



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

Trabajo Final de Grado

GRADO DE MATEMÁTICAS

TEOREMAS DEL PUNTO FIJO Y APLICACIONES

Autor: Daniel García

Director: Dr. Xavier Massaneda
Realizado en: Departament de Matemàtiques
i Informàtica

Barcelona, 19 de enero de 2020

Abstract

In Mathematics, there exist several theorems (or family of theorems) that do not seem as powerful as they actually are. These are the type of theorems which, at first glance, we do not perceive the big potencial they have. Maybe because of the simplicity of the theorem or maybe because we could believe the theorem shows an obvious fact. The fixed-point theorems (or the theory of the fixed-point theorems) could be an example of this phenomenon.

In this line, the aim of this document is to demonstrate that the theory of fixed-points theorems is an indispensable tool in Mathematics and its applications in Science. In order to do so, three relevant fixed-point theorems and their respective applications are presented: the Banach's Fixed Point Theorem and its application to the Cauchy-Lipschitz's Theorem, the Brouwer's Fixed Point Theorems and its application to the existence of Nash's Equilibrium and the Schauder's Fixed Point Theorem and its application to the Lomonosov's Theorem.

Apart from showing the mathematics hidden behind the theorems and their applications, the main objective is to exhibit the power of this theory in such different fields as Analysis or Topology, and in different domains such as Economy or Game Theory.

Índice

1. Introducción	1
2. Teorema del Punto Fijo de Banach	9
2.1. Enunciado y contexto del Teorema	9
2.2. Demostración del Teorema del Punto Fijo de Banach	10
2.3. Aplicación: Teorema de Cauchy-Lipschitz	11
2.3.1. Introducción y conceptos previos	11
2.3.2. Teorema de Cauchy-Lipschitz	12
3. Teorema del Punto Fijo de Brouwer	17
3.1. Enunciado y contexto del Teorema	17
3.2. Conceptos previos	17
3.3. Demostración del Teorema del Punto Fijo de Brouwer	18
3.4. Aplicación: Existencia de equilibrios de Nash	22
3.4.1. Introducción y conceptos previos	22
3.4.2. Teorema de Existencia de Equilibrios de Nash	27
3.5. Juego de Hex - Teorema del Punto Fijo de Brouwer	28
3.5.1. Introducción del Juego de Hex	28
3.5.2. Teorema de Hex	29
3.5.3. Equivalencia entre el Teorema de Hex y el Teorema del Punto Fijo de Brouwer	31
4. Teorema del Punto Fijo de Schauder	35
4.1. Enunciado y contexto del Teorema	35
4.2. Conceptos previos	35
4.3. Demostración del Teorema del Punto Fijo de Schauder	37
4.4. Aplicación: Teorema de Lomonosov	38
4.4.1. Introducción y enunciado	38
4.4.2. Conceptos previos	39
4.4.3. Teorema de Lomonosov	43

1. Introducción

Cuando hablamos del Teorema del Punto Fijo no nos referimos a un teorema en concreto, sino a toda una teoría, conocida como la Teoría del Punto Fijo. Esta teoría se centra en especificar las condiciones bajo las cuales se puede afirmar que una función f sobre un dominio dado tiene un punto fijo, es decir, tiene un punto x de dicho dominio de manera que $f(x) = x$.

Hay diversos aspectos que determinan la importancia de una teoría, como la abundancia y contundencia de aplicaciones en diversas áreas, la estética y profundidad de los resultados que conectan las hipótesis con la tesis o la propia historia de la teoría.

La Teoría del Punto Fijo tiene su origen en el siglo XIX, cuando Henri Poincaré publica *Analysis situs* donde afirma que para el estudio de las ecuaciones diferenciales *es necesario conocer las propiedades invariantes de una figura cuando se la deforma de manera continua y sin rasgaduras*. No obstante, no fue hasta el siglo XX cuando la Teoría se desarrolló. Matemáticos como Stefan Banach, Shizuo Kakutani, Juliusz Schauder, L. E. J. Brouwer, Rangachary Kannan, entre otros, demostraron la existencia de puntos fijos para funciones específicas en dominios concretos, dando lugar así a los famosos Teoremas del Punto Fijo que se conocen hoy día. Como consecuencia de la amplia familia de teoremas que reúne la Teoría del Punto fijo, ésta es una bella mezcla de análisis, topología y geometría que tiene múltiples aplicaciones en las matemáticas y en otras muchas disciplinas. La teoría de optimización, la teoría de aproximación para resolver ecuaciones, los fractales o las ecuaciones diferenciales son ramas que se han visto beneficiadas por estos teoremas. Además, debido a la gran utilidad de estos teoremas en la búsqueda de equilibrios, campos como la física, la ingeniería, la Teoría de Juegos o la biología son áreas en que la Teoría del Punto Fijo tiene gran relevancia. Por tanto, esta Teoría se ha convertido en una herramienta imprescindible ya no solo en el análisis moderno, sino en las matemáticas y en las ciencias en general.

Como decíamos, la Teoría del Punto Fijo abarca un gran número de teoremas y resultados imposible de recoger todos en un mismo documento. De hecho, el editor científico *Springer* tiene entre sus publicaciones *Journal of Fixed Point Theory and Application*, que es una prestigiosa revista que recoge todo tipo de resultado que tenga que ver con la búsqueda de puntos fijos y sus aplicaciones, con el propósito de mostrar la gran relevancia de esta teoría.

En este trabajo nos centraremos en tres teoremas fundamentales de la Teoría del Punto Fijo: El Teorema del Punto fijo de Banach, el de Brouwer y el de Schauder. Por tanto, siguiendo con esta idea, el trabajo está dividido en tres secciones principales, cada una de las cuales trata sobre uno de los teoremas recién mencionados. La estructura de las secciones es la siguiente: primero se pondrá en contexto el teorema explicando brevemente su historia, a continuación el teorema se demuestra para finalmente proceder a una aplicación detallada y probada del enunciado.

La primera sección está dedicada al Teorema del Punto Fijo de Banach para espacios métricos completos. Banach probó que si una función f continua es contractiva, entonces se puede afirmar que existe un punto fijo de f (mirar Sección 2.1 para encontrar el enunciado más detallado del Teorema del Punto Fijo de Banach). La demostración que se presenta se basa en observar que la sucesión definida como $x_0 = x$, $x_n = f(x_{n-1})$ para $n > 0$, donde x es cualquier punto del espacio métrico, es de Cauchy y por tanto

convergente. Inicialmente se prueba que si el punto fijo existiera, éste sería único, pues sino llegaríamos a una contradicción con que f es contractiva. Esto es, si suponemos que existen dos puntos fijos x_1 y x_2 , es decir, $f(x_2) = x_2$ y $f(x_1) = x_1$, se tiene por tanto que $d(f(x_2), f(x_1)) = d(x_2, x_1)$, lo que contradice que f sea contractiva. A continuación, se demuestra que la sucesión es de Cauchy viendo que $\sup d(x_{n+m}, x_n) \rightarrow 0$ a una velocidad que depende de como de contractiva sea la función. Finalmente, por la continuidad de f se prueba que el punto donde converge la sucesión es un punto fijo de f . Es trivial ver si que x^* es el punto de convergencia de la sucesión, se tiene que $f(x^*) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f^{n+1}(x)) = x^*$, donde en la segunda igualdad utilizamos que f es continua. Por tanto, x^* es un punto fijo de f y, por lo visto anteriormente, el único. En la Sección 2.2 se encuentra esta demostración con todo detalle.

Una vez demostrado el teorema, se presenta la aplicación: El Teorema de Cauchy-Lipschitz de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales. Inicialmente se hace una breve introducción de la Teoría de las Ecuaciones Diferenciales. Todo seguido se demuestra el teorema, el cual afirma que toda ecuación diferencial definida en un recinto concreto cuyo campo vectorial de velocidades satisfaga la hipótesis de Picard tiene una única solución local (ver Sección 2.3 para encontrar tanto las hipótesis como el enunciado en más detalle). Para ello, definiremos el operador de Picard y probaremos que encontrar un punto fijo de este operador es equivalente a encontrar un flujo que solucione la ecuación integral de Volterra. Se demuestra también que resolver la ecuación integral de Volterra es equivalente a encontrar la única solución del Teorema de Cauchy-Lipschitz. Es por esto que la demostración que se presenta en este trabajo se basa en comprobar que el operador de Picard está bien definido en el recinto que nos interesa y que satisface todas las hipótesis del Teorema del Punto fijo de Banach, de tal manera que se pueda afirmar que el operador tiene un punto fijo y, por las equivalencias recién mencionadas, que exista una única solución de la ecuación diferencial. En la Sección Sección 2.3 se encuentra esta demostración con todo lujo de detalle.

La segunda sección trata sobre el Teorema del Punto Fijo de Brouwer, el cual afirma que toda función f continua de una bola cerrada unitaria de dimensión finita en si misma tiene al menos un punto fijo (ver Sección 3.1). De la misma manera que en la sección anterior, se hace un breve repaso a la historia y al contexto del teorema para proceder a su demostración. El teorema de Brouwer se puede probar de múltiples maneras. Una de ellas es, tal y como realizó John Milnor ³, contradiciendo el Teorema de la Bola Peluda, que es la que aparece en este trabajo. Este teorema niega la existencia de un campo continuo de vectores tangentes de la esfera S^{n-1} , para n impar. La idea de la demostración del teorema de Brouwer es contradecir el Teorema de la Bola Peluda a través de ingeniosas proyecciones, las cuales definen un campo continuo de vectores tangentes del hemisferio sur de la esfera y, análogamente, del hemisferio norte. Todo esto suponiendo que f no tiene puntos fijos. En la Sección 3.3 se encuentra esta demostración con todo detalle.

A continuación se presentaría la aplicación de este teorema. En este caso, la aplicación está en la Teoría de Juegos en la demostración de la existencia de equilibrios de Nash. Primero se presenta la teoría necesaria sobre la Teoría de juegos con el fin de entender el concepto de equilibrio de Nash y, a continuación, se prueba la existencia de estos equilibrios en juegos no cooperativos finitos. Para ello, probamos que el producto de los conjuntos formados por todas las estrategias mixtas de cada jugador es un conjunto

³Milnor, J.: *Analytic proofs of the "Hairy ball theorem." and the Brouwer fixed point theorem.* American Mathematical Monthly Vol 85 No 7, pag 521-524. (1978)

acotado, cerrado y convexo. Este hecho es clave para la demostración de equilibrios de Nash pues utilizaremos el Teorema del Punto Fijo de Brouwer a través de un corolario directo de él mismo. Este corolario afirma que toda función continua en un subconjunto compacto y convexo de \mathbb{R}^n (n finito) tiene al menos un punto fijo (ver Sección 3.4.1 para encontrar este corolario en más detalle). Demostraremos la existencia del equilibrio de Nash mediante cierta función $g : S \rightarrow S$, donde S es el producto de los conjuntos formados por todas las estrategias mixtas de cada jugador, a la que le aplicaremos el corolario del Teorema del Punto Fijo de Brouwer para asegurarnos que tiene un punto fijo. A partir de este instante, la demostración se centra en probar que este punto fijo es el equilibrio de Nash. En la Sección 3.4.2 se encuentra esta demostración con todo detalle. En este apartado también se demuestra de manera precisa el Corolario del Teorema del Punto Fijo de Brouwer (Sección 3.4.1).

Por último, y antes de empezar la tercera sección, se da una demostración alternativa y muy curiosa del Teorema del Punto Fijo de Brouwer en su versión bidimensional. Si bien ya hemos visto que el teorema de Brouwer mantiene una relación con la Teoría de Juegos debido a la demostración de la existencia del equilibrio de Nash, esta relación se vuelve más estrecha en el momento en que se probó que el Teorema del Punto Fijo de Brouwer se puede demostrar a través de un juego de la Teoría de Juegos, el juego de Hex. El juego de Hex se juega en un tablero formado por hexágonos (casillas) que lo cubren entero y en donde juegan dos participantes. Cada uno compite contra el otro. Es un juego que va por turnos en el cual cada jugador tiene que marcar un hexágono con una x (*jugador x*) o con una o (*jugador o*). Esto con el objetivo de unir los dos lados opuestos del tablero con un camino conectado de hexágonos marcados con una x, en el caso del jugador x, o con una o, en el caso del jugador o.

El jugador x tratará de unir los lados del tablero X y X' con casillas marcadas por x, mientras que el jugador o intentará que sean los lados O y O' con casillas marcadas por o. Gana el primer jugador que logre este objetivo. Tanto los lados X , X' , O y O' como el tablero se pueden ver en la *Figura 1* (pág. 4), la cual representa un tablero de Hex de dimensión 11×11 .

El juego de Hex tiene la particularidad de que es imposible que la partida acabe en empate, es decir, para todo tablero de Hex con todas las casillas marcadas por x's y o's, siempre existirá un camino conectado de casillas marcadas por x (ó o) que unan los lados X y X' (ó O y O'). Este hecho es de gran interés pues es esta propiedad del juego, la imposibilidad de empate, la que demuestra el Teorema del Punto Fijo de Brouwer en dos dimensiones.

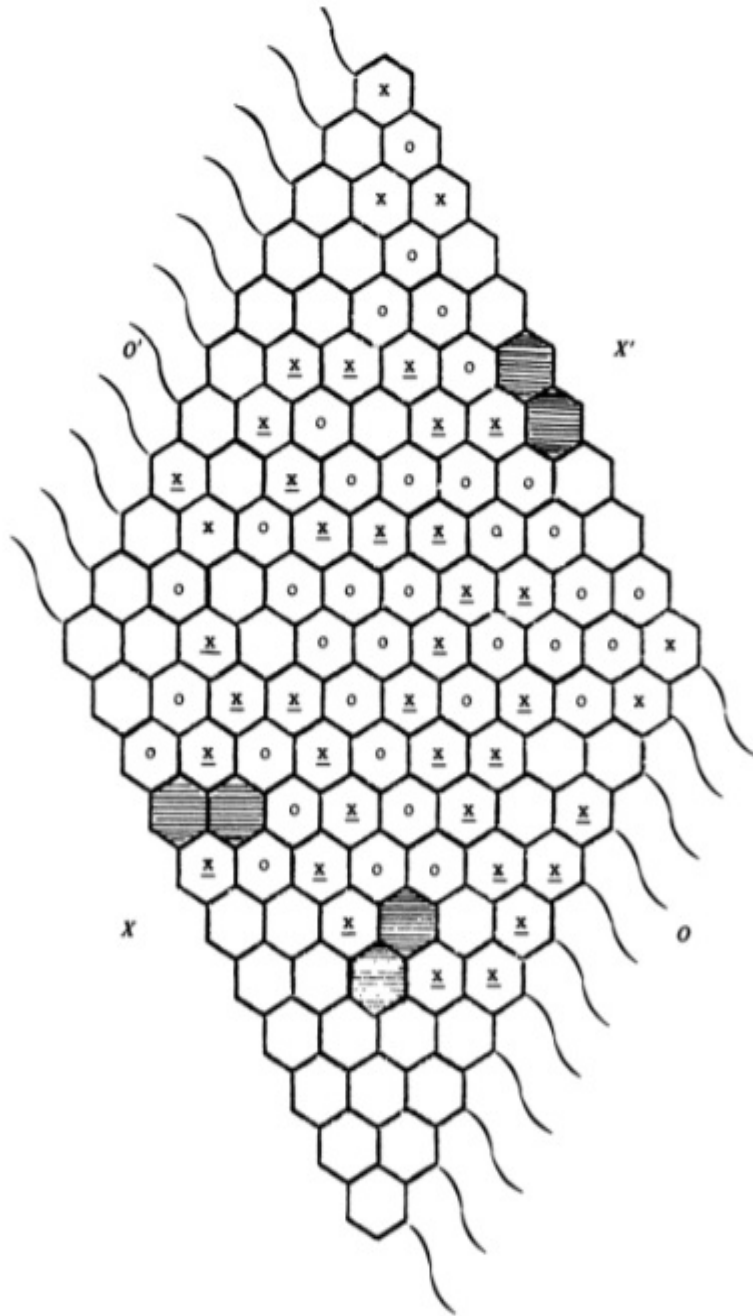


Figura 1: Tablero de Hex

Sea B_k la representación en forma de grafo del tablero de Hex de dimensión $k \times k$ (en el apartado Juego de Hex-Teorema del Punto Fijo de Brouwer se ve con todo detalle como convertimos el tablero en el grafo). B_k está formado por los vértices $z = (i, j)$ con $i, j = 1, \dots, k$, $i, j \in \mathbb{Z}$. Decimos que dos vértices z y z' son adyacentes (unidos por una arista) si son comparables, es decir, $z < z'$ ó $z' < z$, y además $|z - z'| = 1$. Decimos que $z < z'$ si $i \leq i'$ i $j \leq j'$.

La *figura 2* muestra el tablero de Hex 5×5 en su forma de grafo, es decir, muestra B_5 . Con esta representación hemos de pensar que el *jugador horizontal* busca construir un camino (de vértices z conectados por sus aristas) que una los lados W y E . Análogo para el *jugador vertical* con los lados N y S .

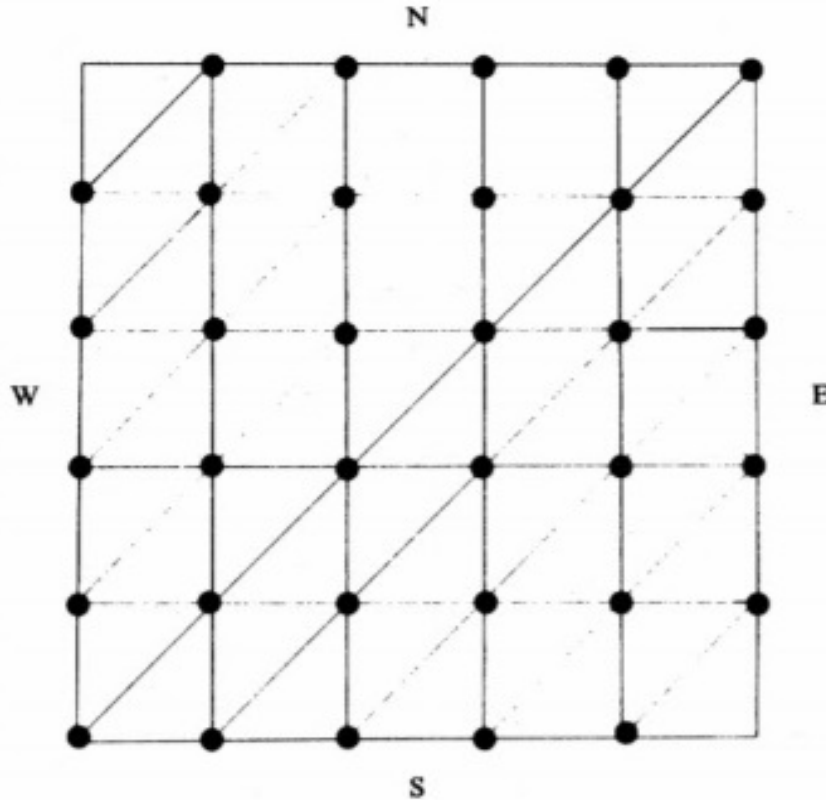


Figura 2: Tablero de Hex en su forma de grafo de dimensión 5×5

Por tanto, podemos definir la propiedad de la no existencia de empate mediante el siguiente teorema.

Teorema de Hex. *Sea B_k el tablero de Hex cubierto totalmente por dos conjuntos H y V . Entonces, se tiene que o bien H contiene un conjunto conectado de elementos de B_k que unen las fronteras E y W o bien V contiene un conjunto conectado de elementos de B_k que unen las fronteras N y S .*

Veamos que, tal y como decíamos, el Teorema de Hex implica el Teorema del Punto Fijo de Brouwer. El Teorema del Punto Fijo de Brouwer bidimensional tiene el siguiente enunciado:

Teorema del Punto Fijo de Brouwer. *Sea $f : I^2 \rightarrow I^2$ una función continua, donde I^2 es el cuadrado unitario $I = [0, 1]^2$. Entonces, existe $x \in I^2$ tal que $f(x) = x$.*

Pese a que esta introducción del Juego de Hex es suficiente como para comprender la prueba que se presenta a continuación, recomiendo a los lectores que dediquen unos minutos en mirar la Sección 3.5, pues conceptos como la definición del tablero, las reglas del

juego, la imposibilidad de empate o el Teorema de Hex están explicados con más detalles y rigurosidad.

Ahora vamos a demostrar que el Teorema de Hex implica el Teorema del Punto Fijo de Brouwer.

Consideremos $f : I^2 \rightarrow I^2$ continua definida como $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$. Por la compacidad de I^2 es suficiente con probar que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $x \in I^2$ tal que $|f(x) - x| < \varepsilon$. Debido a la continuidad uniforme de f sabemos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\sigma > 0$ tal que $\sigma < \varepsilon$ y si $|x - x'| < \sigma$, entonces $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$, donde $x, x' \in I^2$.

Consideremos ahora el tablero de Hex B_k tal que $1/k < \sigma$. Definimos los subconjuntos de B_k H^+, H^-, V^+, V^- como

$$\begin{aligned} H^+ &= \{z \mid f_1(z/k) - z_1/k > \varepsilon\} \\ H^- &= \{z \mid z_1/k - f_1(z/k) > \varepsilon\} \\ V^+ &= \{z \mid f_2(z/k) - z_2/k > \varepsilon\} \\ V^- &= \{z \mid z_2/k - f_2(z/k) > \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Intuitivamente, un vértice z de B_k pertenece a H^+, H^-, V^+, V^- si z/k es movido por f al menos ε unidades hacia la derecha, izquierda, arriba y abajo, respectivamente. El Teorema del punto fijo de Brouwer quedará demostrado si probamos que B_k no queda cubierto totalmente por estos cuatro subconjuntos. Esto es, si z de B_k no pertenece a ninguno de los subconjuntos, se tendría que $|f(z/k) - z/k| < \varepsilon$.

Vamos a probar que los subconjuntos H^+ y H^- (V^+ y V^-) no son contiguos. Supongamos que $z \in H^+$ y $z' \in H^-$, entonces se tiene que $f_1(z/k) - z_1/k > \varepsilon$ y $z'_1/k - f_1(z'/k) > \varepsilon$. Sumando estas dos últimas expresiones obtenemos que

$$f_1(z/k) - f_1(z'/k) + z'_1/k - z_1/k > 2\varepsilon. \quad (1.1)$$

Debido a la elección de σ y k ($1/k < \sigma$), se tiene que $z'_1/k - z_1/k < \sigma < \varepsilon$, y por tanto

$$-z'_1/k + z_1/k > -\varepsilon. \quad (1.2)$$

Finalmente, sumando (1.1) y la (1.2) obtenemos que $f_1(z/k) - f_1(z'/k) > \varepsilon$. Esto indica que los vértices z y z' no son adyacentes, pues si lo fueran tendríamos que $|z/k - z'/k| = 1/k < \sigma$, y por la continuidad uniforme de f , se tendría entonces $|f(z/k) - f(z'/k)| < \varepsilon$, en contra de lo que acabamos de ver. De forma análoga se prueba que V^+ y V^- tampoco son contiguos.

Ahora consideremos el conjunto $H = H^+ \cup H^-$ y $V = V^+ \cup V^-$ y supongamos que P es un conjunto conectado de elementos de H . Debido a la no contigüidad de H^+ y H^- , se tiene que P ha de pertenecer totalmente a H^+ o H^- . No obstante, notamos que H^+ nunca alcanza E debido a que f se aplica desde I^2 a sí mismo, y por tanto ningún punto de la frontera E puede desplazarse $\varepsilon > 0$ unidades a la derecha (sentido horizontal positivo). De manera similar, H^- no alcanza los puntos de la frontera W , y entonces se tiene que P no puede unir los puntos de E con los puntos de W . Análogamente, V no contiene ningún camino conectado que una los puntos de N con los de S . Sin embargo, el Teorema de Hex nos asegura la existencia de un camino que sí que una o las fronteras

E y W o las fronteras N y S , lo que nos demuestra que los conjuntos H y V no cubren todos los puntos del tablero B_k .

En el apartado Juego de Hex-Teorema del Punto Fijo de Brouwer también se presenta, además de más detalles sobre el juego y su relación con el teorema, la demostración del Teorema de Hex. Para ello se muestra un algoritmo que encuentra un conjunto conectado de casillas que unan los lados correspondientes para todo tablero con todas las casillas marcadas. Finalmente, se prueba que el Teorema de Hex y el Teorema del Punto Fijo de Brouwer bidimensional son equivalentes, presentando una prueba que muestra que *Brouwer* implica *Hex*.

Seguidamente inauguramos la tercera sección y nos centramos en el Teorema del Punto Fijo de Schauder. Al igual que en los casos anteriores, se presenta el Teorema repasando brevemente la historia anterior al Teorema y, en este caso, también la posterior, pues se puede observar que a lo largo de los últimos años ha sido posible generalizar el Teorema del Punto Fijo de Schauder a diferentes espacios. En este trabajo vamos a tratar la versión que demostró Schauder en 1930, que generaliza el corolario del Teorema del Punto Fijo de Brouwer. Schauder probó la existencia de puntos fijos para subconjuntos convexos, cerrados y acotados de un espacio normado de dimensión arbitraria, sea finita o no. En este caso, a diferencia del corolario de Brouwer, no necesitamos que el espacio sea finito, sin embargo, sí que se requiere de una hipótesis extra, ya que la función f además de continua ha de ser compacta (ver Sección 4.1 para encontrar el enunciado del teorema con más detalles). Una vez presentado el Teorema, se enuncia la teoría necesaria de espacios normados y topológicos que utilizaremos en la prueba del Teorema de Schauder. Finalmente, procedemos a la demostración, que en esencia consiste en definir, para cada n natural, una función que cumple las condiciones del corolario del Teorema del Punto Fijo de Brouwer, pudiendo asegurar así que cada una de ellas tiene un punto fijo. A continuación se considera la sucesión formada por las imágenes de f de los puntos fijos, se prueba que tiene una parcial convergente y entonces la demostración se concentra en ver que el punto donde converge la parcial es un punto fijo de f . Esta demostración se puede encontrar con todo lujo de detalles en la Sección 4.1.

Finalmente, tratamos la aplicación de el Teorema de Schauder, que es el Teorema de Lomonosov sobre espacios invariantes. Se inicia con una presentación del Teorema de Lomonosov donde se resalta el esfuerzo de la sociedad matemática en hallar un resultado como el que Lomonosov logró encontrar en 1973. El objetivo ya no era encontrar funciones con puntos fijo, sino que ahora se intentaba encontrar algún resultado que asegurara la existencia de subespacios invariantes por un operador. Lomonosov probó que un operador de un espacio de Banach, el cual no es múltiplo de la identidad y conmuta con un operador compacto no nulo, tiene un subespacio invariante (ver Sección 4.4.1 para encontrar el teorema más detallado). También se muestran en esta introducción las palabras del matemático I. Namioka, el cual estaba involucrado en la búsqueda de algún resultado como el de Lomonosov, donde describe cómo de fuerte es el uso del Teorema del Punto Fijo de Schauder por la manera en cómo se simplifica toda la demostración. Todo seguido, se muestran unas serie de definiciones y lemas que serán necesarios para entender el Teorema de Lomonosov y, finalmente, la prueba del Teorema de Lomonosov. En la Sección 4.4.3 se encuentra esta demostración con todo detalle.

2. Teorema del Punto Fijo de Banach

2.1. Enunciado y contexto del Teorema

El Teorema del Punto Fijo de Banach es un teorema que detalla las hipótesis que tiene que reunir un espacio métrico para que una función, también bajo ciertas condiciones, tenga un punto fijo. Este resultado fue enunciado y demostrado por Stephan Banach en 1922, el cual causó un gran impacto en la sociedad matemática en muy poco tiempo. Esto no solo fue por la simplicidad de la demostración, basada en observar que la distancia entre los iterados de una sucesión determinada decrece exponencialmente, sino porque a diferencia de los anteriores teoremas de la extensa familia de teoremas de punto fijo, el de Banach, además de garantizar la existencia de un punto fijo, también nos dice cual es este punto explicitando un método mecánico para hallarlo. Por tanto, el teorema de Banach da un paso más allá en comparación con los anteriores teoremas de punto fijo.

Teorema del Punto Fijo de Banach. *Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $f : X \rightarrow X$ una aplicación contractiva en X , es decir, existe un $k \in (0, 1)$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) \forall x, y \in X$. Para cada x de X , sea $x_0 = x$, $x_n = f^{(n)}(x_0)$, donde $f^{(n)}(x) = (f \circ \dots \circ f)(x)$. Entonces:*

1. *Existe un único punto x de X de manera que $f(x) = x$. Denotaremos este punto fijo por x^* y lo llamamos punto fijo de f .*
2. $\forall x \in X, \lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(x) = x^*$.

Un hecho que explica muy bien la gran importancia de este teorema son sus múltiples aplicaciones en diferentes campos. De hecho, para saber un poco sobre la historia de este teorema, hay que decir que su origen reside en la demostración que intentó Picard del teorema de Cauchy-Lipschitz de ecuaciones diferenciales, que afirma la existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales bajo ciertas condiciones. Picard afirmó que el método para demostrar el teorema de Cauchy-Lipschitz es mediante una función que admita en su dominio elementos invariantes, es decir, mediante puntos fijos. No obstante, no fue capaz de demostrar ningún resultado que le asegurase la existencia del punto fijo que necesitaba hasta que unos años más tarde Banach pudo recoger el *legado* de Picard formalizando esta idea y descubriendo así el ahora llamado Teorema del Punto Fijo de Banach. A pesar de esto, Picard logró demostrar un teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales que generaliza el teorema de Cauchy-Lipschitz sin necesidad de utilizar lo que más tarde sería el Teorema de Punto Fijo de Banach. Lógicamente, una aplicación directa de este teorema está en la demostración del teorema de Cauchy-Lipschitz. No obstante, el teorema de Banach no sólo se limita a esta aplicación. Como decía, abarca muchas más, y es en este hecho donde reside su gran potencial. Entre otras aplicaciones, el teorema de Banach se utiliza en el método de Newton para hallar raíces de ciertas ecuaciones, en la resolución de sistemas lineales, en la existencia de soluciones de ecuaciones integrales, en sistemas de Sturm-Liouville, en fractales, etc.

2.2. Demostración del Teorema del Punto Fijo de Banach

Primero demostramos que si el punto fijo existiera, éste es único. Sean x_1, x_2 dos puntos fijos de X tales que $x_1 \neq x_2$. Entonces, si $f(x_2) = x_2$ y $f(x_1) = x_1$, tenemos que $d(f(x_2), f(x_1)) = d(x_2, x_1)$, con la cual cosa llegamos a una contradicción con la hipótesis de que f es una función contractiva.

Veamos ahora la existencia del punto fijo. Para ello, tomemos un punto $x \in X$ cualquiera. Queremos ver que la sucesión $\{x_n\}_{n \geq 0}$ definida como

$$x_0 = x, x_n = f(x_{n-1}) \quad \forall n \geq 1,$$

es convergente. Este hecho será la clave para ver que el punto fijo existe. Vamos a utilizar que el espacio métrico (X, d) es completo, de manera que si probamos que la sucesión es de Cauchy, esta sucesión converge en X . Por tanto, queremos ver que

$$\sup d(x_{n+m}, x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

donde $m \geq 0$. Por la desigualdad triangular de las distancias, se tiene que

$$d(x_{n+m}, x_n) \leq d(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + d(x_{n+m-1}, x_{n+m-2}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n).$$

Debido a que $d(x_{n+1}, x_n) \leq kd(x_n, x_{n-1}) \leq \dots \leq k^n d(x_1, x_0)$, tenemos que

$$d(x_{n+m}, x_n) \leq k^{n+m-1}d(x_1, x_0) + k^{n+m-2}d(x_1, x_0) + \dots + k^n d(x_1, x_0).$$

Como $1 + k + k^2 + \dots = \frac{1}{1-k}$, obtenemos finalmente que

$$d(x_{n+m}, x_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0).$$

Es decir, se tiene que

$$\sup d(x_{n+m}, x_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0).$$

Ahora, como $\frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, se obtiene que

$$\sup d(x_{n+m}, x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

de manera que la sucesión es de Cauchy y, por tanto, converge en un cierto punto x^* de X .

Vamos a probar que x^* es un punto fijo de f , y, por lo visto anteriormente, el único.

Por la continuidad de f ,

$$f(x^*) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f^{n+1}(x)) = x^*.$$

□

2.3. Aplicación: Teorema de Cauchy-Lipschitz

2.3.1. Introducción y conceptos previos

Uno de los muchos objetivos de las matemáticas es modelizar fenómenos y sistemas dinámicos. Esto supone una gran ventaja, pues si el modelo es adecuado, podremos conocer con exactitud la evolución total del proceso, siendo este un hecho primordial a conocer si se quiere estudiar más a fondo este sistema dinámico. Estos modelos se establecen mediante ecuaciones diferenciales.

Las ecuaciones diferenciales juegan un rol primordial en ciencias como la Física, la Química, la Biología, la Ingeniería o la Economía, siendo una herramienta clave para interpretar fenómenos de la naturaleza así como para comprender el funcionamiento de cualquier sistema no estático. No obstante, resolver las ecuaciones diferenciales es algo no trivial. De hecho, únicamente las más simples se pueden resolver mediante fórmulas explícitas, y en algunos casos, no se puede ni asegurar que la ecuación diferencial tenga solución. Es por eso que resultados que afirmen la existencia de soluciones o que establezcan métodos para encontrar la solución son de infinita utilidad.

Es por esto que el Teorema de Cauchy-Lipschitz es un resultado muy relevante en la teoría de las ecuaciones diferenciales. Este teorema reúne estos dos requisitos mencionados anteriormente: establece que las ecuaciones diferenciales que satisfagan unas ciertas condiciones admiten una única solución y, además, nos proporciona un método programable para que computadoras puedan encontrar esta solución mediante un proceso iterativo.

Con el fin de entender tanto el Teorema de Cauchy-Lipschitz como su demostración, es necesario hacer un recordatorio de algunos conceptos

Definición 2.1. *Un proceso evolutivo con espacio de fase ampliado un abierto $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y dominio $D \subset \mathbb{R} \times \Omega$ es una aplicación continua*

$$\begin{aligned} \varphi : D &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t; t_o, x_o) &\mapsto \varphi(t; t_o, x_o), \end{aligned}$$

tal que

1. (t_o, x_o) indica el estado del proceso inicial x_o a tiempo inicial t_o , D es un abierto y, para todo $(t_o, x_o) \in \Omega$, $I(t_o, x_o) = \{t \in \mathbb{R} | (t, x_o) \in D\}$ es un intervalo abierto, llamado intervalo temporal (el intervalo temporal de la evolución con condición inicial (t_o, x_o));
2. $\forall (t_o, x_o) \in \Omega, t_1 \in I(t_o, x_o)$:
 - a) $t_o \in I(t_o, x_o)$ y $\varphi(t_o; t_o, x_o) = x_o$.
 - b) $t_2 \in I(t_1, \varphi(t_1; t_o, x_o))$ si, y solo si, $t_2 \in I(t_o, x_o)$, y $\varphi(t_2; t_1, \varphi(t_1; t_o, x_o)) = \varphi(t_2; t_o, x_o)$
3. φ es derivable respecto a t , y la derivada parcial $\frac{\partial \varphi}{\partial t} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua.

Intuitivamente, trataremos los procesos evolutivos ($\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$) tales que:

1. Son finito-dimensionales, pues el conjunto de estados posibles del proceso, denominado *espacio de fase*, está identificado con una variedad diferenciable finito-dimensional;
2. Son deterministas, ya que los estados futuro y pasado están completamente determinados por el estado presente del proceso, y además dependen continuamente respecto al estado presente;
3. Son diferenciables, debido a que la dependencia de un estado respecto al tiempo es diferenciable.

Definición 2.2. *El campo vectorial de velocidades de fase del proceso evolutivo es la aplicación continua*

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(t, x) \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, t, x),$$

Definición 2.3. *La ley del proceso evolutivo es la ecuación diferencial definida en Ω , $\frac{\partial x}{\partial t} = f(t, x)$. Tal ecuación codifica la relación entre la velocidad del proceso y el estado del mismo en cada instante.*

Definición 2.4. *Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de velocidades de fase en el abierto $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Se dice que f satisface la hipótesis de Picard si f es localmente Lipschitz respecto a x en Ω , esto es, para todo $(t', x') \in \Omega$ existen $a, b > 0$ tal que $I_a(t') \times B_b(x') \subset \Omega$ y existe $L \geq 0$, llamada constante de Lipschitz, tal que*

$$|f(t, x_2) - f(t, x_1)| \leq L|x_2 - x_1|, t \in I_a(t'), x_1, x_2 \in B_b(x').$$

2.3.2. Teorema de Cauchy-Lipschitz

Teorema de Cauchy-Lipschitz. *Sea $\frac{\partial x}{\partial t} = f(t, x)$ una ecuación diferencial definida en $I_a(t') \times B_b(x')$, con $(t', x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y $a, b > 0$ tal que $f : I_a(t') \times B_b(x') \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua y satisface la hipótesis de Picard. Sea $M \geq 0$ tal que, para todo $(t, x) \in I_a(t') \times B_b(x')$, $|f(t, x)| \leq M$. Sean s, r, q tales que $0 < s \leq a$, $0 \leq r \leq s$, $0 \leq q \leq b$ y $(s + r)M + q \leq b$. Entonces, existe una única función continua*

$$\varphi : I_s(t') \times I_r(t') \times B_q(x') \rightarrow B_b(x')$$

$$(t; t_o, x_o) \mapsto \varphi(t; t_o, x_o)$$

y diferenciable respecto a t , tal que, para todo $(t; t_o, x_o) \in I_s(t') \times I_r(t') \times B_q(x')$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t; t_o, x_o) = f(t, \varphi(t; t_o, x_o)), \varphi(t_o; t_o, x_o) = x_o.$$

Es decir, intuitivamente, el teorema establece que bajo las hipótesis ya mencionadas la función $x = \varphi(t; t_o, x_o)$ es la única solución de

$$\dot{x} = f(t, x).$$

Antes de empezar con la demostración, vamos a anunciar una proposición que nos afirma que encontrar una solución del teorema de Cauchy-Lipschitz es equivalente a encontrar una función que satisfaga la ecuación integral de Volterra. Utilizaremos este resultado en la demostración del teorema.

Definición 2.5. Se dice que una función $g(t; t_o, x_o)$ satisface la ecuación integral de Volterra si

$$g(t; t_o, x_o) = x_o + \int_{t_o}^t |f(s, g(s; t_o, x_o))| ds$$

Proposición 2.6. Una función $g(t; t_o, x_o)$ satisface el teorema de Cauchy-Lipschitz si y solo si $g(t; t_o, x_o)$ cumple que

$$g(t; t_o, x_o) = x_o + \int_{t_o}^t |f(s, g(s; t_o, x_o))| ds.$$

Demostración de la Proposición 2.6 Supongamos que $g(t, t_o, x_o)$ es solución de la ecuación de Volterra. Por tanto se tiene que

$$x_o + \int_{t_o}^t f(s; g(s; t_o, x_o)) ds = g(t, t_o, x_o),$$

lo que implica que $g(t_o, t_o, x_o) = x_o$ y $\dot{g}(t, t_o, x_o) = f(t; g(t, t_o, x_o))$, es decir, $g(t, t_o, x_o)$ es solución del Teorema de Cauchy-Lipschitz.

Supongamos ahora que $g(t, t_o, x_o)$ satisface el Teorema de Cauchy-Lipschitz. Entonces se tiene que

$$\int_{t_o}^t \frac{d(g(t, t_o, x_o))}{dt} dt = \int_{t_o}^t f(t; g(t, t_o, x_o)) dt,$$

Como $\int_{t_o}^t \frac{d(g(t, t_o, x_o))}{dt} dt = g(t, t_o, x_o) - g(t_o, t_o, x_o) = g(t, t_o, x_o) - x_o$, se obtiene que g satisface la ecuación integral de Volterra.

□

Ahora sí podemos demostrar el Teorema de Cauchy-Lipschitz.

Demostración del Teorema de Cauchy-Lipschitz Sea L la constante de Lipschitz de f respecto a x . Consideremos el espacio vectorial

$$X = \{\varphi : I_s(t') \times I_r(t') \times B_q(x') \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{ continua, con la suma y producto escalar habituales}\},$$

donde s, r, q son tales que satisfacen las condiciones del enunciado del teorema.

Consideremos también la norma de Bielecki

$$\|\varphi\|_{\infty, L} = \sup\{e^{-L|t-t_o|} |\varphi(t; t_o, x_o)| : (t; t_o, x_o) \in I_s(t') \times I_r(t') \times B_q(x')\}.$$

Tal norma es equivalente a la norma del supremo $\|\cdot\|_{\infty}$ pues

$$e^{L(r+s)} \|\varphi\|_{\infty} \leq \|\varphi\|_{\infty, L} \leq \|\varphi\|_{\infty},$$

por lo que $(X, \|\cdot\|_{\infty, L})$ es un espacio de Banach (o sea, un espacio normado y completo). En X , consideramos el subconjunto cerrado (y, por tanto, espacio métrico completo)

$$X_b = \{\varphi : I_s(t') \times I_r(t') \times B_q(x') \rightarrow B_q(x'), \text{continua}\}.$$

Definimos la aplicación $\tau : X_b \rightarrow X_b$, denominada *operador de Picard*, como

$$\tau(\varphi(t; t_o, x_o)) = x_o + \int_{t_o}^t |f(s, \varphi(s; t_o, x_o))| ds,$$

donde $\varphi \in X_b$. La demostración del teorema consiste en aplicar el Teorema del Punto Fijo de Banach a este operador, de manera que nos asegure que existe una función φ tal que $\tau(\varphi) = \varphi$, es decir, una función que resuelva la ecuación integral de Volterra. Para ello, vamos a probar a continuación que se satisfacen todas las condiciones para poder aplicar el teorema de Banach.

Obviamente, tenemos que $\tau(\varphi) \in X$. Además, el operador está bien definido en X_b , pues, $\tau(\varphi) \in X_b$ si $\varphi \in X_b$. Esto es $\forall (t; t_o, x_o) \in I_s(t') \times I_r(t') \times B_q(x')$,

$$|\tau(\varphi(t; t_o, x_o)) - x'| \leq \left| \int_{t_o}^t f(s, \varphi(s; t_o, x_o)) ds \right| + |x_o - x'| \leq (s+r)M + q \leq b,$$

donde en la primera desigualdad hemos utilizado la definición del operador de Picard y la propiedad de desigualdad triangular de $|\cdot|$, y en la segunda desigualdad las hipótesis sobre r , s , q y M descritas en el enunciado del teorema. Una vez hemos visto que el operador está bien definido en X_b , veamos ahora que es contractivo en X_b . Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in X_b$ y vamos a considerar en las siguientes desigualdades los supremos respecto $I_s(t') \times I_r(t') \times B_q(x')$. Tenemos que

$$\|\tau(\varphi_1) - \tau(\varphi_2)\|_{\infty, L} \leq \sup_{(t; t_o, x_o)} e^{-L|t-t_o|} \int_{t_o}^t |f(s, \varphi_1(s; t_o, x_o)) - f(s, \varphi_2(s; t_o, x_o))| ds$$

donde una vez utilizadas las definiciones de norma de Bielecki y de operador de Picard, usamos que para una función cualquiera continua $g(t)$, se tiene que $|\int g dt| \leq \int |g| dt$. Ahora, utilizando que f es Lipschitz de factor L , y simplemente multiplicando y dividiendo por el mismo factor $e^{-L|s-t_o|}$, obtenemos que

$$\|\tau(\varphi_1) - \tau(\varphi_2)\|_{\infty, L} \leq \sup_{(t; t_o, x_o)} e^{-L|t-t_o|} \int_{t_o}^t L|\varphi_1(s; t_o, x_o) - \varphi_2(s; t_o, x_o)| e^{-L|s-t_o|} e^{L|s-t_o|} ds$$

Teniendo en cuenta que $|\varphi_1(s; t_o, x_o) - \varphi_2(s; t_o, x_o)| e^{-L|s-t_o|} \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\infty, L}$ y que $e^{-L|t-t_o|} \int_{t_o}^t e^{L|s-t_o|} ds = 1 - e^{-L|s-t_o|}$ obtenemos que

$$\|\tau(\varphi_1) - \tau(\varphi_2)\|_{\infty, L} \leq \sup_{(t; t_o, x_o)} (1 - e^{-L|t-t_o|}) \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\infty, L}$$

Finalmente, por la elección de r y s tenemos que

$$\|\tau(\varphi_1) - \tau(\varphi_2)\|_{\infty, L} \leq (1 - e^{-L|r+s|}) \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\infty, L},$$

lo que muestra que el operador de Picard es contractivo en X_b con factor de contracción $(1 - e^{-L|r+s|}) < 1$.

Se satisfacen, pues, todas las hipótesis del Teorema del Punto Fijo de Banach. De esta manera, existe una única $\varphi \in X_b$ tal que $\tau(\varphi) = \varphi$, es decir, existe una única función que satisface la ecuación integral de Volterra, que debido a su equivalencia con el Teorema de Cauchy-Lipschitz por la *Proposición 2.8.*, queda demostrada la tesis del teorema.

□

3. Teorema del Punto Fijo de Brouwer

3.1. Enunciado y contexto del Teorema

El teorema del punto fijo de Brouwer es un teorema de existencia. Si bien decíamos que el teorema del punto fijo de Banach nos proporciona un método mecánico para hallar este punto fijo, el de Brouwer no nos aporta información sobre cual es este punto. No obstante, este hecho no hace del teorema de Brouwer un teorema menor, pues existen múltiples resultados en que únicamente es necesario tener la certeza de que el punto fijo existe, sin importar explícitamente qué punto es. Esto sucede en resultados que aseguran la existencia de cualquier elemento o propiedad, como es el caso de la aplicación que se recoge a continuación: la existencia de equilibrios de Nash en juegos no cooperativos finitos. Veremos que necesitaremos que exista un punto fijo, pero carecerá de relevancia cualquier información sobre este punto, como su localización o descripción.

Teorema del Punto Fijo de Brouwer. *Sea f una función continua de la bola unitaria cerrada B^n de un espacio euclídeo en sí misma, entonces existe un punto x en B^n tal que $f(x) = x$, $1 \leq n < \infty$.*

Para entender la historia de este teorema hemos de hacer un pasaje por Henri Poincaré y las ecuaciones diferenciales. Hacia finales del siglo XIX, una cuestión acaparaba el interés de la comunidad científica, la de la estabilidad del sistema solar. Este hecho le llevó a considerar otras representaciones del sistema solar con el fin de poder estudiarlas. Bajo esta motivación, Poincaré prestó más atención a un hecho tan simple y cotidiano como la superficie de una taza de café.

Se centró en estudiar las trayectorias de una superficie (la del café) animada por una corriente constante (movimiento de la cuchara del café). Para ello publica *Analysis situs*, donde logró demostrar que en superficies de la misma naturaleza que la de un disco, como una taza de café, existe algún punto fijo. Por tanto, Poincaré probó un resultado equivalente a una versión de lo que hoy conocemos como el Teorema del Punto Fijo de Brouwer.

Hay muchas maneras de demostrar este teorema: existe la versión analítica que utiliza el Teorema de Green, otra topológica que se basa en homologías de grupos, también existe la prueba combinatoria a través de una generalización del lema de Sperner o incluso probando su equivalencia con el juego de Hex (ver Sección 3.5.3). La demostración que se presenta en este trabajo es la versión analítica de John Milnor ⁴, el cual demostró el Teorema del Punto Fijo de Brouwer a través del Teorema de la Bola Peluda y de ingeniosas proyecciones estereográficas.

3.2. Conceptos previos

Con el objetivo de entender la demostración del Teorema del Punto Fijo de Brouwer, es conveniente repasar algunos conceptos.

Definición 3.1. *Sea X un subconjunto de \mathbb{R}^n . Un campo de vectores tangentes a X es una función $v : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ no nula tal que para todo x de X se tiene que $x \circ v(x) = 0$,*

⁴Ref. pág 2

con \circ el producto interno. Además, si v es continua, se dice que el campo es continuo de vectores tangentes a X .

Teorema de la Bola Peluda. Si n es impar, entonces la esfera S^{n-1} no tiene un campo continuo de vectores tangentes no nulos.

Observamos que la condición de que n sea impar es necesaria. Es trivial ver que para n par un campo de vectores tangentes a S^{n-1} sería la función no nula v definida como

$$v : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_2, -x_1, \dots, x_n, -x_{n-1})$$

Como v es continua, vemos que para n par existe un campo continuo de vectores tangentes a S^{n-1} . Es importante observar que no necesariamente este campo de vectores tiene que ser único, pues es trivial ver que el campo $v : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido como $v(x_1, \dots, x_n) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots, -x_n, x_{n-1})$ también es un campo continuo de vectores tangentes a S^{n-1} .

La razón por la cual se le conoce a este teorema como el de la bola peluda es por su analogía con una pelota con pelos en la superficie, donde los pelos representan los vectores del campo. Se dice que esta pelota se puede peinar si existe un campo continuo de vectores tangentes, pues si no se pudiera peinar es porque en algún momento de la superficie de la bola encontraríamos un punto sin pelo o una calva, lo que indicaría que no existe un campo continuo de vectores tangentes. Esta analogía se entiende mejor con la versión del teorema en tres dimensiones.

3.3. Demostración del Teorema del Punto Fijo de Brouwer

Tal y como se menciona al final de la Sección 3.1, la demostración que se presenta en este documento es la que realizó el matemático John Milnor, basado en el Teorema de la Bola Peluda. La demostración se divide en dos partes, el caso en que n es par y el caso en que n es impar.

Caso n par. La idea es suponer que no existe un punto fijo para f en B^n y llegar a una contradicción con el Teorema de la Bola Peluda construyendo un campo continuo de vectores tangentes en la esfera S^n . Como hemos supuesto que f no tiene puntos fijos en B^n , se cumple que $f(x) - x \neq 0 \forall x \in B^n$ y

$$0 < \|x - f(x)\|^2 = \|x\|^2 + \|f(x)\|^2 - 2x \circ f(x) \leq 2 - 2x \circ f(x).$$

Por tanto, si $|x| = 1$ se tiene que

$$x \circ (x - f(x)) = 1 - x \circ f(x) > 0. \tag{3.1}$$

Definimos ahora el campo de vectores z

$$z : B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

como

$$z(x) = x - \frac{1 - x \circ x}{1 - x \circ f(x)} f(x).$$

Definiendo la función

$$k : B^n \rightarrow \mathbb{R}$$

como

$$k(x) = \frac{1 - x \circ x}{1 - x \circ f(x)},$$

cuyo denominador es distinto de cero debido a la (3.1), se puede reformular la función z como $z(x) = x - k(x) \circ f(x)$.

Utilizaremos la función z para construir un campo de vectores tangentes. Primero probaremos que z es continua y que satisface que $z(x) = x$ en la esfera unitaria y $z \neq 0$ en toda la bola unitaria. La continuidad de z es debido a la continuidad de las funciones identidad x , k y f . Además, si $|x| = 1$, o sea, x está en la esfera unitaria, es trivial ver que $z(x) = x - k(x) \circ f(x) = x$ pues el numerador de $k(x)$ se anula. Ahora, para demostrar que $z(x)$ no se anula en toda la bola unitaria suponemos que existe un x^* de la bola abierta tal que $z(x^*) = 0$. Entonces, por la propia definición de z se tiene que $x^* = k(x^*) \circ f(x^*)$. Multiplicando la expresión por el denominador de k y utilizando la definición de éste obtenemos que $x^* - (x^* \circ f(x^*))x^* = f(x^*) - (x^* \circ x^*)f(x^*)$, y sustituyendo $\frac{x^*}{k(x^*)} = f(x^*)$ se obtiene que

$$x^* - \frac{(x^* \circ x^*)x^*}{k(x^*)} = f(x^*) - \frac{(x^* \circ x^*)x^*}{k(x^*)},$$

la cual cosa implica que $x^* = f(x^*)$ y esto no puede ser por nuestra hipótesis. Por tanto, $z(x) \neq 0$ en toda la bola unitaria.

Sea $E^{n+1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in B^{n+1} : x_{n+1} = 0\}$ el ecuador de la bola B^{n+1} y $B_{n+1}^- = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in B^{n+1} : x_{n+1} \leq 0\}$ su hemisferio sur. Identificaremos la bola B^n con el ecuador E^{n+1} de la bola B^{n+1} de la siguiente manera:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n, 0)$$

donde $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in B^n$ y $(x_1, x_2, \dots, x_n, 0) \in B^{n+1}$. La idea es, haciendo proyecciones y usando la función z , construir un campo tangente a la esfera unitaria S^n en el hemisferio sur B_{n+1}^- . Análogamente, obtendremos un campo tangente a la esfera unitaria S^n en el hemisferio norte N^{n+1} los cuales empalmarán bien en el ecuador y obtendremos así un campo tangente a toda la esfera unitaria S^n .

Desde el polo norte $N = (0, 0, \dots, 0, 1)$ en B^{n+1} proyectamos el punto $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0)$ en el ecuador E^{n+1} , sobre la esfera unitaria S^n . Sea x un punto en E^{n+1} y sea $v(x) = (v_1(x), v_2(x), \dots, v_{n+1}(x))$ su proyección sobre el hemisferio sur B_{n+1}^- , entonces x está en algún punto intermedio de la recta que va desde el polo norte N hasta $v(x)$. Por tanto, existe un θ entre 0 y 1 tal que $x = (1 - \theta)N + \theta v(x)$. Teniendo en cuenta la simplicidad de las coordenadas de N , esta ecuación es equivalente al sistema

$$x_i = \theta v_i(x), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.2)$$

$$0 = (1 - \theta) + \theta v_{n+1}(x). \quad (3.3)$$

Aplicando esto último, tenemos que

$$v(x) = (v_1(x), v_2(x), \dots, v_{n+1}(x)) = \left(\frac{x_1}{\theta}, \frac{x_2}{\theta}, \dots, \frac{x_n}{\theta}, \frac{\theta - 1}{\theta} \right) \quad (3.4)$$

Como $v(x)$ está sobre la esfera unitaria tenemos que $|v(x)| = 1$, entonces

$$1 = \sum_{i=1}^n v_i^2(x) + v_{n+1}^2(x) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\theta^2} + \frac{(\theta - 1)^2}{\theta^2},$$

que multiplicando por θ^2 da

$$\theta^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + (\theta - 1)^2 = |x|^2 + \theta^2 - 2\theta + 1.$$

Luego, $0 = |x|^2 - 2\theta + 1$ y despejando tenemos que $\theta = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$, de donde $\theta \geq \frac{1}{2}$.

Para cada punto x del ecuador E^{n+1} definiremos, utilizando las propiedades anteriores, un vector $u(x)$ no nulo y tangente a la esfera unitaria S^n en el punto $v(x)$. Para cada punto x del ecuador con $|x| < 1$, definimos las siguientes funciones que dependen de la variable t :

$$X(t) = x + tz(x),$$

$$V(t) = v(x + tz(x)),$$

donde t es suficientemente pequeña como para que el segmento $x + tz(x)$ esté totalmente contenido en el ecuador E^{n+1} . Observamos que $X(0) = x$, $V(0) = v(x)$ y $|V(t)| = |v(x + tz(x))| = 1$, pues $v(x + tz(x))$ está sobre la esfera unitaria S^n .

Definimos ahora la función $u(x) = (u_1(x), \dots, u_{n+1}(x))$ mencionada anteriormente como

$$u(x) = \frac{\partial V(0)}{\partial t},$$

o sea, $u(x) = \dot{V}(0)$. Veamos que $u(x)$ definida así es tangente a la esfera unitaria en $v(x)$. Tenemos que

$$0 = \frac{\partial 1}{\partial t} = \frac{\partial (V(t) \circ V(t))}{\partial t} = 2V(t) \circ \dot{V}(t),$$

A partir de esta ecuación, evaluando en cero obtenemos

$$0 = v(x) \circ u(x),$$

lo que significa que $u(x)$ es tangente a la esfera S^n en $v(x)$. Probemos ahora que $u(x)$ es no nulo. Considerando la proyección del vector $X(t)$ desde el polo norte N , existe, del mismo modo que hemos visto anteriormente, una función $\theta(t)$ con $\theta(0) = \theta$ que satisface que

$$X(t) = (1 - \theta(t)) \circ N + \theta(t) \circ V(t).$$

Derivando esta expresión obtenemos

$$z(t) = -\dot{\theta}(t) \circ N + \dot{\theta}(t) \circ V(t) + \theta(t) \circ \dot{V}(t),$$

que evaluando en cero y aislando $u(x)$ nos da la siguiente expresión

$$u(x) = \frac{(z(x) + \dot{\theta}(0)) \circ (N - v(x))}{\theta}. \quad (3.5)$$

Para ver que $u(x)$ es no nulo, utilizando esta última expresión de u , consideremos los dos casos siguientes:

- * Si $\dot{\theta}(0) = 0$ entonces $u(x) \neq 0$ pues al inicio de la demostración vimos que $z(x) \neq 0$.
- * Si $\dot{\theta}(0) \neq 0$ se tiene que $u(x) \neq 0$ porque su $(n+1)$ -ésima componente es distinta de cero tal y como indica la expresión $u_{n+1}(x) = \frac{(0+\dot{\theta}) \cdot (1-v_{n+1}(x))}{\dot{\theta}} \neq 0$ pues $v_{n+1}(x) < 0$ y $\dot{\theta} \geq \frac{1}{2}$.

Por tanto, hemos visto que $u(x) \neq 0$ y $u(x) \circ v(x) = 0$ en todo el hemisferio sur B_{n+1}^- , que corresponden a los puntos de la esfera unitaria S^n con componente $v_{n+1}(x) < 0$. Además, de (3.2) y (3.3) se sigue que $v(\cdot)$ es continua, y como $z(x)$ ya vimos que era continua, la ecuación (3.5) implica que $u(\cdot)$ es continua.

Vamos a extender la función $u(x)$ a la circunferencia $\{(x_1, \dots, x_n, 0) : \sum x_i^2 = 1\}$ del ecuador E^{n+1} (la que hemos identificado con S^{n-1}) de forma continua, utilizando el límite cuando $v(x)$ tiende al ecuador, es decir, cuando $v_{n+1}(x)$ tiende a cero. En este caso, de (3.2) y (3.3) observamos que $\theta \rightarrow 1$, $v(x) \rightarrow x$ y $|x| = 1$. De esta manera

$$u(x) = z(x) + \dot{\theta}(0) \circ (N - x).$$

Ahora, como $\theta(t) = \frac{1}{2}(|X(t)|^2 + 1)$, su derivada es

$$\dot{\theta}(t) = X(t) \circ \dot{X}(t) = (x + tz(x)) \circ z(x).$$

Es decir,

$$\dot{\theta}(0) = x \circ z(x).$$

Ahora, habíamos visto anteriormente que cuando $|x| = 1$, entonces $z(x) = x$, de manera que $\dot{\theta}(0) = x \circ x = 1$, lo que significa que

$$u(x) = x + N - x = N$$

o sea, que en todo el ecuador los vectores tangentes apuntan al norte y, además,

$$x \circ u(x) = 0,$$

para todo $x \in \{(x_1, \dots, x_n, 0) : \sum x_i^2 = 1\}$.

Hemos definido un campo vectorial continuo de vectores tangentes no nulos en todo el hemisferio sur de la esfera unitaria. Con el fin de extender este campo en toda la esfera unitaria hacemos el proceso análogo en el hemisferio norte. En este caso, la proyección es desde el polo sur $S = (0, 0, \dots, 0, -1)$ y ahora u se define como $-\dot{V}(0)$. Con este cambio se consigue la continuidad global del campo, pues u definida así es un campo continuo no nulo de vectores tangentes en el hemisferio norte y además, de esta manera, las definiciones de los campos de los dos hemisferios coinciden en la circunferencia del ecuador. Por tanto, ya para finalizar el caso en que n es par, vemos que hemos logrado construir, bajo el supuesto en que no habían puntos fijos, un campo vectorial continuo de vectores tangentes no nulos en toda la esfera unitaria S^n cuando $n+1$ es impar. Sin embargo, este resultado contradice el *Teorema de la Bola Peluda*, que afirma que este campo no existe. Concluimos entonces que, para n par, la hipótesis inicial es falsa y por tanto existe algún punto fijo demostrando así el Teorema del Punto Fijo de Brouwer, para n par.

Caso n impar Para completar la demostración, consideremos la función de la bola B^n en sí misma, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$. Definimos la función h de la bola B^{n+1} en sí misma como

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = (f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n), 0).$$

La función h es claramente continua, y por lo que hemos visto en el apartado en que n es par, debe existir un punto $b \in B^{n+1}$ tal que $h(b) = b$. Entonces b satisface, componente a componente, el sistema

$$\left. \begin{array}{l} b_{n+1} = 0 \\ b_i = f_i(b_1, b_2, \dots, b_n), i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right\}$$

O sea, $x = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in B_n$ es un punto fijo de f , de manera que el teorema de Brouwer se cumple para n impar. □

3.4. Aplicación: Existencia de equilibrios de Nash

3.4.1. Introducción y conceptos previos

Entendemos por juego aquella situación en la que intervienen varios participantes, los cuales escogen la acción que prefieren realizar, y en función de las acciones de todos los jugadores, cada uno recibe una ganancia o una pérdida. Diariamente nos enfrentamos a juegos que, sin ser conscientes de nuestra participación en el mismo, encaramos con total normalidad.

Juegos no cooperativos En muchas ocasiones, cuando nos enfrentamos a una situación es conveniente cooperar con los demás participantes con el fin de hallar mejores resultados. Esto suele ser provechoso. pues los jugadores pueden planificar sus estrategias con el resto de manera que sea más favorable obtener una buena recompensa. No obstante, siempre es preferible reflexionar si cooperar sería beneficioso para los participantes, y en ese caso, habría que pensar con quién cooperar, además de esperar que los elegidos quieran cooperar con nosotros. Por tanto, se puede dar que en una situación los jugadores decidan que es mejor no cooperar. Serán exclusivamente en estas situaciones donde nos enfocaremos en esta sección, en aquellas en las que los jugadores deciden no cooperar, como puede ser en caso de competencia directa entre dos entidades por un mismo producto. De esta manera, en el transcurso de este apartado no tendremos en cuenta ningún tipo de alianza o posible comunicación entre los participantes.

Definición 3.2. *Un juego no cooperativo de N personas es un sistema $\eta := \{(A_i, r_i) : i \in I\}$ donde I es el conjunto $1, 2, \dots, N$ de los jugadores, A_i es el conjunto de todas las acciones posibles del jugador i y r_i es una función $r_i : A_1 \times A_2 \times \dots \times A_N \rightarrow \mathbb{R}$ conocida como la recompensa del jugador i . Si además todos los conjuntos A_i son finitos, se dice que η es un juego finito no cooperativo de N personas.*

El juego se interpreta de la siguiente manera: los jugadores eligen cada uno una acción de su conjunto de acciones posibles simultanea e independientemente. Si cada jugador i elige la acción a_i en A_i ($i = 1, 2, \dots, N$), entonces el jugador j recibe $r_j(a_1, a_2, \dots, a_N)$ como recompensa. Para entender mejor esta mecánica, vamos a considerar el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.3. Podemos analizar el clásico juego de piedra, papel o tijeras, como un juego no cooperativo de dos personas. En este juego dos personas eligen simultáneamente entre piedra, papel o tijeras. El juego termina en empate si eligieron lo mismo, de lo contrario uno de ellos gana de acuerdo a la regla: tijeras vence a papel, papel vence a piedra y piedra vence a tijeras. Podemos considerar que un jugador obtiene un punto por cada juego ganado. El juego no cooperativo de dos personas es $\eta = \{(A_1, r_1), (A_2, r_2)\}$, donde el conjunto de acciones es el mismo para ambos jugadores, $A_1 = A_2 = \{\text{piedra, papel, tijeras}\}$, y las funciones de recompensa están determinadas por las reglas anteriores, por ejemplo, $r_1(\text{papel, papel}) = 0$, $r_1(\text{piedra, tijeras}) = 1$, $r_2(\text{piedra, papel}) = 1$, $r_1(\text{piedra, papel}) = 0$ (es decir, perder y empatar vale lo mismo, 0 puntos. Solo se puntúa si se gana). Sobre qué elegir cada vez que se repita el experimento depende de los jugadores completamente. Si quieren pueden elegir siempre lo mismo o escoger un orden entre las opciones y seguir ese patrón repetitivamente, pueden proceder de la forma que les parezca más conveniente para ganar más veces.

Definición 3.4. Se le llama estrategia, a la forma en que un jugador elige qué acción utilizar. Una clase importante de estrategias de un jugador es la clase de aquellas dónde la elección de la acción se realiza mediante un procedimiento aleatorio, en este caso tenemos la siguiente definición.

Definición 3.5. En un juego finito no cooperativo de N personas, una estrategia mixta γ_i para el jugador i es una distribución de probabilidad en A_i . El conjunto de todas las estrategias mixtas para el jugador i se denota por S_i y el producto $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_N$ se denota por S .

Si el conjunto de acciones del jugador i es $A_i = \{1, 2, \dots, m_i\}$, entonces γ_i se puede representar por el vector $(\gamma_1^i, \gamma_2^i, \dots, \gamma_{m_i}^i)$, donde $\gamma_j^i = \gamma^i(j)$ y j es un elemento de A_i . En este caso, cuando el jugador i utiliza la estrategia mixta γ^i , la componente γ_j^i representa la probabilidad de que el jugador elija la acción j . Si además, el vector γ^i tiene la forma $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, entonces se dice que γ^i es la estrategia pura δ_k^i , donde i es el jugador al que nos referimos y k es la acción a la que se le asigna probabilidad 1. La estrategia pura γ_k^i es simplemente aquella estrategia mixta γ^i tal que $\gamma_j^i = \delta_{jk}$, donde δ_{jk} es la delta de Kronecker. Una estrategia pura se interpreta como la estrategia en la que un jugador utiliza siempre la misma acción. Cuando el conjunto de acciones es finito, también podemos representar al conjunto S_i como el subconjunto de \mathbb{R}^{m_i} , $S_i = \{(s_1, s_2, \dots, s_{m_i}) \in \mathbb{R}^{m_i} : s_j \geq 0, \sum_{j=1}^{m_i} s_j = 1\}$. Similarmente S es subconjunto de $\mathbb{R}^{m_1+m_2+\dots+m_N}$. A continuación enunciamos un resultado importante al respecto.

Lema 3.6. En un juego finito no cooperativo de N personas, S es un subconjunto acotado, cerrado y convexo de \mathbb{R}^m , donde $m = m_1 + m_2 + \dots + m_N$.

Demostración del Lema 3.6. Primero probaremos que S es acotado. Como cada conjunto S_i consta de elementos en \mathbb{R}^{m_i} de componentes no negativas cuya suma es 1, tenemos que

$$S_i \subset \{(a_1, a_2, \dots, a_{m_i}) \in \mathbb{R}^{m_i} : 0 \leq a_j \leq 1 \forall j\},$$

el cual es acotado y, por tanto, el conjunto S es acotado.

Probamos ahora que S es cerrado. Para ello, consideramos la sucesión $\theta_n = ((\theta_n)^1, (\theta_n)^2, \dots, (\theta_n)^N)$ convergente a $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)$ y mostraremos que θ pertenece a S . Para mostrar que θ es también un elemento de S probaremos que cada θ_i es una distribución de probabilidad.

Por hipótesis, $(\theta_n)_j^i \geq 0 \forall n$, pues cada una de ellas es una medida de probabilidad. Entonces $\theta_j^i \geq 0$. También tenemos $\sum_{j=1}^{m_i} (\theta_n)_j^i = 1 \forall n$, de manera que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{m_i} (\theta_n)_j^i = 1$, y, a su misma vez, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{m_i} (\theta_n)_j^i = \sum_{j=1}^{m_i} \lim_{n \rightarrow \infty} (\theta_n)_j^i = \sum_{j=1}^{m_i} (\theta)_j^i$$

y, por lo tanto, $\sum_{j=1}^{m_i} (\theta)_j^i = 1$. O sea, cada θ_i es distribución de probabilidad y se tiene que $\theta \in S$, obteniendo así que S es un conjunto cerrado.

Finalmente, probaremos que S es convexo. Para ello, tomamos $a, b \in S$ y tenemos que probar que $ca + (1 - c)b \in S$ para cualquier c en el intervalo $[0, 1]$, la cual cosa equivale a demostrar que cada componente $ca_i + (1 - c)b_i$ es una distribución de probabilidad. Notamos que $c, (1 - c), a_j^i, b_j^i \geq 0$, de esta manera se cumple que $ca_j^i + (1 - c)b_j^i \geq 0$. Por otro lado, vemos que

$$\sum_{j=1}^{m_i} [ca_j^i + (1 - c)b_j^i] = c \sum_{j=1}^{m_i} a_j^i + (1 - c) \sum_{j=1}^{m_i} b_j^i = c + 1 - c = 1$$

obteniendo así que $ca_i + (1 - c)b_i$ es un distribución de probabilidad y por tanto S es un conjunto convexo. □

Definición 3.7. En un juego finito no cooperativo de N personas, para $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) \in S$, definimos la función de ganancia R_i para el jugador i $R_i : S \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$R_i(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) = \sum_{j_N=1}^{m_N} \dots \sum_{j_1=1}^{m_1} \gamma_{j_1}^1 \gamma_{j_2}^2 \dots \gamma_{j_N}^N r_i(j_1, j_2, \dots, j_N),$$

donde el conjunto A_k del k -ésimo jugador consta de m_k acciones posibles. Similarmente, definimos las funciones R_{ij} para cada acción j del jugador i , $R_{ij} : S \rightarrow \mathbb{R}$, como

$$R_{ij}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{i-1}, \gamma_i, \gamma_{i+1}, \dots, \gamma_N) = R_i(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{i-1}, \delta_{ij}, \gamma_{i+1}, \dots, \gamma_N),$$

es decir, $R_{ij}(\gamma)$ es la ganancia del jugador i si éste cambia a la estrategia pura δ_{ij} , mientras el resto de los jugadores conservan sus estrategias correspondientes.

Lema 3.8. En un juego no cooperativo de N personas, podemos expresar la función de ganancia R_i como

$$R_i = \sum_l^{m_i} \gamma_l^i R_{il}(\gamma),$$

donde $\gamma \in S$ y donde l recorre las acciones del jugador.

Definición 3.9. (Equilibrio de Nash) En un juego finito no cooperativo de N personas, un equilibrio de Nash es un elemento $\rho = (\rho^1, \rho^2, \dots, \rho^N)$ de S tal que para cada $i \in I$,

$$R_i(\rho) > R_i(\rho^1, \rho^2, \dots, \rho^{i-1}, \beta^i, \rho^{i+1}, \dots, \rho^N),$$

$\forall \beta^i \in S_i$.

Esta definición se puede ver desde dos perspectivas diferentes. Desde la perspectiva del jugador i , suponiendo que las estrategias del resto de los jugadores están fijas como las respectivas ρ^j , entonces ρ^i es una estrategia que optimiza la ganancia del jugador i . Ahora, desde un punto de vista exterior, considerando a los jugadores como un todo, ρ es un estado en el cual a ningún jugador le conviene cambiar de estrategia pues su ganancia podría disminuir.

Para juegos finitos no cooperativos los equilibrios de Nash están caracterizados a través de su comportamiento con respecto a las estrategias puras. Esto se puede ver en el siguiente lema.

Lema 3.10. *En un juego finito no cooperativo de N personas, $\rho = (\rho^1, \rho^2, \dots, \rho^N) \in S$ es equilibrio de Nash si y sólo si para cada $i \in I$, $R_i(\rho) \geq R_{ij}(\rho) \forall j \in A_i$, donde A_i es el conjunto de acciones posibles del jugador i .*

Demostración del Lema 3.10. Si ρ es equilibrio de Nash, la desigualdad se cumple trivialmente. Ahora, para un jugador i fijo, sea $\beta^i \in S_i$ una estrategia mixta arbitraria. Si ρ satisface la desigualdad del lema, naturalmente también se cumplen las desigualdades $\beta_j^i R_i(\rho) > \beta_j^i R_{ij}(\rho) \forall j \in A_i$. Ahora, sumando sobre el índice j , debido a que $\sum_{j=1}^{m_i} \beta_j^i = 1$ y al *Lema 3.8.*, tenemos que para todo $\beta^i \in S_i$

$$R_i(\rho) = \sum_{j=1}^{m_i} \beta_j^i R_i(\rho) \geq \sum_{j=1}^{m_i} \beta_j^i R_{ij}(\rho) = R_i(\rho^1, \rho^2, \dots, \rho^{i-1}, \beta^i, \rho^{i+1}, \dots, \rho^N),$$

$\forall \beta^i \in S_i$. Esto se cumple para cada jugador y entonces ρ es un equilibrio de Nash. Por tanto, hemos visto que si ρ cumple la desigualdad del lema, entonces éste es un equilibrio de Nash.

□

Existencia de equilibrios de Nash El concepto de equilibrio de Nash es uno de los conceptos más importante de Teoría de Juegos. Nash presentó este concepto junto con el siguiente teorema, el cual es considerado por muchos economistas como uno de los más relevantes en esta teoría. El teorema que se presenta a continuación asegura la existencia de estos equilibrios en juegos finitos no cooperativos. Sin embargo, antes de demostrar esta existencia, es necesario mostrar el corolario del Teorema del Punto Fijo de Brouwer. Este resultado será la clave en la demostración de los equilibrios de Nash.

Corolario del Teorema del Punto Fijo de Brouwer. *Sea K un subconjunto compacto y convexo de \mathbb{R}^n y sea f una función continua de $f : K \rightarrow K$. Entonces f tiene al menos un punto fijo en K .*

Para entender la demostración debemos repasar algunos conceptos y lemas previos.

Definición 3.11. *Sean A, B subconjuntos de \mathbb{R}^n . Decimos que A y B son topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo h entre ellos, es decir, si existe una biyección continua de A sobre B con inversa continua.*

Con el siguiente lema vamos a extender el teorema de Brouwer a conjuntos topológicamente equivalentes.

Lema 3.12. *Sea D topológicamente equivalente a la bola unitaria B^n de \mathbb{R}^n y sea f una función continua de D en sí misma, entonces f tiene al menos un punto fijo.*

Demstración del Lema 3.12. Como D y B^n son topológicamente equivalentes, existe un homeomorfismo $h : B^n \rightarrow D$. Definimos ahora la función

$$g : B^n \rightarrow B^n$$

$$g(x) = h^{-1}(f(h(x))),$$

la cual es continua porque lo son f , h y h^{-1} . Ahora, el Teorema del Punto Fijo de Brouwer nos asegura la existencia de un punto fijo en g . O sea, se tiene que existe un punto c de B^n tal que $g(c) = h^{-1}(f(h(c))) = c$. Ahora, si aplicamos h a esta última ecuación obtenemos que $f(h(c)) = h(c)$, lo que significa que $h(c)$ es punto fijo de f . □

Demstración del Corolario del Teorema del Punto Fijo de Brouwer Sea B_r la bola de radio r centrada en el origen lo suficientemente grande como para que contenga a K , el cual existe debido a que K es acotado. Consideremos la función

$$g : B_r \rightarrow K$$

$$g(x) \mapsto y,$$

donde $y \in K$ es tal que

$$d(x, y) = \min_{z \in K} d(x, z)$$

Veamos que, debido a la convexidad de K , esta función g está bien definida. Esta $y \in K$ existe porque K es un conjunto cerrado. Además, no se puede dar la situación en que $d(x, y_1) = d(x, y_2)$ para cualesquiera $y_1, y_2 \in K$, pues K es convexo y entonces se tiene que $d(x, \frac{y_1+y_2}{2}) < d(x, y_1)$, por tanto no podrían ser los puntos a una distancia mínima de x . Notamos también que si $x \in K$, $g(x) = x$.

Veamos ahora que g es continua. Consideremos una sucesión x_n de B_r que converge en un punto x . Sea $\varepsilon > 0$. Como x_n converge en x , existe un natural N tal que $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n > N$. De la definición de g obtenemos, para $n > N$

$$d(x_n, g(x_n)) \leq d(x_n, g(x)) \leq d(x_n, x) + d(x, g(x)) < d(x, g(x)) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Usando esta última desigualdad, se tiene que, para $n > N$

$$d(x, g(x)) \leq d(x, g(x_n)) \leq d(x, x_n) + d(x_n, g(x_n)) < d(x_n, g(x_n)) + \frac{\varepsilon}{2} < d(x, g(x)) + \varepsilon,$$

o sea,

$$d(x, g(x)) \leq d(x, g(x_n)) < d(x, g(x)) + \varepsilon.$$

Esto implica que $d(x, g(x_n)) \rightarrow d(x, g(x))$ y por la unicidad de $g(x)$ se sigue que $g(x_n) \rightarrow g(x)$, por lo tanto g es continua. Consideremos la composición $f \circ g : B_r \rightarrow K$. Es continua por la continuidad de f y g , y la podemos considerar como una función de B_r en sí misma puesto que $K \subset B_r$. Ahora, teniendo en cuenta que toda bola en \mathbb{R}^n es topológicamente equivalente a la bola unitaria, el *Lema 3.12*. nos asegura que existe $x_o \in B_r$ tal que

$$f(g(x_o)) = x_o. \tag{3.6}$$

Como la imagen de la composición $f \circ g$ está contenida en K , se tiene que $x_o \in K$ y, tal y como hemos observado anteriormente, se tiene pues que $g(x_o) = x_o$. Sustituyendo esto último en la ecuación (3.6) se obtiene que $f(x_o) = x_o$. Es decir, f tiene un punto fijo. □

3.4.2. Teorema de Existencia de Equilibrios de Nash

Una vez demostrado esta consecuencia del Teorema del Punto Fijo de Banach, estamos en disposición de demostrar el teorema de existencia de equilibrios de Nash.

Teorema de Existencia De Equilibrios de Nash. *Todo juego finito no cooperativo de N personas tiene un equilibrio de Nash en S .*

Demstración del Teorema de Existencia de Equilibrios de Nash. Sea $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^N) \in S$. Para cada jugador $i = 1, \dots, N$ y cada una de sus posibles acciones $j = 1, \dots, m_i$, definimos la función $\varphi_{ij} : S \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\varphi_{ij}(\gamma) = \text{máx}(0, R_{ij}(\gamma) - R_i(\gamma)), \quad (3.7)$$

para cada i, j en el rango i y j . Esta función es continua en S , pues tanto R_{ij} como R_i lo son por ser combinación lineal de sus componentes y por lo tanto su diferencia es continua y, como el máximo de dos funciones continuas es continuo, entonces φ_{ij} es continua.

Luego, si $\gamma^i = (\gamma_1^i, \gamma_2^i, \dots, \gamma_{m_i}^i)$ definimos $(\gamma_j^i)'$

$$(\gamma_j^i)' = \frac{\gamma_j^i + \varphi_{ij}(\gamma)}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} \varphi_{ik}(\gamma)} \quad (3.8)$$

Vamos a probar que $(\gamma_j^i)' \geq 0$ y $\sum_{j=1}^{m_i} (\gamma_j^i)' = 1$, o sea, vamos a probar que $(\gamma^i)' = ((\gamma_1^i)', (\gamma_2^i)', \dots, (\gamma_{m_i}^i)')$ es un elemento de S_i . Para ver que $(\gamma_j^i)' \geq 0$, tenemos que $\varphi_{ij} > 0$ y $\gamma_j^i > 0$ por ser γ^i una distribución de probabilidad, por tanto se tiene que $(\gamma_j^i)'$ tiene como numerador un elemento no negativo y como denominador un elemento positivo, lo que implica que $(\gamma_j^i)' \geq 0$. Para ver $\sum_{j=1}^{m_i} (\gamma_j^i)' = 1$, simplemente operando

$$\sum_{j=1}^{m_i} (\gamma_j^i)' = \sum_{j=1}^{m_i} \left(\frac{\gamma_j^i + \varphi_{ij}(\gamma)}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} \varphi_{ik}(\gamma)} \right) = \frac{\sum_{j=1}^{m_i} (\gamma_j^i + \varphi_{ij}(\gamma))}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} \varphi_{ik}(\gamma)} = \frac{1 + \sum_{j=1}^{m_i} \varphi_{ij}(\gamma)}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} \varphi_{ik}(\gamma)} = 1.$$

Es decir, $(\gamma^i)' \in S_i \forall i$. Definimos ahora la función

$$g : S \rightarrow S \\ \gamma \mapsto \gamma^i,$$

Notamos que por un lado, la función g es continua debido a la continuidad de las φ_{ij} , y por otro, que el *Lema 3.6.* nos afirma que S es un conjunto acotado, cerrado y convexo. Por tanto se cumplen las hipótesis del *Corolario del Teorema del Punto Fijo de Brouwer* de manera que podemos asegurar que g tiene al menos un punto fijo. Sea $\rho = (\rho^1, \rho^2, \dots, \rho^N) \in S$ un punto fijo de g . La idea es probar que ρ es un equilibrio de Nash. Para ello, nos centraremos en el jugador i . Sea $l \in A_i$ tal que

$$R_i(\rho^1, \rho^2, \dots, \rho^{i-1}, \delta_l^i, \rho^{i+1}, \dots, \rho^N) = \\ = \text{mín}\{R_i(\rho^1, \rho^2, \dots, \rho^{i-1}, \delta_k^i, \rho^{i+1}, \dots, \rho^N) : k = 1, \dots, m_i\}.$$

Podemos notar que lo anterior se puede expresar como $R_{il}(\rho) \leq R_{ik}(\rho) \forall k \in A_i$, que es simplemente pedir que δ_l^i sea la estrategia pura que le da la menor ganancia al jugador i .

Teniendo en cuenta esto, se tiene que $R_{il}(\rho) \leq \sum_{k=1}^{m_i} \alpha_k R_{ik}(\rho)$, siempre que $\sum_{k=1}^{m_i} \alpha_k = 1$. Por tanto, $R_{il}(\rho) \leq R_{ik}(\rho)$, y de la ecuación (3.7) se tiene que $\varphi_{il}(\rho) = 0$.

Utilizando todo esto y teniendo en cuenta que ρ es punto fijo de la ecuación (3.8) obtenemos

$$\rho_l^i = \frac{\rho_l^i + \varphi_{il}}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} \varphi_{ik}(\gamma)} = \frac{\rho_l^i}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} \varphi_{ik}(\gamma)},$$

de donde se sigue que $1 + \sum_{k=1}^{m_i} \varphi_{ik}(\gamma) = 1$, o sea que $\varphi_{ik}(\rho) = 0 \forall k$. Esto implica que $R_i(\rho) > R_{ij}(\rho) \forall j \in A_i$. Como nuestra elección del jugador i fue arbitraria, lo anterior se cumple para todo jugador y por el *Lema 3.10.*, ρ es un equilibrio de Nash.

□

3.5. Juego de Hex - Teorema del Punto Fijo de Brouwer

3.5.1. Introducción del Juego de Hex

En esta sección vamos a ver una demostración alternativa del Teorema del Punto Fijo de Brouwer en $[0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$. En este caso, vamos a probar el teorema mediante un juego muy famoso en la Teoría de Juegos: el Juego de Hex. Concretamente, vamos a probar que el teorema de Brouwer de dimensión 1 y la imposibilidad de llegar a un empate en el juego de Hex son equivalentes.

El juego de Hex fue inventado por el ingeniero y poeta danés Piet Hein en 1942 y fue redescubierto en Princeton por John Nash en 1948.

La *Figura 1*, que se puede encontrar en la introducción del documento, representa un tablero del juego de Hex de dimensión 11×11 . Es un juego ideado para dos jugadores, pese a que también lo pueden jugar 4. Las reglas del juego son muy simples:

- El juego funciona por turnos. Cada jugador puede hacer un movimiento por turno.
- El movimiento de cada jugador consiste en marcar un hexágono cualquiera del tablero o bien con una x (*jugador x*) o bien con una o (*jugador o*).
- En la *Figura 1* se pueden observar las letras X, O', X', O en los lados del tablero. El *jugador x* planificará su estrategia, es decir, elegirá qué hexágonos marcar, teniendo en cuenta que su objetivo es construir un conjunto conectado de hexágonos marcados con x que una los lados X y X' . Análogo para el *jugador o*

Definición 3.13. *Definimos un conjunto conectado de hexágonos como un conjunto S de hexágonos tal que para cualquier h y h' de S se tiene que existe un camino $P = (h_1 = h, \dots, h_n = h')$ de hexágonos de S que une h con h' de manera que $h_i = h_{i+1}$ son adyacentes.*

- Gana el primer jugador que consiga construir un conjunto conectado de hexágonos que una sus lados del tablero correspondientes.

En la *Figura 1* observamos que ningún jugador ha ganado el juego. No obstante, el jugador x tiene asegurada la victoria en tres turnos si marca los hexágonos sombreados. Como decía anteriormente, un hecho remarcable del Juego de Hex es la imposibilidad de llegar a un empate. Este hecho viene recogido en el siguiente teorema.

3.5.2. Teorema de Hex

Teorema de Hex. *Si todos los hexágonos del tablero del Juego de Hex están marcados por x 's y por o 's, entonces existe un conjunto conectado que une o bien los lados X y X' o bien los lados O y O' .*

Demostración del Teorema de Hex Este resultado es intuitivamente obvio. Imaginemos que los lados X y X' son porciones de tierra separadas por el río O . El objetivo del jugador x es construir una presa colocando piedras en el río. Es trivial observar que el jugador habrá conseguido su propósito si es capaz de construir un camino de piedras que le permita ir de X a X' . No obstante, demostrar este hecho de manera rigurosa es algo más profundo y complejo.

En esta demostración daremos un algoritmo que, dado un tablero del Juego de Hex cuyos hexágonos están totalmente marcados, nos encuentre un conjunto conexo que una o bien los lados X y X' o bien los lados O y O' . Supongamos que el tablero de Hex está totalmente cubierto tal y como indica la *Figura 3*.

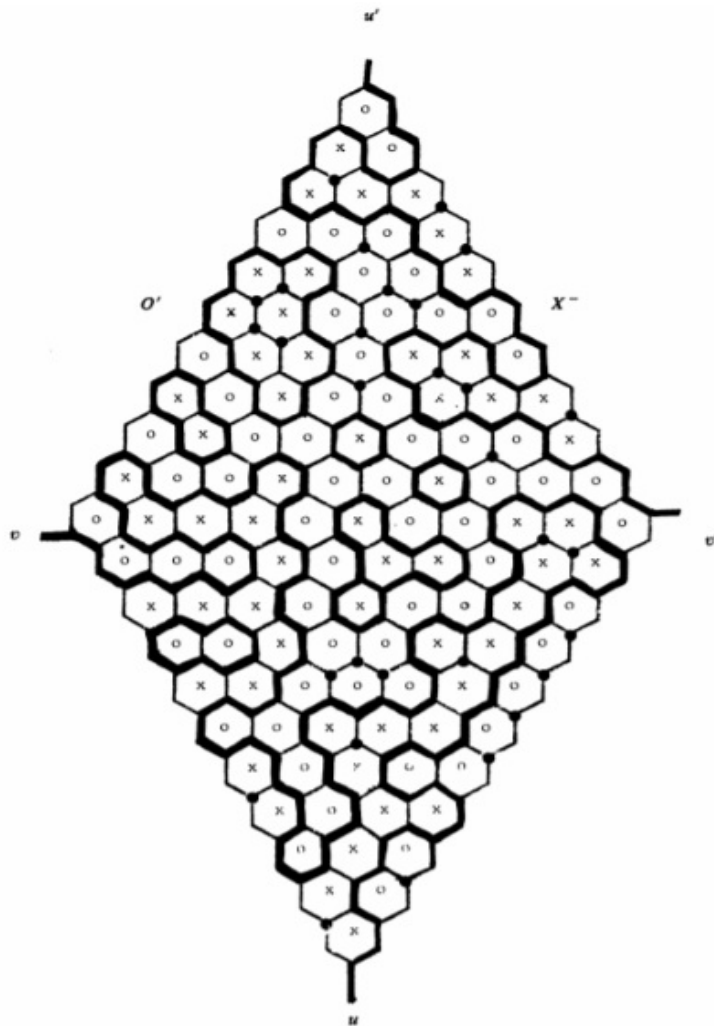


Figura 3: Tablero de Hex donde están marcados los caminos del algoritmo

Con *x-casilla* nos referimos a o bien un hexágono marcado con x o bien las regiones X y X' . Análogamente para *o-casilla*.

Consideremos el grafo Γ de aristas del tablero de Hex al cual le hemos añadido 4 aristas adicionales que unen los vértices u' , v , u , v' con el fin de separar las regiones X' , O , X , O' (*Figura 3*).

El algoritmo para encontrar un conjunto de hexágonos conectados consiste en, empezando por el vértice u , seguir siempre la misma norma: proceder a una arista que sea límite de una *x-casilla* y una *o-casilla*. Observamos que la arista del vértice u cumple esta regla debido a que separa las dos regiones X y O .

La clave de este algoritmo es que determina un único camino. Supongamos que durante el algoritmo llegamos al vértice w mediante la arista k . Notamos que el vértice w tiene tres casillas incidentes a él. Como hemos elegido la arista k de tal manera que sea límite de una *x-casilla* y una *o-casilla*, podemos asegurar que una casilla incidente será una *x-casilla* y otra una *o-casilla*. De esta manera, independientemente del tipo de casilla que sea la restante, habrá siempre una arista que satisfaga la regla del algoritmo. (*Figura 3*). Antes de seguir con la demostración necesitamos un lema elemental de la Teoría de Grafos.

Lema 3.14. *Todo grafo finito cuyos vértices sean como máximo de grado 2 es la unión disjunta de subgrafos los cuales pueden ser:*

- *Vértice aislado.*
- *Ciclo simple.*
- *Camino simple*

Notamos que el grafo del tablero de Hex es finito, por tanto el camino del algoritmo tiene que finalizar en algún vértice. Consideramos el subgrafo Γ' de Γ formado por todas las aristas que son límite de una *x-casilla* y una *o-casilla*. Como este grafo Γ' es finito y sus vértices tienen como máximo grado dos, por el *Lema 3.14.*, el subgrafo de Γ' que tiene u como vértice inicial puede ser un punto aislado o un ciclo simple o un camino simple. Obviamente la primera opción está descartada, pues se ha mencionado anteriormente que debido a que u separa las regiones X y O , este vértice siempre tiene una arista que cumpla el algoritmo, y por tanto, que esté en Γ' . Tampoco puede ser un ciclo simple, ya que, como u separa X y O , y debido a la regla de que cada arista sea límite de una *x-casilla* y *o-casilla*, no se puede dar que el camino que nace en u muera también en él. De esta manera, la única opción posible es que este subgrafo sea un camino simple. Además, teniendo en cuenta que el algoritmo define un único camino, los únicos vértices terminales del camino simple que empieza en u son aquellos de grado 1, es decir, v , v' y u' . (De hecho, se puede demostrar que u' no puede ser vértice terminal, pero la prueba de este resultado escapa del interés del trabajo)

Observamos que el grafo Γ' del tablero de Hex de la *Figura 3* está formado por 6 ciclos simples, 30 vértices aislados y 2 caminos simples, el que va de u a v' y el que va de u' a v .

Notamos que la definición de camino simple nos asegura que el camino que obtenemos con el algoritmo iniciado en u no revisita ningún vértice.

Ahora, como los dos vértices terminales son incidentes a una de las regiones X' o O' , se

tiene que si el camino que empieza en u finaliza en v , que es incidente a O' , el *jugador o* gana la partida. Lo mismo para el *jugador x* si el camino finaliza en v' , que es incidente a X' . Esto es, si por ejemplo finaliza en v , el conjunto de *o-casillas* que son incidentes al camino del algoritmo que muere en v es un conjunto conectado de hexágonos que inicia en O y finaliza en O' , es decir, el *jugador o* gana.

□

3.5.3. Equivalencia entre el Teorema de Hex y el Teorema del Punto Fijo de Brouwer

En este apartado procederemos en sentido contrario de lo habitual. Hasta el momento hemos visto que un teorema del punto fijo demostraba un resultado concreto. En esta ocasión, se probará que un resultado concreto demuestra un resultado del punto fijo, específicamente, veremos que el Teorema de Hex implica el Teorema del Punto Fijo de Brouwer. Este hecho, juntamente con lo visto en la Sección 1, prueba que estos dos teoremas son equivalentes.

La versión del teorema de Brouwer que se trabaja en esta sección es la siguiente

Teorema del Punto Fijo de Brouwer. *Sea $f : I^2 \rightarrow I^2$ una función continua, donde I^2 es el cuadrado unitario. Entonces, existe $x \in I^2$ tal que $f(x) = x$.*

Una vez presentados los dos teoremas, vamos a ver que son equivalentes.

Con un finalidad analítica, es conveniente diseñar un nuevo modelo diferente pero equivalente del tablero de Hex. En este caso, *aritmétizaremos* el tablero de la siguiente manera:

- Cada hexágono se identifica con un punto.
- Si dos hexágonos comparten un lado, entonces se dice que son adyacentes y se representa mediante una arista, tal y como indica la *Figura 3*.

En la *Figura 4* se puede observar estos dos puntos aplicados en un ejemplo.

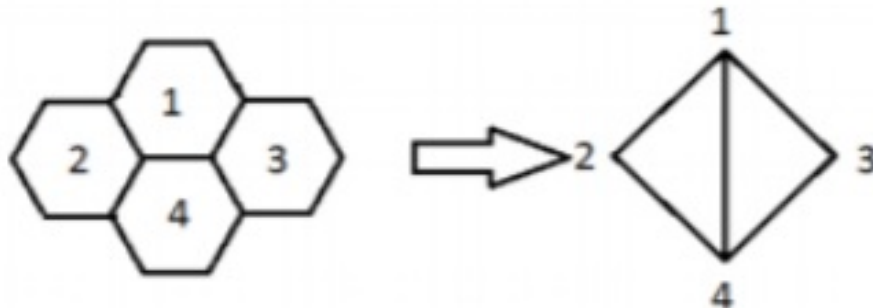


Figura 4: Representación del tablero (2×2) en forma de grafo

Por último, como se ha obtenido un cuadrado, a este se le aplica un giro de $\frac{\pi}{4}$ en sentido horario; esto con el objeto de obtener siempre el cuadrado unitario $[0, 1] \times [0, 1]$. Por ejemplo, en el caso de un tablero de Hex 4×4 , su representación sería la siguiente.

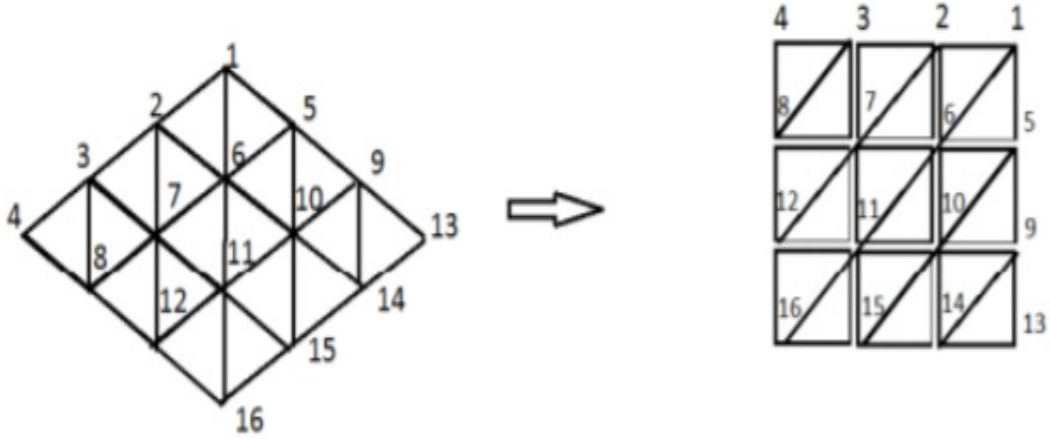


Figura 5: Representación del tablero (4×4) en forma de grafo

Antes de probar que el Teorema de Hex y el Teorema del Punto Fijo de Brouwer son equivalentes, es necesario presentar la notación que se utilizará así como alg'un concepto previo.

\mathbb{Z}^n denota la red entera de \mathbb{R}^n . Para $x \in \mathbb{R}^n$, $|x| = \|x\|_\infty = \max_{j=1, \dots, n} |x_j|$. Para $x \neq y \in \mathbb{R}^n$, decimos que $x < y$ si $x_i \geq y_i$.

Definición 3.15. Los puntos $x, y \in \mathbb{R}^n$ se dicen que son comparables si $x < y$ o $y < x$.

Definición 3.16. El tablero de Hex (de dos dimensiones) B_k de tamaño k es un grafo cuyos vértices son los puntos $z = (i, j)$ con $i, j = 1, \dots, k$, $i, j \in \mathbb{Z}$.

Definición 3.17. Decimos que dos vértices z y z' son adyacentes (unidos por una arista) si

$$|z - z'| = 1.$$

Definición 3.18. Dos subconjuntos A y B de un grafo Γ' se dice que son contiguos si existe $a \in A$ y $b \in B$ tal que a y b son adyacentes.

La Figura 2 de la Sección 1 muestra la representación gráfica del tablero de Hex B_5 . Las aristas de las fronteras están marcadas por los puntos cardinales en inglés N, S, E, W y consiste en los vértices $z = (z_1, z_2)$ de B_5 tal que $z_2 = k, z_2 = 0, z_1 = k, z_1 = 0$, respectivamente. Hemos de pensar que el jugador horizontal busca construir un camino que conecte E y W . Análogo para el jugador vertical con N y S .

Teniendo en cuenta esto, podemos reenunciar el Teorema de Hex de la siguiente manera:

Teorema de Hex. Sea B_k el tablero de Hex cubierto totalmente por dos conjuntos H y V . Entonces, se tiene que o bien H contiene un conjunto conectado de elementos de B_k que unen E y W o bien V contiene un conjunto conectado de elementos de B_k que unen N y S .

Una vez ya hemos presentado los dos teoremas, vamos a probar su equivalencia.

Teorema de Hex implica Teorema del Punto Fijo de Brouwer

Esta implicación está probada con todo detalle en la Sección 1.

Teorema del Punto Fijo de Brouwer implica Teorema de Hex La demostración de esta implicación se basa en observar que el tablero de Hex B_K proporciona una triangulación del cuadrado $I_k^2 = [0, k]^2$ en \mathbb{R}^2 . Es fácil demostrar que cualquier punto de I_k^2 se puede expresar de manera única como una combinación convexa de como máximo tres vértices, los cuales son adyacentes dos a dos. Este conjunto de vértices son las aristas y los triángulos de la *Figura 2* (pág 5).

También vamos a usar el hecho de que cualquier aplicación f de B_K a \mathbb{R}^2 se puede extender a una simplicial continua f^* en I_k^2 , $f^* : I_k^2 \rightarrow I_k^2$. Concretamente, si $x = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3$, donde $x \in I_k^2$ y las λ_i son números no negativos que suman 1, entonces por definición

$$f^*(z) = \lambda_1 f(z_1) + \lambda_2 f(z_2) + \lambda_3 f(z_3).$$

Suponemos que B_k está dividido por dos subconjuntos H y V y definimos cuatro conjuntos de la siguiente manera: W^* el conjunto de todos los vértices que conectan con W mediante un camino de H , y sea $E^* = H - W^*$. Sea S^* el conjunto de todos los vértices que conectan con S mediante un camino de V y sea $N^* = V - S^*$. Por la propia definición, es trivial observar que W^* y E^* no son contiguos, y tampoco lo son N^* y S^* .

La idea de la demostración es suponer que no existe ningún camino en H que una W y E ni en V que una S y N y llegar a una contradicción con el Teorema del Punto Fijo de Brouwer. Sean e_1 y e_2 los vectores unitarios de la base canónica de \mathbb{R}^2 y sea la función $f : B_k \rightarrow B_k$ definida de la siguiente manera:

$$f(z) = \begin{cases} z + e_1 & \text{si } x \in W^* \\ z - e_1 & \text{si } x \in E^* \\ z + e_2 & \text{si } x \in S^* \\ z - e_2 & \text{si } x \in N^* \end{cases}$$

Observamos que $f(z) \in I_k^2$ en todas las definiciones de $f(z)$. Por ejemplo, $z + e_1$ no pertenece a B_k solo si $z \in E$, pero como hemos supuesto que no hay ningún camino en H que vaya desde W hasta E , vemos que W^* no alcanza ningún punto de E . Análogamente, se comprueban los otros tres casos.

Ahora vamos a extender simplicialmente la función f a I_k^2 para obtener una contradicción mostrando que f no tiene puntos fijos. Para ello utilizaremos este simple lema algebraico.

Lema 3.19. Sean z_1, z_2, z_3 vértices de un triángulo de \mathbb{R}^2 y sea p^* la extensión simplicial de la función p definida como $p(z_i) = z_i + v_i$, donde v_1, v_2, v_3 son vectores cualquiera. Entonces, p tiene un punto fijo si y solo si 0 está en la envoltura convexa (Definición 4.6.) de v_1, v_2 y v_3 .

Demostración del Lema 3.19 Sea $x = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3$. Entonces

$$p^*(x) = \lambda_1(z_1 + v_1) + \lambda_2(z_2 + v_2) + \lambda_3(z_3 + v_3)$$

y x es fijo si y solo si $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$.

□

Aplicamos este lema a nuestra función f . Notamos que la clave nos la da la no contigüidad de los conjuntos W^* y E^* (S^* y N^*), lo que implica que si nos fijamos en los tres vértices de un triángulo cualquiera de vértices adyacentes, no puede pasar que uno de los vértices sea desplazado por e_i y otro por $-e_i$. Esto significa que los tres vértices son desplazados por vectores que permanecen en un único cuadrante, de manera que 0 no pertenece a la envoltura convexo de estos vectores. De esta manera, el *Lema 3.19*. nos asegura que f no tiene puntos fijos, lo que contradice el Teorema del Punto Fijo de Brouwer.

□

4. Teorema del Punto Fijo de Schauder

4.1. Enunciado y contexto del Teorema

El teorema del punto fijo de Schauder es un teorema que explica las condiciones necesarias para que una función definida en ciertos subconjuntos de un espacio normado tenga puntos fijos. Ya hemos visto dos resultados de puntos fijos, el de Banach para espacios métricos y el de Brouwer para espacios normados finitos, cada uno de ellos con una potente aplicación ya sea en matemáticas o en otra disciplina, como puede ser la economía.

Vimos que el teorema del punto fijo de Brouwer es un teorema limitado debido al dominio en que la función está definida. Por ello, probamos que el teorema se puede extender a subconjuntos compactos, convexos y no nulos de conjuntos normados finitos.

Bolzano demostró la versión del teorema de Brouwer en dimensión 1 en 1817. Prácticamente 100 años más tarde, el propio Brouwer enunció la versión del teorema para dimensión 2 y 3 en 1909 y un año después fue Hadamard quien enunció el teorema para dimensión finita arbitraria. Finalmente en 1912 Brouwer mostró una serie de formulaciones y demostraciones de los enunciados de Hadamard. Llegados a este punto, los matemáticos de la época se centraron en seguir extendiendo el dominio de este teorema de punto fijo pero no fue hasta 1930 cuando Schauder lo consiguió, y pudo demostrar el teorema de Brouwer de dimensión arbitraria, sea finita o no. No obstante, Schauder necesitó de una hipótesis extra que en las versiones del teorema para n finito no se requería: ahora la función que queremos demostrar que tiene algún punto fijo además de continua ha de ser compacta.

Definición 4.1. *Sea X un espacio normado y sea A un subconjunto de X . Se dice que la función $f : A \rightarrow X$ es compacta si f es continua y cumple que $\overline{f(B)}$ es compacta, siendo B un subconjunto acotado de A cualquiera.*

Teorema del Punto Fijo de Schauder. *Sea E un subconjunto convexo, cerrado y acotado de un espacio normado X . Si $f : E \rightarrow X$ es una aplicación compacta tal que $f(E) \subseteq E$, entonces existe un $x \in E$ tal que $f(x) = x$.*

En este apartado nos vamos a centrar en esta versión, en la versión demostrada por Schauder para espacios normados de dimensión arbitraria. El Teorema del Punto Fijo de Schauder, sin embargo, también se pudo extender generalizándolo a espacios topológicos. En 1935, Tychonoff demostró el teorema para espacios topológicos compactos y localmente convexos y, en 2001, R. Cauty probó que lo que demostró Tychonoff se cumplía también sin necesidad de convexidad local, es suficiente con que el conjunto sea convexo.

4.2. Conceptos previos

Definición 4.2. *Un espacio normado es un par $(X, \|\cdot\|)$, donde X es un espacio vectorial y $\|\cdot\|$ es una norma en X .*

Todo espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ se convierte automáticamente en un espacio métrico con la distancia

$$d(x, y) = \|y - x\|, \quad x, y \in X.$$

Y, además, todo espacio métrico se convierte automáticamente en un espacio topológico con la topología asociada a la distancia o topología de la norma.

Definición 4.3. *Un espacio topológico es un par (X, Γ) , donde X es un conjunto y Γ es una topología. Se dice que Γ es una topología si $\Gamma \subseteq \mathcal{P}(X)$, donde $\mathcal{P}(X)$ es el conjunto potencia de X , y además cumple que:*

- $\emptyset, X \in \Gamma$
- Si $\{V_n\} \subseteq \Gamma$, entonces $\bigcup_n \{V_n\} \in \Gamma$,
- Si $\{V_k\}_{k=1}^n \subseteq \Gamma$, entonces $\bigcap_{k=1}^n \{V_k\} \in \Gamma$.

Los elementos de la topología se llaman abiertos del espacio topológico. En caso de un espacio métrico, los elementos de la topología son aquellos $T \subseteq X$ tal que $\forall x \in T, \exists r > 0$ tal que $B(x, r) \subset T$, donde $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\} = \{y \in X : \|x - y\| < r\}$. Por tanto, al ser el teorema del punto fijo de Schauder un teorema para espacios normados, en la demostración del mismo podremos utilizar argumentos topológicos.

Definición 4.4. *Un espacio topológico (X, Γ) se dice que es un espacio de Hausdorff si para cada par de puntos x_1, x_2 distintos de X , existen abiertos disjuntos U_1, U_2 de x_1 y x_2 respectivamente.*

Definición 4.5. *Sea X un espacio vectorial y A un subconjunto de X . La cápsula convexa de A es el conjunto $\text{co}(A) = \bigcap \{B : A \subseteq B \text{ y } B \text{ es convexo}\}$.*

Lema 4.6. *Sea K un subconjunto compacto de un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$, sea $\varepsilon > 0$ y A un subconjunto finito de K tal que $K \subseteq \bigcup \{B(x, \varepsilon) : x \in A\}$. Definimos la aplicación $\vartheta_{A, \varepsilon}$ como*

$$\vartheta_{A, \varepsilon}(x) = \frac{\sum_{a \in A} p_a(x) \cdot a}{\sum_{a \in A} p_a(x)},$$

donde

$$p_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|x - a\| \geq \varepsilon \\ \varepsilon - \|x - a\| & \text{si } \|x - a\| \leq \varepsilon \end{cases}$$

Es decir,

$$p_a(x) = \text{máx}(\varepsilon - \|x - a\|, 0)$$

Entonces, $\vartheta_{A, \varepsilon}$ es una función continua que satisface que

$$\|\vartheta_{A, \varepsilon} - x\| < \varepsilon, \quad x \in K$$

Demostración del Lema 4.6. Veamos que $\vartheta_{A, \varepsilon}(x)$ está bien definida. Por definición tenemos que $p_a(x) \geq 0$ para cada $a \in A$ y $\sum_{a \in A} p_a(x) > 0$ para todo $x \in K$, por tanto, $\vartheta_{A, \varepsilon}$ está bien definida sobre K . Veamos ahora que $\vartheta_{A, \varepsilon}$ es continua. Para ello, vamos a probar que $p_a : K \rightarrow [0, \varepsilon]$ es continua para todo $a \in A$. Sean $\varepsilon^* > 0$, $x_1 \in B(a, \varepsilon)$ y $x_2 \in K(a, \varepsilon)$ tales que $d(x_1, x_2) < \delta$, donde $\delta > 0$.

Si tomamos $\delta \in (0, \varepsilon^*]$

$$|p_a(x_1) - p_a(x_2)| = |\varepsilon - \|x_1 - a\|| \leq |||x_2 - a| - \|x_1 - a|| \leq \|x_2 - x_1\| < \delta \leq \varepsilon^*,$$

por tanto vemos que las funciones $p_a(x)$ son continuas. Además, también vemos que

$$\vartheta_{A,\varepsilon}(x) - x = \frac{\sum_{a \in A} p_a(x)(a - x)}{\sum_{a \in A} p_a(x)}$$

y si $p_a(x) > 0$ entonces $\|x - a\| < \varepsilon$. Por tanto,

$$\|\vartheta_{A,\varepsilon}(x) - x\| \leq \frac{\sum_{a \in A} p_a(x) \|a - x\|}{\sum_{a \in A} p_a(x)} < \varepsilon.$$

□

Lema 4.7. *Cualquier subespacio cerrado de un espacio compacto es compacto.*

Demostración del Lema 4.7. Un conjunto X es compacto si para todo recubrimiento de abiertos $\{G_i\}_i$ de X existe un recubrimiento finito del mismo. Sea C un cerrado en el espacio compacto X . Sea $\{F_i\}_i$ un recubrimiento de abiertos de C . Entonces, los F_i 's junto con el complementario de C cubren X , siendo el complementario de C abierto pues C es cerrado. Como X es compacto, una familia finita de los G_i 's, eventualmente con el complementario de C incluido, cubren a X y, por lo tanto, a C . Por tanto, C es compacto.

□

Teorema 4.8. *Si K es un subconjunto convexo, compacto y no vacío de un espacio normado de dimensión finita X y $f : K \rightarrow K$ es una función continua, entonces existe un punto x en K tal que $f(x) = x$.*

Demostración del teorema 4.8. Este teorema está demostrado en la Sección 3.4.1, concretamente en el *Corolario del Teorema del Punto Fijo de Brouwer*. Únicamente habría que aclarar un aspecto: Dado que X es un espacio normado de dimensión finita, es isomorfo a \mathbb{C}^n o \mathbb{R}^n , y por lo tanto es homeomorfo a \mathbb{R}^{2n} o \mathbb{R}^n . Entonces, basta considerar, en esta demostración, $X = \mathbb{R}^n$, con $1 \leq n < \infty$.

□

4.3. Demostración del Teorema del Punto Fijo de Schauder

Definimos $K = \overline{f(E)}$, por tanto, se tiene que por hipótesis $K \subseteq E$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean A_n un subconjunto finito de K tal que $K \subseteq \bigcup \{B(a, \frac{1}{n}) : a \in A_n\}$ y $\vartheta_n = \vartheta_{A_n, \frac{1}{n}}$ la aplicación definida en el *Lema 4.6*. Ahora, debido a la definición de ϑ_n y a la convexidad de E se cumple que, para n suficientemente grande

$$\vartheta_n(K) \subseteq \text{co}(K) \subseteq E,$$

lo que significa que la función $g_n \equiv \vartheta_n \circ f$ va de E en si mismo. Además, el *Lema 4.6* nos afirma que $\|g_n(x) - f(x)\| < \frac{1}{n}$, para todo $x \in K$.

Definimos $E_n = E \cap X_n$, donde $X_n = \{\sum_{a \in A} \lambda_a a : \lambda_a \in \mathbb{R}\}$ es el espacio vectorial generado por el conjunto A_n . Por tanto, se tiene que X_n es un espacio normado de dimensión finita, E_n es un conjunto convexo por definición y compacto, por ser un cerrado relativo de E , siendo E compacto por hipótesis (*Lema 4.7.*). Además X_n es un espacio de Hausdorff. Vemos también que $g_n : E_n \rightarrow E_n$ es continua por ser composición de funciones continuas. Ahora, el *Teorema 4.8.* nos afirma que existe un punto $x_n \in E_n$ tal que $g_n(x_n) = x_n$.

Consideremos ahora la sucesión $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de K . Sabemos que todo conjunto de un espacio métrico es compacto si y solo si toda sucesión definida en él mismo tiene una parcial convergente. Como K es compacto, existe una parcial $\{f(x_{n_i})\}_{n_i \in \mathbb{N}}$ y un punto $x^* \in K$ tal que

$$f(x_{n_i}) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} x^*,$$

Como $g_{n_i}(x_{n_i}) = x_{n_i}$, tenemos que

$$\|x_{n_i} - x^*\| \leq \|g_{n_i}(x_{n_i}) - f(x_{n_i})\| + \|f(x_{n_i}) - x^*\| \leq \frac{1}{n_i} + \|f(x_{n_i}) - x^*\|.$$

Por tanto, obtenemos que

$$x_{n_i} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} x^*,$$

Finalmente, como f es continua, se tiene que

$$f(x^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{n_i}) = x^*.$$

□

4.4. Aplicación: Teorema de Lomonosov

4.4.1. Introducción y enunciado

A estas alturas es indudable que un punto fuerte de la familia de teoremas de punto fijo es sus múltiples aplicaciones en diferentes campos de la ciencia. Es remarcable la profunda utilidad de estos teoremas en resultados que tengan que ver con probar la existencia de cualquier objeto. Hemos visto cómo el Teorema del Punto Fijo de Banach nos sirvió para demostrar, bajo ciertas condiciones, la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales, además, probamos, mediante el Teorema del Punto Pijo de Brouwer, la existencia de equilibrios de Nash, siendo éste el resultado más importante en Teoría de Juegos, teniendo en cuenta la importancia que dan los economistas a encontrar la situación de equilibrio en cualquier actividad económica.

El Teorema del Punto Fijo de Schauder no es una excepción y también tiene como aplicación probar la existencia, en este caso, de subespacios invariantes. Siguiendo con el objetivo de expandir el dominio de los teoremas de punto fijo para abarcar así más aplicaciones, Victor Lomonosov demostró en 1973 lo siguiente:

Teorema de Lomonosov. *Todo operador P en un espacio de Banach, el cual no es múltiplo de la identidad y conmuta con un operador compacto no nulo, tiene un subespacio invariante no trivial.*

Esta demostración se hizo famosa al cabo de poco tiempo en la sociedad matemática de entonces debido a la simplicidad de la prueba, que se basa en el teorema del Punto Fijo de Schauder.

La motivación inicial de la demostración de este teorema proviene de descomponer un operador *en partes más sencillas*. En un espacio de Banach de dimensión finita, un operador P no es más que una matriz que tiene valores y vectores propios de manera que la descomposición del operador P viene determinada por su descomposición espectral. En el caso en que el espacio de Banach es de dimensión infinita, la descomposición de un operador es algo más complejo.

Para comprender un poco más la historia de este resultado, hay una anécdota que explica I. Namioaki, matemático especializado en topología y análisis funcional, muy esclarecedora:

Parece ser que J. von Neumann demostró que todo operador compacto en un espacio de Hilbert tiene un subespacio invariante no trivial, pero no publicó la prueba. En 1951 ó 1952, N. Aronszajn, en Kansas, probó este resultado independientemente de von Neumann y mostró su prueba a K. T. Smith. Esa noche, Smith fue a casa y trató de reproducir la demostración de Aronszajn, pero encontró otra diferente que también servía para espacios de Banach. Aronszajn y Smith escribieron un artículo juntos. Al final del artículo, dejaron una cuestión abierta: si un operador T tiene cuadrado compacto, ¿tiene T un subespacio invariante no trivial? Mucho después, creo que en 1963, A. R. Bernstein y A. Robinson demostraron, con técnicas de análisis no-estándar, que si T es un operador con la propiedad de que $p(T)$ es compacto, donde p es un polinomio de grado positivo, entonces T tiene un subespacio invariante propio. Esto fue demostrado originalmente para espacios de Hilbert, pero pronto fue generalizado a espacios de Banach usando otra vez técnicas de análisis no-estándar. Date cuenta de que el teorema de Lomonosov generaliza todo lo de arriba, y la demostración es ¡tan bella y tan simple! Recuerdo que cuando Lomonosov demostró su resultado, J. Lindenstrauss nos visitó en la Universidad de Washington desde Berkeley. Sacó del bolsillo una hoja de papel arrugada (¡una sólo!), que era la fotocopia de la prueba completa manuscrita que el propio Lomonosov había hecho de su resultado. Leí la prueba una vez, y no la podré olvidar nunca.

4.4.2. Conceptos previos

Definición 4.9. *Un operador compacto es un operador lineal L definido sobre un espacio de Banach X a otro espacio de Banach Y , tal que la imagen por L de cualquier conjunto acotado de X es un conjunto relativamente compacto de Y . Un operador con esa propiedad necesariamente es un operador acotado y por tanto continuo.*

Definición 4.10. *Si X e Y son espacios de Banach y $P : X \rightarrow Y$ es una transformación lineal, entonces P es compacto si $\overline{P(B(X))}$ es compacto en Y , siendo $B(X)$ la bola unitaria en X . Denotamos con $Z(X, Y)$ al conjunto de todos los operadores compactos de X en Y . Denotamos también $Z(X) = Z(X, X)$.*

Definición 4.11. *Sea X un espacio de Banach y $P \in Z(X)$. Un subespacio invariante de P es un subespacio lineal cerrado A de X tal que $P(x) \in A$ para todo $x \in A$. Decimos que el subespacio M es no trivial si es distinto de \emptyset ó X . Denotamos $L(P)$ a la colección de todos los subespacios invariantes de P . Si $C \subseteq Z(X)$ entonces $L(C) = \bigcap \{L(P) : P \in C\}$.*

Lema 4.12. *Sea X un espacio normado. Sea Y un subconjunto finito. Entonces la envolvente convexa de Y , $\text{co}(Y)$, es compacta.*

Lema 4.13. (Lema de Mazur). Si X es un espacio de Banach y K es un subconjunto compacto de X entonces la clausura de $co(K)$, $\overline{co(K)}$, es compacta.

Demostración del Lema de Mazur Para probar este lema, hemos de ver que $\overline{co(K)}$ es completa y totalmente acotada. Dado que $\overline{co(K)}$ es un subconjunto cerrado del espacio de Banach X , este subconjunto también es completo. Solo tenemos que ver que sea totalmente acotado.

Como K es compacto, dado $\varepsilon > 0$ existen una cantidad finita $x_1, \dots, x_n \in K$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^n B(x_j, \frac{\varepsilon}{4}).$$

Sea $G = co\{x_1, \dots, x_n\}$. Por el Lema 4.12., G es compacto y entonces existen nuevamente una cantidad finita $y_1, \dots, y_n \in G$ tales que

$$G \subseteq \bigcup_{j=1}^n B(y_j, \frac{\varepsilon}{4}).$$

Por tanto, si $a \in \overline{co(K)}$ existe $b \in co(K)$ tal que

$$\|a - b\| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Además, por la propia definición de envolvente convexa, $b = \sum_{r=1}^L \alpha_r b_r$, con $\alpha_r \geq 0$ y $b_r \in K$ y $\sum_{r=1}^L \alpha_r = 1$. Ahora, para cada b_r existe $x_j(r)$ tal que

$$\|x_j(r) - b_r\| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Entonces

$$\|b - \sum_{r=1}^L \alpha_r x_j(r)\| = \|\sum_{r=1}^L \alpha_r (b_r - x_j(r))\| \leq \sum_{r=1}^L \alpha_r \|b_r - x_j(r)\| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Como $\sum_{r=1}^L \alpha_r x_j(r) \in G$, existe $y_i \in G$ tal que

$$\|\sum_{r=1}^L \alpha_r x_j(r) - y_i\| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Por la desigualdad triangular, $\overline{co(K)} \subseteq \bigcup_{i=1}^m B(y_i, \varepsilon)$, lo que significa que la clausura de $co(K)$ está totalmente acotado. □

Lema 4.14. (Lema de Lomonosov) Si N es una subálgebra de $Z(X)$ tal que el operador identidad $I \in N$, $L(N) = \{\emptyset, X\}$ y K es un operador compacto no nulo sobre X entonces existe $A \in N$ tal que $\ker(AK - I) \neq \emptyset$.

Demostración del Lema de Lomonosov Sea K un operador compacto no nulo. Suponemos que $\|K\| = 1$ (si esto no sucediera tomaríamos el operador $\frac{K}{\|K\|}$ sin pérdida de generalidad). Sea $B = \{x \in X : \|x - x^*\| \leq 1\}$ la bola unitaria centrada en x^* donde

$x^* \in X$ es tal que $\|K(x^*)\| > 1$. Notamos que $0 \notin B$, pues si $0 \in B$ se tendría que $\|x^*\| \leq 1$, lo que significa que

$$1 < \|K(x^*)\| \leq \|K\| \cdot \|x^*\| \leq 1,$$

que es una contradicción. Además, observamos también que 0 no pertenece a $\overline{K(B)}$, pues si $x \in B$,

$$\|K(x^*) - K(x)\| \leq \|K\| \cdot \|x^* - x\| \leq 1,$$

pero $\|K(x^*)\| > 1$, por lo tanto $K(B)$ está acotado lejos de cero, por tanto $0 \notin \overline{K(B)}$. Por último, tenemos que $\overline{K(B)}$ es compacto dado que K es un operador compacto. Como N es una álgebra, se tiene que para cualquier elemento no nulo $x \in X$, $\{P(x) : P \in N\}$ es un subespacio invariante para N . Además, es un conjunto no vacío, pues dado que $I \in N$, $x = I(x) \in \{P(x) : P \in N\}$. Por tanto hemos visto que $\{P(x) : P \in N\}$ pertenece a $L(N)$ y es no nulo, de manera que, por hipótesis, $X = \overline{\{P(x) : P \in N\}}$. Entonces, para cada elemento no nulo $x \in X$, en particular para todo $y \in \overline{K(B)}$, existe $P \in N$ tal que $\|P(y) - x^*\| < 1$, es decir,

$$\overline{K(B)} \subseteq \bigcup_{T \in N} \{y : \|P(y) - x^*\| < 1\},$$

siendo $\{y : \|P(y) - x^*\| < 1\}$ conjuntos abiertos. Por la compacidad de la clausura de $K(B)$, sabemos que existen una cantidad finita n de operadores $P_1, \dots, P_n \in N$ tal que

$$\overline{K(B)} \subseteq \bigcup_{j=1}^n \{y : \|P_j(y) - x^*\| < 1\}.$$

Ahora, para cada $y \in \overline{K(B)}$ y $1 \leq j \leq n$, definimos $t_j(y)$ como

$$t_j(y) = \max\{0, 1 - \|P_j(y) - x^*\|\}.$$

Tenemos que t_j es continua en $\overline{B_1(x)}$ ya que P_j es continua. Además, como vemos que la función t_j se anula tanto en $B_1(x)^c$ como en el borde de la bola, por el *Lema del Pegamiento*, t_j es continua.

La existencia de la función t_j para cada $y \in \overline{K(B)}$ viene probada por la elección del recubrimiento, de manera que se cumple que $\sum_{j=1}^n t_j(y) > 0$ y que la función m_j definida como

$$m_j : \overline{K(B)} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$y \mapsto \frac{t_j}{\sum_{j=1}^n t_j(y)},$$

está bien definida y, como las funciones t_j son continuas, es continua.

Definimos también la función

$$\varphi : B \longrightarrow X$$

$$x \mapsto \sum_{j=1}^n m_j(K(x)) P_j K(x),$$

Lo primero que notamos de esta función es que es continua debido a la continuidad de m_j , K y P_j .

Veamos ahora que $\varphi(B) \subseteq B$. Sea $x \in B$, entonces $K(x) \in K(B)$. Vemos que si $m_j(K(x)) > 0$ se tiene que $P_j(K(x)) \in B$, ya que si $m_j(K(x)) > 0$ entonces $t_j(K(x)) > 0$ con lo que, debido a la definición de $t_j(y)$, se tiene

$$\|P_j(K(x)) - x^*\| < 1.$$

Además, es trivial ver que $\sum_{j=1}^n m_j(K(x)) = 1$, es decir, φ es una combinación convexa de elementos de B . Ahora, como B es convexo, tenemos que $co(B) \subset B$, y, como $co(B)$ también se puede ver como el conjunto de todas las combinaciones convexas de elementos de B , se tiene que $\varphi(B) \subseteq B$.

Veamos ahora que $P_j K$ es un operador compacto. Para ello, tenemos que ver $\overline{P_j(K(M))}$ es compacta, siendo M un conjunto acotado de X . Tenemos que, como K es compacto, $\overline{K(M)}$ es compacta, y como P_j es continuo, $P_j(\overline{K(M)})$ es compacto. Ahora, como $P_j(K(M))$ es un conjunto cerrado y está contenido en $P_j(\overline{K(M)})$, se tiene que $\overline{P_j(K(M))}$ es un conjunto compacto.

Ahora, como la unión de conjuntos precompactos es un conjunto precompacto, $\bigcup_{j=1}^n P_j(K(M))$ tiene clausura compacta. Usando el *Lema de Mazur*, se tiene que la clausura de $co(\bigcup_{j=1}^n P_j(K(M)))$ es compacta. Pero este conjunto convexo contiene a $\varphi(B)$, ya que es combinación lineal de elementos de $P_j(K(M))$, entonces $\overline{\varphi(B)}$ es compacto, ya que es un cerrado contenido en un compacto.

Por tanto, tenemos que φ es una aplicación compacta sobre B , de manera que se cumplen las hipótesis del Teorema del Punto Fijo de Schauder y entonces podemos afirmar que existe $x^{**} \in B$ tal que $\varphi(x^{**}) = x^{**}$.

Definimos ahora $A = \sum_{j=1}^n m_j(K(x^{**}))P_j$. Por tanto, se tiene que $A \in N$ y además

$$A(K(x^{**})) = \sum_{j=1}^n m_j(K(x^{**}))P_j(K(x^{**})) = \varphi(x^{**}) = x^{**},$$

de manera que

$$(AK - I)(x^{**}) = x^{**} - x^{**} = 0,$$

o sea, $x^{**} \in Ker(AK - I)$.

Como $x^{**} \neq 0$, pues vimos que $0 \notin B$, se tiene que $Ker(AK - I) \neq \emptyset$.

□

Definición 4.15. Sea $P \in Z(X)$. Un subespacio hiperinvariante para P es un subespacio M de X tal que $AM \subseteq M$ para todo operador A en el conmutante P' de P , es decir $AM \subseteq M$ si $AP = PA$.

Observación 1.1. Todo subespacio hiperinvariante para P es invariante.

4.4.3. Teorema de Lomonosov

Teorema de Lomonosov. Sea $P \in Z(X)$. Si P no es un múltiplo de la identidad y $PK = KP$ para algún operador compacto no nulo K , entonces P tiene un subespacio hiperinvariante no trivial.

Demostración del Teorema de Lomonosov Consideremos $N = P'$. Supongamos que P no admite un subespacio hiperinvariante no trivial, es decir, $L(N) = \{X, \emptyset\}$. Obviamente, N es una álgebra que contiene el operador identidad, pues I conmuta con P . Por tanto, el *Lema de Lomonosov* nos afirma que existe un operador $A \in N$ tal que $W = \text{Ker}(AK - I)$ es no nulo.

Por definición de núcleo de una aplicación, W es un subespacio invariante por la aplicación AK , es decir, $W \in L(AK)$. Además, se tiene que la aplicación AK restringida en el subespacio W , $AK|_W$ es la aplicación identidad, pues si $x \in W$

$$AK(x) = AK(x) + x - x = (AK - I)(x) + x = x,$$

donde en la última igualdad hemos utilizado que $x \in W$ y, por definición de W , la imagen de x por el operador $AK - I$ es el elemento neutro del espacio.

Como ya vimos en la demostración del *Lema de Lomonosov*, $AK \in Z(X)$. Por tanto $AK|_W \in Z(X)$.

Esto último significa, por definición de $Z(X)$, que $\overline{AK(B_w(0, 1))}$ es un conjunto compacto, siendo $B_w(0, 1)$ la bola unitaria de W .

Como hemos visto que AK sobre W es la función identidad, tenemos que

$$\overline{AK(B_w(0, 1))} = \overline{B_w(0, 1)},$$

lo que significa que W es un espacio finito, pues si fuera infinito la bola unitaria cerrada no sería compacta. Además, es fácil ver que W es invariante por P . En efecto, dado que A y K conmutan con P , para cada $x \in W$,

$$AK(P(x)) = P(AK(x)) = P(x),$$

o sea, $P(x) \in W$, lo que significa que W es invariante por P .

Ahora, dado que W tiene dimensión finita, $P|_W$ tiene un autovalor λ de tal manera que

$$V = \text{Ker}(P - \lambda I) \neq \emptyset.$$

Ahora, si $Q \in N$, se tiene que $QP = PQ$ y además, para todo $x \in V$,

$$(P - \lambda I)(Q(x)) = PQ(x) - \lambda Q(x) = Q(P(x)) - \lambda Q(x) = Q((P - \lambda I)(x)) = Q(0) = 0,$$

de manera que $Q(x) \in V$, y por lo tanto $Q(V) \subseteq V$. De esta manera vemos que V es un subespacio hiperinvariante para P .

Por último faltaría ver que V es no trivial.

Ya hemos visto que $V \neq \emptyset$. Si $V = X$, entonces necesariamente $P = \lambda I$ pero esto contradice la hipótesis que dice que P no es múltiple de la identidad.

□

Referencias

- [1] Border, K.C.: *Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory*. Cambridge University Press. (1999).
- [2] Gale, D.: *The Game of Hex and the Brouwer Fixed-Point Theorem*. The American Mathematical Monthly, Vol. 86, No. 10, pag. 818-827. (1979).
- [3] Guadalupe, M.: *Teoremas del Punto Fijo*. (2013). Disponible en:
<https://n9.cl/r5zz>
- [4] Gunowski, F.: *Teoremas de punto fijo para aplicaciones contractivas y no expansivas*. (2018). Disponible en:
<https://idus.us.es/xmlui/bitstream/handle/11441/77538/Llorente20Gunowski20Fatima20TFG.pdf?sequence=1>
- [5] Istratescu, V.: *Fixed point theory*. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht. (1981).
- [6] Milnor, J.: *Analytic proofs of the "Hairy ball theorem" and the Brouwer fixed point theorem*. American Mathematical Monthly Vol 85 No 7, pag 521-524. (1978)
- [7] Pata, V.: *Fixed Point Theorems and Applications*. (2019). Disponible en:
<http://www.karlin.mff.cuni.cz/prazak/vyuka/101/Literatura/vittorino-FP.pdf>