UNIVERSITAT DE BARCELONA

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

# Teoria dels Mòduls de Persistència

Autor: Nils Gutiérrez von Porat

Director: Dr. Ignasi Mundet

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 19 de gener de 2020

## Abstract

The theory of persistence modules originated in topological data analysis, as an abstract algebraic languange for dealing with persistent homology. The goal in this work is to study this theory. Mainly, we focus on the Normal Form Theorem and the Isometry Theorem. Finally, we define the Morse persistence modules and provide an application in approximating functions on the sphere.

## Resum

La teoria dels mòduls de persistència es va originar en l'anàlisi topològic de dades, com a llenguatge algebràic per tractar l'homologia persistent. L'objectiu d'aquest treball és estudiar aquesta teoria. Principalment, ens centrem en el Teorema de la Forma Normal i el Teorema d'Isometria. Finalment, definim els mòduls de persistència de Morse i donem una aplicació en l'aproximació de funcions en l'esfera.

2010 Mathematics Subject Classification. 55M00, 55U00, 53A00

## Agraïments

Vull agrair al meu tutor , el Dr. Ignasi Mundet, que em va recomanar el llibre en que m'he basat per fer el treball. Agraeixo també als meus companys de classe i a la meva família. Finalment, agraeixo a la Gemma Tort per tot el seu suport.

# Índex

# 1 Introducció

Els mòduls de persistència van ser introduïts per primera vegada per Zamorodian, A. i Carlsson, G. [12] el 2005, com a llenguatge algebràic per tractar l'homologia persistent. La teoria dels mòduls de persistència té el seu origen en l'anàlisi topològic de dades(ATD) [2, 4]. Partint d'una mostra discreta de punts, anomenada núvol de punts, es construeix un complex de cadenes amb coeficients en un cos fixat, i s'aplica homologia persistent per obtenir un mòdul de persistència. Aleshores es troba un diagrama de persistència(o codi de barres) que determina aquest mòdul de persistència llevat d'isomorfisme. Així doncs, els mòduls de persistència són un objecte algebràic molt important a estudiar en l'anàlisi topològic de dades.

Els mòduls de persistència els podem trobar també en la topologia [3]. Si considerem $X$ un espai topològic i una funció contínua $f : X \to \mathbb{R}$, fixat un cos $\mathbb{F}$ i $p \in \mathbb{N}$, es pot demostrar que si per a $s \leq t$, $\iota_{s,t} : \{x \in X \mid f(x) \leq s\} \hookrightarrow \{x \in X \mid f(x) \leq t\}$ és la inclusió natural, aleshores la família d'espais vectorials $V_t = H_p(\{x \in X \mid f(x) \leq t\})$, juntament amb la família de morfismes induïts en l'homologia singular $(\iota_{s,t})_p : V_s \to V_t$ formen un mòdul de persistència. No estudiem el cas general en que $X$ sigui un espai topològic, però sí quan sigui una varietat diferenciable compacta i $f : X \to \mathbb{R}$ sigui una funció de Morse.

En aquest treball, no tractem l'aànalisi topològic de dades, sinó que principalment ens centrem en l'estudi de la teoria dels mòduls de persistència. Els dos grans teoremes estudiats són el *Teorema de la Forma normal* i el *Teorema d'Isometria*. Posteriorment utilitzem tots els conceptes apresos i conceptes de geometria diferencial i de la teoria de Morse per definir els mòduls de persistència de Morse.

El treball consta de cinc seccions: les quatre primeres corresponen a l'estudi esmentat de la teoria dels mòduls de persistència i la última als mòduls de Morse. Per les quatre primeres seccions tenim principalment com a referència el llibre de Polterovich, L., Rosen, D., Samvelyan i K., Zhang, J. [7], i per la última secció, per la part de geometria diferencial el llibre de Robbin, J. i Salamon, D. [8] i el llibre de Stoker, J. [9], per la part de teoria de Morse, les notes de Hutchings, M.[6] i la tesi de màster de van Oldenbeek, M. [11] , i per la part de mòduls de persistència de Morse, de nou el llibre [7]. Anem doncs a presentar què treballem en cada secció.

En la secció dos presentem la categoria dels mòduls de persistència. Definim els mòduls intervàlics, anomenats així pel simple fet d'estar definits per un interval. Demostrem que l'interval només pot ser obert per l'esquerra i tancat per la dreta, o bé obert per l'esquerra i no acotat per la dreta. També demostrem la *proposició 2.15*, que la usarem diverses vegades al llarg del treball.

En la tercera secció, ens centrem en demostrar el Teorema de la Forma Normal. El teorema, afirma que tot mòdul de persistència és isomorf a una suma directa de mòduls de persistència intervàlics, i aquesta descomposició és única llevat de permutacions de l'ordre de la suma directa. Com que els mòduls intervàlics es defineixen a partir d'intervals, pel teorema deduïm que a tot mòdul de persistència li correspòn una única família $\{(I_i, m_i)\}_{i=1}^N$, on cada $I_i$ és un interval, i $m_i \in \mathbb{N}$ és la multiplicitat de l'interval $I_i$, que simplement indica el nombre de vegades que el mòdul intervàlic format per l'interval $I_i$ és present en la suma directa. Definim doncs el codi de barres relacionat a un mòdul de persistència com aquesta família.

En la quarta secció definim una distància en l'espai de mòduls de persistència, la distància d'entrellaçament. Per definir-la, prèviament donat $\delta \in \mathbb{R}$ positiu definim el concepte de $\delta$-entrellaçament entre mòduls de persistència. Definim també el concepte de $\delta$-emparellament entre dos codis de barres, i a partir d'aquest definim una distància en l'espai de codis de barres: la distància del coll d'ampolla. Demostrem que, efectivament, és una distància i donem una restricció sobre com han de ser els dos codis de barres per tal de que es pugui definir la distància.

La cinquena secció està dedicada principalment a la demostració del Teorema d'Isometria, que afirma que la distància d'entrellaçament entre dos mòduls de persistència és exactament igual a la distància del coll d'ampolla entre els seus dos codis de barres associats. La demostració d'aquest teorema resulta ser prou complicada. Prèviament estudiem com són els morfismes injectius i exhaustius entre dos mòduls de persistència. D'aquí definim un emparellament induït, per un morfisme injectiu o exhaustiu, entre els codis de barres associats als dos mòduls presents en el morfisme, que veiem que no depèn del morfisme injectiu o exhaustiu en sí. Aquests emparellaments tenen un paper fonamental en la demostració del teorema.

Finalment, en la última secció definim conceptes necessaris de geometria diferencial per definir l'homologia de Morse, i partir d'aquesta definim els mòduls de persistència de Morse. Apliquem els conceptes apresos per veure amb quina precisió una funció alçada $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ en una esfera en forma de cor, pot ser aproximada per una funció de Morse $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ en l'esfera, amb solament dos punts crítics, que corresponen amb el màxim i mínim de les dues funcions.

# 2 Mòduls de Persistència

Per començar, introduirem el concepte de mòdul de persistència. Definirem també els mòduls de persistència intervàlics, que tindran un paper fonamental en tot el treball. Donarem també nocions bàsiques com morfismes entre mòduls de persistència i suma directa de mòduls. Finalment descriurem com són els morfismes entre mòduls de persistència intervàlics.

Fixem un cos $\mathbb{F}$.

**Definició 2.1.** *Un mòdul de persistència és un parell* $(V, \pi)$, *on* $V$ *és una família* $\{V_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, *on* $V_t$ *és un espai vectorial sobre* $\mathbb{F}$ *de dimensió finita, i* $\pi$ *és una col.lecció* $\{\pi_{s,t}\}$ *d'aplicacions lineals* $\pi_{s,t} : V_s \to V_t$ *definides per a tots* $s \leq t$ *en* $\mathbb{R}$, *tal que:*

*(1) Per a tots* $s \leq t \leq r$ *tenim que* $\pi_{s,r} = \pi_{t,r} \circ \pi_{s,t}$, *és a dir, el següent diagrama és commutatiu:*

$$\begin{tikzcd} V_s \arrow[r, "\pi_{s,t}"] \arrow[rr, bend right, "\pi_{s,r}"'] & V_t \arrow[r, "\pi_{t,r}"] & V_r \end{tikzcd}$$

*(2) Existeix un subconjunt finit* $A$ *de* $\mathbb{R}$, *tal que per a tot* $t \in \mathbb{R} \setminus A$ *existeix un entorn* $U$ *de* $t$, *tal que* $\pi_{s,r}$ *és un isomorfisme per a tots* $s < r$ *en* $U$.

*(3) Per a tot* $t \in \mathbb{R}$ *existeix un* $\epsilon > 0$, *tal que per a tot* $s \in (t - \epsilon, t]$, *l'aplicació* $\pi_{s,t}$ *és un isomorfisme.*

*(4) Existeix un* $s_- \in \mathbb{R}$, *tal que* $V_s = 0$ *per a tot* $s \leq s_-$ .

**Observació 2.2.** (i) Veiem que per les propietats (1) i (3), per a tot $t \in \mathbb{R}$, $\pi_{t,t} \circ \pi_{t,t} = \pi_{t,t}$ i $\pi_{t,t}$ és un isomorfisme, per tant $\pi_{t,t} = Id_{V_t}$

(ii) Sigui $s_+ = \max\{t \in A\}$. Per la propietat (2), tenim que per a tots $t > s > s_+$, $\pi_{s,t} : V_s \to V_t$ és un isomorfisme, per tant la dimensió de $V_t$ és sempre la mateixa per a tot $t > s_+$. Podem definir doncs l'espai vectorial terminal següent:

$$V_\infty = \coprod_{s > s_+} V_s / \sim$$

on per a tot $s < t$, amb $v_s \in V_s$ i $v_t \in V_t$, $v_s \sim v_t$ si $\pi_{s,t}(v_s) = v_t$.

Clarament tenim que per a tot $t > s_+$, $V_\infty \cong V_t$.

## 2.1 Mòduls de Persistència Intervàlics

**Definició 2.3.** *Donat un interval* $I = (a,b]$, $a < b$ *reals, o* $I = (a,+\infty)$ *definim el mòdul de persistència intervàlic* $\mathbb{F}(I)$ *com:*

$$\mathbb{F}(I)_t = \begin{cases} \mathbb{F} \ si \ t \in I \\ 0 \ si \ t \notin I \end{cases} \qquad \pi_{s,t} = \begin{cases} Id_{\mathbb{F}} \ si \ s,t \in I \\ 0 \ altrament \end{cases}$$

**Observació 2.4.** Si I és un interval com el de la definició, F(I) és, en efecte, un mòdul de persistència.

*Demostració.* Hem de veure que es compleixen les quatre propietats:

(1): Donats $s \leq t \leq r$, tenim tres casos:

Cas 1: Si $s \notin I$ aleshores $\pi_{s,r} = 0$ i $\pi_{s,t} = 0$. Per tant, $\pi_{t,r} \circ \pi_{s,t} = \pi_{t,r} \circ 0 = 0 = \pi_{s,r}$.

Cas 2: Si $r \notin I$ aleshores $\pi_{s,r} = 0$ i $\pi_{t,r} = 0$. Per tant, $\pi_{t,r} \circ \pi_{s,t} = 0 \circ \pi_{s,t} = 0 = \pi_{s,r}$.

Cas 3: Si $s \in I$ i $r \in I$, com que $s \leq t \leq r$, també es té que $t \in I$. Per tant, $\pi_{s,r} = Id_{\mathbb{F}}$ i $\pi_{t,r} \circ \pi_{s,t} = Id_{\mathbb{F}} \circ Id_{\mathbb{F}} = Id_{\mathbb{F}} = \pi_{s,r}$.

(2): Si $I$=($a$,$b$], tenim que si t $\in \mathbb{R} \setminus \{a, b\}$, aleshores existeix un entorn $U$ de t tal que $U \cap \{a, b\} = \emptyset$. Aleshores $U \subset (a, b)$ o bé $U \cap I = \emptyset$.

Si $U \subset (a, b)$, per a tot $s < r$ en $U$ tenim que $\mathbb{F}(I)_s = \mathbb{F}(I)_r = \mathbb{F}$, per tant $\pi_{s,r} = Id_{\mathbb{F}}$ és un isomorfisme.

Si $U \cap I = \emptyset$, per a tot $s < r$ en $U$ tenim que $\mathbb{F}(I)_s = \mathbb{F}(I)_r = 0$, i per tant $\pi_{s,r} = 0$ és un isomorfisme.

Ara, per a $t = a$ o $t = b$, no es compleix la propietat: Per a tot entorn U de $a$, existeix un $\epsilon > 0$ tal que $(a - \epsilon, a + \epsilon) \subset U$ i $(a, a + \epsilon) \subset I$. Escollint $s = a$ i $r = a + \frac{\epsilon}{2}$, tenim que $s \notin I$ i $r \in I$, i com que $\mathbb{F}(I)_s = 0$ i $\mathbb{F}(I)_r = \mathbb{F}$, l'aplicació $\pi_{s,r} = 0$ no és un isomorfisme.

Per a tot entorn $U$ de $b$, existeix un $\epsilon > 0$ tal que $(b - \epsilon, b + \epsilon) \subset U$ i $(b - \epsilon, b] \subset I$. Escollint $s = b$ i $r = b + \frac{\epsilon}{2}$, tenim que $s \in I$ i $r \notin I$, i com que $\mathbb{F}(I)_s = \mathbb{F}$ i $\mathbb{F}(I)_r = 0$, l'aplicació $\pi_{s,r} = 0$ no és un isomorfisme. Si $I$=($a$,$+\infty$) es fa igual només considerant $t = a$ com a punt que no compleix la propietat.

(3): Com que per a tot $t \in \mathbb{R} \setminus \{a, b\}$, (2)$\Rightarrow$(3), només s'ha de veure que per a $t = a$ i $t = b$, (3) es compleix. Si $t = a$ aleshores $\mathbb{F}(I)_t = 0$, i per a tot $s \leq t$ també tenim que $\mathbb{F}(I)_t = 0$, per tant $\pi_{s,t} = 0$ és un isomorfisme. Si $t = b$ aleshores $\mathbb{F}(I)_t = \mathbb{F}$, i per a tot $s \in (b - \epsilon, b]$, on $\epsilon = b - a$, tenim que $\mathbb{F}(I)_s = \mathbb{F}$, per tant $\pi_{s,t} = Id_{\mathbb{F}}$ és un isomorfisme. Si $I = (a, +\infty)$ només cal considerar $t = a$ i es demostra anàlogament.

(4): Considerem $s_- = a$, i efectivament per a tot $s \leq s_-$ , $\mathbb{F}(I)_s = 0$. □

**Observació 2.5.** Si $I$ és d'alguna d'aquestes formes: $I = (-\infty, a)$, $I = (-\infty, a]$, $I = \mathbb{R}$, $I = (a, b)$, $I = [a, b)$, $I = [a, b]$, $I = [a, +\infty)$ aleshores $\mathbb{F}(I)$ definit de la mateixa forma que anteriorment no és un mòdul de persistència.

*Demostració.* Si $I = (-\infty, a)$ , aleshores és evident que no es compleix la propietat (4), ja que llavors existeix un $t \in \mathbb{R}$ tal que per a tot $s$<$t$ tenim que $\mathbb{F}(I)_s = \mathbb{F}$. Si $I = (-\infty, a]$ o $I = \mathbb{R}$, passa el mateix.

Si $I = (a, b)$ o $I = [a, b)$ no es complirà (3), ja que donat $t = b$, per a qualsevol $\epsilon > 0$ tal que $(b - \epsilon, b) \subset I$, per a tot $s \in (t - \epsilon, t)$ es tindrà que $\mathbb{F}(I)_s = \mathbb{F}$, però $\mathbb{F}(I)_t = 0$, i $\pi_{s,t} = 0$ no serà isomorfisme.

Si $I = [a, b]$ o $I = [a, +\infty)$, tampoc es complirà (3), ja que donat $t = a$, per a tot $s$<$t$ es tindrà que $\mathbb{F}(I)_t = \mathbb{F}$, però $\mathbb{F}(I)_s = 0$, i $\pi_{s,t} = 0$ no serà un isomorfisme. □

**Notació.** D' ara endavant sempre que considerem un interval $I$, serà de la forma $I = (a, b]$, amb $-\infty < a < b \leq +\infty$. En el cas que $b = +\infty$, per comoditat, farem un abús de notació i considerarem que $(a, b] = (a, +\infty)$.

### 2.2 Morfismes entre Mòduls de Persistència

**Definició 2.6.** *Siguin $(V, \pi)$ i $(W, \theta)$ dos mòduls de persistència. Un morfisme $\Phi : (V, \pi) \to (W, \theta)$ és una família d'aplicacions lineals $\{\Phi_t : V_t \to W_t\}_{t \in \mathbb{R}}$, tal que per a tots $s \leq t$ el diagrama següent és commutatiu:*

$$\begin{tikzcd} V_s \arrow[r, "\pi_{s,t}"] \arrow[d, "\phi_s"'] & V_t \arrow[d, "\phi_t"] \\ W_s \arrow[r, "\theta_{s,t}"'] & W_t \end{tikzcd}$$

Diem que $(V, \pi)$ i $(W, \theta)$ són isomorfs, si existeixen dos morfismes $\Phi : (V, \pi) \to (W, \theta)$ i $\Psi : (W, \theta) \to (V, \pi)$, tal que per a tot $t \in \mathbb{R}$, $\Phi_t \circ \Psi_t = Id_{W_t}$ i $\Psi_t \circ \Phi_t = Id_{V_t}$. En aquest cas direm que $\Phi$ i $\Psi$ són isomorfismes.

Si un morfisme $\Phi : V \to W$ entre mòduls de persistència compleix que per a tot $t \in \mathbb{R}$, $\Phi_t = 0$, diem que és el morfisme zero.

**Observació 2.7.** En general donats dos morfismes entre mòduls de persistència $\Phi : V \to W$ i $\Psi : W \to Z$, podem definir la seva composició $\Psi \circ \Phi : V \to Z$ com:

$$\Psi \circ \Phi = \{\Psi_s \circ \Phi_s : V_s \to Z_s\}_{s \in \mathbb{R}}$$

.

És evident que aquesta composició és associativa, ja que les aplicacions lineals ho són.

També podem definir el morfisme identitat $Id_V : V \to V$ com $Id_V = \{Id_{V_s}\}_{s \in \mathbb{R}\}}$. Per tant tenim que els mòduls de persistència formen una categoria.

**Definició 2.8.** *Sigui $(V, \pi)$ un mòdul de persistència. Un submòdul de persistència $W$ de $V$ és una família de subespais vectorials $W_t \subseteq V_t$ per a tot $t \in \mathbb{R}$, tal que per a tots $s \leq t$, $\pi_{s,t}(W_s) \subseteq W_t$, i per tant $\pi_{s,t}$ indueix una aplicació lineal $\pi_{s,t}|_{W_s} : W_s \to W_t$. Tenim doncs que si $\pi|_W$ és la família $\{\pi_{s,t}|W_s\}$ per a tots $s \leq t$, $(W, \pi|_W)$ és un mòdul de persistència. El denotarem per $W \subset V$. D'ara endavant, també denotarem als morfismes $\pi_{s,t}|W_s$ per $\pi^W_{s,t}$.*

**Exemple 2.9.** Siguin $(V, \pi)$ i $(W, \theta)$ dos mòduls de persistència, i $\Phi : V \to W$ un morfisme. Llavors tenim que les famílies $ker\Phi = \{ker\Phi_s\}_{s \in \mathbb{R}}$ i $im\Phi = \{im\Phi_s\}_{s \in \mathbb{R}}$ són submòduls de persistència de $V$ i $W$ respectivament.

*Demostració.* Hem de veure que per a tots $s \leq t$, $\pi_{s,t}(ker\Phi_s) \subseteq ker\Phi_t$ i $\theta_{s,t}(im\Phi_s) \subseteq im\Phi_t$.

Donat $v_s \in ker\Phi_s$, tenim que $\theta_{s,t}(\Phi_s(v_s)) = 0$, d'altra banda $\pi_{s,t}(v_s) = v_t \in V_t$, i com que $0 = \theta_{s,t}(\Phi_s(v_s)) = \Phi_t(\pi_{s,t}(v_s)) = \Phi_t(v_t) = 0$, tenim que $\pi_{s,t}(v_s) \in ker\Phi_t$.

Sigui $w_s \in im\Phi_s$, aleshores tenim que existeix $v_s \in V_s$, tal que $\Phi_s(v_s) = w_s$. Considerem $v_t = \pi_{s,t}(v_s)$ i $w_t = \theta_{s,t}(w_s)$, volem veure que $w_t \in im\Phi_t$. Per definició de morfisme tenim que $w_t = \theta_{s,t}(\Phi_s(v_s)) = \Phi_t(\pi_{s,t}(v_s)) = \Phi_t(v_t)$, per tant efectivament $w_t \in im\Phi_t$. $\square$

**Definició 2.10.** *Siguin $(V, \pi)$ i $(V', \pi')$ dos mòduls de persistència. La seva suma directa és un mòdul de persistència $(W, \theta)$, tal que $W_t = V_t \oplus V_t'$ per a tot $t \in \mathbb{R}$, i $\theta_{s,t} = \pi_{s,t} \oplus \pi'_{s,t}$ per a tots $s \leq t$. Clarament en aquest cas $V$ i $V'$ són submòduls de persistència de $W$.*

**Definició 2.11.** *Diem que un morfisme $\Phi : V \to W$ entre mòduls de persistència és injectiu, si per a tot $s \in \mathbb{R}$, $\Phi_s : V_s \to W_s$ és injectiva.*

*Anàlogament, diem que el morfisme $\Phi : V \to W$ és exhaustiu, si per a tot $s \in \mathbb{R}$, $\Phi_s : V_s \to W_s$ és exhaustiva.*

**Exemple 2.12.** Sigui $(V, \pi)$ un mòdul de persistència. Sigui $W \subset V$ un submòdul de persistència. Tenim que la família d'inclusions naturals $\iota = \{\iota_s : W_s \hookrightarrow V_s\}_{s\in\mathbb{R}}$ és un morfisme injectiu entre mòduls de persistència.

Si $V = V_1 \oplus V_2$ és suma directa de mòduls de persistència, tenim que les famílies de projeccions naturals $\rho_1 = \{\rho_{1s} : V_s \twoheadrightarrow V_{1s}\}_{s\in\mathbb{R}}$, $\rho_2 = \{\rho_{2s} : V_s \twoheadrightarrow V_{2s}\}_{s\in\mathbb{R}}$ són morfismes exhaustius entre mòduls de persistència.

## 2.3 Morfismes entre Mòduls de Persistència Intervàlics

**Observació 2.13.** Observem que si $\Phi : \mathbb{F}(a, b] \to \mathbb{F}(c, d]$ és un morfisme entre els mòduls de persistència $\mathbb{F}(a, b]$ i $\mathbb{F}(c, d]$, aleshores per a tot $t \in \mathbb{R}$, tenim que $\Phi_t$ serà de les formes seguents: $\Phi_t : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, o bé $\Phi_t : \mathbb{F} \to 0$, o bé $\Phi_t : 0 \to \mathbb{F}$, o bé $\Phi_t : 0 \to 0$. A més per ser una aplicació lineal, $\Phi_t$ serà la multiplicació per un $\lambda_t \in \mathbb{F}$. Clarament si $\Phi_t$ no és de la forma $\Phi_t : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, serà el morfisme 0, i si ho és, per la commutivitat del diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F} \arrow[r, "Id_{\mathbb{F}}"] \arrow[d, "\phi_s"'] & \mathbb{F} \arrow[d, "\phi_t"] \\ \mathbb{F} \arrow[r, "Id_{\mathbb{F}}"'] & \mathbb{F} \end{tikzcd}$$

tindrem que si $\Phi$ és diferent del zero, aleshores per a tot $t$, tal que $(\mathbb{F}(a, b])_t = (\mathbb{F}(c, d])_t = \mathbb{F}$, $\Phi_t$ serà diferent del zero. A més a més, per a $s \leq t$, amb $(\mathbb{F}(a, b])_s = (\mathbb{F}(c, d])_s = \mathbb{F}$, com que $Id_{\mathbb{F}} \circ \Phi_s = \Phi_t \circ Id_{\mathbb{F}}$, tindrem que $\Phi_s = \Phi_t$. Deduïm doncs que per a tots $s \leq t$, tal que $s, t \in (a, b]$ i $s, t \in (c, d]$, $\Phi_s = \Phi_t$.

No sempre es pot definir un morfisme diferent del zero $\Phi : \mathbb{F}(a, b] \to \mathbb{F}(c, d]$. Per exemple si $\Phi : \mathbb{F}(1, 2] \to \mathbb{F}(1, 4]$ i escollim $s = 2$ i $t = 3$, tindrem que $\Phi_s : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ serà diferent del 0, però $\Phi_t : 0 \to \mathbb{F}$ serà el morfisme 0, i per tant el diagrama següent:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F} \arrow[r, "0"] \arrow[d, "\phi_s"'] & 0 \arrow[d, "0"] \\ \mathbb{F} \arrow[r, "Id_{\mathbb{F}}"'] & \mathbb{F} \end{tikzcd}$$

no pot ser commutatiu.

**Observació 2.14.** Si considerem un morfisme $\Phi : \mathbb{F}(a,b] \to \mathbb{F}(c,d]$ diferent del zero, per a tots $s < t$, tenim que $\Phi_s$ pot ser de les formes seguents: $\Phi_s : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$, o bé $\Phi_s : \mathbb{F} \to 0$, o bé $\Phi_s : 0 \to \mathbb{F}$, o bé $\Phi_s : 0 \to 0$, i anàlogament per $\Phi_t$. Tindrem doncs fins a setze diagrames possibles. És fàcil veure que els dos únics diagrames que no commuten són:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F} \arrow[r, "0"] \arrow[d, "\phi_s"'] & 0 \arrow[d, "0"] \\ \mathbb{F} \arrow[r, "Id_{\mathbb{F}}"'] & \mathbb{F} \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \mathbb{F} \arrow[r, "\pi_{s,t}"] \arrow[d, "0"'] & \mathbb{F} \arrow[d, "\Phi_t"] \\ 0 \arrow[r, "0"'] & \mathbb{F} \end{tikzcd}$$

**Proposició 2.15.** *Siguin $(a,b]$ i $(c,d]$ dos intervals. Existeix un morfisme $\phi : \mathbb{F}(a,b] \to \mathbb{F}(c,d]$ diferent del zero si i només si, $c \leq a$ i $a < d \leq b$.*

*Demostració.* Notem que és evident que $a < d$, ja que si no, els intervals no s'intersecten i l'únic morfisme $\phi : \mathbb{F}(a,b] \to \mathbb{F}(c,d]$ és el 0. Podem suposar doncs, que $a < d$. Anem a demostrar la implicació cap a la dreta pel contrarrecíproc. Suposem que $c > a$, o bé $d > b$. Si $c > a$, considerem un $s \in (a,c)$, i un $t \in (a,b] \cap (c,d]$. Si existís un morfisme $\Phi : \mathbb{F}(a,b] \to \mathbb{F}(c,d]$ diferent del zero, aleshores $\Phi_s : \mathbb{F} \to 0$ seria el morfisme 0 i $\Phi_t : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ seria un morfisme diferent del zero i obtindríem el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F} \arrow[r, "\pi_{s,t}"] \arrow[d, "0"'] & \mathbb{F} \arrow[d, "\Phi_t"] \\ 0 \arrow[r, "0"'] & \mathbb{F} \end{tikzcd}$$

que sabem que no commuta. Per tant no existeix tal morfisme.

Si $d > b$, considerem un $s \in (a,b] \cap (c,d]$ i un $t \in (b,d]$. Si existís un morfisme $\Phi : \mathbb{F}(a,b] \to \mathbb{F}(c,d]$ diferent del zero, aleshores $\Phi_s : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ seria un morfisme diferent del zero i $\Phi_s : 0 \to \mathbb{F}$ seria el morfisme 0, i obtindríem el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F} \arrow[r, "0"] \arrow[d, "\phi_s"'] & 0 \arrow[d, "0"] \\ \mathbb{F} \arrow[r, "Id_{\mathbb{F}}"'] & \mathbb{F} \end{tikzcd}$$

que sabem que no commuta. Per tant no existeix tal morfisme.

Demostrem ara el recíproc. Suposem que $c \leq a$ i $d \leq b$. Anem a veure que no és possible obtenir cap dels dos diagrames no commutatius que hem vist anteriorment. Els $s < t$ que compleixen el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{F} \arrow[r, "0"] \arrow[d, "\phi_s"'] & 0 \arrow[d, "0"] \\ \mathbb{F} \arrow[r, "Id_{\mathbb{F}}"'] & \mathbb{F} \end{tikzcd}$$

verifiquen que $s \in (a,b] \cap (c,d]$ i $t \in (c,d] \setminus (a,b]$. Però com que $c \leq a$ i $d \leq b$, tenim que $(a,b] \cap (c,d] = (a,d]$ i $(c,d] \setminus (a,b] = (c,a)$, que genera una contradicció amb el fet que $s < t$. Per tant no podem obtenir el diagrama.

Ara, els $s < t$ que compleixen el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F} \arrow[r, "\pi_{s,t}"] \arrow[d, "0"'] & \mathbb{F} \arrow[d, "\Phi_t"] \\
0 \arrow[r, "0"'] & \mathbb{F}
\end{tikzcd}$$

verifiquen que $s \in (a, b] \setminus (c, d]$ i $t \in (a, b] \cap (c, d]$. Com que $c \leq a$ i $d \leq b$, tenim que $(a, b] \setminus (c, d] = (d, b)$ i $(a, b] \cap (c, d] = (a, d]$, per tant tenim una altra contradicció amb el fet que $s < t$, i no podem obtenir els dos diagrames no commutatius. Per tant existeix un morfisme $\phi : \mathbb{F}(a, b] \to \mathbb{F}(c, d]$ diferent del zero. $\square$

**Notació:** si un morfisme $\Phi : \mathbb{F}(a, b] \to \mathbb{F}(c, d]$ és diferent del zero el denotarem per $\Phi \neq 0$, i si ho és el denotarem per $\Phi = 0$

# 3 Teorema de la Forma Normal

En aquesta secció introduirem el concepte de codi de barres. Veurem, mitjançant el teorema de la forma normal, que a tot mòdul de persistència li correspòn un únic codi de barres. Abans, però, necessitarem introduir uns quants conceptes, que ens permetran demostrar el teorema de la forma normal.

**Definició 3.1.** *Un codi de barres és una família finita $B = \{(I_i, m_i)\}_{i=1}^N$ d'intervals $I_i$ i $m_i \in \mathbb{N}$, que l'anomenarem multiplicitat de l'interval $I_i$.*

## 3.1 Conceptes Previs

**Definició 3.2.** *Sigui $(V, \pi)$ un mòdul de persistència. Diem que un punt $t \in \mathbb{R}$ és espectral en $(V, \pi)$, si per a tot entorn $U$ de $t$, existeixen $s < r$ en $U$, tal que $\pi_{s,r} : V_s \to V_r$ no és un isomorfisme. Notem que aquests són els punts que no compleixen la propietat (2) dels mòduls de persistència.*

*Definim l'espectre de $(V, \pi)$ com el conjunt*

$$SpecV = \{t \in \mathbb{R}|\ t \text{ és espectral}\} \cup \{+\infty\}.$$

*Observem doncs, que per la propietat (2), $SpecV$ és un conjunt finit.*

**Observació 3.3.** Observem que si $s, t \in \mathbb{R}$ pertanyen a la mateixa component connexa de $\mathbb{R} \setminus SpecV$, aleshores $\pi_{s,t} : V_s \to V_t$ és un isomorfisme. Aquest fet és degut la propietat (2) dels mòduls de persistència.

**Proposició 3.4.** *Si $V = \bigoplus_{i=1}^N \mathbb{F}(a_i, b_i]^{m_i}$, aleshores l'espectre de $V$ és el conjunt format per tots els extrems dels intervals.*

*Demostració.* Vegem primer que $\{a_1, b_1, ......, a_n, b_n\} \subset SpecV$. Donat $i \in \{1, ......, N\}$ qualsevol, tenim que si $U$ és un entorn de $a_i$, aleshores existeix un $\epsilon > 0$, tal que $(a_i - \epsilon, a_i + \epsilon) \subset U$ i $a_i + \frac{\epsilon}{2} \leq b_i$. Aleshores, si considerem $s = a_i - \frac{\epsilon}{2}$ i $t = a_i + \frac{\epsilon}{2}$, tenim que $s \notin (a_i, b_i]$ i $t \in (a_i, b_i]$, per tant $\pi_{s,t}$ no és un isomorfisme, i deduïm que $a_i \in SpecV$. Amb un argument molt semblant es dedueix que $b_i \in SpecV$.

Vegem ara, que si $r \notin \{a_1, b_1, ......, a_n, b_n\}$, aleshores $r \notin SpecV$. En aquest cas, tenim que $r \neq a_i$, $r \neq b_i$, per a tot $i \in \{1, ......, N\}$, i per tant o bé $r \in (a_i.b_i)$, o bé $r \notin [a_i, b_i]$. Sigui $\epsilon = min_i\{\frac{|r-a_i|}{2}, \frac{|r-b_i|}{2}\}$, volem veure que per a tots $s < t$ en l'entorn $(r - \epsilon, r + \epsilon)$, el morfisme de persistència $\pi_{s,t}$ és un isomorfisme. Considerem doncs els dos casos següents:

(1) pels $i \in \{1, ....., N\}$, tal que $r \in (a_i, b_i)$, tenim que es compleixen les desigualtats següents:

$$r - \epsilon \geq r - \frac{|r - a_i|}{2} \geq r - \frac{r}{2} + \frac{a_i}{2} = \frac{r}{2} + \frac{a_i}{2} > a_i$$
$$r + \epsilon \leq r + \frac{|r - b_i|}{2} \leq r + \frac{r}{2} - \frac{b_i}{2} = 3\frac{r}{2} + \frac{b_i}{2} < b_i$$

per tant, $(r - \epsilon, r + \epsilon) \subset (a_i, b_i)$.

(2) pels $i \in \{1, ....., N\}$, tal que $r \notin (a_i, b_i)$, tenim que es compleixen les desigualtats següents:

$$\text{si } r < a_i,\ r + \epsilon \leq r + \frac{|r - a_i|}{2} \leq r + \frac{r}{2} - \frac{a_i}{2} = 3\frac{r}{2} - \frac{a_i}{2} < a_i$$

$$\text{si } r > b_i,\ r - \epsilon \geq r - \frac{|r - b_i|}{2} \geq r - \frac{r}{2} + \frac{b_i}{2} = \frac{r}{2} + \frac{b_i}{2} > b_i$$

per tant, $(r - \epsilon, r + \epsilon) \cap [a_i, b_i] = \emptyset$.

Deduïm doncs, que per a tot $s < t$ en $(r - \epsilon, r + \epsilon)$, $V_s = V_t$ i $\pi_{s,t}$ és un isomorfisme. □

Sigui $(V, \pi)$ un mòdul de persistència. Considerem els punts de $SpecV$ ordenats, $a_1 < a_2 < ...... < a_N < a_{N+1} = +\infty$. Considerem també $a_0 = -\infty$ i definim per a tot $i \in \{1, 2, ......, N\}$ els intervals $Q_i = (a_{i-1}, a_i]$ i $Q_{N+1} = (a_N, +\infty)$.

**Definició 3.5.** *Per a tot $i \in \{1, 2, ......, N+1\}$, definim l'espai vectorial límit $V^i$ considerant el límit directe del sistema directe $\{V_s\}$ per a tot $\in Q_i$:*

$$V^i = \coprod_{s \in Q_i} V_s / \sim$$

*on per a tot $s < t$, amb $v_s \in V_s$ i $v_t \in V_t$, $v_s \sim v_t$ si $\pi_{s,t}(v_s) = v_t$.*

Observem que en cada $Q_i$, per a tots $s < t$ en $Q_i$, les aplicacions $\pi_{s,t}$ són isomorfismes, i per tant tenim que $V^i \cong V_{a_i}$. Tenim doncs, que els elements de $V^i$ estan representats pels elements de $V_{a_i}$. Considerem la família finita $\{V_i\}_{i=1}^{N+1}$, i considerem també per a tots $i \leq j$ els morfismes $p_{i,j} : V^i \to V^j$ induïts per $\pi_{s,t}$, és a dir, si $[v_{a_i}] \in V^i$, $p_{i,j}([v_{a_i}]) = [v_{a_j}]$ si i només si, $\pi_{a_i,a_j}(v_{a_i}) = v_{a_j}$. Observem que clarament $p_{i,j}$ és lineal per ser-ho $\pi_{s,t}$. Definim la dimensió total de $V$ com:

$$Totaldim(V) = \sum_{i=1}^{N+1} dimV^i.$$

**Definició 3.6.** *Sigui $W \subset V$ un submòdul de persistència. Diem que és semi-exhaustiu si existeix un $r \in \mathbb{R}$ tal que:*

*(a) $W_t = V_t$ per a tot $t \leq r$*

*(b) $\pi_{s,t} : W_s \to W_t$ és exhaustiva si $r < s < t$.*

**Proposició 3.7.** *Sigui $W \subset V$ un submòdul semi-exhaustiu. Aleshores:*

*(1) $r := sup\{t : W_s = V_s, \forall s \leq t\} \in SpecV$ satisfà les condicions de semi-exhaustivitat del submòdul.*

*(2) $SpecW \subset SpecV$ i $TotaldimW \leq TotaldimV$*

*Demostració. (1).* Suposem que $r \notin SpecV$. Aleshores existeix un entorn $U$ de r, tal que per a tots $s < t$ en $U$, $\pi_{s,t} : V_s \to V_t$ és un isomorfisme. Tenim en particular, que existeix un $\epsilon$, tal que $U = (r - \epsilon, r + \epsilon)$. Siguin $s = r - \frac{\epsilon}{2}$ i $t = r + \frac{\epsilon}{2}$. Volem veure que $\pi_{s,t}$ no pot ser un isomorfisme.

Com que $s < r$, tenim que $W_s = V_s$, i com que $t > r$, per definició de r, $W_t \subsetneq V_t$. Considerem ara el morfisme inclusió $\iota : W \to V$. Tenim doncs que $\iota_s : W_s \to V_s$ és un isomorfisme, ja que $W_s = V_s$, però en canvi $\iota_t : W_t \to V_t$ no és un isomorfisme, ja que no és exhaustiva pel fet que $W_t \subsetneq V_t$. Tenim que s'ha de complir la següent igualtat: $\pi_{s,t}$ o $\iota_s = \iota_t$ o $\pi_{s,t}$. Com que per hipòtesi, $\pi_{s,t} : V_s \to V_t$ és un isomorfisme, $\pi_{s,t}$ o $\iota_s$ és un isomorfisme, però $\iota_t$ o $\pi_{s,t}$ no ho és, ja que $\iota_t$ no ho és. Per tant aquests morfismes no poden ser iguals i arribem a una contradicció.

*(2).* Escollim $r = sup\{t : W_s = V_s, \forall s \leq t\}$. Sigui $w \in SpecW$, és a dir, per a tot entorn $U$ de $w$, existeixen $s < t$ en U, tal que $\pi^W_{s,t}$ no és un isomorfisme. Hem demostrat ja que $r \in SpecV$.

Si $w < r$, donat un entorn $U$ de $w$ qualsevol, escollim un $\epsilon > 0$ tal que $w + \epsilon < r$ i l'entorn $E := (w - \epsilon, w + \epsilon)$ estigui inclòs en $U$. Aleshores existeixen $s < t$ en $E$, tal que $V_s = W_s$, $V_t = W_t$, i $\pi_{s,t}$ no és un isomorfisme. Per tant, com que $s < t$ estan en $U$, $w \in SpecV$.

Si $w > r$, donat un entorn $U$ de $w$ qualsevol, escollim un $\epsilon > 0$ tal que $w - \epsilon > r$ i l'entorn $A := (w - \epsilon, w + \epsilon)$ estigui inclòs en $U$. Tenim que existeixen $s < t$ en A, tal que $\pi^W_{s,t} : W_s \to W_t$ és exhaustiva i no és isomorfisme, per tant no és injectiva. Aleshores $\pi_{s,t} : V_s \to V_t$ tampoc és un isomorfisme, ja que la restricció en $W_s$ no és injectiva. Com que $s < t$ estan en $U$, $w \in SpecV$.

Observem que el fet que $TotaldimW \leq TotaldimV$, és una conseqüència directa del fet que $SpecW \subset SpecV$. □

**Teorema 3.8.** *(Teorema de la Forma Normal): Sigui $(V, \pi)$ un mòdul de persistència. Aleshores existeix una família finita $\{(I_i, m_i)\}_{i=1}^N$ de intervals $I_i = (a_i, b_i]$ o $I_i = (a_i, +\infty)$ diferents dos a dos, amb multiplicitats $m_i \in \mathbb{N}$, tal que:*

$$V \cong \bigoplus_{i=1}^{N} \mathbb{F}(I_i)^{m_i}.$$

*A més a més, si $V \cong \bigoplus_{i=1}^{M} \mathbb{F}(J_i)^{n_i}$, aleshores N=M i existeix una permutació $\sigma$ del conjunt $\{1, 2, ......, N\}$, tal que per a tot $i \in \{1, 2, ......, N\}$, $I_i = J_{\sigma i}$ i $m_i = n_{\sigma i}$, és a dir, aquesta descomposició és única llevat de permutació.*

## 3.2 Demostració del Teorema

Per demostrar l'existència primer necessitem introduir un lema.

**Lema 3.9.** *Sigui $W \subsetneq V$ un submòdul de persistència semi-exhaustiu. Llavors existeix un submòdul de persistència semi-exhaustiu $W_\sharp \subset V$, tal que $W_\sharp \cong W \oplus \mathbb{F}(I)$, on $I = (a, b]$ amb $a, b \in SpecV$*

*Demostració.* Sigui $r = sup\{t : W_s = V_s, \forall s \leq t\}$. Tenim doncs que $r = a_{i-1} \in SpecV$ per algún i, i per tant, $W^i \subsetneq V^i$. Observem que aquest $i$ és minimal, ja que $W_t = V_t$ per a tot $t \leq a_{i-1}$, i per tant $W^j = V^j$ per a tot $j \in \{1, ......, i-1\}$. Considerem un element $z^i \in V^i \setminus W^i$. Per a $k > i$, considerem $z^k = p_{i,k}(z^i) \in V^k$. Hi ha dos casos possibles:

(1) Existeix algún $k > i$, tal que $z^k \in W^k$

(2) Per a tot $k > i, z^k \notin W^k$.

Considerem primer el cas (1):

Elegim el $j > i$ minimal pel que $z^j \in W^j$. Com que $p_{i,j} : W^i \to W^j$ és exhaustiva, existeix un $x^i \in W^i$ tal que $p_{i,j}(x^i) = z^j = p_{i,j}(z^i)$. Considerem l'element $y^i = z^i - x^i$, i els elements $y^k = p_{i,k}(z^k)$, per a tot $k > i$.

Com que $j$ es l'índex minimal pel que $z^j \in W^j$, tenim que per a tot $i < k < j, y^k \notin W^k$, i a més a més, $y^k \neq 0$. Per linealitat de $p_{i,j}$, tenim que $y^j = p_{i,j}(z^i - x^i) = p_{i,j}(z^i) - p_{i,j}(x^i) = z^j - z^j = 0$. Per tant, per a tot $k > j$, $p_{i,k}(y^i) = p_{j,k}$ o $p_{i,j}(y^i) = 0$. Hem vist doncs que $j$ és l'índex minimal pel que $y^j = 0$, i pel que continua sent 0 per índexos més grans.

Per a tot k, considerant l'element $y^k \in V^k$, escollim els seus representants $(y^k)_s \in V_s$ per a tot $s \in (a_{k-1}, a_k]$ i construïm un submòdul $P \subset V$ de la forma següent:

$$P_s = \begin{cases} 0 \text{ si } s \notin (a_{i-1}, a_{j-1}] \\ \langle (y^k)_s \rangle_{\mathbb{F}} \text{ si } s \in (a_{k-1}, a_k] \subseteq (a_{i-1}, a_{j-1}], k = i, ......j-1 \end{cases}$$

$$\pi^P_{s,t} = \begin{cases} \pi^V_{s,t} \text{ si } s, t \in (a_{i-1}, a_{j-1}] \\ 0 \text{ altrament} \end{cases}$$

Clarament, $P = \{P_s\}$ és un submòdul de V isomorf a $\mathbb{F}(a_{i-1}, a_{j-1}]$. Considerem $W_\sharp = W + P$, juntament amb $\pi^{W_\sharp} = \pi^W \oplus \pi^P$, aleshores tenim que:

(a) $W_\sharp = W \oplus P$

(b) $W_\sharp$ es un submòdul semi-exhaustiu de V

*Demostració de (a).* Hem de demostrar que per a tot $s \in \mathbb{R}$, $P_s \cap W_s = \{0\}$. Si $s \notin (a_{i-1}, a_{j-1}]$, tenim que $P_s = \{0\}$, i per tant $P_s \cap W_s = \{0\}$. Ara, si $s \in (a_{k-1}, a_k] \subset (a_{i-1}, a_{j-1}]$, hem de demostrar que l'element $(y^k)_s \notin W_s$. Suposem el contrari, és a dir, que $(y^k)_s \in W_s$. Considerem l'element $r = a_{i-1}$ que hem escollit anteriorment. Aleshores, per a tot $t \in \mathbb{R}$, tal que $r \leq a_{k-1} < t < s$, existeix un element $w_t \in W_t$ tal que $\pi_{t,s}(w_t) = (y^k)_s$. Considerem l'element $[w] \in W^k$ de forma que el seu representant en cada $W_t$ és:

$$([w])_t = \begin{cases} w_t \text{ si } a_{k-1} \leq t < s \\ (y^k)_s \text{ si } t = s \\ \pi_{s,t}((y^k)_s) \text{ si } s < t \leq a_k. \end{cases}$$

$[w]$ clarament està ben definit, per definició de l'espai $W^k$. A més a més, tenim que $[w] = y^k$, ja que els seus representants són els mateixos, i per tant $y^k \in W^k$, que contradiu la minimalitat de $j$. Per tant $(y^k)_s \notin W_s$, com volíem demostrar.

*Demostració de (b).* Com que $W_\sharp$ és suma directa de dos submòduls de V, és un submòdul de V. Anem a veure que és semi-exhaustiu: sigui $r = a_{i-1}$ com hem elegit anteriorment, tenim que per a tot $t \leq r$, $W_t = V_t$ i $P_t = \{0\}$, per tant $(W_\sharp)_t = V_t$. Ara, per a tots $t > s > r$, com que els morfismes $\pi^W_{s,t}$ i $\pi^P_{s,t}$ són exhaustius, les seves sumes directes $\pi^W_{s,t} \oplus \pi^P_{s,t}$ també són exhaustives, que són precisament els morfismes de persistència de $W_\sharp$.

Hem demostrat doncs el primer cas. Considerem doncs el cas (2):

Si $z^j \notin W^j$, per a tot $j > i$, construïm un submòdul P de V que correspondrà a l'interval $I = (a_{i-1}, +\infty)$ de la forma següent:

$$P_s = \begin{cases} 0 \text{ si } s \leq a_{i-1} \\ \langle (y^k)_s \rangle_{\mathbb{F}} \text{ si } s \in (a_{k-1}, a_k] \subseteq (a_{i-1}, +\infty), k = i, i+1, ...... \end{cases}$$

$$\pi^P_{s,t} = \begin{cases} \pi^V_{s,t} \text{ si } s, t \in (a_{i-1}, +\infty) \\ 0 \text{ altrament} \end{cases}$$

Clarament $P = P_s$ és un submòdul de V isomorf a $\mathbb{F}(a_{i-1}, +\infty)$.

Considerem de nou $W_\sharp = W + P$, i exactament com hem fet anteriorment demostrem que $W_\sharp = W \oplus P$, i a més és submòdul semi-exhaustiu de V. □

Ara, la existència de la descomposició en la forma normal és conseqüència del lema. Considerem $W(0) = \{0\}$, i inductivament construïm una successió finita de submòduls semi-exhaustius $\{W(n)\}_{n\geq 0}$, considerant $W(n+1) = W(n)_\sharp$. En cada pas incrementem la dimensió total de W(n), per tant, tenim que aquesta succesió convergeix a V quan arribem a la dimensió total de V.

Ara només queda demostrar la unicitat. Observem que és suficient demostrar que si $V \cong W$, amb $V = \bigoplus_{i=1}^N \mathbb{F}(I_i)$ i $W = \bigoplus_{j=1}^M \mathbb{F}(J_j)$, aleshores $N = M$, i existeix una permutació $\sigma$ del conjunt $\{1, ......, N\}$, tal que per a tot $i \in \{1, ......, N\}$, $I_i = J_{\sigma(i)}$.

Suposem doncs que V i W són de la forma que hem esmentat i $f : V \to W$ és un isomorfisme i $g : W \to V$ és la seva inversa. Farem la demostració per inducció sobre N, essent el cas $N = 0$ trivial. Suposem doncs el resultat cert per N-1. Volem demostrar que per a $I_1$, existeix un $j \in \{1, ......, M\}$ tal que $I_1 = J_j$. Per a tots $j \in \{1, ......, M\}$, considerem els següents morfismes:

$f_j : \mathbb{F}(I_1) \xrightarrow{\iota} V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{\rho_j} \mathbb{F}(J_j)$

$g_j : \mathbb{F}(J_j) \xrightarrow{\iota_j} W \xrightarrow{g} V \xrightarrow{\rho} \mathbb{F}(I_1)$

on $\iota$ i cada $\iota_j$ són els morfismes d'inclusió, i $\rho$ i cada $\rho_j$ són els morfismes de projecció. Tenim doncs que:

$$\sum_{j=1}^M g_j \circ f_j = Id_{\mathbb{F}(I_1)}.$$

*Demostració.* Sigui $v \in \mathbb{F}(I_1)$, i sigui $y = (f \circ \iota)(v) \in W$. Aleshores:

$$(\sum_{j=1}^M g_j \circ f_j)(v) = \sum_{j=1}^M g_j \circ \rho_j \circ f \circ \iota(v) = \sum_{j=1}^M g_j \circ \rho_j(y) = \sum_{j=1}^M \rho \circ g \circ \iota_j \circ \rho_j(y) =$$

$$= \rho \circ g \circ (\sum_{j=1}^M \iota_j \circ \rho_j)(y) = (\rho \circ g)(y) = (\rho \circ g \circ f \circ \iota)(v) = (\rho \circ \iota)(v) = v.$$

Per tant, tenim que existeix un j, tal que $g_j \circ f_j$ és diferent del zero, per tant $g_j$ i $f_j$ són morfismes diferent del zero. Si $I_1 = (a, b]$ i $J_j = (c, d]$, tenim un morfisme diferent del zero $f_j : \mathbb{F}(a, b] \to \mathbb{F}(c, d]$ i un altre $g_j : \mathbb{F}(c, d] \to \mathbb{F}(a, b]$. Això passa si i només si, $c \leq a$, $a < d \leq b$ i $a \leq c$, $c < b \leq d$, per tant $a = c$ i $b = d$. Hem vist doncs que $I_1 = J_j$. Considerem la permutació $\sigma_1 = (1, j)$ i obtenim que $\bigoplus_{i=2}^N \mathbb{F}(I_i) \cong \bigoplus_{j=2}^M \mathbb{F}(J_{\sigma(j)})$, per tant, per hipòtesi d'inducció, $N = M$, i existeix una permutació $\sigma_2$ del conjunt $\{2, ......, N\}$ tal que $I_i = J_{\sigma_2(i)}$, per a tot $i \in \{2, ......, N\}$. Tenim doncs que $N = M$, i considerant la permutació $\sigma = \sigma_2 \circ \sigma_1$ obtenim el resultat.$\square$

**Observació 3.10.** Observem doncs que hem demostrat que a tot mòdul de persistència $V$, li correspon un únic codi de barres, que denotarem per $\mathcal{B}(V)$.

La multiplicitat de cada interval en un codi de barres, simplement indica el nombre de vegades que apareix l'interval en el codi de barres, per tant, si tractem les còpies del mateix interval per separat, el codi de barres és de la forma $\mathcal{B} = \{I_i\}_{i=1}^{N}$, i li correspon al mòdul de persistència:

$$V \cong \bigoplus_{I \in \mathcal{B}} \mathbb{F}(I).$$

# 4 Distàncies

En aquesta secció definirem una distància en l'espai de mòduls de persistència, la distància entrelleçada, i una en l'espai de codis de barres, la distància del coll d'ampolla.

## 4.1 Distància Entrellaçada:

**Definició 4.1.** *Sigui $(V, \pi)$ un mòdul de persistència i $\delta \in \mathbb{R}$. Definim el mòdul de persistència $\delta$-desplaçat de $V$, com el parell $(V[\delta], \pi[\delta])$, on $V[\delta]$ és la família $\{V([\delta])_t = V_{t+\delta}\}_{t\in\mathbb{R}}$ i $\pi[\delta]$ és la família de morfismes $\{(\pi[\delta])_{s,t} = \pi_{s+\delta,t+\delta}\}$ definits per a tots $s \leq t$.*

**Definició 4.2.** *Per a $\delta > 0$, la família d'aplicacions $\Phi_V^\delta : (V, \pi) \to (V[\delta], \pi[\delta])$ definida per $(\Phi_V^\delta)_t := \pi_{t,t+\delta} : V_t \to V_{t+\delta}$ és un morfisme de mòduls de persistència. L'anomenarem morfisme de $\delta$-desplaçament de $V$.*

*Si tenim un morfisme $F : V \to W$ entre mòduls de persistència, denotarem per $F[\delta] : V[\delta] \to W[\delta]$ el morfisme corresponent entre els seus $\delta$-desplaçats.*

Observem que el morfisme de $\delta$-desplaçament està ben definit, ja que per la propietat de composició de les aplicacions lineals $\pi_{s,t}$, és evident que el diagrama següent és commutatiu:

$$\begin{tikzcd}
V_s \arrow[r, "\pi_{s,t}"] \arrow[d, "\Phi_s^\delta = \pi_{s,s+\delta}"'] & V_t \arrow[d, "\pi_{t,t+\delta} = \Phi_t^\delta"] \\
V_{s+\delta} \arrow[r, "\pi_{s+\delta,t+\delta}"'] & V_{t+\delta}
\end{tikzcd}$$

**Exemple 4.3.** Si considerem el mòdul de persistència intervàlic $V = \mathbb{F}(a, b]$ i un $\delta \in \mathbb{R}$, tenim que el seu $\delta$-desplaçat és $V[\delta] = \mathbb{F}(a - \delta, b - \delta]$, i en general si $V = \oplus_{i=1}^N \mathbb{F}(a_i, b_i]$, $V[\delta] = \oplus_{i=1}^N \mathbb{F}(a_i - \delta, b_i - \delta]$

*Demostració.* Si $V = \mathbb{F}(a, b]$, per a tot $s \in \mathbb{R}$, tenim el següent:

$$V[\delta]_s = V_{s+\delta} = \begin{cases} 0 \text{ si } s + \delta \notin (a, b] \\ \mathbb{F} \text{ si } s + \delta \in (a, b] \end{cases}$$

que és exactament igual a:

$$V[\delta]_s = V_{s+\delta} = \begin{cases} 0 \text{ si } s \notin (a - \delta, b - \delta] \\ \mathbb{F} \text{ si } s \in (a - \delta, b - \delta] \end{cases}$$

Per definició de suma de directa de mòduls de persistència és clar que $\oplus_{i=1}^N \mathbb{F}(a_i, b_i][\delta] = \oplus_{i=1}^N \mathbb{F}(a_i - \delta, b_i - \delta]$. ☐

**Definició 4.4.** *Donat un $\delta > 0$, i donats $(V, \pi)$ i $(W, \theta)$ dos mòduls de persistència, diem que estan $\delta$-entrelleçats, si existeixen dos morfismes $F : V \to W[\delta]$, i $G : W \to$*

*$V[\delta]$, tal que $F \circ G[\delta] = \Phi_V^{2\delta}$ i $G \circ F[\delta] = \Phi_W^{2\delta}$, on $\Phi_V^{2\delta}$ i $\Phi_W^{2\delta}$, són els morfismes de $2\delta$-desplaçament de V i de W respectivament. Aleshores, diem que F i G són els morfismes de $\delta$-entrellaçament.*

**Definició 4.5.** *Siguin $(V, \pi)$ i $(W, \theta)$ dos mòduls de persistència, definim la distància entrellaçada entre aquests mòduls de persistència com:*

$$d_{int}(V, W) = inf\{\delta > 0 \mid (V, \pi) \text{ i } (W, \theta) \text{ estan } \delta\text{-entrellaçats}\}.$$

**Proposició 4.6.** *Si $(V, \pi)$, $(V', \pi')$ són mòduls de persistència isomorfs i $(W, \theta)$, $(W', \theta')$ són mòduls de persistència isomorfs, aleshores donat un $\delta > 0$, $V$ i $W$ estan $\delta$-entrellaçats si i només si, $V'$ i $W'$ estan $\delta$-entrellaçats.*

*Demostració.* Siguin $f : V \to V'$, $g : W \to W'$ isomorfismes i $f^{-1} : V' \to V$, $g^{-1} : W' \to W$ els seus inversos. Suposem que V i W estan $\delta$-entrellaçats, és a dir, existeixen un parell de morfismes de $\delta$-entrellaçament $F : V \to W[\delta]$, $G : W \to V[\delta]$. Aleshores $g[\delta] \circ F \circ f^{-1}$:V'$\to W'[\delta]$, $f[\delta] \circ G \circ g^{-1} : W' \to V'[\delta]$ són un parell de morfismes de $\delta$-entrellaçament. Efectivament, tenim que:

$$(f[\delta] \circ G \circ g^{-1})[\delta] \circ g[\delta] \circ F \circ f^{-1} = f[2\delta] \circ G[\delta] \circ g^{-1}[\delta] \circ g[\delta] \circ F \circ f^{-1} =$$
$$= f[2\delta] \circ G[\delta] \circ F \circ f^{-1} = f[2\delta] \circ \Phi_V^{2\delta} \circ f^{-1}$$

$$(g[\delta] \circ F \circ f^{-1})[\delta] \circ f[\delta] \circ G \circ g^{-1} = g[2\delta] \circ f[\delta] \circ f^{-1}[\delta] \circ f[\delta] \circ G \circ g^{-1} =$$
$$= g[2\delta] \circ F[\delta] \circ G \circ g^{-1} = g[2\delta] \circ \Phi_W^{2\delta} \circ g^{-1}.$$

Ara, donat $s \in \mathbb{R}$, obtenim:

$$(f[2\delta] \circ \Phi_V^{2\delta} \circ f^{-1})_s = f_{s+2\delta} \circ \pi_{s,s+2\delta} \circ f_s^{-1} = \pi'_{s,s+2\delta} \circ f_s \circ f_s^{-1} = \pi'_{s,s+2\delta}$$

$$(g[2\delta] \circ \Phi_W^{2\delta} \circ g^{-1})_s = g_{s+2\delta} \circ \theta_{s,s+2\delta} \circ g_s^{-1} = \theta'_{s,s+2\delta} \circ g_s \circ g_s^{-1} = \theta'_{s,s+2\delta},$$

que és el que volíem veure. L'altre implicació és simètrica i es demostra exactament igual. □

## 4.2 Distància del Coll d'Ampolla:

Ara introduirem una distància en l'espai de codis de barres, que veurem que només estarà definida si els codis de barres tenen el mateix nombre d'intervals no acotats.

Donat un interval $I = (a, b]$ i un $\delta > 0$, denotem per $I^{-\delta} = (a - \delta, b + \delta]$, l'interval $I$ expandit per $\delta$ per la dreta i l'esquerra.

Donat un codi de barres $\mathcal{B}$ i un $\epsilon > 0$, denotarem per $\mathcal{B}_\epsilon$ el conjunt d'intervals de $\mathcal{B}$ amb longitud major que $\epsilon$.

**Definició 4.7.** *Un emparellament entre dos multi-conjunts finits $X = \{X_i\}_{i=1}^N$, $Y$=$\{ Y_j\}_{j=1}^M$ és una bijecció $\mu : X' \to Y'$, on $X' \subset X$ i $Y' \subset Y$. Denotarem per $coim\mu = X'$ i $im\mu = Y'$, i direm que els elements de $X'$ i $Y'$ estan emparellats.*

Cal destacar, que si un element apareix a un multiconjunt diverses vegades, en l'emparellament tractarem cada un d'ells per separat, per tant, és possible que algún d'ells estigui emparellat i algún altre no.

Degut a que els codis de barres són multi-conjunts finits, podem definir un emparellament entre dos codis de barres:

**Definició 4.8.** *Donat $\delta > 0$, un $\delta$-emparellament entre dos codis de barres $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ és un emparellament $\mu : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, tal que:*

1. $\mathcal{B}_{2\delta} \subset coim\mu$.
2. $\mathcal{C}_{2\delta} \subset im\mu$.
3. *Si* $\mu(I) = J$, *aleshores* $I \subset J^{-\delta}$ *i* $J \subset I^{-\delta}$.

Si existeix un $\delta$-emparellament entre dos codis de barres $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$, direm que $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ estan $\delta$-emparellats.

**Definició 4.9.** *Definim la distància del coll d'ampolla entre dos codis de barres $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ com:*

$$d_{bot}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = inf\{\delta > 0 \ |\mathcal{B} \text{ i } \mathcal{C} \text{ estan } \delta\text{-emparellats}\}.$$

**Proposició 4.10.** *Dos codis de barres $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ estan $\delta$-emparellats amb un $\delta > 0$ finit si i només si, tenen el mateix nombre d'intervals no acotats.*

*Demostració.* Anem a demostrar primer el recíproc. Per hipòtesi, tenim que:

$$\mathcal{B} = \{(a_1, b_1], ....., (a_n, b_n], (a_{n+1}, +\infty), ......, (a_{n+k}, +\infty)\}$$
$$\mathcal{C} = \{(c_1, d_1], ....., (c_m, d_m], (c_{m+1}, +\infty), ......, (c_{m+k}, +\infty)\}$$

amb $k \geq 0$, $n \geq 0$, $m \geq 0$, $b_i < +\infty$ per a tot $i \in \{1, ......, n\}$, i $d_j < +\infty$, per a tot $j \in \{1, ......, m\}$.

Hem de demostar que existeix un $\delta > 0$, tal que existeix un $\delta$-emparellament $\mu : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$. Considerem:

$\delta = max\{b_1 - a_1, ......, b_n - a_n, d_1 - c_1, ......, d_m - c_m, |a_{n+1} - c_{m+1}|, ......, |a_{n+k} - c_{m+k}|\}$.

Ara, tenim que l'emparellament $\mu : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ que emparella cada $(a_{n+i}, +\infty)$ amb $(c_{m+i}, +\infty)$, per a tot $i \in \{1, ......, k\}$, i per tant compleix que

$coim\mu = \{(a_{n+1}, +\infty), ......, (a_{n+k}, +\infty)\}$ i $im\mu = \{(c_{m+1}, +\infty), ......, (c_{m+k}, +\infty)\}$, és un $\delta$-emparellament entre $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$:

Clarament $\mathcal{B}_{2\delta} = coim\mu$, per tant trivialment tenim que $\mathcal{B}_{2\delta} \subseteq coim\mu$. Clarament $\mathcal{C}_{2\delta} = im\mu$, per tant també tenim que $\mathcal{C}_{2\delta} \subseteq im\mu$.

Falta veure que si $\mu(I) = J$, $I \subseteq J^{-\delta}$ i $J \subseteq I^{-\delta}$ . Per a tot $i \in \{1, ......, k\}$, $\mu((a_{n+i}, +\infty)) = (c_{m+i}, +\infty)$, i per tant hem de veure que $(a_{n+i}, +\infty) \subseteq (c_{m+i} - \delta, +\infty)$ i $(c_{m+i}, +\infty) \subseteq (a_{n+i} - \delta, +\infty)$. Ara, per a tot $i \in \{1, ......, k\}$, tenim que:

$$a_{n+i} - \delta \leq a_{n+i} - |a_{n+i} - c_{m+i}| \leq c_{m+i}$$

$$c_{m+i} - \delta \leq c_{m+i} - |a_{n+i} - c_{m+i}| \leq a_{n+i},$$

i per tant efectivament $(a_{n+i}, +\infty) \subseteq (c_{m+i} - \delta, +\infty)$ i $(c_{m+i}, +\infty) \subseteq (a_{n+i} - \delta, +\infty)$.

Demostrarem la implicació cap a la dreta pel contrarrecíproc. Suposem doncs que $B$ i $\mathcal{C}$ no tenen el mateix nombre d'intervals no acotats. Denotem per $\mathcal{B}' = \{(a_1, +\infty), ......, (a_{k_1}, +\infty)\}$ el conjunt de intervals no acotats de $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}' = \{(c_1, +\infty), ......, (c_{k_2}, +\infty)\}$ el conjunt de intervals de acotats de $\mathcal{C}$. Per hipòtesi $k_1 \neq k_2$. Suposem que existeix un $\delta \in \mathbb{R}$ positiu tal que existeix un $\delta$-emparellament $\mu : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$. Tenim doncs que $\mu$ ha de ser una bijecció entre $coim\mu$ i $im\mu$, i a més $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}_{2\delta} \subseteq coim\mu$ i $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}_{2\delta} \subseteq im\mu$.

Observem que no podem emparellar intervals no acotats amb intervals acotats, ja que no es compliria la propietat (3) de l'emparellament. Per tant cada interval de $\mathcal{B}'$ ha d'estar emparellat amb un de $\mathcal{C}'$, però això és impossible ja que tenen cardinal diferent. Per tant no existeix cap $\delta$-emparellament entre $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$. □

**Observació 4.11.** Observem que si $\mu : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ és un $\delta$-emparellament, aleshores també és un $\gamma$-emparellament per a tot $\gamma > \delta$. Aquest fet és degut a que $\mathcal{B}_\gamma \subseteq \mathcal{B}_\delta \subseteq coim\mu$, $\mathcal{C}_\gamma \subseteq \mathcal{C}_\delta \subseteq im\mu$, i si $\mu(I) = J$, $I \subseteq J^{-\delta} \subseteq J^{-\gamma}$ i $J \subseteq I^{-\delta} \subseteq I^{-\gamma}$. Per tant, podem deduir també que si no existeix un $\delta$-emparellament entre $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$, aleshores per a tot $\gamma < \delta$, tampoc existeix un $\gamma$-emparellament entre $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$. Per tant, $d_{bot}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = 0$ si i només si, $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ estan $\delta$-emparellats per a tot $\delta > 0$.

**Proposició 4.12.** *La distància del coll d'ampolla és una distància en l'espai de codis de barres amb el mateix nombre d'intervals no acotats.*

*Demostració.* (i) Si $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ són codis de barres amb el mateix nombre d'intervals no acotats, clarament $d_{bot}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \geq 0$.

(ii) Clarament $d_{bot}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = d_{bot}(\mathcal{C}, \mathcal{B})$, ja que un $\delta$-emparellament $\mu$ és un bijecció entre $coim\mu$ i $im\mu$, amb totes les propietats simètriques.
(iii) Ara hem de veure que $d_{bot}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = 0$ si i només si, $\mathcal{B} = \mathcal{C}$. Si $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, per a tot $\delta > 0$, tenim que $\mu : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, amb $coim\mu = im\mu = \mathcal{B}_{2\delta}$ i $\mu(I) = I$, per a tot $I \in coim\mu$ és clarament un $\delta$-emparellament entre $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$. Deduïm doncs, que $d_{bot}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = inf\{\delta > 0\} = 0$.

Siguin $\mathcal{B} = \{(a_1, b_1], ....., (a_n, b_n]\}$, $\mathcal{C} = \{(c_1, d_1], ....., (c_m, d_m]\}$, amb $d_{bot}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = 0$, és a dir, $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ estan $\delta$-emparellats per a tot $\delta > 0$. Observem que per aquest fet $\#\mathcal{B} = \#\mathcal{C}$, ja que per a $\delta^* = min\{\frac{1}{3}(b_1 - a_1), ......, \frac{1}{3}(b_n - a_n), \frac{1}{3}(d_1 - c_1), ......, \frac{1}{3}(d_m - c_m)\}$, $\mathcal{B}_{2\delta^*} = \mathcal{B}$ i $\mathcal{C}_{2\delta^*} = \mathcal{C}$, i per estar $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ $\delta^*$-emparellats, hi ha d'haver una bijecció entre els dos codis de barres. Per tant podem suposar que $n = m$.

Suposem ara que $\mathcal{B} \neq \mathcal{C}$, és a dir, per algún $i \in \{1, ......, n\}$ existeix un $I_i = (a_i, b_i] \in \mathcal{B}$, tal que $I_i \notin \mathcal{C}$, ja que tenen el mateix nombre d'elements.

Sigui $\delta$ =min$\{\delta^*, min_{j\in\{1,......,n\}}\{max\{\frac{1}{2}|a_i - c_j|, \frac{1}{2}|b_i - d_j|\}\}\}$. Pel que hem vist anteriorment, tenim que hi ha d'haver una bijecció entre $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$, i a més per algún $j \in \{1, ......, n\}$ ha d'existir $J_j = (c_j, d_j] \in \mathcal{C}$, tal que $I_i \subseteq J_j^{-\delta}$ i $J_j \subseteq I_i^{-\delta}$, és a dir:

$$c_j - \delta \leq a_i \leq c_j + \delta$$
$$d_j - \delta \leq bi \leq d_j + \delta.$$

Tenim dos casos possibles: Si $max\{|a_i - c_j|, |b_i - d_j|\} = |a_i - c_j|$, aleshores:

$$c_j + \delta < c_j + |a_i - c_j| = \begin{cases} a_i \text{ si } a_i > c_j \\ 2c_j - a \text{ si } c_j \geq a_i. \end{cases}$$

Si $c_j + \delta < a_i$, arribem a una contradicció, i si $c_j + \delta < 2c_j - a_i$, aleshores $a_i < c_j - \delta$ i tenim una altra contradicció.

Si $\max\{|a_i - c_j|, |b_i - d_j|\} = |b_i - d_j|$, anàlogament obtenim que o bé $d_j + \delta < b_i$ o bé $b_i < d_j - \delta$, i per tant tenim una contradicció

Per tant $\mathcal{B} = \mathcal{C}$.

(iv) Falta veure la desigualtat triangular. Per demostrar-la, veurem que donats tres codis de barres $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, si $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ estan $\delta$-emparellats i $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ estan $\gamma$-emparellats, aleshores $\mathcal{B}$ i $\mathcal{D}$ estan $(\delta + \gamma)$-emparellats:

Sigui $\mu_1 : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ un $\delta$-emparellament, i $\mu_2 : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un $\gamma$-emparellament, aleshores $\mu = \mu_2 \circ \mu_1 : \mathcal{B} \to \mathcal{D}$ és un $(\delta + \gamma)$-emparellament. Per demostrar-ho, hem de veure el següent:

(1) $\mathcal{B}_{2(\delta+\gamma)} \subseteq coim\mu$

(2) $\mathcal{D}_{2(\delta+\gamma)} \subseteq im\mu$

(3) si $\mu(I) = J$, aleshores $I \subseteq J^{-(\delta+\gamma)}$ i $J \subseteq I^{-(\delta+\gamma)}$.

Per veure (1), és suficient demostrar que si $I \in \mathcal{B}_{2(\delta+\gamma)}$, aleshores $\mu_1(I) \in coim\mu_2$. Si $I \in \mathcal{B}_{2(\delta+\gamma)} \subseteq B_{2\delta} \subseteq coim\mu_1$, tenim que existeix $J \in im\mu_1$, tal que $\mu_1(I) = J$, amb particularment $I \subseteq J{-}\delta$, per tant $J \in \mathcal{C}_{2\gamma} \subseteq coim\mu_2$. Per tant $J \in coim\mu_2$.

De forma semblant veiem que si $K \in \mathcal{D}_{2(\delta+\gamma)} \subseteq \mathcal{D}_{2\gamma} \subseteq im\mu_2$, aleshores existeix $J \in coim\mu_2$, amb particularment $K \subseteq J^{-\gamma}$, per tant $J \in \mathcal{C}_{2\delta} \subseteq im\mu_1$, i per tant existeix $I \in coim\mu$, tal que $\mu(I) = \mu_2 \circ \mu_1(I) = \mu_2(J) = K$, per tant $K \in im\mu$.

Falta veure (3). Si $\mu(I) = K$, aleshores $\mu(I) = \mu_2(\mu_1(I)) = \mu_2(J)$, amb $I \subseteq J^{-\delta}$ i $J \subseteq I^{-\delta}$. Ara, $\mu_2(J) = K$, amb $J \subseteq K^{-\gamma}$ i $K \subseteq J^{-\gamma}$, i per tant obtenim:

$$I \subseteq J^{-\delta} \subseteq K^{-(\delta+\gamma)}$$
$$K \subseteq J^{-\gamma} \subseteq I^{-(\delta+\gamma)}$$

Com volíem veure. □

**Proposició 4.13.** *Siguin $I = (a, b]$ i $J = (c, d]$ dos intervals $\delta$-emparellats. Aleshores els mòduls de persistència $\mathbb{F}(I)$ i $\mathbb{F}(J)$ estan $\delta$-entrellaçats.*

*Demostració.* Per estar $I$ i $J$ $\delta$-emparellats, tenen longitud major que $2\delta$, i per tant $(a, b] \cap (a - 2\delta, b - 2\delta] \neq \emptyset$, $(c, d] \cap (c - 2\delta, d - 2\delta] \neq \emptyset$, i clarament $a < b - 2\delta$, $c < d - 2\delta$. A més, tenim que $(a, b] \subset (c - \delta, d + \delta]$ i $(c, d] \subseteq (a - \delta, b + \delta]$, d'on deduïm:

$$c - \delta \leq a \leq c + \delta$$
$$d - \delta \leq b \leq d + \delta.$$

Tenim doncs, que $c-\delta \leq a$ i $a < b-2\delta \leq d-\delta \leq b$, i $a-\delta \leq c$ i $c < d-2\delta \leq b-\delta \leq d$, per tant podem definir els morfismes de $\delta$-entrellaçament $F = \{F_s : \mathbb{F}(I)_s \to \mathbb{F}(J-\delta)_s\}_{s\in\mathbb{R}}$, $G = \{G_s : \mathbb{F}(J)_s \to \mathbb{F}(I-\delta)_s\}_{s\in\mathbb{R}}$ següents:

$$F_s = \begin{cases} Id_{\mathbb{F}} \text{ si } s \in \mathrm{I} \cap (J-\delta) \\ 0 \text{ altrament.} \end{cases} \quad , \; G_s = \begin{cases} Id_{\mathbb{F}} \text{ si } s \in \mathrm{J} \cap (I-\delta) \\ 0 \text{ altrament.} \end{cases}$$

Clarament tenim que $\Phi^{2\delta}_{\mathbb{F}(I)} = G[\delta] \circ F$ i $\Phi^{2\delta}_{\mathbb{F}(J)} = F[\delta] \circ G$. □

# 5 Teorema d'Isometria

En aquesta secció demostrarem el teorema d'isometria, que ens afirma que la distància entrelleçada entre dos mòduls de persistència és exactament igual a la distància del coll d'ampolla entre els seus dos codis de barres associats.

## 5.1 Morfismes Injectius i Exhaustius

Per demostrar el teorema d'isometria, donat un morfisme entre mòduls de persistència, construirem un emparellament induït entre els codis de barres dels mòduls. La construcció d'aquest emparellament en cas de que el morfisme sigui injectiu o exhaustiu serà fonamental, i per aquesta raó volem veure quan es poden definir morfismes injectius o exhaustius entre dos mòduls de persistència, ja descomposats en la seva forma normal.

Considerem un morfisme $\Phi : \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{F}(I_i) \to \bigoplus_{j=1}^{m} \mathbb{F}(J_j)$. Donat un $s \in \mathbb{R}$, per ser $\Phi_s$ una aplicació lineal entre espais vectorials, tenim que $\Phi_s$ és una matriu mutiplicant per l'esquerra :

$$\Phi_s = \begin{pmatrix} \lambda_{1s}^{1} & \cdots & \lambda_{1s}^{n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{ms}^{1} & \cdots & \lambda_{ms}^{n} \end{pmatrix}$$

En particular, per definició de suma directa de mòduls de persistència, i pel que hem vist en l'apartat de morfismes entre mòduls de persistència intervàlics, per a tots $i \in \{1, ......, n\}$, $j \in \{1, ......, m\}$, $\lambda_{js}^{i}$ és un valor fixat $\lambda_j^i \in \mathbb{F}$ si $s \in I_i \cap J_j$, o bé $\lambda_{js}^{i} = 0$ altrament. A més, cada $\lambda_j^i$ defineix un morfisme $\lambda_j^i : \mathbb{F}(I_i) \to \mathbb{F}(J_j)$, i si $\lambda_j^i \neq 0$, aleshores, si denotem als intervals per $I_i = (a_i, b_i]$, $J_j = (c_j, d_j]$, per la *proposició 2.15*, tenim que $c_j \leq a_i$ i $a_i < d_j \leq b_j$. Per tant, si $c_j > a_i$, o $a_i \geq d_j$ o $d_j > b_j$, tenim que $\lambda_j^i = 0$.

**Proposició 5.1.** *Si existeix un morfisme injectiu* $\Phi : \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{F}(a_i, b_i] \to \bigoplus_{j=1}^{m} \mathbb{F}(c_j, d_j]$, *aleshores* $n \leq m$, *i existeix una permutació* $\sigma$ *del conjunt* $\{1,......,m\}$, *tal que per a tot* $i \in \{1, ......, n\}$, $a_i \geq c_{\sigma(i)}$ *i* $b_i = d_{\sigma(i)}$.

*Demostració.* Per a tots $i < j$ en $\{1, ......, n\}$, considerem les inclusions naturals $\iota_i : \mathbb{F}(a_i, b_i] \to \bigoplus_{k=1}^{n} \mathbb{F}(a_k, b_k]$, $\iota_{i,j} : \mathbb{F}(a_i, b_i] \oplus \mathbb{F}(a_j, b_j] \to \bigoplus_{k=1}^{n} \mathbb{F}(a_k, b_k]$. Considerem també les composicions $\Phi_i := \Phi \circ \iota_i$, $\Phi_{i,j} := \Phi \circ \iota_{i,j}$, que clarament són morfismes injectius, per ser composició de morfismes injectius.

Suposem primer que $n \geq 2$. Si demostrem que per a cada $(a_i, b_i]$, $(a_j, b_j]$, existeixen $k \neq l$ en $\{1, ......, m\}$, tal que $a_i \geq c_k$ i $b_i = d_k$, $a_j \geq c_l$ i $b_j = d_l$ demostrarem la proposició Per simplificar notació considerarem $i = 1$ i $j = 2$, ja que per $i < j$ arbitraris es demostra exactament igual.

Suposem el contrari. Aleshores, tenim dos casos:

(1) Existeix un $k \in \{1, ......, m\}$, tal que $a_1 \geq c_k$ i $b_1 = d_k$, $a_2 \geq c_k$ i $b_2 = d_k$, i a més per a tot $l \neq k$ en $\{1, ......, n\}$, $a_1 < c_l$ o $b_1 \neq d_l$, i $a_2 < c_l$ o $b_2 \neq d_l$.

(2) Per a tot $k \in \{1, ......, m\}$, $a_1 < c_k$ o $b_1 \neq d_k$, o bé $a_2 < c_k$ o $b_2 \neq d_k$.

Si suposem (1), tenim que $a_1 \geq c_k$, $a_2 \geq c_k$ i $b_1 = b_2 = d_k$. Per tant, el morfisme $\Phi_{1,2}$ és de la forma:

$$\Phi_{1,2s} = \begin{pmatrix} \lambda_{1s}^1 & \lambda_{1s}^2 \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_{ms}^1 & \lambda_{ms}^2 \end{pmatrix}$$

Pels $l \neq k$, tal que $a_1 < c_l$ o $b_1 < d_l$, tenim que $\lambda_{l\,s}^1 = 0$ per a tot $s \in \mathbb{R}$. Igualment, pels $l \neq k$, tal que $a_2 < c_l$ o $b_2 < d_l$, $\lambda_{l\,s}^2 = 0$,per a tot $s \in \mathbb{R}$. Sigui $L = \{l|\ d_l < d_k\}$ i $M = max_{l \in L}\{d_l\}$. Aleshores existeix un $\epsilon > 0$, tal que $M + \epsilon < d_k$ i a més $M + \epsilon > a_1$, $M + \epsilon > a_2$. Considerem $s = M + \epsilon$. Aleshores tenim que $s \in (a_1, b_1] \cap (a_2, b_2]$, per tant $\mathbb{F}(a_1, b_1]_s \oplus \mathbb{F}(a_2, b_2]_s = \mathbb{F} \oplus \mathbb{F}$, i a més si $l \in L, s \notin (c_l, d_l]$, i observem que:

$$\Phi_{1,2s} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ \lambda_k^1 & \lambda_k^2 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant $\Phi_{1,2s}$ no pot ser injectiva i arribem a una contradicció.

Suposem ara que (2) és cert. Observem que si demostrem que aquest cas no pot ser possible, també demostrem la proposició per $n = 1$. Suposem que per a tot $k \in \{1, ......, m\}$, $a_1 < c_k$ o $b_2 \neq d_k$(no cal considerar el cas per l'interval $(a_2, b_2]$ ja que es demostra igual). Per tant, el morfisme $\Phi_1$ és de la forma:

$$\Phi_{1s} = \begin{pmatrix} \lambda_{1s}^1 \\ \vdots \\ \lambda_{ms}^1 \end{pmatrix}$$

Pels k, tal que $a_1 < c_k$ o $b_1 < d_k$, tenim que $\lambda_{ks}^1 = 0$ per a tot $s \in \mathbb{R}$. Donat $s = b_1$, tenim que $\mathbb{F}(a_1, b_1]_s = \mathbb{F}$ i que $\Phi_{1_s}$ és el morfisme zero, per tant no pot ser un morfisme injectiu i arribem a una contradicció. □

**Proposició 5.2.** *Si existeix un morfisme exhaustiu* $\Phi : \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{F}(a_i, b_i] \to \bigoplus_{j=1}^m \mathbb{F}(c_j, d_j]$, *aleshores* $n \geq m$, *i existeix una permutació* $\sigma$ *del conjunt* $\{1,......,n\}$, *tal que per a tot* $i \in \{1, ......, m\}$, $a_{\sigma(i)} = c_i$ *i* $b_{\sigma(i)} \geq d_i$.

*Demostració.* Per a tots $i < j$ en $\{1, ......, m\}$, considerem les projeccions naturals $\rho_i : \bigoplus_{k=1}^m \mathbb{F}(c_k, d_k] \to \mathbb{F}(c_i, d_i]$, $\rho_{i,j} : \bigoplus_{k=1}^m \mathbb{F}(c_k, d_k] \to \mathbb{F}(c_i, d_i] \oplus \mathbb{F}(c_j, d_j]$. Considerem també les composicions $\Phi_i := \rho_i \circ \Phi$, $\Phi_{i,j} := \rho_{i,j} \circ \Phi$, que clarament són morfismes exhaustius, per ser composició de morfismes exhaustius.

Suposem primer que $m \geq 2$. Si demostrem que per a cada $(c_i, d_i]$, $(c_j, d_j]$, existeixen $k \neq l$ en $\{1, ......, n\}$, tal que $a_k = c_i$ i $b_k \geq d_i$, $a_l = c_j$ i $b_l \geq d_j$ demostrarem la proposició. Per simplificar notació considerarem $i = 1$ i $j = 2$, ja que per $i < j$ arbitraris es demostra exactament igual.

Suposem el contrari. Aleshores, tenim dos casos:

(1) Existeix un $k \in \{1, ......, n\}$, tal que $a_k = c_1$ i $b_k \geq d_1$, $a_k = c_2$ i $b_k \geq d_2$, i a més per a tot $l \neq k$ en $\{1, ......, n\}$, $a_l \neq c_1$ o $b_l < d_1$, i $a_l \neq c_1$ o $b_l < d_1$.

(2) Per a tot $k \in \{1, ......, n\}$, $a_k \neq c_1$ o $b_k < d_1$, o bé $a_k \neq c_2$ o $b_k < d_2$.

Si suposem (1), tenim que $a_k = c_1 = c_2$ i $b_k \geq d_1$, $b_k \geq d_2$. Per tant, el morfisme $\Phi_{1,2}$ és de la forma:

$$\Phi_{1,2s} = \begin{pmatrix} \lambda^1_{1s} & \cdots & \lambda^n_{1\,s} \\ \lambda^1_{2s} & \cdots & \lambda^n_{2\,s} \end{pmatrix}$$

Pels $l \neq k$, tal que $a_l < c_1$ o $b_l < d_1$, tenim que $\lambda^l_{1s} = 0$ per a tot $s \in \mathbb{R}$. Igualment, pels $l \neq k$, tal que $a_l < c_2$ o $b_l < d_2$, $\lambda^l_{2s} = 0$ per a tot $s \in \mathbb{R}$. Sigui $L = \{l | a_l > a_k\}$, i $s = min_{l \in L}\{a_l, d_1, d_2\}$. Aleshores tenim que $s \in (c_1, d_1] \cap (c_2, d_2]$, per tant $\mathbb{F}(c_1, d_1]_s \oplus \mathbb{F}(c_2, d_2]_s = \mathbb{F} \oplus \mathbb{F}$, i a més si $l \in L, s \notin (a_l, b_l]$, i observem que :

$$\Phi_{1,2s} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda^k_{1s} \, 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda^k_{2s} \, 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Per tant $\Phi_{1,2s}$ no pot ser exhaustiva i arribem a una contradicció.

Suposem ara que (2) és cert. Observem que si demostrem que aquest cas no pot ser possible, també demostrem la proposició per $m = 1$. Suposem que per a tot $k \in \{1, ......, n\}$, $a_k \neq c_1$ o $b_k < d_1$(no cal considerar l'altre cas ja que es demostra de la mateixa forma). Tenim que el morfisme $\Phi_1$ és de la forma:

$$\Phi_{1s} = \begin{pmatrix} \lambda^1_{1s} & \cdots & \lambda^n_{1\,s} \end{pmatrix}$$

Pels k, tal que $a_k < c_1$ o $b_k < d_1$, tenim que $\lambda^k_{1s} = 0$ per a tot $s \in \mathbb{R}$. Sigui $K = \{k| a_k > c_1\}$, i $s = min_{k \in K}\{a_k, d_1\}$. Aleshores tenim que $\mathbb{F}(c_1, d_1]_s = \mathbb{F}$, i que $\Phi_{1_s}$ és el morfisme zero, que contradiu l'exhaustivitat del morfisme. $\square$

**Teorema 5.3.** *(Teorema d'Isometria). Donats dos mòduls de persistència* $(V, \pi)$,$(W, \theta)$ *i els seus codis de barres associats* $B(V), \mathcal{B}(W)$*, tenim que* $d_{int}(V, W) = d_{bot}(\mathcal{B}(V), \mathcal{B}(W))$.

Com que hem vist que la distància entrellaçada es manté per isomorfismes, en la demostració d'aquest teorema, sempre considerarem els mòduls de persistència en forma normal:

$$V = \bigoplus_{I \in \mathcal{B}(V)} \mathbb{F}(I).$$

## 5.2 Demostració del Teorema d'Isometria

Per demostrar el teorema hem de demostrar les dues desigualtats:

$$(1)\ d_{int}(V, W) \leq d_{bot}(\mathcal{B}(V), \mathcal{B}(W))$$

$$(2)\ d_{bot}(\mathcal{B}(V), \mathcal{B}(W)) \leq d_{int}(V, W).$$

La primera desigualtat la demostrarem de forma directa seguidament, mentre que per demostrar la segona necessitem introduir alguns conceptes previs.

**Teorema 5.4.** *Siguin $V$ i $W$ dos mòduls de persistència. Si existeix un $\delta$-emparellament entre els seus codis de barres associats $\mathcal{B}(V)$ i $\mathcal{B}(W)$, aleshores $V$ i $W$ estan $\delta$-entrellaçats. Per tant, en particular $d_{int}(V, W) \leq d_{bot}(\mathcal{B}(V), \mathcal{B}(W))$.*

*Demostració.* Considerem

$$V = \bigoplus_{I \in \mathcal{B}(V)} \mathbb{F}(I) \text{ i } W = \bigoplus_{J \in \mathcal{B}(W)} \mathbb{F}(J).$$

Sigui $\mu : \mathcal{B}(V) \to \mathcal{B}(W)$ un $\delta$-emparellament. Considerem ara els següents submòduls de V i W:

$$V_Y = \bigoplus_{I \in coim \mu} F(I), V_N = \bigoplus_{I \in \mathcal{B}(V) \setminus coim \mu} F(I)$$

$$W_Y = \bigoplus_{J \in im \mu} F(J), V_N = \bigoplus_{J \in \mathcal{B}(W) \setminus im \mu} F(J)$$

Clarament tenim que $V = V_Y \oplus V_N$ i $W = W_Y \oplus W_N$. Ara, si $I \in coim\mu$ i $\mu(I) = J$, és a dir, que $I$ i $J$ estan $\delta$-emparellats, hem demostrat anteriorment $\mathbb{F}(I)$ i $\mathbb{F}(J)$ estan $\delta$-entrellaçats, per tant existeix un parell de morfismes de $\delta$-entrellaçament $f_I : \mathbb{F}(I) \to \mathbb{F}(J)[\delta]$ i $g_J : \mathbb{F}(J) \to \mathbb{F}(I)[\delta]$. Per tant, per a cada $I \in coim\mu$, amb $\mu(I) = J \in im\mu$, existeix un parell de morfismes de $\delta$-entrellaçament , i considerant la suma directa d'aquests morfismes obtenim un parell de morfismes de $\delta$-entrellaçament:

$$f_Y := \bigoplus_{I \in coim \mu} f_I : V_Y \to W_Y[\delta]$$

$$g_Y := \bigoplus_{J \in im \mu} g_J : W_Y \to V_Y[\delta]$$

Ara, tots el intervals $I \in \mathcal{B}(V) \setminus coim\mu$ i $J \in \mathcal{B}(W) \setminus im\mu$ tenen longitud menor que $2\delta$, per tant, tenim que $I \cap (I - 2\delta) = \emptyset$, $J \cap (J - 2\delta) = \emptyset$, per tant els morfismes de $2\delta$-desplaçament $\Phi^{2\delta}_{\mathbb{F}(I)} : \mathbb{F}(I) \to \mathbb{F}(I - 2\delta)$, $\Phi^{2\delta}_{\mathbb{F}(J)} : \mathbb{F}(J) \to \mathbb{F}(J - 2\delta)$ han de ser 0, i deduïm que el morfisme $\Phi^{2\delta}_{V_N} : V_N \to V_N[2\delta]$ ha de ser 0. Podem considerar doncs, el parell de morfismes de $\delta$-entrellaçament entre $V$ i $W$ següents:

$$f : V \to W[\delta], \text{ amb } f_{|V_Y} = f_Y, \text{ i } f_{|V_N} = 0$$
$$g : W \to V[\delta], \text{ amb } g_{|W_Y} = g_Y, \text{ i } g_{|W_N} = 0.$$

Per tant, tenim que $V$ i $W$ estan $\delta$-entrallaçats. □

Donat un morfisme entre mòduls de persistència, volem construir un emparellament entre els seus codis de barres associats, que s'anomenarà emparellament induït. El construirem en cas de que el morfisme sigui injectiu o exhaustiu, i després a partir d'aquests construirem un de general.

### 5.2.1 Emparellaments Induïts

**Definició 5.5.** *Suposem que existeix un morfisme injectiu $\iota : V \to W$. Definim l'emparellament induït $\mu_{inj} : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, de la forma següent: per a tot $d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, ordenem els intervals de $\mathcal{B}$ de la forma $(\cdot, d]$ de més llarg a més curt, és a dir:*

$$(1)\ (b_1, d] \supset (b_2, d] \supset ...... \supset (b_k, d] \ \textit{en}\ \mathcal{B},\ \textit{amb}\ b_1 \leq b_2 \leq ...... \leq b_k,$$

*i anàlogament per C:*

$$(2)\ (c_1, d] \supset (c_2, d] \supset ...... \supset (c_l, d] \ \textit{en}\ \mathcal{C},\ \textit{amb}\ c_1 \leq c_2 \leq ...... \leq c_l,$$

*Per la proposició 5.1, tenim que $k \leq l$. Ara, emparellem els intervals de (1) amb intervals de (2) segons la seva longitud, és a dir, comencem pels més llargs de (1) i els emparellem amb els més llargs de (2). Creem doncs el següent emparellament:*

$$\mu_{inj}((b_1, d]) = (c_1, d],\ \mu_{inj}((b_2, d]) = (c_2, d],\ ......,\ \mu_{inj}((b_k, d]) = (c_k, d]$$

Fent el procés per a tot $d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ obtenim un emparellament $\mu_{inj} : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$.

**Observació 5.6.** Observem que $\mu_{inj}$ compleix:

(1) $coim\mu_{inj} = \mathcal{B}$.

(2) Per a tot $(b, d] \in \mathcal{B}$, $\mu_{inj}((b, d]) = (c, d]$ amb $c \leq b$.

*Demostració.* veiem que (1) és evident, ja que hem vist que emparellem tots els intervals de la forma $(\cdot, d]$ de $\mathcal{B}$, per a tot d$\in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, per tant emparellem tots els intervals de $\mathcal{B}$. Per construcció de $\mu_{inj}$, és evident que $\mu_{inj}((b, d]) = (c, d]$, i que $c \leq b$ és conseqüència de la *proposició 5.1.* $\square$

Observem que la construcció de $\mu_{inj}$ no depèn del morfisme injectiu $\iota : V \to W$, sinó que simplement depèn del fet que existeixi un morfisme injectiu de $V$ a $W$.

**Definició 5.7.** *Suposem que existeix un morfisme exhaustiu $\sigma : V \to W$. Aleshores podem definir l'emparellament induït $\mu_{exh} : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ de la forma següent. Per a tot $b \in \mathbb{R}$, ordenem els intervals de la forma $(b, \cdot] \in \mathcal{B}$ de més gran a més petit:*

$$(b, d_1] \supset (b, d_2] \supset ...... \supset (b, d_k] \ \textit{en}\ \mathcal{B}\ \textit{amb}\ d_1 \geq d_2 \geq ...... \geq d_k,$$

*i anàlogament per C:*

$$(b, e_1] \supset (b, e_2] \supset ...... \supset (b, e_l] \ \textit{en}\ \mathcal{C}\ \textit{amb}\ e_1 \geq e_2 \geq ...... \geq e_l.$$

*Per la proposició 5.2, $k \geq l$. Aleshores, exactament com hem fet amb $\mu_{inj}$, emparellem els primers $l$ intervals de (1) més llargs amb els intervals de (2), els més llargs amb els més llargs, i els més curts amb els més curts:*

$$\mu_{exh}((b, d_1]) = (b, e_1],\ \mu_{inj}((b, d_2]) = (b, e_2],\ ......,\ \mu_{inj}((b, d_l]) = (b, e_l]$$

**Observació 5.8.** Fent el procés per a tot $b \in \mathbb{R}$ obtenim un emparellament $\mu_{exh} : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, que compleix:

(1) $im\mu_{exh} = \mathcal{C}$.

(2) Per a tot $(b, d] \in \mathcal{B}$, $\mu_{exh}((b, d]) = (b, e]$ amb $e \leq d$.

*Demostració.* Veiem que (1) és evident, ja que hem vist que emparellem tots els intervals de la forma $(b, \cdot]$ de $\mathcal{C}$, per a tot $b \in \mathbb{R}$, per tant emparellem tots els intervals de $\mathcal{C}$. Per construcció de $\mu_{exh}$, és evident que $\mu_{inj}((b, d]) = (b, e]$, i que $e \leq d$ és conseqüència de la *proposició 5.2.* □

Exactament com passa amb $\mu_{inj}$, observem que la construcció de $\mu_{exh}$ no depèn del morfisme exhaustiu $\sigma : V \to W$, sinó que simplement depèn del fet que existeixi un morfisme exhaustiu de $V$ a $W$.

Ara, considerem un morfisme qualsevol $f : V \to W$. Podem considerar doncs la següent composició:

$$f : V \xrightarrow{\hat{f}} Imf \xrightarrow{\iota} W, \text{ tal que } f = i \circ \hat{f}, \text{ on } \iota : imf \to W \text{ és la inclusió natural.}$$

Observem que $\hat{f}$ és exhaustiva i que la inclusió $\iota : Imf \to W$ és injectiva, per tant, pel que hem vist anteriorment, tenim dos emparellaments induïts:

$$\mu_{exh} : \mathcal{B}(V) \to \mathcal{B}(imf)$$
$$\mu_{inj} : \mathcal{B}(imf) \to \mathcal{B}(W).$$

**Definició 5.9.** *Siguin $V$ i $W$ dos mòduls de persistència. Per a un morfisme qualsevol $f : V \to W$, definim l'emparellament induït $\mu(f) : \mathcal{B}(V) \to \mathcal{B}(W)$ com:*

$$\mu(f) := \mu_{inj} \circ \mu_{exh}$$

*i per tant tenim que $im\mu_{exh} = \mathcal{B}(Imf) = coim\mu_{inj}$.*

Observem que en el cas de que $f : V \to W$ sigui injectiva o exhaustiva, $\mu(f)$ coincideix amb $\mu_{inj}$ o $\mu_{exh}$ respectivament.

**Notació.** Hem vist que els emparellaments induïts $\mu_{inj}$ i $\mu_{exh}$ no depenen de cap morfisme, sinó de l'existència d'un morfisme injectiu o exhaustiu respectivament. Però en algunes ocasions els denotarem com $\mu_{inj}(f)$ o $\mu_{ehx}(f)$ respectivament, on $f$ és un morfisme injectiu o exhaustiu, simplement per aclarar entre quins mòduls de persistència fem l'emparellament.

Considerem la categoria dels mòduls de persistència, la categoria dels codis de barres, que té com a objectes els codis de barres i morfismes els emparellaments entre els codis de barres, i l'aplicació $V \mapsto \mathcal{B}(V)$. Per a un morfisme $f : V \to W$, tenim un emparellament induït $\mu(f) : \mathcal{B}(V) \to \mathcal{B}(W)$. Per tant podria ser que tinguéssim un functor entre les categories. En general no tenim la functorialitat. Aquí en tenim un contraexemple:

**Exemple 5.10.** Sigui $I = (a, b]$ un interval, i considerem els mòduls de persistència $V = \mathbb{F}(I) \oplus \mathbb{F}(I)$, $W = \mathbb{F}(I)$. Considerem els morfismes $f : V \to V$ i $g : V \to W$, definits per a tot $s \in \mathbb{R}$, com:

$$f_s = \begin{pmatrix} 1_{\mathbb{F}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, g_s = \begin{pmatrix} 0 & 1_{\mathbb{F}} \end{pmatrix}.$$

Tenim que $\mu(f)$ emparella una còpia de l'interval $I$ de $\mathcal{B}(V)$ amb el mateix $I$, però la segona no. $\mu(g)$ també emparella una còpia de $I$ amb el mateix $I$, per tant $\mu(g) \circ \mu(f)$ emparella una còpia de $I$ de $\mathcal{B}(V)$ amb l'interval $I$ de $\mathcal{B}(W)$. D'altra banda és evident que $g \circ f = 0$, per tant $\mu(g \circ f)$ és un emparellament buit. Per tant no tenim functorialitat.

**Observació 5.11.** Ara, si considerem la categoria dels mòduls de persistència on els morfismes son solament injectius o solament exhaustius, aleshores $V \mapsto \mathcal{B}(V)$ sí que admet un functor.

*Demostració.* Si tenim el morfisme identitat $Id : V \to V$, és evident que l'emparellament induït $\mu(Id) = Id_{\mathcal{B}(V)}$. Ara considerem el cas en que f i g siguin morfismes exhaustius:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & V \arrow[r, "g"] & W \end{tikzcd}$$

Volem veure que el diagrama següent és commutatiu:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}(U) \arrow[r, "\mu_{exh}(f)"] \arrow[rr, bend right, "\mu_{exh}(h)"'] & \mathcal{B}(V) \arrow[r, "\mu_{exh}(g)"] & \mathcal{B}(W) \end{tikzcd}$$

Per a tot $b \in \mathbb{R}$, tenim que els codis de barres associats a $U, V, W$ tenen els següents intervals que comencen per $b$:

$$\mathcal{B}(U) : (b, d_1] \supseteq ...... \supseteq (b, d_q]...... \supseteq (b, d_l] \supseteq ...... \supseteq (b, d_k]$$
$$\mathcal{B}(V) : (b, e_1] \supseteq ...... \supseteq (b, e_q] \supseteq ...... \supseteq (b, e_l]$$
$$\mathcal{B}(W) : (b, f_1] \supseteq ...... \supseteq (b, f_q]$$

Per tant, $\mu_{exh}(f)(b, d_i] = (b, e_i]$, per a tot $i \in \{1, ......, l\}$, i $\mu_{exh}(g)(b, e_i] = (b, f_i]$ per a tot $i \in \{1, ......, k\}$. Per tant $\mu_{exh}(g) \circ \mu_{exh}(f)(b, d_i] = (b, f_i]$ per a tot $i \in \{1, ......, k\}$, i clarament $\mu_{exh}(h)(b, d_i] = (b, f_i]$.

Considerem ara el cas en que f i g siguin morfismes injectius:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & V \arrow[r, "g"] & W \end{tikzcd}$$

Volem veure que el diagrama següent és commutatiu:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}(U) \arrow[r, "\mu_{inj}(f)"] \arrow[rr, bend right, "\mu_{inj}(h)"'] & \mathcal{B}(V) \arrow[r, "\mu_{inj}(g)"] & \mathcal{B}(W) \end{tikzcd}$$

Per a tot $d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, tenim que els codis de barres associats a $U, V, W$ tenen els següents intervals que acaben per $d$:

$$\mathcal{B}(U) : (a_1, d] \supseteq ...... \supseteq (a_k, d]$$
$$\mathcal{B}(V) : (b_1, d] \supseteq ...... \supseteq (b_k, d] \supseteq ...... \supseteq (b_q, d]$$
$$\mathcal{B}(W) : (c_1, d] \supseteq ...... \supseteq (c_k, d] \supseteq ...... \subseteq (c_q, d] \subseteq ......(c_l, d]$$

Per tant, $\mu_{inj}(f)(a_i, d] = (b_i, d]$, per a tot $i \in \{1, ......, k\}$, i $\mu_{exh}(g)(b_i, d] = (c_i, d]$ per a tot $i \in \{1, ......, q\}$. Per tant $\mu_{inj}(g) \circ \mu_{inj}(f)(a_i, d] = (c_i, d]$ per a tot $i \in \{1, ......, k\}$, i clarament $\mu_{inj}(h)(a_i, d] = (c_i, d]$. $\square$

Per demostrar el teorema d'isometria només fan falta dos lemes, que ens donen informació de $\mu_{exh}$ i $\mu_{inj}$ en el cas que $V$ i $W$ estiguin $\delta$-entrellaçats.

**Lema 5.12.** *Suposem que $V$ i $W$ estan $\delta$-entrellaçats, amb morfismes de $\delta$-entrellaçament $f : V \to W[\delta]$ i $g : W \to V[\delta]$. Considerem ara el morfisme exhaustiu $\hat{f} : V \to im(f)$, que compleix $f = \iota \circ \hat{f}$, on $\iota : imf \to W$ és la inclusió natural. Considerem també $\mu_{exh} : \mathcal{B}(V) \to \mathcal{B}(imf)$. Aleshores es compleix:*

(1) *$coim\mu_{exh} \supseteq \mathcal{B}(V)_{2\delta}$*

(2) *$im\mu_{exh} = \mathcal{B}(imf)$*

(3) *si $(b, d] \in coim\mu_{exh}$, aleshores $\mu_{exh}((b, d]) = (b, d']$, amb $d' \in [d - 2\delta, d]$.*

*Demostració.* (1) Per definició dels morfismes d'entrellaçament $f$ i $g$, tenim el següent diagrama commutatiu:

$$\text{(a)}\ \begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "\Phi_V^{2\delta}"'] & imf \arrow[r, "g[\delta]"] & im\Phi_V^{2\delta}. \end{tikzcd}$$

A més a més, les tres aplicacions són exhaustives en les seves imatges, ja que $f$ i $\Phi_V^{2\delta}$ ho són, i per tant, per la commutivitat del diagrama, $g[\delta]$ restringida a $imf$ també és exhaustiva en $im\Phi_V^{2\delta}$. Per la functorialitat de $\mu(f \circ g[\delta])$, tenim que el següent diagrama és commutatiu:

$$\text{(b)}\ \begin{tikzcd} \mathcal{B}(V) \arrow[r, "\mu_{exh}(f)"] \arrow[rr, bend right, "\mu_{ehx}(\Phi_V^{2\delta})"'] & \mathcal{B}(imf) \arrow[r, "\mu_{exh}(g[\delta])"] & \mathcal{B}(im\Phi_V^{2\delta}). \end{tikzcd}$$

Com que $\Phi_V^{2\delta} = \bigoplus_{I \in \mathcal{B}(V)} \Phi_{\mathbb{F}(I)}^{2\delta} : \mathbb{F}(I) \to \mathbb{F}(I - 2\delta)$, tenim que $im(\Phi_V^{2\delta}) = \bigoplus_{I \in \mathcal{B}(V)} \mathbb{F}(I \cap (I - 2\delta))$, per tant, si la longitud de I és $\leq 2\delta$, aleshores $I \notin \mathcal{B}(im\Phi_V^{2\delta})$. Observem que $\mathcal{B}(im\Phi_V^{2\delta}) = \{(b, d-2\delta] \mid (b,d] \in \mathcal{B}(V), d-b > 2\delta\}$. Tenim doncs, que per a tot $(b,d] \in \mathcal{B}(V)_{2\delta}$, $\mu_{exh}((b,d]) = (b, d-2\delta]$, i per tant $coim\mu_{exh}(\Phi_V^{2\delta}) = \mathcal{B}(V)_{2\delta}$. Per tant, deduïm que $coim\mu_{exh}(f) \supseteq coim\mu_{exh}(\Phi_V^{2\delta}) = \mathcal{B}(V)_{2\delta}$.

(2) Ja ho hem demostrat a l'*observació 5.8.*

(3) Sigui $(b,d] \in coim\mu_{exh}$, i cosiderem $\mu_{exh}((b,d])$. Tenim dos casos possibles:

(i) Si $d-b > 2\delta$, aleshores $\mu_{exh}(f)((b,d]) = (b,d']$, on $d' \leq d$. A més a més, tenim que $\mu_{exh}(g[\delta])((b,d']) = (b,d'']$, amb $d'' \leq d'$. Per la commutivitat del diagrama (b), sabem que $(b,d''] = (b, d-2\delta]$. Per tant $d'' = d-2\delta$, i deduïm que $d-2\delta \leq d' \leq d$, i per tant $d' \in [d-2\delta, d]$.

(ii) si $d-b \leq 2\delta$, tenim que $\mu_{exh}(f)((b,d]) = (b,d']$, amb $d \geq d'$, i a més $d' > b \geq d-2\delta$, per tant $d' \in [d-2\delta, d]$. □

**Lema 5.13.** *Suposem que $V$ i $W$ estan $\delta$-entrellaçats, amb morfismes de $\delta$-entrellaçament $f: V \to W[\delta]$ i $g: W \to V[\delta]$. Considerem ara la inclusió natural $\iota: imf \to W$. Considerem també $\mu_{inj}: \mathcal{B}(imf) \to \mathcal{B}(W)$. Aleshores es compleix:*

(1) $coim\mu_{inj} = \mathcal{B}(imf)$

(2) $im\mu_{inj} \supseteq \mathcal{B}(W[\delta])_{2\delta}$

(3) *si $(b,d] \in coim\mu_{inj}$, aleshores $\mu_{inj}((b,d]) = (b',d]$, amb $b' \in [b-2\delta, b]$.*

*Demostració.* (1) Ja ho hem demostrat a l'*observació 5.6.*

(2) Per definició dels morfismes d'entrellaçament $f$ i $g$, tenim el següent diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "\Phi_W^{2\delta}"'] & im\text{ g} \arrow[r, "f[\delta]"] & W[2\delta]. \end{tikzcd}$$

Per tant, $im\Phi_W^{2\delta} \subseteq imf[\delta] \subseteq W[2\delta]$. Considerant les inclusions naturals $i: im\Phi_W^{2\delta} \to imf[\delta]$, $j: imf[\delta] \to W[2\delta]$, tenim el següent diagrama commutatiu:

$$\text{(a)}\ \begin{tikzcd} im\Phi_W^{2\delta} \arrow[r, "j"] \arrow[rr, bend right, "\Phi_W^{2\delta}"'] & imf[\delta] \arrow[r, "i"] & W[2\delta]. \end{tikzcd}$$

Ara, per ser $i$,$j$ morfismes injectius, i per functorialitat de $\mu(j \circ i)$, tenim que el següent diagrama és commutatiu:

$$\text{(b)}\ \begin{tikzcd} \mathcal{B}(im\Phi_W^{2\delta}) \arrow[r, "\mu_{inj}(j)"] \arrow[rr, bend right, "\mu_{inj}(\Phi_W^{2\delta})"'] & \mathcal{B}(imf[\delta]) \arrow[r, "\mu_{inj}(i)"] & \mathcal{B}(W[2\delta]). \end{tikzcd}$$

Pel que hem vist al lema anterior i per definició de $W[2\delta]$:

$$B(im\Phi_W^{2\delta}) = \{(b, d-2\delta] \mid (b,d] \in \mathcal{B}(W), d-b > 2\delta\}$$
$$\mathcal{B}(W[2\delta]) = \{(b-2\delta, d-2\delta] \mid (b,d] \in \mathcal{B}(W)\}.$$

Per definició de $\mu_{inj}$, $\mu_{inj}(\Phi_W^{2\delta})((b,d-2\delta]) = (b-2\delta, d-2\delta]$. A més a més, per la commutivitat del diagrama (b), $im\mu_{inj}(i) \supseteq im\mu_{inj}(\Phi_W^{2\delta}) = \mathcal{B}(W[2\delta])_{2\delta}$. Per tant, és clar que $im\mu_{inj}(i) \supseteq \mathcal{B}(W[\delta])_{2\delta}$.

(3) Donat $(b,d] \in \mathcal{B}(imf[\delta])$, tenim que $\mu_{inj}(b,d] = (a,d] \in \mathcal{B}(W)$, amb $a \leq b$. Tenim dos casos possibes:

(i) si $d-b > 2\delta$, aleshores existeix un interval $(a+2\delta, d] \in \mathcal{B}(im\Phi_W^{2\delta})$, tal que $\mu_{inj}(\Phi_W^{2\delta})((a+2\delta,d]) = \mu_{inj}(i)((b,d]) = (a,d]$, per tant $b \leq a+2\delta$, i deduïm que $b-2\delta \leq a \leq b$.

(ii) si $d-b \leq 2\delta$, aleshores $a \geq d-2\delta > b-2\delta$, per tant $a \in [b-2\delta, b]$. □

**Teorema 5.14.** *Siguin $V$ i $W$ dos mòduls de persistència. Si $V$ i $W$ estan $\delta$-entrellaçats, aleshores els seus codis de barres associats $\mathcal{B}(V)$ i $\mathcal{B}(W)$ estan $\delta$-emparellats. Per tant, $d_{bot}(\mathcal{B}(V), \mathcal{B}(W)) \leq d_{int}(V,W)$.*

*Demostració.* Siguin $f : V \to W[\delta]$ i $g : W \to V[\delta]$ els morfismes d'entrellaçament. Considerem l'emparellament induït $\mu(f) = \mu_{inj} \circ \mu_{exh}$. Sigui $\Psi_\delta : \mathcal{B}(W[\delta]) \to \mathcal{B}(W)$ l'aplicació que envia cada $(a,b] \in \mathcal{B}(W[\delta])$ a $(a+\delta, b+\delta]$. Volem veure que $\Psi_{delta} \circ \mu(f)$ és un $\delta$-emparellament entre $\mathcal{B}(V)$ i $\mathcal{B}(W)$. Utilitzant els dos lemes anteriors tenim el següent diagrama:

$$coim\mu_{exh} \xrightarrow{\mu_{exh}} \mathcal{B}(imf) \xrightarrow{\mu_{inj}} im\mu_{inj} \xrightarrow{\Psi_\delta} \mathcal{B}(W).$$

Ara, donat un interval $(b,d] \in coim\mu_{exh}$, tenim que $\mu_{exh}((b,d]) = (b,d'] \in \mathcal{B}(imf)$, amb $d' \in [d-2\delta, d]$. Seguidament, veiem que $\mu_{inj}(b,d'] = (b',d'] \in \mathcal{B}(W[\delta])_{2\delta}$, amb $b' \in [b-2\delta, b]$. I finalment, tenim que $\Phi_\delta((b',d']) = (b'+\delta, d'+\delta]$. Com que $\mathcal{B}(V) \subseteq coim\mu_{exh}$, és evident que tot interval de $\mathcal{B}(V)_{2\delta}$ està emparellat amb un de $\mathcal{B}(W)$. Ara, com que $\mathcal{B}(W[\delta])_{2\delta} \subseteq im\mu_{inj}$, també és evident que tot interval de $\mathcal{B}(W)_{2\delta}$ queda emparellat.

Finalment, com que $d-2\delta \leq d' \leq d$ i $b-2\delta \leq b'$, sumant $\delta$ a les desigualtats, obtenim $d-\delta \leq d'+\delta \leq d+\delta$ i $b-\delta \leq b'+\delta \leq b+\delta$, i per tant, obtenim que $(b'+\delta, d'+\delta] \subseteq (b,d]^{-\delta}$ i $(b,d] \subseteq (b', d'+2\delta] = (b'+\delta, d'+\delta]^{-\delta}$.

Per tant deduïm que $\Psi_\delta \circ \mu(f)$ és un $\delta$-emparellament entre $B(V)$ i $\mathcal{B}(W)$, i tenim la desigualtat que voliem:

$$d_{bot}(\mathcal{B}(V), \mathcal{B}(W)) \leq d_{int}(V,W).$$

□

**Observació 5.15.** En particular, hem vist que dos mòduls de persistència $V$ i $W$ estan $\delta$-entrellaçats si i només si, els seus codis de barres associats $\mathcal{B}(V)$ i $\mathcal{B}(W)$ estan $\delta$-emparellats. Tenim que $dim(V_\infty) = dim(W_\infty)$ si i només si, $\mathcal{B}(V)$ i $\mathcal{B}(W)$ tenen el mateix nombre d'intervals no acotats . Deduïm doncs, que la distància entrellaçada és una distància en l'espai de mòduls de persistència amb la mateixa dimensió de l'espai terminal.

# 6 Mòduls de Persistència de Morse

En aquesta secció definirem els mòduls de persistència de Morse per veure amb quina precisió una funció $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ alçada definida en l'esfera en forma de cor, pot ser aproximada per una una funció de Morse $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ amb exactament dos punts crítics, que són el màxim i mínim de les dues funcions. Per començar, introduirem uns quants conceptes de geometria diferencial, i posteriorment la homologia de Morse. Cal destacar que no farem gaires demostracions de geometria diferencial, i tindrem com a refererències principalment [8, 11, 6]. També introduirem alguns conceptes bàsics de la homologia singular d'un espai topològic.

## 6.1 Funcions de Morse

Sigui $M$ una varietat diferenciable compacta de dimensió $n$ i $f : M \to \mathbb{R}$ una funció diferenciable . Donat $p \in M$, considerem l'espai tangent $T_pM$. Considerem també la diferencial de $f$ en $p$, $Df(p) : T_pM \to \mathbb{R}$. Si $x_1, ......, x_n$ són coordenades locals al voltant de p, aleshores:

$$Df(p) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \quad \cdots \quad , \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right).$$

**Definició 6.1.** *Diem que $p \in M$ és un punt crític de $f$ si $Df(p) = 0$. Denotem per $Crit(f)$, el conjunt de punts crítics de $f$.*

Si $p$ és un punt crític, i $x_1, ......, x_n$ són coordenades locals al voltant de p, tenim que la matriu Hessiana de $f$ en $p$ en aquestes coordenades és la matriu simètrica:

$$H_f(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(p) \end{pmatrix}$$

Com que la matriu Hessiana és simètrica, té valors propis reals. Diem que un punt crític $p$ és no degenerat si $H_f(p)$ no té valors propis igual a zero.

**Definició 6.2.** *Definim l'índex de Morse d'un punt crític no degenerat com el nombre de valors propis negatius de la matriu $H_f(p)$. El denotarem per $ind(p)$. Denotarem també per $Crit_i(f)$ el conjunt de punts crítics amb índex i de $f$. Per ser $M$ compacta, $Crit_i(f)$ és un conjunt finit.*

**Definició 6.3.** *Una funció diferenciable, $f : M \to \mathbb{R}$ és de Morse si tot punt crític de $f$ és no degenerat.*

**Exemple 6.4.** Sigui $S \subset \mathbb{R}^3$ una superfície regular. Es pot demostrar, que pertorbant $S$ si és necessari, la funció alçada $f(x, y, z) = z$ defineix una funció de Morse en $S$. Els punts crítics d'índex 2 seran màxims locals, els d'índex 1 punts de sella i els d'índex 0 mínims locals. Per exemple, la esfera unitat $\mathbb{S}^2$, té dos punts crítics, que a més són no degenerats. El pol nord $PN = (0, 0, 1)$ que és un màxim d'índex 2, i el pol sud $PS = (0, 0, 1)$, que és un mínim, amb índex 0.

## 6.2 El Flux del Gradient

**Definició 6.5.** *Sigui $M \subset \mathbb{R}^n$ una varietat diferenciable de dimensió n. Un camp vectorial diferenciable en $M$ és una aplicació diferenciable $X : M \to \mathbb{R}^n$, tal que $X(p) \in T_pM$, per a tot $p \in M$. Denotem el conjunt de camps vectorials diferenciables en $M$ per:*

$$Vect(M) := \{X : M \to \mathbb{R}^n \ |X \text{ és diferenciable, } X(p) \in T_pM, \text{ per a tot } p \in M\}.$$

Ara que hem definit camp vectorial, podem definir la noció de corba integral d'un camp vectorial.

**Definició 6.6.** *Sigui $M \subset \mathbb{R}^n$ una varietat diferenciable de dimensió n. Sigui $X \in Vect(M)$ un camp vectorial diferenciable en M. Una corba diferenciable $\gamma : \mathbb{R} \to M$ és una corba integral de $X$ si:*

$$\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t)).$$

**Teorema 6.7.** *Sigui $M \subset \mathbb{R}^n$ una varietat diferenciable de dimensió n i $X \in Vect(M)$ un camp vectorial diferenciable en $M$. Fixat $p_0 \in M$ es compleix:*

*(i) Existeix un interval $I \subset \mathbb{R}$ que conté el 0 i una corba integral $\gamma : I \to M$ que satisfà les equacions següents:*

$$\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t)) \ , \ \gamma(0) = p_0. \tag{6.1}$$

*(ii)(unicitat). Si $\gamma : I_1 \to M$ i $\gamma_2 : I_2 \to M$ són dues corbes integrals que satisfan les equacions anteriors en dos intervals oberts $I_1 \subset \mathbb{R}$, $I_2 \subset \mathbb{R}$, que contenen el 0, aleshores $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$.*

*Demostració.* Vegeu [8, *p*.33]. □

Si una corba integral $\gamma : I \to M$ satisfà l'equació (6.1) , direm que n'és solució. Direm que n'és solució maximal, si per a qualsevol altra corba integral $\delta : J \to M$ que sigui solució de (6.1), $J \subset I$, i per tant, degut a $(ii)$, $\delta(t) = \gamma(t)$ per a tot $t \in J$.

Ara, donat un punt $p_0 \in M$, podem considerar l'interval maximal de la solució de (6.1), que clarament és el següent:

$$I(p_0) = \bigcup \{I \subset \mathbb{R} | \ I \text{ conté el 0 i existeix una corba integral definida en } I \text{ solució de (1.1)}\}.$$

Pel teorema 6.7 el sistema (6.1) té una solució maximal $\gamma : I(p_0) \to M$. Ara podem definir el flux associat a un camp vectorial $X : M \to \mathbb{R}^n$.

**Definició 6.8.** *Si considerem $\mathcal{D} := \{(t, p_0) | p_0 \in M, t \in I(p_0)\}$, definim el flux del camp vectorial $X$ com l'aplicació $\phi : \mathcal{D} \to M$, tal que $\phi(t, p_0) = \gamma(t)$; on $\gamma : I(p_0) \to M$ és la solució maximal de (6.1).*

Si considerem el flux d'un camp vectorial $X$ com hem definit anteriorment, tenim:

**Proposició 6.9.** *(i) $\mathcal{D}$ és un obert de $\mathbb{R} \times M$*

*(ii) $\phi : \mathcal{D} \to M$ és una aplicació diferenciable.*

*(iii) Si $p_0 \in M$ i $s \in I(p_0)$, aleshores*

$$I(\phi(s, p_0)) = I(p_0),$$

*i per a tot $t \in \mathbb{R}$ amb $s + t \in I(P_0)$, es compleix*

$$\phi(s + t, p_0) = \phi(t, \phi(s, p_0)).$$

*Demostració.* Vegeu [8,p.35]. □

**Definició 6.10.** *Diem que un camp vectorial $X \in Vect(M)$ és complet, si per a cada $p_0 \in M$, existeix una corba integral $\gamma : \mathbb{R} \to M$ de $X$ amb $\gamma(0) = p_0$.*

Observem que si existeix una corba integral de X, $\gamma_* : \mathbb{R} \to M$, amb $\gamma(0) = p_0$, per a qualsevol altra corba integral $\gamma : I \to M$ amb $\gamma(0) = p_0$, tenim que per a tot $t \in I$, $\gamma(t) = \gamma_*(t)$. Per tant, $\gamma_*$ és solució maximal de (6.1).

Com que en aquesta secció treballem amb varietats diferenciables compactes, ens serà de gran ajuda el següent lema.

**Lema 6.11.** *Sigui $M \subset \mathbb{R}^n$ una varietat diferenciable compacta de dimensió $n$. Aleshores qualsevol espai vectorial en $M$ és complet.*

*Demostració.* Vegeu $[8, p.36]$. □

Per tant, si $M \subset \mathbb{R}^n$ és una varietat diferencial compacta de dimensió $n$ , i $X : M \to \mathbb{R}^n$ és un camp vectorial, aleshores $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times M$. Si considerem el flux $\phi : \mathbb{R} \times M \to M$ associat a $X$, tenim que $\phi(0, M) : \{0\} \times M \to M$ és l'aplicació $Id_M$ i fixat $p_0 \in M$, $\phi(\cdot, p_0) = \gamma : \mathbb{R} \to M$, per tant $\dot{\phi}(t, p_0) = \dot{\gamma}(t)$.

Considerem una mètrica de Riemann $g$ i una funció de Morse $f : M \to \mathbb{R}$. Considerem també $TM = \bigcup_{p \in M}\{T_pM\}$. Tenim que el gradient negatiu de $f$, que es denota per $-\nabla f$, és un camp vectorial definit per la propietat:

$$g(-\nabla f, v) = -Df(v), \text{ per a tot } v \in TM.$$

**Lema 6.12.** *Sigui $M$ una varietat diferenciable compacta. Si $f : M \to \mathbb{R}$ és una funció de Morse, i $\phi : \mathbb{R} \times M \to M$ és el flux associat a $-\nabla f$. Aleshores, per a tot $x \in M$ els límits següents existeixen:*

$$lim_{t \to +\infty}\phi(t, x), lim_{t \to -\infty}\phi(t, x).$$

*A més a més són punts crítics de $f$.*

*Demostració.* Vegeu $[11, p.7]$. □

**Definició 6.13.** *Sigui $M \subset \mathbb{R}^n$ una varietat diferenciable compacta de dimensió $n$. Sigui $\phi : \mathbb{R} \times M \to M$ el flux generat pel gradient $-\nabla f : M \to \mathbb{R}^n$. Per a un punt crític $p \in M$ de $f$, definim respectivament la varietat estable de $p$ i la varietat inestable de $p$ com:*

$$S(p) = \{x \in M \mid lim_{t\to+\infty}\phi(t,x) = p\}$$
$$U(p) = \{x \in M \mid lim_{t\to-\infty}\phi(t,x) = p\}.$$

Si $M_1$ i $M_2$ són subvarietats de $M$, diem que $M_1$ i $M_2$ intersecten transversalment si per a tot $p \in M_1 \cap M_2$, $T_pM = T_pM_1 + T_pM_2$. Ho denotarem per $M_1 \pitchfork M_2$.

Les subvarietats diferenciables tenen la següent propietat:

**Lema 6.14.** *Siguin $A, B$ subvarietats d'una varietat $M$ amb dimensions $a$ i $b$ respectivament. Aleshores, si $A \pitchfork B$, tenim que $A \cap B$ és una subvarietat de $M$ de dimensió $a + b - m$.*

*Demostració.* Vegeu [ 1, p.132]. □

Diem que una funció de Morse $f : M \to \mathbb{R}$ és Morse-Smale, si per a qualsevol parella de punts crítics $p, q$, $S(p)$ i $U(q)$ intersecten transversalment. Si $p$ és un punt crític no degenerat, aleshores $U(p)$ i $S(p)$ són subvarietats de $M$ de dimensió:

$$dimU(p) = ind(p),\ dimS(p) = dimM - ind(p).$$

Observem que la condició de Morse-Smale depèn de la mètrica $g$ que utilitzem. Nosaltres sempre usarem la mètrica induïda per la mètrica euclidiana. Fixem doncs aquesta mètrica $g$. D'ara endavant considerem només funcions de Morse $f : M \to \mathbb{R}$ que siguin Morse-Smale. Recordem que tenim fixat com a camp vectorial $-\nabla f$.

Una línia de flux és una classe d'equivalència de corbes integrals del camp vectorial $-\nabla f$, $[\gamma : \mathbb{R} \to M]$, on $\gamma \sim \beta$ si i només si, existeix un $a \in \mathbb{R}$, tal que $\gamma(t) = \beta(t + a)$ per a tot $t \in \mathbb{R}$. Donats $p, q$ dos punts crítics, diem que $[\gamma]$ és una línea de flux de $p$ a $q$, si $\lim_{t\to-\infty} = p$ i $\lim_{t\to+\infty} = q$. Per la *proposició 6.9*, dues corbes integrals $\gamma \sim \beta$ són essencialment equivalents, en el sentit de que estan les dues definides en $\mathbb{R}$ i $\gamma(\mathbb{R}) = \beta(\mathbb{R})$.

A més, observem que les varietats inestables i estables d'un punt crític són els punts de les unions de totes les línies de flux que comencen i acaben, respectivament, al punt crític. La condició de Morse-Smale ens dóna una restricció important sobre com són aquestes línies de flux, no poden connectar punts crítics amb el mateix índex.

Donats dos punts crítics $p, q$, denotem per $\mathcal{M}(p, q) := U(p) \cap S(q)$. Observem que es tracta del conjunt dels punts de les unions de totes les línies de flux que comencen en $p$ i acaben en $q$. Pel *lema 6.14* i la condició de Morse-Smale, aquesta és una subvarietat de dimensió

$$dim\mathcal{M}(p, q) = dimU(p) + dimS(p) - dimM = ind(p) - ind(q).$$

Ara, considerem l'espai mòduli $\mathcal{L}(p, q) = \mathcal{M}(p, q)/\mathbb{R}$, on l'acció de $\mathbb{R}$ en $\mathcal{M}(p, q)$, és induïda pel flux $\phi : \mathbb{R} \times M \to M$.

L'espai mòduli $\mathcal{L}(p,q)$ correspon al conjunt format per les línies de flux de p a q, mòdul translació, és a dir, si tenim dues línies de flux $[\gamma]$ i $[\beta]$ de $p$ a $q$, les identifiquem si existeix una translació de $[\gamma]$ a $[\beta]$.

Observem que $dim\mathcal{L}(p,q) = ind(p) - ind(q) - 1$, per tant només té sentit l'espai, si $ind(p) > ind(q)$.

## 6.3 Homologia Singular

### 6.3.1 Complex de Cadenes

Donat un anell $R$, un complex de cadenes de $R$-mòduls és un parell $(M_*, \partial_*)$, on $M_*$ és una successió de $R$-mòduls $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, i $\partial_*$ és una successió de morfismes $\{\partial_n : M_n \to M_{n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$, per a tot $n \in \mathbb{N}$. Als morfismes $\partial_n$ els anomenarem diferencials.

Pel fet que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$, és immediat que $\mathrm{Im}\partial_{n+1} \subset Ker\partial_n$, per a tot $n \in \mathbb{N}$. Aleshores, observem que està ben definit el quocient: $\mathrm{Ker}\partial_n/\mathrm{Im}\partial_{n+1}$.

**Definició 6.15.** *Fixat $p \in \mathbb{N}$, definim l'homologia p-èssima associada a un complex de cadenes $(M_*, \partial_*)$, de la següent forma:*

$$H_p(M_*) = Ker\partial_p/Im\partial_{p+1}.$$

**Definició 6.16.** *Siguin $(M_*, \partial_*)$ i $(M'_*, \partial'_*)$ complexos de cadenes de R-mòduls. Un morfisme de complexos de R-mòduls $f_* : M_* \to M'_*$ és una successió de morfismes de R-mòduls $\{f_p : M_p \to M'_p\}_{p\in\mathbb{N}}$, tal que el diagrama següent és commutatiu:*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_{p+1}"] & M_{p+1} \arrow[r, "\partial_p"] \arrow[d, "f_{p+1}"'] & M_p \arrow[r, "\partial_{p-1}"] \arrow[d, "f_p"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial'_{p+1}"] & M'_{p+1} \arrow[r, "\partial' p"'] & M'_p \arrow[r, "\partial' p-1"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Per la commutivitat del diagrama és evident que, fixat $p \in \mathbb{N}$, si $x \in \mathrm{Ker}\partial_p$, aleshores $f_p(x) \in \mathrm{Ker}\partial'_p$. De la mateixa forma, si $y \in \mathrm{Im}\partial_p$, aleshores $f_p(y) \in \mathrm{Im}\partial'_p$. Per tant, un morfisme de complexos de $R$-mòduls indueix un morfisme $H_p(f) : H_p(M_*) \to H_p(M'_*)$, definit per $H_p(f)[z] = [f_p(z)]$, per a tot $p \in \mathbb{N}$.

A més, tenim functorialitat en $f_p \mapsto H_p(f)$, ja que és evident que si $f_* : M_* \to M'_*$ i $g_* : M'_* \to M''_*$ són morfismes de complexos de $R$-mòduls, aleshores:

$$H_p(g) \circ H_p(f)[z] = H_p(g)[f_p(z)] = [g_p \circ f_p(z)] = H_p(g \circ f).$$

A més, si $Id_* : M_* \to M_*$ és el morfisme identitat, clarament $H_p(Id_*) = Id_{H_p(M_*)}$.

### 6.3.2 Definició de l'Homologia Singular

Donat $p \in \mathbb{N}$, definim el $p$-símplex estàndard com el subconjunt de $\mathbb{R}^{p+1}$ següent:

$$\Delta^p := \{(t_0, t_1, ......, t_p) \in \mathbb{R}^{p+1} | \sum_{i=0}^{p} t_i = 1;\ t_i \geq 0 \text{ per a tot } i\}.$$

Donat un espai topològic $X$, definim un $p$-símplex singular, com qualsevol aplicació contínua $\sigma_p : \Delta^p \to X$. Considerem també, per a tot $i \in \{0, 1, ......, p-1\}$, les següents aplicacions:

$\delta_i : \Delta^{p-1} \to \Delta^p$, amb $\delta_i(x_0, ......, x_{p-1}) = (x_0, ......, x_{i-1}, 0, x_i, ......, x_{p-1})$.

Considerem també el següent conjunt:

$$\Sigma_p = \{\sigma_p : \Delta^p \to X |\ \sigma_p \text{ és un } p\text{-símplex singular}\}.$$

**Definició 6.17.** *Sigui $X$ un espai topològic i $R$ un anell. Definim el complex de cadenes singulars de $X$, com el parell $(S_*(X, R), \partial_*)$, on $S_*(X, R)$ és la successió de $R$-mòduls $\{S_p(X, R)\}_{p \in \mathbb{N}}$, on $S_p(X, R)$ és l'$R$-mòdul lliure generat pels elements de $\Sigma_p$, i $\partial_*$ és la succesió $\{\partial_p : S_p(X, R) \to S_{p-1}(X, R)\}$, definida per $\partial_p(\sigma_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma_p \circ \delta_i$, si $p \geq 1$, i $\partial_0 = 0$.*

**Lema 6.18.** *per a tot $p \geq 1$, $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$.*

*Demostració.*

$$\partial_{p-1}(\partial_p(\sigma_p)) = \partial_{p-1}(\sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma_p \circ \delta_i) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i (\sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j (\sigma_p \circ \delta_i) \circ \delta_j) =$$

$$= \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^{i+j} \sigma_p \circ (\delta_i \circ \delta_j) = (*).$$

Ara, com que és clar que $\delta_i \circ \delta_j = \delta_j \circ \delta_{i-1}$, si $j < i$, ja que les dues aplicacions són:

$$(x_0, ......, x_{p-2}) \mapsto (x_0, ......, x_{j-1}, 0, x_j, ......, x_{i-2}, 0, x_{i-1}, ......, x_{p-2}),$$

tenim que

$$(*) = \sum_{0 \leq j < i \leq p} (-1)^{i+j} \sigma_p \circ (\delta_i \circ \delta_j) + \sum_{0 \leq i \leq j \leq p-1} (-1)^{i+j} \sigma_p \circ (\delta_i \circ \delta_j) =$$

$$= \sum_{0 \leq j \leq i \leq p-1} (-1)^{1+i+j} \sigma_p \circ (\delta_i \circ \delta_j) + \sum_{0 \leq i \leq j \leq p-1} (-1)^{i+j} \sigma_p \circ (\delta_i \circ \delta_j) = 0.$$

□

Per tant, podem definir ja una homologia. Fixat $p \in \mathbb{N}$, definim l'homologia singular $p$-èssima del complex de cadenes $(S_*(X, R), \partial_*)$ com:

$$H_p(X, R) = \text{Ker}\partial_p / \text{Im}\partial_{p+1}.$$

**Proposició 6.19.** *Siguin $X, Y$ espais topològics i $f : X \to Y$ una aplicació contínua. Aleshores, les aplicacions $f_p : S_p(X, R) \to S_p(Y, R)$, definides per $f_p(\sigma_p) = f \circ \sigma_p$, determinen un morfisme de complexos de cadenes $S_*(X, R) \to S_*(Y, R)$.*

*Demostració.* Hem de veure que per a tot $p \geq 1$, $f_{p-1} \circ \partial_p = \partial_p \circ f_p$.

$$f_{p-1}(\partial_p(\sigma_p)) = f_{p-1}(\sum_{i=0}^{p}(-1)^i \sigma_p \circ \delta_i) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i f \circ (\sigma_p \circ \delta_i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i (f \circ \sigma_p) \circ \delta_i = \partial_p(f \circ \sigma_p) = \partial_p(f_p(\sigma_p)).$$

□

Per tant, donada una aplicació contínua $f : X \to Y$, tenim un morfisme induït en les homologies $p$-èssimes:

$$H_p(f)[\sigma_p] = [f \circ \sigma_p].$$

Ara, suposem que tenim dos espais topològics homeomorfs $X \cong Y$. Aleshores tenim dues bijeccions contínues $f : X \to Y$, $g : Y \to X$, tal que $f \circ g = Id_Y$, $g \circ f = Id_X$. A més, si $\sigma_p^X : \Delta^p \to X$ és un $p$-símplex singular de $X$ i $\sigma_p^Y : \Delta^p \to Y$ és un $p$-símplex singular de $Y$, aleshores $f \circ \sigma_p^X$ és un $p$-símplex singular de $Y$ i $g \circ \sigma_p^Y$ ho és de $X$, per tant, tenim un bijecció entre els $p$-símplex singulars de $X$ i els de $Y$. Deduïm doncs que cada $f_p : S_p(X, R) \to S_p(Y, R)$ definit per $f$, i cada $g_p : S_p(Y, R) \to S_p(X, R)$ definit per $g$ són isomorfismes. A més, clarament $S_p(X, R) \cong S_p(Y, R)$, ja que $g_p \circ f_p = Id_{S_p(Y,R)}$ i $f_p \circ g_p = Id_{S_p(X,R)}$. Fàcilment segueix que $H_p(X, R) \cong H_p(Y, R)$, és a dir, l'homologia singular es conserva per homeomorfisme dels espais topològics.

Observem, que si tenim dos espais topològics $X, A$ homeomorfs, amb $A \subset X$. Aleshores, com que tenim una bijecció entre els $p$-símplexos singulars de $A$ i de $X$, i a més $S_p(X, R) \cong S_p(Y, R)$, clarament la inclusió $\iota : A \hookrightarrow X$, indueix un isomorfisme $H_p(\iota) : H_p(A, R) \to H_p(X, R)$, per a tot $p \in \mathbb{N}$.

## 6.4 Homologia de Morse

Com ja hem vist, per definir una homologia, necessitem un complex de cadenes $(C_*, \partial)$.

**Definició 6.20.** *Sigui $M$ una varietat diferenciable compacta, $f : M \to \mathbb{R}$ una funció de Morse i $g$ una mètrica de Riemann. Definim el complex de cadenes de Morse $(C_*(f, g)), \partial)$ amb coeficients a $\mathbb{Z}_2$ de la forma següent:*

*Per a cada $i \in \mathbb{N}$, definim el mòdul de cadenes $C_i(f, g)$ com el $\mathbb{Z}_2$-mòdul generat pels punts crítics d'índex $i$ de $f$, és a dir:*

$$C_i(f, g) = \mathbb{Z}_2 Crit_i(f).$$

*Per a $i \geq 1$, l'operador vora $\partial_i : C_i(f, g) \to C_{i-1}(f, g)$ conta línies de flux mòdul translació del gradient negatiu, és a dir, si $p \in Crit_i(p)$, aleshores:*

$$\partial_i(p) = \sum_{q \in Crit_{i-1}(f)} \#\mathcal{L}(p, q)q.$$

*Considerem també* $\partial_0 = 0$.

En el llibre $[6, p.10-12]$ es demostra que, efectivament, per a tot $k \geq 0$, $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$.

Per tant, per a tot $p \in \mathbb{N}$ podem definir l'homologia $p$-èssima de Morse del parell $(f, g)$ de la forma següent:

$$H_p(f, g) := ker(\partial_p)/im(\partial_{p+1}).$$

Tenim una propietat molt important de l'homologia de Morse, que, en efecte, és isomorfa a l'homologia singular:

**Teorema 6.21.** *Si $X$ és una varietat diferenciable compacta, $f : X \to \mathbb{R}$ és una funció de Morse i $(f, g)$ és un parell de Morse-Smale, per a tot $p \in \mathbb{N}$, l'homologia $p$-èssima de Morse $H_p(f, g)$ és isomorfa a l'homologia singular $H_p(X)$.*

*Demostració.* Vegeu [ 6, p.13-18]. □

Per tant, per aquest teorema, l'homologia de Morse realment no depèn de la funció de Morse ni de la mètrica $g$, però si se'ns fa més fàcil, per calcular l'homologia singular d'una varietat diferenciable compacta podem calcular en canvi la seva homologia de Morse. Per tant, donat $t \in \mathbb{R}$, per calcular l'homologia $p$-èssima singular $H_p(\{x \in M | f(x) < t\})$, podem calcular com a alternativa la seva homologia $p$-èssima de $Morse$: $H_p(f|_{\{x \in M | f(x) < t\}}, g)$.

**Exemple 6.22.** Fixada la mètrica $g$ induïda per l'euclidana, anem a calcular l'homologia de Morse, amb coeficients al cos $\mathbb{Z}_2$, de la funció alçada $f : M \to \mathbb{R}$ en la següent varietat diferenciable compacta homeomorfa a $\mathbb{S}^1$:

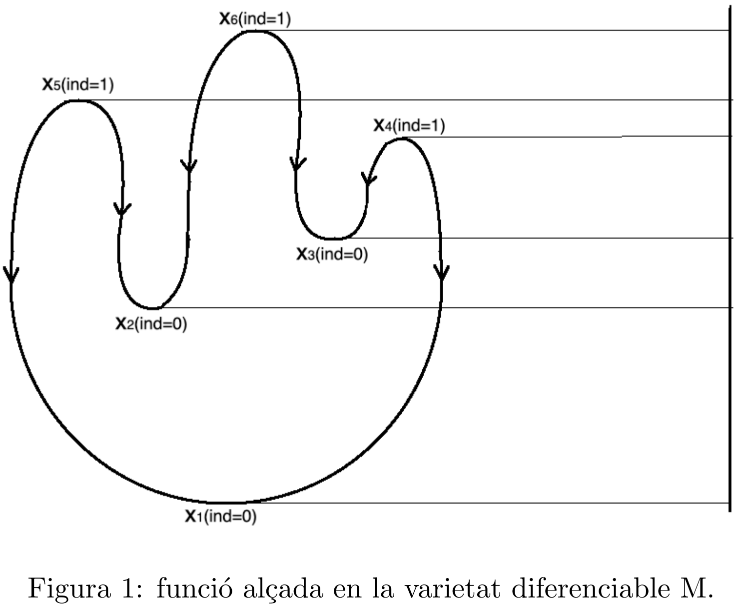


Figura 1: funció alçada en la varietat diferenciable M.

Com que $M$ és homeomorfa a $\mathbb{S}^1$ i l'homologia de Morse és isomorfa a la singular, el resultat que esperem és: $H_0(f,g) \cong \mathbb{Z}_2$, $H_1(f,g) \cong \mathbb{Z}_2$, i $H_p(f,g) = 0$ per a tot $p \geq 2$, ja que sabem que aquesta és la homologia singular de $\mathbb{S}^1$. Anem a calcular l'homologia de Morse.

Observem que tenim tres màxims: $x_4, x_5, x_6$, i tres mínims: $x_1, x_2, x_3$. Per tant, clarament $Crit_1(f) = \{x_4, x_5, x_6\}$ i $Crit_0(f) = \{x_1, x_2, x_3\}$. A més, veiem que $\partial_1(x_4) = x_3 + x_1$, $\partial_1(x_5) = x_2 + x_1$ i $\partial_1(x_6) = x_3 + x_2$.

Com que no tenim punts crítics d'índex $\geq 2$, $C_p(f,g) = 0$, per a tot $p \geq 2$. Per tant, trivialment segueix que $H_p(f,g) = 0$, per a tot $p \geq 2$. Ara, $\partial_1(x_4 + x_5 + x_6) = 2(x_1+x_2+x_3) = 0(mod 2)$, per tant $H_1(f,g) = \mathbb{Z}_2\langle x_4+x_5+x_6\rangle$. Finalment, $\mathrm{Im}\partial_1 = \mathbb{Z}_2\langle x_1 + x_2\rangle \oplus \mathbb{Z}_2\langle x_1 + x_3\rangle$ i $\mathrm{Ker}\partial_0 = C_0(f,g) = \mathbb{Z}_2\langle x_1\rangle \oplus \mathbb{Z}_2\langle x_2\rangle \oplus \mathbb{Z}_2\langle x_3\rangle$, per tant $H_0(f,g) \cong \mathbb{Z}_2$, precisament com esperàvem.

## 6.5 Mòduls de Persistència de Morse i Aproximació

Sigui M una varietat diferenciable compacta i $f : M \to \mathbb{R}$ una funció de Morse. Establim la norma $||f|| = max_{x\in M}|f(x)|$. Per a $t \in \mathbb{R}$, denotem el conjunt $\{x \in M | f(x) < t\}$, com $\{f < t\}$. Fixem també el cos $\mathbb{Z}_2$. Qualsevol homologia la considerarem amb coeficients en aquest cos.

**Definició 6.23.** *Fixat $k \in \mathbb{N}$, definim el mòdul de persistència de Morse associat a $f$, com el parell $(V(f), \pi)$, on $V(f) = \{V_t(f) = H_k(\{f < t\})\}_{t\in\mathbb{R}}$ i $\pi = \{\pi_{s,t} = (\iota_{s,t})_k\}_{s\leq t}$, on $\iota_{s,t} : \{f < s\} \hookrightarrow \{f < t\}$ és la inclusió natural i $(\iota_{s,t})_k$ denota la inclusió induïda en l'homologia. L'homologia la considerarem amb coeficients en $\mathbb{Z}_2$.*

Com que el mòdul de persistència es pot definir per a qualsevol $k \in \mathbb{N}$ fixat, d'ara endavant també escriurem $V(f)_t = H_*(\{f < t\})$, referint-nos a l'homologia d'un grau arbitrari $*$.

Vegem que, efectivament, $V(f)$ és un mòdul de persistència. Primer observem que cada $V(f)_t$ és un espai vectorial, ja que l'homologia és amb coeficients al cos $\mathbb{Z}_2$, i per tant no hi pot haver torsió. Anem a veure que es compleixen les quatre propietats.

(1) Donats $s \leq t \leq r$, clarament $(\iota_{s,t})_* \circ (\iota_{t,r})_* = (i_{s,t} \circ \iota_{t,r})_* = (\iota_{s,r})_*$.

(2) Com que $M$ és una varietat diferenciable compacta, tenim que $Crit(f)$ és un conjunt finit. Ordenem els punts de $f(Crit(f))$ de més petit a més gran: $a_1 = f(p_1) < ...... < a_n = f(p_n)$. Considerem també $a_0 = -\infty$, $a_{n+1} = +\infty$.

Per a tot $t \in \mathbb{R}\backslash f(Crit(f))$, existeix un $i \in \{1, ......, n\}$, tal que $t \in (a_{i-1}, a_i)$. Aleshores podem escollir un $\epsilon > 0$, tal que $U := (t - \epsilon, t + \epsilon) \subset (a_{i-1}, a_i)$. Tenim que per a tot $s < t$ en U, hi ha el mateix nombre de punts crítics als conjunts $\{f < s\}$ i $\{f < t\}$. Per tant, clarament $\{f < s\} \cong \{f < t\}$, i la inclusió induïda $(i_{s,t})_* : H_*(\{f < s\}) \to H_*(\{f < t\})$ és un isomorfisme

(3) Hem de demostrar que per a $t = a_i$, amb $i \in \{1, ......, n\}$, existeix un $\epsilon > 0$, tal que per a tots $s < t$ en $(t - \epsilon, t]$, $(\iota_{s,t})_*$ és isomorfisme. Veiem que per a tot $s < t$ en $(a_{i-1}, a_i]$ hi ha el mateix nombre de punts crítics als conjunts $\{f < s\}$ i $\{f < t\}$, ja que el conjunt $\{f < t\}$ no inclou el punt $a_i$. Per tant igualment que anteriorment veiem que $(\iota_{s,t})_*$ és un isomorfisme.

(4) Clarament per a tot $t \leq a_1$, no hi ha punts crítics més petits que $t$, i per tant $H_*(\{f < t\}) = 0$.

Cal notar, que el conjunt $\{a_1, ......, a_n\}$, no necessàriament és l'espectre de $V(f)$, ja que alguns punts podrien complir la propietat (2). Simplement l'hem utilitzat com a conjunt finit per demostrar la propietat (2).

Donat $\delta > 0$, com que per a tot $t \in \mathbb{R}$, $V(f)[\delta]_t = V(f)_{t+\delta} = H_*(\{f < t+\delta\}) = H_*(\{f - \delta < t\})$, el $\delta$-desplaçat de $V(f)$ és $V(f)[\delta] = V(f-\delta)$.

**Observació 6.24.** Observem que si $f : M \to \mathbb{R}$, $g : M \to \mathbb{R}$ són funcions de Morse amb $f \leq g$, aleshores $\{g < t\} \subseteq \{f < t\}$ per a tot $t \in \mathbb{R}$, i per tant cada inclusió natural $\iota_t : \{g < t\} \hookrightarrow \{f < t\}$, indueix un morfisme $F_t = (\iota_t)_* : H_*(\{g < t\}) \to H_*(\{f < t\})$. En aquest cas, obtenim un morfisme natural entre mòduls de persistència $F : V(g) \to V(f)$.

**Proposició 6.25.** *Siguin $f : M \to \mathbb{R}$, $g : M \to \mathbb{R}$ funcions de Morse. Aleshores tenim que $d_{int}(V(f), V(g)) \leq ||f - g||$.*

*Demostració.* Sigui $\delta = ||f - g||$, volem veure que $V(f)$ i $V(g)$ estan $\delta$-entrellaçats. Tenim que $f - ||f - g|| \leq g$, ja que per a qualsevol $x \in M$, $g(x) + max_{x \in M}|f(x) - g(x)| \geq g(x) + |f(x) - g(x)| \geq g(x) + f(x) - g(x) = f(x)$. Per tant, $\{g < t\} \subseteq \{f - \delta < t\}$, i per la observació anterior, existeix un morfisme natural $F : V(g) \to V(f - \delta) = V(f)[\delta]$.

Per simetria, $g - \delta \leq f$, i per tant tenim un altre morfisme natural $G : V(f) \to V(g)[\delta]$, induït per les inclusions. Per tant, obtenim que $f - 2\delta \leq g - \delta \leq f$, i obtenim el següent diagrama:

$$\begin{tikzcd} V(f) \arrow[r, "G"] \arrow[rr, bend right, "\Phi^{2\delta}_{V(f)}"'] & V(g)[\delta] \arrow[r, "F[\delta]"] & V(f)[2\delta] \end{tikzcd}$$

que és commutatiu pel fet de ser composició de inclusions induïdes en l'homologia. De la mateixa forma, tenim que $g - 2\delta \leq f - \delta \leq g$, i obtenim el següent diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd} V(g) \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend right, "\Phi^{2\delta}_{V(g)}"'] & V(f)[\delta] \arrow[r, "G[\delta]"] & V(g)[2\delta]. \end{tikzcd}$$

Per tant, $V(f)$ i $V(g)$ estan $\delta$-entrellaçats, i obtenim que $d_{int}(V(f), V(g)) \leq \delta = ||f - g||$. $\square$

Fixat $p \in \mathbb{N}$, donat un mòdul de persistència de Morse $V(f) = \{H_p(\{f < t\})\}_{t \in \mathbb{R}}$, volem construir el seu codi de barres associat. Sigui $Crit(f) = \{p_1, ....., p_n\}$, suposant que $a_i = f(p_i) < a_j = f(p_j)$ si $i < j$. Considerem també $a_0 = -\infty$ i $a_{n+1} = +\infty$.

Com que per a qualsevols $s < t$ en qualsevol dels oberts $(-\infty, a_1), (a_1, a_2), ...., (a_{n-1}, a_n)$, $(a_n, +\infty)$, tindrem isomorfismes $H_p(\{f < s\}) \cong H_p(\{f < t\})$, només cal calcular les homologies en els casos: $t \leq a_1$, $t \in (a_1, a_2]$,......, $t \in (a_{n-1}, a_n]$, $t > a_n$.

També observem, que si per algún $i \in \{1, ......, n\}$, es té que $s \in (a_{i-1}, a_i]$ i $t \in (a_i, a_{i+1}]$, i $H_p(\{f < s\}) = H_p(\{f < t\})$, aleshores el morfisme de persistència $(\iota_{s,t})_p : H_p(\{f < s\}) \to H_p(\{f < t\})$ és un isomorfisme, i per tant, si per a cada $i \in \{1, ......, n+1\}$, $k_i$

denota la dimensió de la homologia $H_p(\{f < a_i\})$, aleshores $V(f) \ncong \bigoplus_{i=1}^{n+1} \mathbb{F}(a_{i-1}, a_i]^{k_i}$. Per tant, és fals que per a cada $i \in \{1, ......, n\}$, $a_i \in SpecV(f)$, ja que en cas de que $s \in (a_{i-1}, a_i]$ i $t \in (a_i, a_{i+1}]$, pot ser que el morfisme de persistència $(i_{s,t})_*$ sigui un isomorfisme, i en aquest cas $a_i \notin SpecV(f)$.

Si tenim una funció de Morse $f : M \to \mathbb{R}$, i per a cada $k \in \mathbb{N}$, $V_k(f) = \{H_k(\{f < t\})\}_{t\in\mathbb{R}}$, és el mòdul de persistència de Morse determinat per l'homologia $k$-èssima de Morse, podem definir la suma directa d'aquests mòduls:

$$V(f) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} V_k(f).$$

Clarament $V(f)_t = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} H_k(\{f < t\})$, i per a $s \leq t$ el morfisme de persistència del mòdul és $\pi_{s,t}^{V(f)} = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} (\iota_{s,t})_k$.

Pels exemples que fem, sempre que considerem un mòdul de persistència de Morse, representarà la suma directa de totes les dimensions homològiques.

**Exemple 6.26.** Considerem $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$, el cos dels enters mòdul 2. Anem a trobar el codi de barres del mòdul de persistència de Morse d'una funció de Morse $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ qualsevol en l'esfera unitat, amb solament dos punts crítics: el pol nord $PN = (0, 0, 1)$ d' índex 2 , que correspòn al màxim absolut de la funció i el pol sud $PS = (0, 0, -1)$, d'índex 0, que correspòn al mínim absolut de la funció. Aleshores, és evident que:

$$\partial(PN) = 0, \partial(PS) = 0.$$

També tenim que per a $p > 2$, $C_p(g) = 0$, $C_2(g) = \mathbb{Z}_2\langle PN\rangle$, $C_1(g) = 0$ i $C_0(f) = \mathbb{Z}_2\langle PS\rangle$. Considerem els següents casos:

**1.** Si $t > 1$, clarament $Ker(\partial_2) = C_2(g)$ i $Im(\partial_3) = 0$, per tant $H_2(\{g < t\}) = \mathbb{Z}_2\langle PN\rangle$. $Ker(\partial_1) = C_1(g) = 0$, per tant $H_1(\{g < t\})$=0, i com que $Im\partial_1 = 0$, $H_0(\{g < t\}) = C_0(g) = \mathbb{Z}_2\langle PS\rangle$.

**2.** Si $t \in (-1, 1]$, clarament $C_2(\{g < t\}) = 0$, per tant $H_2(\{g < t\}) = 0$, $H_1(\{g < t\}) = 0$ i $H_0(\{g < t\}) = C_0(g) = \mathbb{Z}_2\langle PS\rangle$.

**3.** Si $t \leq -1$, clarament, per a tot $p \geq 0$, $H_p(\{g < t\}) = H_p(\emptyset) = 0$.

Obtenim el següent codi de barres:

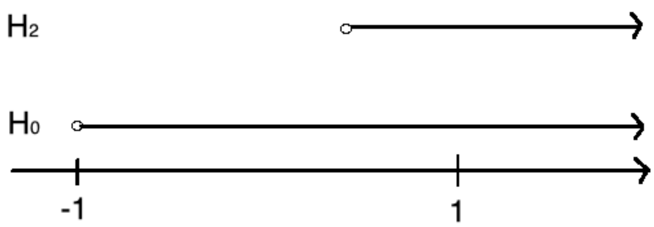


Figura 2: codi de barres associat a $V(g)$.

Per tant, $V(g) \cong \mathbb{Z}_2(-1, +\infty) \oplus \mathbb{Z}_2(1, +\infty)$ i $\mathcal{B}(V(g)) = \{(-1, +\infty), (1, +\infty)\}$.

**Exemple 6.27.** Sigui $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ una funció de Morse. Volem veure amb quina efectivitat és aproximada per a una altra funció de Morse $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$, que té solament dos punts crítics i té el mateix màxim i mínim que $f$.

Suposem que $f$ és una funció d'alçada en l'esfera en forma de cor, i $g$ és una funció en l'esfera amb exactament dos punts crítics, que són també el màxim i mínim de $f$.

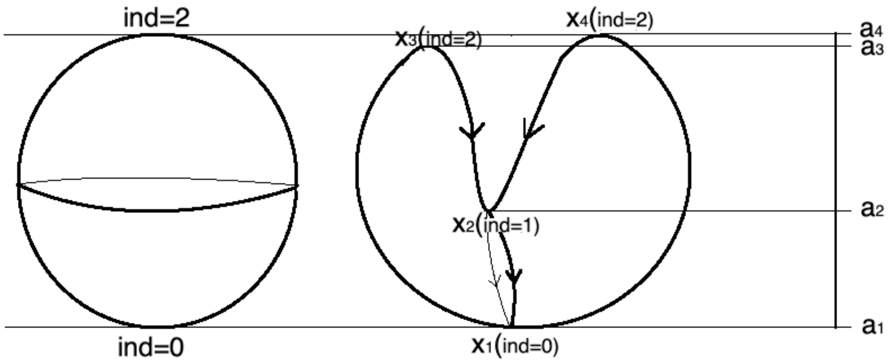


Figura 3: situació de *l'exemple 6.27.*

Considerem la homologia de Morse amb coeficients a $\mathbb{Z}_2$. Hem vist ja que:

$$V(g) \cong \mathbb{Z}_2(a_1, +\infty) \oplus \mathbb{Z}_2(a_4, +\infty).$$

Anem a trobar doncs el codi de barres associat al mòdul de persistència $V(f)$. Tenim que $x_4$ i $x_3$ són dos màxims, $x_2$ és un punt de sella i $x_1$ és un mínim, per tant:

$$\text{ind}(x_4) = 2,\ \text{ind}(x_3) = 2,\ \text{ind}(x_2) = 1 \text{ i } \text{ind}(x_1) = 0.$$

A més $\partial_2(x_4) = x_2$, $\partial_2(x_3) = x_2$, $\partial_1(x_2) = 2 \cdot x_1 = 0(mod2)$ i $\partial_0(x_1) = 0$.

També tenim que per a $p > 2$, $C_p(f) = 0$, $C_2(f) = \mathbb{Z}_2\langle x_3\rangle \oplus \mathbb{Z}_2\langle x_4\rangle$, $C_1(f) = \mathbb{Z}_2\langle x_2\rangle$ i $C_0(f) = \mathbb{Z}_2\langle x_1\rangle$. Per tant tenim el següent:

**1.** Si $t > a_4$, clarament $\text{Im}(\partial_3) = 0$ i $\partial_2(x_4 + x_3) = 2 \cdot x_2 = 0(\text{mod}2)$, i per tant $H_2(\{f < t\}) = Ker(\partial_2) = \mathbb{Z}_2\langle x_4 + x_3\rangle$. Clarament $\text{Ker}\partial_1 = \text{Im}\partial_2 = C_1(\{f < t\})$, per tant $H_1(\{f < t\}) = 0$. Finalment, com que $\text{Im}\partial_1 = 0$, $H_0 = C_0(\{f < t\}) = \mathbb{Z}_2\langle x_1\rangle$.

**2.** Si $t \in (a_3, a_4]$, aleshores $x_4 \notin \{f < t\}$, per tant $\text{Ker}\partial_2 = 0$ i $H_2(\{f < t\} = 0$. Per la mateixa raó que en el cas anterior, clarament $H_1(\{f < t\}) = 0$ i $H_0 = C_0(\{f < t\}) = \mathbb{Z}_2\langle x_1\rangle$.

**3.** Si $t \in (a_2, a_3]$, aleshores $x_3, x_4 \notin \{f < t\}$, per tant $C_2(\{f < t\}) = 0$ i $H_2(\{f < t\} = 0$. Observem que $\text{Ker}\partial_1 = \text{C}_1(\{f < t\})$ i $\text{Im}\partial_2 = 0$, per tant $H_1(\{f < t\}) = \mathbb{Z}_2\langle x_2\rangle$. Igualment que en el cas anterior $H_0(\{f < t\}) = \mathbb{Z}_2\langle x_1\rangle$.

**4.** Si $t \in (a_1, a_2]$, aleshores $x_2, x_3, x_4$ no estan en el conjunt $\{f < t\}$, per tant $C_2(\{f < t\}) = 0$ i $C_1(\{f < t\}) = 0$. D'aquí deduïm que $H_2(\{f < t\}) = 0$ i $H_1(\{f < t\}) = 0$. Igualment que en el cas anterior $H_0(\{f < t\}) = \mathbb{Z}_2\langle x_1\rangle$.

**5.** Si $t \le a_1$, per a tot $i \in \mathbb{N}$, $C_i(\{f < t\}) = 0$, i per tant $H_i(\{f < t\}) = 0$.

Obtenim doncs, el següent codi de barres relacionat a $V(f)$:

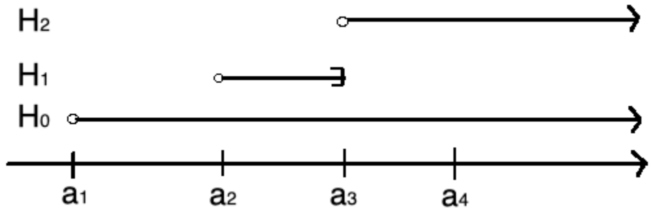


Figura 4: codi de barres associat a $V(f)$.

Clarament $V(f) \cong \mathbb{Z}_2(a_1, +\infty) \oplus \mathbb{Z}_2(a_2, a_3] \oplus \mathbb{Z}_2(a_4, +\infty)$.

Per la *proposició 6.25* i pel teorema d'isometria tenim que $d_{bot}(\mathcal{B}(V(f)), \mathcal{B}(V(g)) = d_{int}(V(f), V(g)) \leq ||f - g||$. Els codis de barres de $V(f)$ i $V(g)$ solament es diferencien en l'interval finit $(a_2, a_3]$, i coincideixen en els dos intervals no acotats. Donat un $\delta > 0$, observem que si tenim un $\delta$-emparellament entre els dos codis de barres, els dos intervals no acotats han d'estar emparellats, ja que és evident que $\{(a_1, +\infty), (a_4, +\infty)\} \subset \mathcal{B}(V(f))_{2\delta}$ i $\{(a_1, +\infty), (a_4, +\infty)\} \subset \mathcal{B}(V(g))_{2\delta}$, per ser intervals amb longitud infinita. Per tant, qualsevol $\delta$-emparellament $\mu$ ha d'emparellar els dos intervals de $\mathcal{B}(V(g))$, i degut a que $\mu$ ha de ser una bijecció entre $coim\mu$ i $im\mu$, l'interval $(a_2, a_3]$ ha de tenir longitud menor o igual que $2\delta$. Per tant, $d_{bot}(\mathcal{B}(V(f)), \mathcal{B}(V(f))) \geq \frac{a_3 - a_2}{2}$, i deduïm el següent:

$$\frac{a_3 - a_2}{2} \leq d_{bot}(\mathcal{B}(V(f)), \mathcal{B}(V(g)) = d_{int}(V(f), V(g)) \leq ||f - g||.$$

Aquest resultat ens permet quantificar la obstrucció en aproximar $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ per una funció de Morse $g$ amb exactament dos punts crítics que coincideixen amb el màxim i mínim de les dues funcions. És a dir, podrem fer qualsevol perturbació $g$ de $f$ sempre que al codi de barres li afegim intervals de longitud $\leq 2||f - g||$, o expandim els intervals per $||f - g||$ per la dreta o l'esquerra.

# 7 Conclusions

Després d'un profund estudi dels mòduls de persistència hem demostrat que a tot mòdul de persistència li correspon un únic codi de barres. A continuació, hem definit dues distàncies, una en l'espai dels codis de barres (la distància del coll d'ampolla) i l'altra en l'espai dels mòduls de persistència (la distància entrellaçada). Efectivament, hem demostrat el teorema d'isometria, el qual afirma que aquestes dues distàncies són essencialment la mateixa, és a dir, que la distància entrellaçada entre dos mòduls de persistència és igual a la distància del coll d'ampolla entre els seus dos codis de barres associats.

Posteriorment, utilitzant conceptes de geometria diferencial i de la teoria de Morse, hem definit els mòduls de persistència de Morse, definits per una funció de Morse $f : M \to \mathbb{R}$. Utilitzant el teorema de la forma normal hem vist que es poden trobar codis de barres associats a aquests mòduls. Usant les dues distàncies definides hem demostrat que la distància entrellaçada entre dos mòduls de persistència de Morse $V(f)$, $V(g)$, és menor o igual que la norma $\max_{\{x\in M\}}|f(x) - g(x)|$. Aleshores, utilitzant el teorema d'isometria, hem trobat una cota inferior a la distància entrellaçada, calculant-ne una de la distància del coll d'ampolla dels dos codis de barres associats. Per tant, finalment, hem trobat una cota inferior de la norma.

En aquest treball hem vist una de les moltes aplicacions que ens ofereixen els mòduls de persistència. Més endavant seria d'interès estudiar més a fons els mòduls de persistència de Morse i trobar altres aplicacions geomètriques que ens proporcionen. A més, hem vist que en l'anàlisi topològic de dades també s'utilitzen els mòduls de persistència; aquest seria doncs, un altre possible camp a estudiar.

# 8 Bibliografia

[1] Banyaga, A., Hurtubise, D. : Lectures on Morse Homology. Springer Science, 2004.

[2] Bubenik,P. : Statistical topological data analysis using persistence landscapes. Journal of Machine Learning Research, 16:77-102, 2015.

[3] Burghelea, D., Haller, S. :Topology of angle valued maps, bar codes and Jordan blocks, arXiv:1303.4328[math.AT], 2013.

[4] Chazal, F., Michel, B. : An introduction to topological data analysis: fundamental and practical aspects for data scientists. arXiv:1710.04019 [math.ST], 2017.

[5] Hatcher, A. : Algebraic Topology. Cambridge University Press, 2002.

[6] Hutchings, M. : Lecture Notes on Morse Homology. math.berkeley.edu/-hutching/, 2002.

[7] Polterovich, L., Rosen, D., Samvelyan, K., Zhang, J. : Topological Persistence in Geometry and Analysis, arXiv:1904.04044 [math.AT], 2019.

[8] Robbin, J., UW Madison. Salamon, D. ETH Zürich. : Introduction to Differential Geometry, 2011.

[9] Stoker, J. : Differential Geometry. Wiley Classics Library, John Wiley Sons, Inc, 1989.

[10] Usher, M., Zhang, J. : Persistent homology and Floer-Novikov theory, arXiv: 1502.07928v3 [math.SG], 2015.

[11] van Oldenbeek, M. : Morse Homology and Nokikov Homology. Master of mathematical sciences thesis, Utrecht University, 2015.

[12] Zomorodian, A., Carlsson, G. : Computing Persistent Homology. Discrete and Computational Geometry, 33(2):249-274, 2005.