned}$$

Realizamos la resta $\ddot{r}_2 - \ddot{r}_1 = \ddot{r}$ y agrupamos los términos que contienen m_3 y los que no.

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= -G\frac{m_2}{r_{12}^3}\vec{r} - G\frac{m_3}{r_{13}^3}\vec{\rho} - G\frac{m_2m_3}{r_{13}^3\mu}\vec{r} - G\frac{m_1}{r_{12}^3}\vec{r} + G\frac{m_3}{r_{23}^3}\vec{\rho} - G\frac{m_1m_3}{r_{23}^3\mu}\vec{r}, \\ &= -\frac{G\mu}{r_{12}^3} + Gm_3 \left[\frac{\vec{\rho} - m_1\mu^{-1}\vec{r}}{r_{23}^3} - \frac{\vec{\rho} + m_2\mu^{-1}\vec{r}}{r_{13}^3} \right].\end{aligned}$$

Ahora vemos la igualdad (2.8). Partimos de la tercera ecuación de (2.6) y la dividimos por $M\mu^{-1}m_3^{-1}$ y utilizando que $\vec{\rho} = M\mu^{-1}\ddot{r}_3$ obtenemos la igualdad.

$$\begin{aligned}M\mu^{-1}\ddot{r}_3 &= \frac{GMm_1\mu^{-1}}{r_{13}^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) + \frac{GMm_2\mu^{-1}}{r_{23}^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_3), \\ \vec{\rho} &= -\frac{MGm_1\mu^{-1}}{r_{13}^3}(\vec{\rho} + m_2\mu^{-1}\vec{r}) - \frac{MGm_2\mu^{-1}}{r_{23}^3}(\vec{\rho} - m_1\mu^{-1}\vec{r}).\end{aligned}$$

Denotamos las respectivas velocidades de las coordenadas de Jacobi como $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ y $\vec{V} = \dot{\vec{\rho}}$.

Lema 2.11. *si tomamos $g_1 = m_1m_2\mu^{-1}$ y $g_2 = m_3\mu M^{-1}$. Tenemos los siguientes resultados.*

$$\begin{aligned}\vec{c} &= g_1(\vec{r} \times \vec{v}) + g_2(\vec{\rho} \times \vec{V}), \\ 2I &= g_1r^2 + g_2\rho^2, \\ 2T &= g_1v^2 + g_2V^2.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Demostración:

Primero que nada, observamos que utilizando los valores de los vectores de posición que hemos obtenido anteriormente, podemos deducir las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}r_3 &= \vec{\rho}\mu M^{-1}, \\ r_2 &= (\mu M^{-1} - 1)\vec{\rho} + m_1\mu^{-1}\vec{r}, \\ r_1 &= (\mu M^{-1} - 1)\vec{\rho} - m_2\mu^{-1}\vec{r}.\end{aligned}$$

Sustituimos estas expresiones de los vectores r_i en la definición de \vec{c} .

$$(1) \vec{c} = g_1(\vec{r} \times \vec{v}) + g_2(\vec{\rho} \times \vec{V})$$

$$\begin{aligned}\vec{c} &= m_1\vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1 + m_2\vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2 + m_3\vec{r}_3 \times \dot{\vec{r}}_3, \\ &= m_1 [(\mu M^{-1} - 1)\vec{\rho} - m_2\mu^{-1}\vec{r}] \times [(\mu M^{-1} - 1)\vec{V} - m_2\mu^{-1}\vec{v}] + \\ &+ m_2 [(\mu M^{-1} - 1)\vec{\rho} - m_1\mu^{-1}\vec{r}] \times [(\mu M^{-1} - 1)\vec{V} - m_1\mu^{-1}\vec{v}] + \\ &+ m_3 (\mu M^{-1})^2 \vec{\rho} \times \vec{V},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= m_1 (\mu M^{-1} - 1) \vec{\rho} \times \vec{V} + m_1 (m_2 \mu^{-1})^2 \vec{r} \times \vec{v} - \\
&- m_1 (\mu M^{-1} - 1) m_2 \mu^{-1} (\vec{\rho} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{V}) + \\
&+ m_2 (\mu M^{-1} - 1) \vec{\rho} \times \vec{V} + m_2 (m_2 \mu^{-1})^2 \vec{r} \times \vec{v} + \\
&+ m_1 (\mu M^{-1} - 1) m_2 \mu^{-1} (\vec{\rho} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{V}) + \\
&+ m_3 (\mu M^{-1})^2 \vec{\rho} \times \vec{V}, \\
&= \left[m_1 (\mu M^{-1})^2 - 2m_1 \mu M^{-1} + m_1 \right] \vec{\rho} \times \vec{V} + m_2 m_1 m_2 \mu^{-2} \vec{r} \times \vec{v} + \\
&+ \left[m_2 (\mu M^{-1})^2 - 2m_2 \mu M^{-1} + m_2 \right] \vec{\rho} \times \vec{V} + m_1 m_2 m_1 \mu^{-2} \vec{r} \times \vec{v} + \\
&+ m_3 (\mu M^{-1})^2 \vec{\rho} \times \vec{V}, \\
&= (\mu^2 M^{-1} - 2\mu^2 M^{-1} + \mu) \vec{\rho} \times \vec{V} + m_1 m_2 \mu^{-1} \vec{r} \times \vec{v}.
\end{aligned}$$

Observamos que la expresión para $\vec{r} \times \vec{v}$ concuerda con el enunciado del teorema, veamos ahora que la expresión de $\vec{\rho} \times \vec{V}$ también lo hace.

$$\begin{aligned}
(\mu^2 M^{-1} - 2\mu^2 M^{-1} + \mu) &= \mu (-\mu M^{-1} + 1), \\
&= \mu \left(\frac{-m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + m_3} + 1 \right), \\
&= \frac{m_3 \mu}{m_1 + m_2 + m_3}, \\
&= m_3 \mu M^{-1}.
\end{aligned}$$

$$(2) 2I = g_1 r^2 + g_2 \rho^2$$

$$\begin{aligned}
2I &= M^{-1} [m_1 m_2 r_{12}^2 + m_1 m_3 r_{13}^2 + m_2 m_3 r_{23}^2], \\
&= M^{-1} m_1 m_2 r^2 + M^{-1} m_1 m_2 (\vec{\rho} + m_2 \mu^{-1} \vec{r}) \cdot (\vec{\rho} + m_2 \mu^{-1} \vec{r}) + \\
&+ M^{-1} m_2 m_3 (\vec{\rho} - m_1 \mu^{-1} \vec{r}) \cdot (\vec{\rho} - m_1 \mu^{-1} \vec{r}), \\
&= M^{-1} m_1 m_2 r^2 + M^{-1} m_1 m_3 [\rho^2 + 2m_2 \mu^{-1} (\vec{r} \cdot \vec{\rho}) + m_2^2 \mu^{-2} r^2] + \\
&+ M^{-1} m_2 m_3 [\rho^2 - 2m_1 \mu^{-1} (\vec{r} \cdot \vec{\rho}) + m_1^2 \mu^{-2} r^2], \\
&= M^{-1} (m_1 m_2 + m_1 m_2^2 m_3 \mu^{-2} + m_1^2 m_2 m_3 \mu^{-2}) r^2 + M^{-1} (m_1 m_3 + m_2 m_3) \rho^2, \\
&= M^{-1} m_1 m_2 (1 + m_3 \mu^{-1}) r^2 + \mu m_3 M^{-1} \rho^2, \\
&= m_1 m_2 \mu^{-1} r^2 + m_3 \mu M^{-1} \rho^2.
\end{aligned}$$

$$(3) 2T = g_1 v^2 + g_2 V^2$$

$$\begin{aligned}
2T &= m_1 \dot{r}_1 \cdot \dot{r}_1 + m_2 \dot{r}_2 \cdot \dot{r}_2 + m_3 \dot{r}_3 \cdot \dot{r}_3, \\
&= m_1 \left[(\mu M^{-1} - 1) \vec{V} - m_2 \mu^{-1} \vec{v} \right] \cdot \left[(\mu M^{-1} - 1) \vec{V} - m_2 \mu^{-1} \vec{v} \right] + \\
&+ m_2 \left[(\mu M^{-1} - 1) \vec{V} - m_1 \mu^{-1} \vec{v} \right] \cdot \left[(\mu M^{-1} - 1) \vec{V} - m_1 \mu^{-1} \vec{v} \right] + \\
&+ m_3 (\mu M^{-1})^2 \vec{V} \cdot \vec{V},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= m_1 (\mu M^{-1} - 1) \vec{V} \cdot \vec{V} + m_1 (m_2 \mu^{-1})^2 \vec{v} \cdot \vec{v} - \\
&- m_1 (\mu M^{-1} - 1) m_2 \mu^{-1} (\vec{V} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{V}) + \\
&+ m_2 (\mu M^{-1} - 1) \vec{V} \cdot \vec{V} + m_2 (m_2 \mu^{-1})^2 \vec{v} \cdot \vec{v} + \\
&+ m_1 (\mu M^{-1} - 1) m_2 \mu^{-1} (\vec{V} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{V}) + \\
&+ m_3 (\mu M^{-1})^2 \vec{V} \cdot \vec{V}, \\
&= \left[m_1 (\mu M^{-1})^2 - 2m_1 \mu M^{-1} + m_1 \right] \vec{V} \cdot \vec{V} + m_2 m_1 m_2 \mu^{-2} \vec{v} \cdot \vec{v} + \\
&+ \left[m_2 (\mu M^{-1})^2 - 2m_2 \mu M^{-1} + m_2 \right] \vec{V} \cdot \vec{V} + m_1 m_2 m_1 \mu^{-2} \vec{v} \cdot \vec{v} + \\
&+ m_3 (\mu M^{-1})^2 \vec{\rho} \cdot \vec{V}, \\
&= (\mu^2 M^{-1} - 2\mu^2 M^{-1} + \mu) \vec{\rho} \cdot \vec{V} + m_1 m_2 \mu^{-1} \vec{r} \cdot \vec{v}.
\end{aligned}$$

Hemos observado en (1) que estos coeficientes coinciden con g_1 y g_2 .

2.3. Soluciones de Lagrange

Vamos a estudiar un caso especial del problema de los tres cuerpos en el que las tres partículas se mueven uniformemente en círculos, en el mismo plano de movimiento y con la misma velocidad angular. Consideramos O como el centro de coordenadas y $z = 0$ el plano de movimiento. Consideramos $\vec{r} = (x_k, y_k, 0)$ las coordenadas de la masa m_k . Las ecuaciones del movimiento (2.6) quedan de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_k &= G \sum_{j \neq k} \frac{m_j}{r_{jk}^3} (x_j - x_k). \\
\ddot{y}_k &= G \sum_{j \neq k} \frac{m_j}{r_{jk}^3} (y_j - y_k).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

donde $k = 1, 2, 3$.

Denotamos la velocidad angular por ω . Introducimos el sistema de coordenadas (ξ, η) que gira a velocidad angular ω , por tanto la posición de las partículas se determina por

$$\begin{aligned}
x_k &= \xi_k \cos \omega t - \eta_k \sin \omega t. \\
y_k &= \xi_k \sin \omega t + \eta_k \cos \omega t.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Teorema 2.12. Podemos reescribir (2.10) utilizando las nuevas coordenadas (ξ, η) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\ddot{\xi}_k - 2\omega \dot{\eta}_k - \omega^2 \xi_k &= G \sum_{j \neq k} \frac{m_j}{r_{jk}^3} (\xi_j - \xi_k). \\
\ddot{\eta}_k + 2\omega \dot{\xi}_k - \omega^2 \eta_k &= G \sum_{j \neq k} \frac{m_j}{r_{jk}^3} (\eta_j - \eta_k).
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Demostración: Comenzamos por calcular \ddot{x}_k y \ddot{y}_k .

$$\begin{aligned}
x_k &= \xi_k \cos \omega t - \eta_k \sin \omega t. \\
\dot{x}_k &= \dot{\xi}_k \cos \omega t - \xi_k \omega \sin \omega t - \dot{\eta}_k \sin \omega t - \eta_k \omega \cos \omega t. \\
\ddot{x}_k &= \ddot{\xi}_k \cos \omega t - \dot{\xi}_k \omega \sin \omega t - \dot{\xi}_k \omega \sin \omega t - \xi_k \omega^2 \cos \omega t - \\
&\quad - \ddot{\eta}_k \sin \omega t - \dot{\eta}_k \omega \cos \omega t - \dot{\eta}_k \omega \cos \omega t + \eta_k \omega^2 \sin \omega t, \\
&= \ddot{\xi}_k \cos \omega t - 2\dot{\xi}_k \omega \sin \omega t - \xi_k \omega^2 \cos \omega t - \\
&\quad - \ddot{\eta}_k \sin \omega t - 2\dot{\eta}_k \omega \cos \omega t + \eta_k \omega^2 \sin \omega t.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_k &= \xi_k \sin \omega t + \eta_k \cos \omega t. \\
\dot{y}_k &= \dot{\xi}_k \sin \omega t + \xi_k \omega \cos \omega t + \dot{\eta}_k \cos \omega t - \eta_k \omega \sin \omega t. \\
\ddot{y}_k &= \ddot{\xi}_k \sin \omega t + \dot{\xi}_k \omega \cos \omega t + \dot{\xi}_k \omega \cos \omega t - \xi_k \omega^2 \sin \omega t + \\
&\quad + \ddot{\eta}_k \cos \omega t - \dot{\eta}_k \omega \sin \omega t - \dot{\eta}_k \omega \sin \omega t - \eta_k \omega^2 \cos \omega t, \\
&= \ddot{\xi}_k \sin \omega t + 2\dot{\xi}_k \omega \cos \omega t - \xi_k \omega^2 \sin \omega t + \\
&\quad + \ddot{\eta}_k \cos \omega t - 2\dot{\eta}_k \omega \sin \omega t - \eta_k \omega^2 \cos \omega t.
\end{aligned}$$

Primera ecuación: Calculamos (2.10) en función de ξ y η . Primero simplificamos la parte derecha de ambas igualdades.

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_k &= G \sum_{j \neq k} \frac{m_j}{r_{jk}^3} (\xi_j \cos \omega t - \eta_j \sin \omega t - \xi_k \cos \omega t + \eta_k \sin \omega t). \\
\ddot{x}_k &= G \sum_{j \neq k} \frac{m_j}{r_{jk}^3} [(\xi_j - \xi_k) \cos \omega t - (\eta_j - \eta_k) \sin \omega t]. \\
\ddot{x}_k &= G \sum_{j \neq k} \frac{m_j}{r_{jk}^3} (\xi_j - \xi_k) \cos \omega t - G \sum_{j \neq k} \frac{m_j}{r_{jk}^3} (\eta_j - \eta_k) \sin \omega t. \\
\ddot{y}_k &= G \sum_{j \neq k} \frac{m_j}{r_{jk}^3} (\xi_j \sin \omega t + \eta_j \cos \omega t - \xi_k \sin \omega t + \eta_k \cos \omega t). \\
\ddot{y}_k &= G \sum_{j \neq k} \frac{m_j}{r_{jk}^3} [(\xi_j - \xi_k) \sin \omega t + (\eta_j - \eta_k) \cos \omega t]. \\
\ddot{y}_k &= G \sum_{j \neq k} \frac{m_j}{r_{jk}^3} (\xi_j - \xi_k) \sin \omega t + G \sum_{j \neq k} \frac{m_j}{r_{jk}^3} (\eta_j - \eta_k) \cos \omega t.
\end{aligned}$$

Sustituimos ahora la parte izquierda de la igualdad y dividimos la primera por $\sin \omega t$ y la segunda por $\cos \omega t$,

$$\begin{aligned}
& \ddot{\xi}_k \frac{\cos \omega t}{\sin \omega t} - 2\dot{\xi}_k \omega - \xi_k \omega^2 \frac{\cos \omega t}{\sin \omega t} - \ddot{\eta}_k - 2\dot{\eta}_k \frac{\cos \omega t}{\sin \omega t} + \eta_k \omega^2 = \\
& = G \sum_{j \neq k} \frac{m_j}{r_{jk}^3} (\xi_j - \xi_k) \frac{\cos \omega t}{\sin \omega t} - G \sum_{j \neq k} \frac{m_j}{r_{jk}^3} (\eta_j - \eta_k).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{\xi}_k \frac{\sin \omega t}{\cos \omega t} + 2\dot{\xi}_k \omega - \xi_k \omega^2 \frac{\sin \omega t}{\cos \omega t} + \ddot{\eta}_k - 2\dot{\eta}_k \frac{\sin \omega t}{\cos \omega t} - \eta_k \omega^2 = \\
& = G \sum_{j \neq k} \frac{m_j}{r_{jk}^3} (\xi_j - \xi_k) \frac{\sin \omega t}{\cos \omega t} + G \sum_{j \neq k} \frac{m_j}{r_{jk}^3} (\eta_j - \eta_k).
\end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones y simplificando obtenemos

$$\begin{aligned}
& \ddot{\xi}_k \left(\frac{\cos \omega t}{\sin \omega t} + \frac{\sin \omega t}{\cos \omega t} \right) - 2\omega \dot{\eta}_k \left(\frac{\cos \omega t}{\sin \omega t} + \frac{\sin \omega t}{\cos \omega t} \right) - \omega^2 \xi_k \left(\frac{\cos \omega t}{\sin \omega t} + \frac{\sin \omega t}{\cos \omega t} \right) = \\
& = G \sum_{j \neq k} \frac{m_j}{r_{jk}^3} (\xi_j - \xi_k) \left(\frac{\cos \omega t}{\sin \omega t} + \frac{\sin \omega t}{\cos \omega t} \right), \\
& \ddot{\xi}_k - 2\omega \dot{\eta}_k - \omega^2 \xi_k = G \sum_{j \neq k} \frac{m_j}{r_{jk}^3} (\xi_j - \xi_k).
\end{aligned}$$

Segunda ecuación: Ahora, si al sustituir las expresiones de (2.10) por ξ y η dividimos la primera por $\cos \omega t$ y la segunda por $\sin \omega t$,

$$\begin{aligned}
& \ddot{\xi}_k - 2\dot{\xi}_k \omega \frac{\sin \omega t}{\cos \omega t} - \xi_k \omega^2 - \ddot{\eta}_k \frac{\sin \omega t}{\cos \omega t} - 2\dot{\eta}_k + \eta_k \omega^2 \frac{\sin \omega t}{\cos \omega t} = \\
& = G \sum_{j \neq k} \frac{m_j}{r_{jk}^3} (\xi_j - \xi_k) - G \sum_{j \neq k} \frac{m_j}{r_{jk}^3} (\eta_j - \eta_k) \frac{\sin \omega t}{\cos \omega t},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{\xi}_k + 2\dot{\xi}_k \omega \frac{\cos \omega t}{\sin \omega t} - \xi_k \omega^2 + \ddot{\eta}_k \frac{\cos \omega t}{\sin \omega t} - 2\dot{\eta}_k - \eta_k \omega^2 \frac{\cos \omega t}{\sin \omega t} = \\
& = G \sum_{j \neq k} \frac{m_j}{r_{jk}^3} (\xi_j - \xi_k) + G \sum_{j \neq k} \frac{m_j}{r_{jk}^3} (\eta_j - \eta_k) \frac{\cos \omega t}{\sin \omega t},
\end{aligned}$$

Ahora restamos la primera ecuación a la segunda

$$\begin{aligned}
& 2\dot{\xi}_k \omega \left(\frac{\cos \omega t}{\sin \omega t} + \frac{\sin \omega t}{\cos \omega t} \right) + \ddot{\eta}_k \left(\frac{\cos \omega t}{\sin \omega t} + \frac{\sin \omega t}{\cos \omega t} \right) - \eta_k \omega^2 \left(\frac{\cos \omega t}{\sin \omega t} + \frac{\sin \omega t}{\cos \omega t} \right) = \\
& = G \sum_{j \neq k} \frac{m_j}{r_{jk}^3} (\eta_j - \eta_k) \left(\frac{\cos \omega t}{\sin \omega t} + \frac{\sin \omega t}{\cos \omega t} \right), \\
& \ddot{\eta}_k + 2\omega \dot{\xi}_k - \omega^2 \eta_k = G \sum_{j \neq k} \frac{m_j}{r_{jk}^3} (\eta_j - \eta_k).
\end{aligned}$$

Denotamos $z_k = \xi_k + i\eta_k$, multiplicando la segunda ecuación (2.12) por i y sumándolas, obtenemos que.

$$\ddot{z}_k + 2\omega i \dot{z}_k - \omega^2 z_k = G \sum_{j \neq k} \frac{m_j}{r_{jk}^3} (z_j - z_k). \quad (2.13)$$

donde $r_{jk} = \|z_j - z_k\|$.

Como la partícula está en reposo en el sistema giratorio, $\dot{z} = 0$ y por tanto, las posiciones de las partículas cumplen la siguiente ecuación.

$$-z_k = \lambda \sum_{j \neq k} \frac{m_j}{r_{jk}^3} (z_j - z_k), \quad k = 1, 2, 3. \quad (2.14)$$

donde $\lambda = G\omega^{-2}$.

Lema 2.13. *La primera y tercera ecuación del sistema puede escribirse como*

$$(1 - m_2\rho_3 - m_3\rho_2) z_1 + m_2\rho_3 z_2 + m_3\rho_2 z_3 = 0. \quad (2.15)$$

$$m_1\rho_2 z_1 + m_2\rho_1 z_2 + (1 - m_1\rho_2 - m_2\rho_1) z_3 = 0.$$

donde $\rho_1 = \lambda r_{23}^{-3}$, $\rho_2 = \lambda r_{31}^{-3}$ y $\rho_3 = \lambda r_{12}^{-3}$.

Demostración:

$$\begin{aligned} -z_1 &= \lambda \frac{m_2}{r_{12}} (z_2 - z_1) + \lambda \frac{m_3}{r_{13}} (z_3 - z_1), \\ 0 &= z_1 + \rho_3 m_2 z_2 - \rho_3 m_2 z_1 + \rho_2 m_3 z_3 - \rho_2 m_3 z_1, \\ 0 &= (1 - m_2\rho_3 - m_3\rho_2) z_1 + m_2\rho_3 z_2 + m_3\rho_2 z_3. \end{aligned}$$

El cálculo de la segunda ecuación del lema es análogo.

Fijado el centro de masas en O , la tercera ecuación puede sustituirse por $m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 = 0$.

En el caso de que z_1 , z_2 y z_3 no estén contenidos en una recta, los coeficientes de z_k en las tres ecuaciones son proporcionales y puede verificarse que $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1/M$ donde $M = m_1 + m_2 + m_3$. En otras palabras, la única posibilidad es que las masas estén en los vértices de un triángulo equilátero de lado $(GM\omega^{-2})^{1/3}$. Esto es así independientemente de las masas de cada partícula y por tanto el centro de masas y el centro del triángulo no tienen porque coincidir.

2.4. Soluciones de Euler

Supondremos ahora que en un cierto instante de tiempo t las tres partículas z_1 , z_2 y z_3 están contenidas en una recta L . La recta L contiene el centro de masas del sistema, tomando las coordenadas de Lagrange con origen el centro de masas los valores η_k son nulos. Renombrando las masas de manera que $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$ tenemos que $r_{12} = \xi_2 - \xi_1$, $r_{23} = \xi_3 - \xi_2$ y $r_{13} = \xi_3 - \xi_1$ y podemos deducir el siguiente teorema.

Teorema 2.14. *En un sistema en el que las partículas se mueven sobre una misma recta L en un instante de tiempo t , se pueden reescribir las ecuaciones (2.15) de la siguiente*

manera,

$$\begin{aligned} -\xi_1 &= \lambda \left[\frac{m_2}{(\xi_2 - \xi_1)^2} + \frac{m_3}{(\xi_3 - \xi_1)^2} \right], \\ \xi_3 &= \lambda \left[\frac{m_1}{(\xi_3 - \xi_1)^2} + \frac{m_2}{(\xi_3 - \xi_2)^2} \right], \end{aligned} \quad (2.16)$$

Demostración: Tomando las ecuaciones (2.15), teniendo en cuenta que $\eta_k = 0$ y traduciendo los valores de ρ_k y z_k en función de λ y ξ_k obtenemos de la primera ecuación,

$$\begin{aligned} \xi_1 - m_2 \lambda \xi_1 (\xi_2 - \xi_1)^{-3} - m_3 \lambda \xi_1 (\xi_3 - \xi_1)^{-3} + m_3 \lambda \xi_2 (\xi_2 - \xi_1)^{-3} + m_3 \lambda \xi_3 (\xi_3 - \xi_1)^{-3} &= 0, \\ \lambda \left[\frac{m_2}{(\xi_2 - \xi_1)^2} + \frac{m_3}{(\xi_3 - \xi_1)^2} \right] &= -\xi_1. \end{aligned}$$

y de la segunda,

$$\begin{aligned} m_1 \lambda \xi_1 (\xi_3 - \xi_1)^{-3} + m_2 \lambda \xi_2 (\xi_3 - \xi_2)^{-3} + \xi_3 - m_1 \lambda \xi_3 (\xi_3 - \xi_1)^{-3} - m_2 \lambda \xi_3 (\xi_3 - \xi_2)^{-3} &= 0, \\ \lambda \left[\frac{m_1}{(\xi_3 - \xi_1)^2} + \frac{m_2}{(\xi_3 - \xi_2)^2} \right] &= -\xi_3. \end{aligned}$$

También e puede deducir inmediatamente que

$$m_2 \xi_1 + m_2 \xi_2 + m_3 \xi_3 = 0. \quad (2.17)$$

Si tomamos que $\xi_2 - \xi_1 = a$ y $\xi_3 - \xi_2 = a\rho$, entonces $\xi_3 - \xi_1 = a(1 + \rho)$.

Lema 2.15. Las ecuaciones (2.17) se pueden reescribir como

$$\begin{aligned} m_2 a + m_3 a(1 + \rho) &= -M \xi_1, \\ m_1 a(1 + \rho) + m_2 a \rho &= M \xi_3. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Demostración:

Partiendo de $m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2 + m_3 \xi_3 = 0$ sumando $m_1 \xi_3$ y $m_2 \xi_3$ a ambos lados de la ecuación y operando,

$$\begin{aligned} m_1 \xi_3 - m_1 \xi_1 + m_2 \xi_3 - m_2 \xi_2 &= m_1 \xi_3 + m_2 \xi_3 + m_3 \xi_3, \\ m_1 a(1 + \rho) + m_2 a \rho &= M \xi_3. \end{aligned}$$

Por otro lado, si lo que hacemos es restar a cada lado $m_2 \xi_1$ y $m_3 \xi_1$ obtenemos que,

$$\begin{aligned} m_2 \xi_2 - m_2 \xi_1 + m_3 \xi_3 - m_3 \xi_1 &= -m_1 \xi_1 - m_2 \xi_1 - m_3 \xi_1, \\ m_2 a + m_3 a(1 + \rho) &= -M \xi_1. \end{aligned}$$

Observación 2.16. Sustituyendo en las expresiones del teorema 2.14 las diferencias en ξ por a y ρ e igualando la expresión que sale de esta para $-\xi_1/\xi_3$ con la misma expresión que se obtiene a partir del lema 2.15 obtenemos la siguiente expresión,

$$\frac{m_2 + m_3(1 + \rho)}{m_1(1 + \rho) + m_2 \rho} = \frac{m_2 + m_3(1 - \rho)^{-2}}{m_1(1 + \rho)^{-2} + m_2 \rho^{-2}}. \quad (2.19)$$

Lema 2.17. *Suponiendo que conocemos el valor de ρ , que podría llegar a obtenerse a través de la observación anterior, el valor de a queda determinado por,*

$$a^3 [m_2 + m_3 (1 + \rho)] = \lambda M [m_2 + m_3 (1 + \rho)^{-2}].$$

Demostración:

Tomamos la primera ecuación del teorema 2.14 y del lema 2.15, despejando ξ_1 e igualando se obtiene la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} \frac{m_2 a + m_3 a (1 + \rho)}{-M} &= -\lambda \left[\frac{m_2}{a^2} + \frac{m_3}{a^2 (1 + \rho)^2} \right], \\ m_2 a + m_3 a (1 + \rho) &= M \lambda \left[\frac{m_2 (1 + \rho)^2 + m_3}{a^2 (1 + \rho)^2} \right], \\ a^3 [m_2 + m_3 (1 + \rho)] &= \lambda M [m_2 + m_3 (1 + \rho)^{-2}]. \end{aligned}$$

Volvemos ahora a centrar nuestra atención sobre el cálculo de ρ que antes supusimos que se podía determinar, reescribiremos la ecuación de la observación 2.16 a través del siguiente teorema,

Teorema 2.18. *Se puede determinar el valor de ρ como la raíz del siguiente polinomio.*

$$\begin{aligned} P(\rho) &= (m_2 + m_3) + (2m_2 + 3m_3) \rho + (3m_3 + m_2) \rho^2 - \\ &\quad - (3m_1 + m_2) \rho^3 - (3m_1 + 2m_2) \rho^4 - (m_1 + m_3) \rho^5. \end{aligned}$$

Demostración: Partimos de la ecuación (2.27) y operamos,

$$\begin{aligned} \frac{m_2 + m_3 (1 + \rho)}{m_1 (1 + \rho) + m_2 \rho} &= \frac{m_2 + m_3 (1 - \rho)^{-2}}{m_1 (1 + \rho)^{-2} + m_2 \rho^{-2}}, \\ \frac{m_2 + m_3 + m_3 \rho}{m_1 + m_1 \rho + m_2 \rho} &= \frac{m_2 (1 + \rho)^2 \rho^2 + m_3 \rho^2}{m_1 \rho^2 + m_2 (1 + \rho)^2}, \\ \frac{(m_2 + m_3) + m_3 \rho}{m_1 + (m_1 + m_2) \rho} &= \frac{m_2 \rho^4 + 2m_2 \rho^3 + (m_2 + m_3) \rho^2}{(m_1 + m_2) \rho^2 + 2m_2 \rho + m_2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &[(m_2 + m_3) + m_3 \rho] [(m_1 + m_2) \rho^2 + m_2 \rho + m_2] = \\ &= [m_1 + (m_1 + m_2) \rho] [m_2 \rho^4 + 2m_2 \rho^3 + (m_2 + m_3) \rho^2], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_2 (m_2 + m_3) + [m_2 m_3 + 2m_2 (m_2 + m_3)] \rho + [(m_1 + m_2) (m_2 + m_3) + 2m_2 m_3] \rho^2 + \\ + m_3 (m_1 + m_2) \rho^3 = m_1 (m_2 + m_3) \rho^2 + [(m_1 + m_2) (m_2 + m_3) + 2m_1 m_2] \rho^3 + \\ + [m_1 m_2 + 2m_2 (m_1 + m_2)] \rho^4 + m_2 (m_1 + m_2) \rho^5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_2 (m_2 + m_3) + [m_2 m_3 + 2m_2 (m_2 + m_3)] \rho + [(m_1 + m_2) (m_2 + m_3) + \\ + 2m_2 m_3 - m_1 (m_2 + m_3)] \rho^2 + [m_3 (m_1 + m_2) - (m_1 + m_2) (m_2 + m_3) - 2m_1 m_2] \rho^3 - \end{aligned}$$

$$- [m_1 m_2 + 2m_2 (m_1 + m_2)] \rho^4 - m_2 (m_1 + m_2) \rho^5 = 0,$$

$$(m_2 + m_3) + (2m_2 + 3m_3) \rho + (3m_3 + m_2) \rho^2 - (3m_1 + m_2) \rho^3 - \\ - (3m_1 + 2m_2) \rho^4 - (m_1 + m_3) \rho^5 = 0.$$

El $P(0) > 0$, y $P(\rho) \rightarrow -\infty$ cuando $\rho \rightarrow \infty$, por tanto, $P(\rho)$ tiene una raíz en $(0, \infty)$. Al mismo tiempo, por la regla de los signos de Descartes, el polinomio tiene como máximo una raíz positiva, juntando ambos resultados, $P(\rho)$ tiene exactamente una raíz en $(0, \infty)$.

2.5. El problema restringido de tres cuerpos

En esta sección asumiremos que m_3 tiene una masa relativa a m_1 y m_2 mucho menor, esta tercera no afecta el movimiento de las otras dos. En este caso podemos tomar que $m_3 = 0$ o equivalentemente $M = \mu$. El centro de masa de este sistema es el centro de masas de m_1 y m_2 . Si tomamos $r_{12} = \rho_1$ y $r_{23} = \rho_2$ las ecuaciones (2.7) y (2.8) se pueden reescribir de la siguiente forma simplemente cambiando m_3 por 0.

$$\ddot{\vec{r}} = -G\mu r^{-3} \vec{r}. \quad (2.20)$$

$$\ddot{\vec{\rho}} = -Gm_1 \rho_1^{-3} (\vec{\rho} + m_2 \mu^{-1} \vec{r}) - Gm_2 \rho_2^{-3} (\vec{\rho} - m_1 \mu^{-1} \vec{r}). \quad (2.21)$$

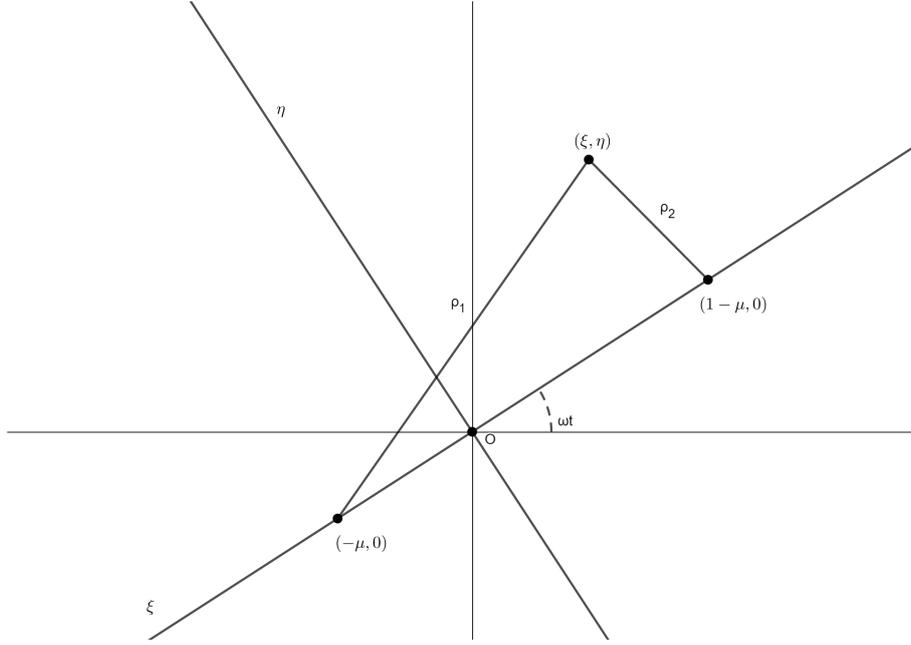
La primera ecuación se puede resolver utilizando los métodos del primer capítulo, por lo tanto podemos considerar \vec{r} conocido. Con esto podemos resolver la segunda ecuación y determinar la posición de m_3 . Para llegar a este resultado hemos asumido que el movimiento ocurre en un plano, además hemos asumido que las masas m_1 y m_2 se mueven de forma uniforme sobre su centro de masas.

El movimiento medio de las partículas m_1 y m_2 de acuerdo con la ecuación (2.20) viene dado por $\sqrt{G\mu r^3}$. Utilizando las coordenadas rotacionales de la sección 2.3 con $\omega = n$. Las partículas principales reposan sobre el eje ξ . La ecuación (2.13) puede aplicarse con $k = 3$, denotamos $z_k = z$, $\rho_1 = r_{12}$ y $\rho_2 = r_{23}$.

$$\ddot{z} + 2\omega i \dot{z} - \omega^2 z = Gm_1 \rho_1^{-3} (z_1 - z) + Gm_2 \rho_2^{-3} (z_2 - z). \quad (2.22)$$

En nuestro caso particular $\eta_1 = \eta_2 = 0$ por lo que $z_1 = \xi_1$ y $z_2 = \xi_2$, por último $z = \xi + i\eta$. Cogiendo las unidades adecuadas, para la masa tenemos que $m_1 + m_2 = 1$, para la distancia $r = 1$ y para el tiempo $G = 1$. La masa menor la denotamos por μ , cabe destacar que esta μ es diferente a la utilizada en la definición de n y la colocamos a ξ_2 unidades a la derecha del origen. Claramente, $\mu \leq 1/2$. Además, $m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2 = 0$ y $\xi_2 - \xi_1 = r = 1$ por tanto $\xi_1 = -\mu$ y $\xi_2 = 1 - \mu$. Por último, observamos que con las unidades escogidas, $n = \omega = 1$ y que $m_2 = \mu$ y $m_1 = 1 - \mu$. La ecuación del movimiento (2.22) puede reescribirse utilizando estas unidades adecuadas.

$$\ddot{z} + 2\omega i \dot{z} - \omega^2 z = Gm_1 \rho_1^{-3} (z_1 - z) + Gm_2 \rho_2^{-3} (z_2 - z), \\ \ddot{z} + 2i \dot{z} - z = (1 - \mu) \rho_1^{-3} (-\mu - z) + \mu \rho_2^{-3} (1 - \mu - z), \\ \ddot{z} + 2i \dot{z} - z = -\rho_1^{-3} (1 - \mu) (z + \mu) - \rho_2^{-3} \mu (z - 1 + \mu). \quad (2.23)$$



Dedicaremos los próximos de capítulos a estudiar esta función conociendo los valores z_0 y \dot{z}_0 de $z(t)$ y $\dot{z}(t)$ respectivamente en un instante de tiempo t_0 . Sabemos, por el teorema de existencia única de soluciones maximales de ecuaciones diferenciales, ya que cumplen la hipótesis de Picard que existe una única función $z(t)$ en un intervalo maximal $I = (t_-, t_+)$ de manera que $t_0 \in I$ y que cumple la ecuación diferencial con condiciones iniciales $z(t_0) = z_0$ y $\dot{z}(t_0) = \dot{z}_0$. Además aplicando el teorema de aproximación a la frontera, se deduce que, si t_- y/o t_+ son finitos, el límite cuando t tiende a t_- y/o t_+ de ρ_1 o ρ_2 es zero. Esto quiere decir que la partícula m_3 colisiona con la m_1 o la m_2 .

2.6. El problema circular restringido

En esta sección nos centraremos en estudiar el movimiento del problema de los tres cuerpos restringidos en el que los dos cuerpos principales se mueven en movimiento circular.

Teorema 2.19. *Consideramos la función $U = \frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2}$. Entonces, la ecuación (2.22) puede reescribirse como*

$$\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} - \xi = \frac{\partial U}{\partial \xi}. \quad (2.24)$$

$$\ddot{\eta} + 2\dot{\xi} - \eta = \frac{\partial U}{\partial \eta}.$$

demostración: Primer calculamos las derivadas parciales de U y obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \xi} &= -\frac{1-\mu}{\rho_1^2} \cdot \frac{\xi + \mu}{\rho_1} - \frac{\mu}{\rho_2^2} \cdot \frac{\xi - 1 + \mu}{\rho_2}. \\ \frac{\partial U}{\partial \eta} &= -\frac{1-\mu}{\rho_1^2} \cdot \frac{\eta}{\rho_1} - \frac{\mu}{\rho_2^2} \cdot \frac{\eta}{\rho_2}. \end{aligned}$$

Utilizando las unidades adecuadas, definidas en la sección anterior, podemos reducir la ecuación (2.22) de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}\ddot{z} + 2\omega i\dot{z} - \omega^2 z &= Gm_1\rho_1^{-3}(z_1 - z) + Gm_2\rho_2^{-3}(z_2 - z), \\ \ddot{z} + 2i\dot{z} - z &= \frac{1-\mu}{\rho_1^3}(-\xi - \mu - \eta i) + \frac{\mu}{\rho_2^3}(-\xi + 1 - \mu - \eta i).\end{aligned}$$

Tomando la parte real e imaginaria de esta expresión obtenemos

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} - \xi &= -\frac{1-\mu}{\rho_1^3}(\xi + \mu) - \frac{\mu}{\rho_2^3}(\xi - 1 + \mu). \\ \ddot{\eta} - 2\dot{\xi} - \eta &= -\frac{1-\mu}{\rho_1^3}\eta - \frac{\mu}{\rho_2^3}\eta.\end{aligned}$$

Por último, observamos que la parte derecha de ambas expresiones coincide con las derivadas parciales de U .

Definición 2.20. Definimos una nueva energía potencial Φ de la siguiente manera:

$$\Phi(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) + U + \frac{1}{2}\mu(1 - \mu). \quad (2.25)$$

Lema 2.21. Podemos reescribir el resultado del teorema anterior utilizando esta nueva energía potencial como

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} &= \frac{\partial\Phi}{\partial\xi}, \\ \ddot{\eta} - 2\dot{\xi} &= \frac{\partial\Phi}{\partial\eta}.\end{aligned} \quad (2.26)$$

demostración: Si observamos que por (2.24) $\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} = \frac{\partial U}{\partial\xi} + \xi$ y que $\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} = \frac{\partial U}{\partial\eta} + \eta$ la demostración es inmediata.

Definición 2.22. Llamamos la integral de Jacobi a la expresión $2\Phi - \xi^2 - \eta^2$.

Si tomamos las expresiones del lema anterior y multiplicamos la primera por $\dot{\xi}$ y la segunda por $\dot{\eta}$ y las sumamos, obtenemos $\dot{\xi}\ddot{\xi} + \dot{\eta}\ddot{\eta} = d\Phi/dt$. Integrando ambas partes de la igualdad tenemos de inmediato que

$$\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 = 2\Phi - C. \quad (2.27)$$

Definición 2.23. La constante C de integración se conoce como la constante de Jacobi.

Esta expresión demuestra que la integral de Jacobi es una constante del sistema y que su valor es C . El sistema puede ser reescrito de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \alpha, & \dot{\eta} &= \beta, \\ \dot{\alpha} &= 2\beta + \Phi_\xi, & \dot{\beta} &= -2\alpha + \Phi_\eta.\end{aligned}$$

Este resultado es cambio de notación de la expresión del lema 2.21.

Dividiendo las dos primeras ecuaciones por la tercera, eliminamos la dependencia temporal,

$$\frac{d\xi}{d\alpha} = \frac{\alpha}{2\beta + \Phi_\xi}, \quad \frac{d\eta}{d\alpha} = \frac{\beta}{2\beta + \Phi_\xi}.$$

Utilizando la integral de Jacobi sabemos que $\alpha^2 + \beta^2 = 2\Phi - C$. Podemos resolver esta ecuación para β y sustituirla en las dos ecuaciones anteriores para obtener un sistema de segundo orden.

Si la solución viene dada por $\xi = f(\alpha)$, $\eta = g(\alpha)$, tenemos que $\alpha = \dot{\xi} = f'(\alpha)\dot{\alpha}$, así podemos determinar el valor de $\alpha(t)$. Luego, tenemos que $\xi = \xi_0 + \int_0^t \alpha(\tau) d\tau$. Por último, $\dot{\eta} = \beta = g'(\alpha)\dot{\alpha} = \alpha g'(\alpha)/f'(\alpha)$. Por tanto,

$$\eta = \eta_0 + \int_0^t \frac{\alpha g'(\alpha)}{f'(\alpha)} d\tau.$$

Este método no es especialmente útil debido a la imposibilidad de determinar de forma explícita las funciones f y g , en vez de seguir ampliando esta línea de pensamiento, nos centraremos en algunos ejemplos particulares.

2.7. Soluciones de equilibrio

En esta sección estudiaremos un caso particular en el que la masa m_3 se mantiene inmóvil en las coordenadas relativas del sistema. Este sistema es conocido como soluciones de equilibrio. Debido a que ξ y η permanecen constantes, la ecuación (2.26) se puede escribir como

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 0. \quad (2.28)$$

Teorema 2.24. *Es posible expresar Φ en términos de ρ_1 y ρ_2 de la siguiente manera*

$$\Phi = (1 - \mu) \left(\frac{1}{2} \rho_1^2 + \rho_1^{-1} \right) + \mu \left(\frac{1}{2} \rho_2^2 + \rho_2^{-1} \right). \quad (2.29)$$

Demostración: Teniendo en cuenta que en este sistema las coordenadas $z = (\xi, \eta)$ y que $z_1 = (-\mu, 0)$ y $z_2 = (1 - \mu, 0)$, y que por definición $\rho_1 = |z - z_1|$ y $\rho_2 = |z - z_2|$, utilizando Pitágoras obtenemos que

$$\rho_1^2 = (\xi + \mu)^2 + \eta^2, \quad \rho_2^2 = (\xi - 1 + \mu)^2 + \eta^2.$$

Vemos que $\xi^2 + \eta^2 = (1 - \mu) \rho_1^2 + \mu \rho_2^2 - \mu(1 - \mu)$.

$$\begin{aligned} (1 - \mu) \rho_1^2 + \mu \rho_2^2 - \mu(1 - \mu) &= (1 - \mu) [(\xi + \mu)^2 + \eta^2] + \mu [(\xi - 1 + \mu)^2 + \eta^2] - \mu(1 - \mu) = \\ &= (1 - \mu) \xi^2 + (1 - \mu) \mu^2 + (1 - \mu) 2\xi\mu + \mu \xi^2 + (\mu - 1)^2 \mu + 2\mu\xi(\mu - 1) + \eta^2 - \mu(1 - \mu) = \\ &= \xi^2 + \eta^2 + (1 - \mu) \mu^2 + (\mu - 1)^2 \mu - \mu(1 - \mu) = \xi^2 + \eta^2. \end{aligned}$$

Por otro lado sabemos que $\Phi = \frac{1}{2} (\xi^2 + \eta^2) + U + \frac{1}{2} \mu(1 - \mu)$ y $U = \frac{(1 - \mu)}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2}$, juntando estos tres resultados obtenemos que:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2} ((1 - \mu) \rho_1^2 + \mu \rho_2^2 - \mu(1 - \mu)) + \frac{(1 - \mu)}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} + \frac{1}{2} \mu(1 - \mu), \\ &= (1 - \mu) \left(\frac{1}{2} \rho_1^2 + \rho_1^{-1} \right) + \mu \left(\frac{1}{2} \rho_2^2 + \rho_2^{-1} \right). \end{aligned}$$

Lema 2.25. *A partir de este teorema podemos reescribir la ecuación (2.28) como*

$$(1 - \mu) \left(\rho_1 - \frac{1}{\rho_1^2} \right) \frac{\xi + \mu}{\rho_1} + \mu \left(\rho_2 - \frac{1}{\rho_2^2} \right) \frac{\xi - 1 + \mu}{\rho_2} = 0. \quad (2.30)$$

$$(1 - \mu) \left(\rho_1 - \frac{1}{\rho_1^2} \right) \frac{\eta}{\rho_1} + \mu \left(\rho_2 - \frac{1}{\rho_2^2} \right) \frac{\eta}{\rho_2} = 0.$$

Demostración:

Utilizando que $\rho_1 = \sqrt{(\xi + \mu)^2 + \eta^2}$ y $\rho_2 = \sqrt{(\xi - 1 + \mu)^2 + \eta^2}$ obtenemos que

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} = \frac{\xi + \mu}{\sqrt{(\xi + \mu)^2 + \eta^2}} = \frac{\xi + \mu}{\rho_1}, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} = \frac{\xi - 1 + \mu}{\sqrt{(\xi - 1 + \mu)^2 + \eta^2}} = \frac{\xi - 1 + \mu}{\rho_2}.$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \eta} = \frac{\eta}{\sqrt{(\xi + \mu)^2 + \eta^2}} = \frac{\eta}{\rho_1}, \quad \frac{\partial \rho_2}{\partial \eta} = \frac{\eta}{\sqrt{(\xi - 1 + \mu)^2 + \eta^2}} = \frac{\eta}{\rho_2}.$$

Aplicando estas derivadas y la regla de la cadena, derivando Φ respecto a ξ y η obtenemos respectivamente

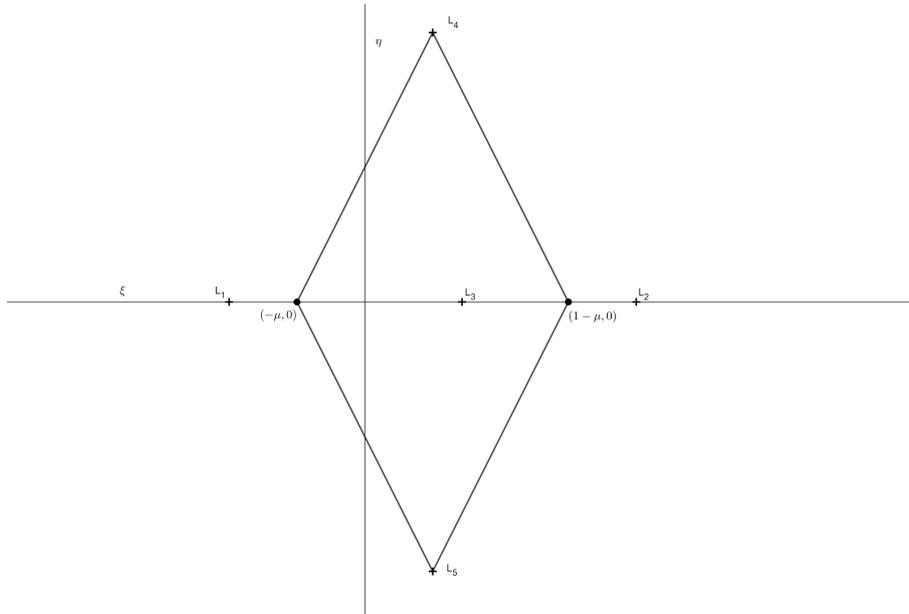
$$(1 - \mu) \left(\rho_1 - \frac{1}{\rho_1^2} \right) \frac{\xi + \mu}{\rho_1} + \mu \left(\rho_2 - \frac{1}{\rho_2^2} \right) \frac{\xi - 1 + \mu}{\rho_2} = 0.$$

$$(1 - \mu) \left(\rho_1 - \frac{1}{\rho_1^2} \right) \frac{\eta}{\rho_1} + \mu \left(\rho_2 - \frac{1}{\rho_2^2} \right) \frac{\eta}{\rho_2} = 0.$$

Supongamos que $\eta \neq 0$, entonces lo podemos sacar factor común en la segunda ecuación y operando nos queda que

$$\left(\rho_1 - \frac{1}{\rho_1^2} \right) \frac{1}{\rho_1} - \left(\rho_2 - \frac{1}{\rho_2^2} \right) \frac{1}{\rho_2} = 0.$$

La única solución para el sistema (2.30) con la nueva expresión de la segunda ecuación es $\rho_1 = \rho_2 = 1$. En este caso hay dos soluciones de equilibrio, estas son los vértices de dos triángulos equiláteros basados en la línea que une $(-\mu, 0)$ y $(1 - \mu, 0)$. Estos son los puntos L_4 y L_5 de la siguiente figura.



En caso de que $\eta = 0$, el sistema de ecuaciones se reduce a una única ecuación.

$$(1 - \mu) \left(\rho_1 - \frac{1}{\rho_1^2} \right) \frac{\xi + \mu}{\rho_1} + \mu \left(\rho_2 + \frac{1}{\rho_2^2} \right) \frac{\xi - 1 + \mu}{\rho_2} = 0.$$

Debido a que $\rho_1 = \xi + \mu$ y $\rho_2 = \xi - 1 + \mu$, existen tres casos $\xi < -\mu$, $-\mu < \xi < 1 - \mu$, $\xi > 1 - \mu$ y tenemos respectivamente

$$\begin{aligned} (a) \quad & \rho_1 = -\xi - \mu, \quad \rho_2 = 1 - \xi - \mu, \quad \rho_2 = 1 + \rho_1. \\ (b) \quad & \rho_1 = \xi + \mu, \quad \rho_2 = 1 - \xi - \mu, \quad \rho_2 = 1 - \rho_1. \\ (c) \quad & \rho_1 = \xi + \mu, \quad \rho_2 = \xi + \mu - 1, \quad \rho_2 = \rho_1 - 1. \end{aligned}$$

Podemos por lo tanto reescribir la ecuación para cada caso

$$\begin{aligned} (a) \quad & (1 - \mu) \left(\rho - \frac{1}{\rho^2} \right) + \mu \left(\rho + 1 - \frac{1}{(\rho + 1)^2} \right) = 0. \\ (b) \quad & (1 - \mu) \left(\rho - \frac{1}{\rho^2} \right) = \mu \left(1 - \rho - \frac{1}{(1 - \rho)^2} \right). \\ (c) \quad & (1 - \mu) \left(1 + \rho - \frac{1}{(1 + \rho)^2} \right) + \mu \left(\rho - \frac{1}{\rho^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Cada una de estas ecuaciones tienen una única solución positiva. Para el caso (a) y (c) esto puede verse debido a que las ecuaciones son de la forma

$$F(\rho) = \frac{\rho - \rho^{-2}}{\rho + 1 - (\rho + 1)^{-2}} = -c.$$

Para $c > 0$, se verifica que $F'(\rho) > 0$ por lo que F es estrictamente creciente. $F(0_-) = -\infty$, $F(1) = 0$. Por lo que F asume el valor $-c$ para un único ρ entre 0 y 1. Son los puntos L_1 y L_2 de la figura anterior.

El caso (b) es similar, en este caso la ecuación es

$$F_1(\rho) = \frac{1 - \rho - (1 - \rho)^{-2}}{\rho - \rho^{-2}} = \frac{1 - \mu}{\mu} \geq 1.$$

Porque $\mu \leq \frac{1}{2}$. La función $F_1(\rho)$ es decreciente en el intervalo $\frac{1}{2} \leq \rho \leq 1$. Además $F_1(\frac{1}{2}) = 1$ y $F_1(1_-) = \infty$ por lo que $F_1(\rho)$ asume el valor $\frac{1-\mu}{\mu}$ una única vez en el intervalo $\frac{1}{2} \leq \rho < 1$. Esto significa que la masa se encuentra más cerca de la masa más ligera, excepto cuando $\mu = \frac{1}{2}$. Esto corresponde con el punto L_3 de figura.

Definición 2.26. *A los cinco puntos L_i se los conoce como puntos de liberación. A los tres primeros se los conoce como los puntos de Euler y a los otros dos como los puntos de Lagrange.*

2.8. Curvas de velocidad zero

Las soluciones de equilibrio son las únicas que pueden determinarse de forma explícita de la ecuación (2.26), sin embargo pueden determinarse ciertas propiedades comunes a

todas las soluciones. A partir de (2.27) podemos determinar que

$$v^2 = 2\Phi - C. \quad (2.31)$$

donde v es la velocidad relativa, es decir, $v = (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2)^{\frac{1}{2}}$, C es la constante del movimiento de Jacobi y en la forma polar,

$$2\Phi = (1 - \mu) (\rho_1^2 + 2\rho_1^{-1}) + \mu (\rho_2^2 + 2\rho_2^{-1}). \quad (2.32)$$

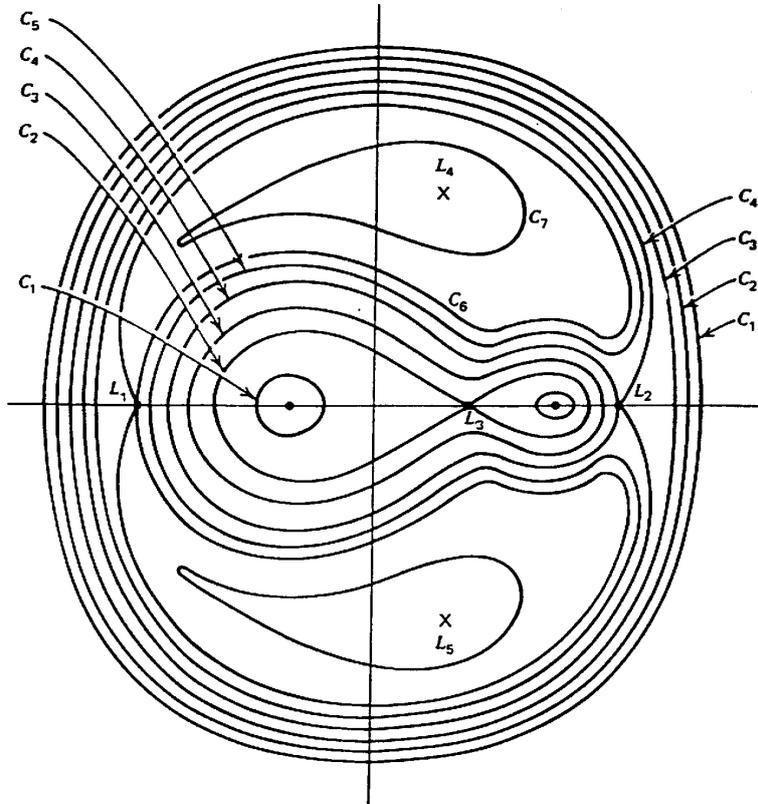
Definición 2.27. Las curvas de nivel $2\Phi = C$ se llaman curvas de velocidad zero debido a (2.31).

Para cualquiera de estas curvas $C > 3$. Para comenzar, vemos que para toda $0 \leq \mu \leq 1$, $A \geq 0$, $B \geq 0$, entonces

$$A\mu + B(1 - \mu) \geq \min(A, B).$$

Si tomamos $A \geq B$ entonces $A\mu + B(1 - \mu) \geq B = \min(A, B)$, tomando $B \geq A$ llegamos a la misma conclusión. Por tanto, por (2.32) $2\Phi \geq \min(\rho_1^2 + 2\rho_1^{-1}, \rho_2^2 + 2\rho_2^{-1})$. Pero el mínimo de la función $x^2 + 2x^{-1}$ es 3 cuando $x = 1$. Por lo tanto, $2\Phi \geq 3$ y la igualdad se cumple cuando $\rho_1 = \rho_2 = 1$. Esto coincide con los puntos L_4 y L_5 de las soluciones de equilibrio.

Comenzamos con $C = 3$, la curva de nivel consiste exclusivamente en los puntos L_4 y L_5 , y describe la forma de las siguientes figuras a medida que C aumenta. Suponemos que $0 < \mu < 1/2$.



Cuando C supera ligeramente 3, las curvas de nivel resultantes son unas pequeñas curvas al rededor de L_4 y L_5 como se observa en la curva C_7 . Cuando C aumenta, la

parte izquierda de las curvas se encuentran en el punto L_1 como se observa en la curva C_6 . Después de una etapa de transición como en C_5 , las curvas se unen en el punto L_2 como se observa en C_4 . Después de una etapa de transición como en C_3 , las curvas se unen en el punto L_3 y las masas primarias son rodeadas como en C_2 . En la etapa final, la unión en L_3 desaparece y, a partir de este punto, la apariencia general muestra en las curvas C_1 en la que las masas primarias están encerradas por las curvas internas.

Estas curvas de nivel son importante por el siguiente motivo. Las curvas $2\Phi = C$ dividen el plano, en las regiones $2\Phi < C$ y $2\Phi \geq C$. El movimiento es imposible cuando $2\Phi < C$ debido a que eso sería $v^2 < 0$. Por lo tanto, las regiones $2\Phi < C$, en la figura las regiones donde se encuentran las curvas con índice superior, indican para cada valor de la constante de Jacobi C , en el sistema de coordenadas $\xi - \eta$ dónde la partícula no puede estar.

Teorema 2.28. *Si la órbita de una partícula toca la curva de nivel correspondiente a su constante de Jacobi, lo hará en la dirección normal de la curva de nivel. Aplicando el cambio de variable $\tau = -t$ se deduce que la afirmación también es cierto cuando la partícula se aleja de la curva de nivel.*

Demostración: La demostración de este teorema se encuentra en el libro *Theory of Orbits: The Restricted Problem of Three Bodies* - Victor Szebehely en el apartado 4.7.5.

3. Conclusiones

Hemos podido comprobar en la primer sección que el estudio de dos masas independientes que se mueven la una atraída por la otra es relativamente sencillo. En este caso, el problema de los dos cuerpos, hay un montón de constantes en el sistema, tanto la forma de la órbita como la posición en la misma pueden, a través de la computación, determinarse exactamente.

Por el contrario, cuando agregamos más masas en el problema, el sistema se vuelve caótico. Es imposible determinar siquiera la forma exacta de la órbita de cada masa. El primer paso para llegar a resultados más exactos es reducir el problema a sólo tres masas, esto simplifica las ecuaciones pero sigue sin ser suficiente para solucionar el problema. Es necesario para poder resolver este problema, tomar unos casos muy específicos que nos permiten determinar con exactitud las órbitas.

El problema de tres cuerpos más estudiado es el caso del problema restringido en el que suponemos que una de las masas tiene masa nula, aunque no es el único problema estudiado. Todas estas suposiciones que reducen el problema a un caso demasiado particular tienen un sentido dentro de la naturaleza. Si se quiere lanzar un satélite que debe pasar en una órbita entre el sol y la tierra, suponer que éste no tiene masa no es una locura. Así pues, utilizando estas restricciones en el problema de los tres cuerpos somos capaces de estudiar y predecir el comportamiento de muchos cuerpos que se alzan en nuestras cabezas y, hasta ahora, parecían vagar sin rumbo.

Referencias

- [1] (The Carus Mathematical Monographs - No. 18) Harry Pollard - Celestial Mechanics-
Mathematical Assn of Amer (1976).
- [2] Victor Szebehely - Theory of Orbits: The Restricted Problem of Three Bodies.
- [3] Wolfram Alpha: <https://www.wolframalpha.com/>
Consulta para la resolución de ecuaciones diferenciales. 2 de Octubre de 2019.
- [4] Geogebra - Versión offline 6,0,564,0.
Creación de los gráficos.
- [5] <https://www.semanticscholar.org/paper/A-trajectory-generation-and-system-characterization-Korsmeyer-Pinon/ffd00f49907f9317f84689a61ee0398648afb6e1/figure/3>
Imagen de consulta para el gráfico de curvas de nivel. 18 de Enero de 2020.