



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

**PROBLEMA EXTENDIDO DE
TRES CUERPOS,
RESTRINGIDO Y CIRCULAR**

Autor: Erik Lopez Alonso

Director: Dr. Antoni Benseny Ardiaca

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 18 de enero de 2020

Abstract

The Extended Circular Restricted Three-Body Problem studies the motion of three bodies which are only exposed to their mutual interaction force $F \sim r^\alpha$. In this problem, the mass of one of the 3 bodies is much smaller than the others, so this third body will not disturb the motion of the others. To study the motion of the third body, first we will study the others' motion, and then we will add the third body, supposing that these two bodies have a circular motion. This body will have its motion under the field that the other 2 bodies generate, so we will study this field. In particular, we will obtain the equilibrium points of the field, and we will discuss analytically their existence. Furthermore, we will obtain the regions of the plane in which the motion will be possible, providing a qualitative description of their boundary. Finally, some of these regions will be simulated, thanks to a program which creation is away of this project.

Resumen

El problema extendido de tres cuerpos restringido y circular estudia el movimiento de 3 cuerpos sometidos únicamente a una fuerza de interacción mutua $F \sim r^\alpha$, y en el que la masa de uno de ellos es mucho menor a la de los otros dos, de forma que este cuerpo no afectará al movimiento de los otros dos, que a su vez generarán un campo que determinará la moción del tercero. Para estudiar el movimiento de éste, se estudiará previamente el de los otros dos, y después se incluirá el tercero, y se estudiará el campo que generan los dos suponiendo que estos tienen un movimiento circular. Concretamente se obtendrán los puntos de equilibrio de este campo, y se hará una discusión analítica de su existencia. También se obtendrán las regiones en las que podrá haber movimiento, dando una descripción cualitativa de la frontera de las mismas. Por último se simularán algunas de estas regiones gracias a un programa cuya creación es ajena a la memoria.

Agradecimientos

Quisiera agradecer al director de esta memoria, el Dr. Benseny, toda la ayuda, ánimos e información proporcionada durante la redacción del trabajo. Me ha ido introduciendo en el tema muy fácilmente, dosificando la información que me daba sesión tras sesión (que han sido muchas) para que no me abrumara y para que pudiera ir reflexionando cómodamente sobre todos los conceptos que me explicaba. He consultado puntualmente algunos libros, y algunos artículos que el Dr. Benseny me ha proporcionado, pero gran parte de mi conocimiento sobre el problema de tres cuerpos se debe a él. Creo que la memoria da buena cuenta de ello, de todo lo que he aprendido de durante la realización de la memoria, y seguramente de todo aquello que no he entendido, cuya carencia encontrará evidente el lector algo introducido en el tema.

Quisiera agradecer a mi madre y mis dos abuelos su apoyo incondicional mientras desarrollaba este TFG, que seguramente hayan aguantado mal humor ocasional, silencios hoscos y demás síntomas de nervios y estrés ante un proyecto importante en tu vida. Por último, mi amigo Joan Giné no puede faltar en estos agradecimientos. Ha escuchado todas las frustraciones y cosas que no fructificaban durante todo mi trabajo, y se ha alegrado de corazón cuando las cosas salían bien, o cuando obtenía uno de los bonitos gráficos que se pueden encontrar en el texto.

Gracias a todas y todos.

Índice

1. Introducción	1
1.1. El proyecto	1
1.2. Estructura de la memoria	2
2. El problema de 2 cuerpos extendido	3
2.1. Cambio a coordenadas relativas al centro de masas	3
2.2. Fuerzas centrales y conservativas. Energía potencial	4
2.3. Conservación del momento lineal, angular y de la energía	5
2.4. Estudio de las órbitas	8
2.4.1. Solución al problema por cuadraturas	8
2.4.2. Expresión de la trayectoria por cuadratura	9
2.4.3. Órbitas circulares. Tercera Ley de Kepler extendida	9
3. El problema extendido de 3 cuerpos, restringido y circular (PE3CRC). Ecuaciones de movimiento	11
3.1. Coordenadas adimensionales sidéreas	11
3.1.1. $\alpha = 1$	13
3.2. Coordenadas adimensionales sinódicas	13
3.2.1. $\alpha = 1$	14
4. Equilibrio del campo hamiltoniano. Puntos de equilibrio y puntos de colisión	15
4.1. Puntos de equilibrio equilaterales($y \neq 0$). L_4 y L_5	15
4.2. Puntos de equilibrio colineales	15
4.2.1. Puntos de colisión	16
4.3. Otros puntos de equilibrio colineales	16
4.3.1. $\alpha < 0$	16
4.3.2. $\alpha = 0$	18
4.3.3. $0 < \alpha < 1$	18
4.3.4. $1 < \alpha < \frac{1}{1-m}$	19
4.3.5. $\frac{1}{1-m} < \alpha < \frac{1}{m}$	20
4.3.6. $\alpha > \frac{1}{m}$	21
4.4. Coincidencias de los puntos de equilibrio	22
4.4.1. Coincidencia en $\alpha = \frac{1}{1-m}$	22

4.4.2.	Coincidencia para $\alpha = \frac{1}{m}$	23
4.5.	Diagrama de bifurcación.	24
4.6.	Resumen de los puntos de equilibrio	25
5.	Curvas de velocidad cero (CVC). Regiones de Hill y constantes de Jacobi extendidas	27
5.1.	Estudio de los puntos críticos de la función Γ	28
5.1.1.	Puntos de equilibrio equilaterales	29
5.1.2.	Puntos de equilibrio colineales: L_1, L_2 y L_3	29
5.1.3.	Puntos de colisión	30
5.2.	Coincidencias de las constantes de Jacobi	31
5.2.1.	Coincidencias para $\alpha = 0$	32
5.2.2.	Coincidencias para $\alpha = \tilde{\alpha}(m)$	32
5.2.3.	Coincidencias para $\alpha = 1$	33
5.2.4.	Coincidencias para $\alpha = \frac{1}{1-m}$ y para $\alpha = \frac{1}{m}$	33
5.3.	Orden de las constantes de Jacobi. Recapitulación de la sección	33
6.	Simulación de las curvas de velocidad cero	37
6.1.	Funcionamiento del simulador: Método de Davidenko y método de Runge-Kutta	37
6.2.	CVC alrededor de los puntos de equilibrio	38
6.3.	Descripción de las CVC para dos casos distintos	40
6.3.1.	Caso gravitatorio. $\alpha = -2$ y $m = 0,4$	40
6.3.2.	Caso $\alpha = 1,5$ y $m = 0,35$	42
7.	Conclusiones	43

1. Introducción

Como estudiante del doble grado en Física y Matemáticas, durante los 5 cursos y medio que ha durado mi estancia en la Universidad, no he parado de ver la mutua alimentación que existe entre estas dos disciplinas. Aún así, no he podido evitar tener preferencias, y he de admitir que la Física, como una ciencia que estudia la naturaleza y el mundo que nos rodea, y su manera de tratar los problemas y los resultados que se extraen, ha ganado la batalla. No obstante, las Matemáticas se han ganado mi completo y absoluto respeto como filosofía de pensamiento primero, y como excelente herramienta para poder desarrollar la Física segundo. Así, llegado el momento de acabar mis estudios de grado, y con el título de Física ya conseguido, me encontraba en la decisión de qué tema abordar en mi TFG de Matemáticas. Esta decisión se resolvió rápidamente al ver la oferta del Dr. Benseny sobre el problema de 3 cuerpos, puesto que este tema relaciona intrínsecamente las dos disciplinas.

1.1. El proyecto

El problema de n cuerpos es un tema ampliamente estudiado en Física, concretamente en el campo de la mecánica celeste (uno de los campos de la Física que más involucra las Matemáticas, mezclando el Análisis, las Ecuaciones Diferenciales y los Sistemas Dinámicos, entre otros). Éste consiste en estudiar el movimiento de n cuerpos debido únicamente a su mutua interacción (la gravitatoria en el caso de la Mecánica Celeste), y lo primero que hay que saber es que para $n \geq 3$ no es resoluble analíticamente. El problema de 3 cuerpos es un caso particular de este problema, como continuación natural del problema de 2 cuerpos, el cual está completamente determinado, existiendo incluso solución a éste por cuadraturas.

Existe un estudio sobre el problema de 3 cuerpos recogido por Szebehely en [1], y nuestro trabajo hace una extensión del mismo. En concreto, el Problema extendido de 3 cuerpos, restringido y circular hace una aproximación al problema de 3 cuerpos, en la que supone que la masa del tercer cuerpo es menor que la de los otros dos, así que éste no les afecta (hipótesis de restringido). Entonces, podemos estudiar primero el problema de 2 cuerpos, y posteriormente incluir el tercero y ver cómo es su movimiento influenciado por los otros dos. Además, hacemos la hipótesis de que el movimiento de los dos cuerpos más masivos es circular centrado en el centro de masas. El motivo para esta hipótesis es que el caso circular es de los más sencillos, y nos permite trabajar el problema analíticamente sin necesidad de cálculo numérico, y hacer un estudio teórico sólido, una de mis intenciones principales al realizar esta memoria. La extensión la hacemos suponiendo que la fuerza de interacción entre los cuerpos es potencial con la distancia entre dos cuerpos $F \sim r^\alpha$, siendo α la potencia. Así pues, en vez de quedarnos en el caso gravitatorio ($\alpha = -2$), estudiamos una familia de problemas de 3 cuerpos restringidos y circulares parametrizada por α , en la que el caso gravitatorio está incluido, todo desde un enfoque clásico newtoniano, y haciendo uso de las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana.

1.2. Estructura de la memoria

En la sección 2 hacemos un análisis del problema de 2 cuerpos extendido, obteniendo alguno de los resultados básicos del mismo, en concreto la conservación del momento angular, que nos dice que los dos cuerpos se mueven en un plano, y la existencia de las órbitas circulares, calculando su radio, con lo que justificamos la hipótesis de movimiento circular. Por último, damos la expresión de la trayectoria en forma de cuadraturas.

En la sección 3 introducimos el tercer cuerpo junto con la hipótesis restringida, y damos las ecuaciones de movimiento. Para ello, usamos la formulación hamiltoniana, y gracias a unos cambios de variable, obtenemos un hamiltoniano en el sistema de coordenadas sinódico que, a parte de ser adimensional, no depende explícitamente del tiempo, con lo que encontramos una integral primera del sistema que nos simplificará el problema. Por último, presentamos las ecuaciones de movimiento en este sistema de coordenadas.

En la sección 4 hacemos un estudio de la estabilidad del campo dado por el hamiltoniano, obteniendo y resolviendo las ecuaciones de equilibrio para encontrar los puntos de equilibrio del sistema. Para ello hacemos una exhaustiva discusión, en función de α y de la masa característica m del problema, de la existencia de estos puntos de equilibrio, tratamos cuándo coinciden y presentamos un diagrama de bifurcación de los mismos.

En la sección 5 presentamos las regiones de Hill, que son las regiones del plano en las que se puede producir el movimiento del tercer cuerpo, y analizamos su frontera, las llamadas curvas de velocidad cero. Demostramos que se pueden tratar como las curvas de nivel que una cierta función Γ y hacemos un estudio de las mismas, en función de α y m , y de los puntos críticos de Γ para poder describir el comportamiento cualitativo de estas curvas de velocidad cero.

Por último, en la sección 6 hacemos un estudio cualitativo del comportamiento de las curvas de velocidad cero, gracias al uso de los resultados obtenidos durante la memoria y también gracias al uso de un simulador, acompañando el texto con varias figuras para facilitar la comprensión. Esto es necesario, puesto que los aspectos que se describen son todos de tendencia visual y en ocasiones difíciles de explicar con palabras, y difícil de imaginar si sólo se lee.

2. El problema de 2 cuerpos extendido

Fijemos un sistema de referencia inercial $\{O; \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ en \mathbb{R}^3 , el cual usaremos hasta nuevo aviso. Sean C_1 y C_2 dos cuerpos de masas m_1 y m_2 , respectivamente, y \vec{r}_1, \vec{r}_2 sus vectores de posición respecto a este sistema de referencia .

Definición 2.1. (Problema de dos cuerpos extendido) *El problema de dos cuerpos extendido consiste en estudiar el movimiento de 2 cuerpos afectados únicamente por su mutua interacción, siendo ésta de la forma que sigue:*

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = -Km_1m_2r_{12}^\alpha \hat{r}_{12}, \quad (2.1)$$

donde \vec{F}_{12} es la fuerza que hace C_1 sobre C_2 , $K \in \mathbb{R}$ es una constante, r_{12} es el módulo del vector $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$, que es el vector posición de C_2 medido desde C_1 , α es el exponente de la fuerza, que es atractiva y sólo depende de la distancia entre los dos cuerpos, y \hat{r}_{12} es el vector unitario con misma dirección y sentido que \vec{r}_{12} .

Aplicando la Segunda Ley de Newton a cada uno de los cuerpos, vemos que las ecuaciones de movimiento que tenemos que resolver son el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} &= \frac{\vec{F}_{21}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)}{m_1} \\ \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} &= \frac{\vec{F}_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)}{m_2} \end{aligned} \right\} . \quad (2.2)$$

2.1. Cambio a coordenadas relativas al centro de masas

Para facilitar el trabajo y demostrar seguidamente diferentes teoremas de conservación, es conveniente hacer un cambio de sistema de referencia.

Definición 2.2. (Centro de masas) *Definimos la posición del centro de masas de nuestro sistema como $\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M}$, donde $M = m_1 + m_2$.*

Si derivamos dos veces la expresión del centro de masas obtenemos, gracias a la ec. 2.2

$$\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \frac{m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2}}{M} = \frac{\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12}}{M} = 0$$

gracias a que $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ por la Tercera Ley de Newton.

Observación 2.3. Esto nos dice que el centro de masas no tiene aceleración, con lo que se mueve a velocidad constante respecto al sistema de referencia inercial considerado, por lo que el sistema de referencia con origen el centro de masas, también será inercial, esto es, que también se cumplirán las leyes de Newton si observamos desde él.

Trabajaremos a partir de ahora en este nuevo sistema de referencia centrado en el centro de masas, y todas las magnitudes cinemáticas y posiciones estarán referidas a él.

Observación 2.4. En el nuevo sistema de referencia $\vec{R} = 0$.

Definición 2.5. (Posición relativa) Sea $\vec{r} := \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ que llamaremos el vector de posición relativa. Es un vector que, como ya se ha dicho antes, tiene su origen en C_1 y su final en C_2 .

Con esto, tenemos las relaciones

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{M} \vec{r} = -\frac{m_2}{M} \vec{r} \quad \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{M} \vec{r} = \frac{m_1}{M} \vec{r}. \quad (2.3)$$

Observación 2.6. Debido a la linealidad de las ecuaciones diferenciales, vemos que es indiferente estudiar \vec{r} , \vec{r}_1 que \vec{r}_2 , puesto que son iguales salvo producto de constantes. Así que bastará con estudiar el movimiento relativo, i.e, la evolución de \vec{r} .

Ahora, restando las ecuaciones 2.2, y teniendo en cuenta que $\vec{r} = \vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21}$ obtenemos la siguiente ecuación para la posición relativa

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -KM r^\alpha \hat{r}, \quad (2.4)$$

donde r es el módulo del vector \vec{r} .

Observación 2.7. (Masa reducida) Vemos que esta ecuación se traduce en que, para estudiar el movimiento de los dos cuerpos, basta con estudiar sólo uno ficticio, de masa reducida $\mu := \frac{m_1 m_2}{M}$, puesto que la ecuación anterior se transforma en ésta:

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -K m_1 m_2 r^\alpha \hat{r}, \quad (2.5)$$

la cual no es más que la Segunda Ley de Newton con la fuerza estudiada para una partícula de posición \vec{r} de masa igual a la masa reducida.

Hemos, pues, reducido el problema de dos cuerpos a un problema de un cuerpo.

2.2. Fuerzas centrales y conservativas. Energía potencial

Definición 2.8. (Campo de fuerzas central) Decimos que un campo de fuerzas $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es central si es continuo y si en cualquier punto la fuerza correspondiente tiene la dirección dada por dicho punto y un punto concreto llamado centro del campo, y el módulo de la misma sólo depende de la distancia al centro. Así, un campo de fuerzas central es de la forma $\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\hat{r}$ con $F(r)$ continua (es el módulo de la fuerza) suponiendo que el origen de coordenadas es el centro del campo.

Observación 2.9. El campo de fuerza de interacción mutua que estamos considerando es central, puesto que si cogemos $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}_{12} = -K m_1 m_2 r^\alpha \hat{r}$, vemos que la dirección es siempre la que te une el punto donde se encuentra C_2 con C_1 , siendo este último el centro del campo. También vemos que el módulo sólo depende de la distancia al centro. Por último, el campo es claramente continuo en $\Omega = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} \neq 0\}$

Definición 2.10. (Campo de fuerzas conservativo) Decimos que un campo de fuerzas es conservativo si existe una función continua $U : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r})$. Llamamos a la función U potencial o energía potencial.

Teorema 2.11. *Un campo central de fuerzas es conservativo.*

Demostración. Para demostrar este resultado, hay que encontrar la función energía potencial. Para empezar, tenemos que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, siendo r el módulo de un vector posición cualquiera $\vec{r} = (x, y, z)$. Entonces, es fácil observar que $\vec{\nabla}r := \left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z} \right) = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right) = \hat{r}$. Como habíamos dicho antes, suponiendo que el centro del campo es el origen de coordenadas, podemos expresar la fuerza como $\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\hat{r}$, con F continuo. Por la continuidad sabemos que existe una función primitiva de F . Proponemos $U = - \int F(r)dr$. Veamos si se cumple la propiedad de ser conservativo.

$$\vec{\nabla}U = - \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \int F(r)dr = -F(r) \left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z} \right) = -F(r)\hat{r} = -\vec{F}(\vec{r})$$

Hemos usado que $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r}$, y lo mismo para y, z . Queda, pues, demostrado lo que queríamos. \square

Corolario 2.12. *La energía potencial asociada a la fuerza objeto de nuestro estudio es*

$$U(r) = \begin{cases} \frac{Km_1m_2}{(\alpha+1)}r^{\alpha+1} + C & \text{si } \alpha \neq -1 \\ Km_1m_2 \ln(r) + C & \text{si } \alpha = -1 \end{cases}. \quad (2.6)$$

Demostración. Puesto que en la demostración del anterior teorema hemos dado la construcción del potencial, basta con aplicar dicha construcción a la fuerza que nos ocupa, y las integrales que resultan son analíticas e inmediatas. \square

Ahora bien, toda energía potencial está definida salvo constante, así que nos queda situar el origen de potenciales. Lo habitual es poner el origen de potenciales en el infinito o en $r = 0$, pero como dependiendo del caso eso nos daría lugar a indeterminaciones indeseadas, vamos a colocarlo en $r = 1$, esto es, $U(r = 1) = 0$. Con esta condición, tenemos finalmente que

$$U(r) = \begin{cases} \frac{Km_1m_2}{\alpha+1} (r^{\alpha+1} - 1) & \text{si } \alpha \neq -1 \\ Km_1m_2 \ln(r) & \text{si } \alpha = -1 \end{cases}. \quad (2.7)$$

2.3. Conservación del momento lineal, angular y de la energía

Salvo que lo digamos, estos resultados son generales y sirven para cualquier sistema de referencia inercial.

Definición 2.13. (Momento lineal) *El momento lineal de una partícula de masa m y vector posición r se define como $\vec{p} := m\vec{v}$, con $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ la velocidad de la misma. Se define el momento lineal de un sistema, \vec{P} como la suma de los momentos lineales de cada uno de los elementos del sistema. En nuestro caso de dos cuerpos, $\vec{P} := \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$, siendo \vec{v}_1 y \vec{v}_2 las velocidades de los cuerpos 1 y 2, respectivamente.*

Teorema 2.14. (Ecuación del momento lineal) La suma de las fuerzas externas que actúan sobre un sistema son iguales a la variación del momento lineal del mismo, esto es

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} . \quad (2.8)$$

Corolario 2.15. (Conservación del momento lineal) En el problema de 2 cuerpos se conserva el momento lineal.

Demostración. En nuestro sistema sólo se consideran las interacciones entre los dos cuerpos, así que no hay fuerzas externas. \square

Esto ya se podría haber predicho, puesto que desde el centro de masas, el momento lineal de un sistema es siempre nulo (en particular, constante), y como el centro de masas en nuestro caso ya hemos razonado que es un sistema de referencia inercial, las leyes de la mecánica se deben mantener, y también debe ser constante.

Definición 2.16. (Momento angular) El momento angular de una partícula de masa m y vector posición \vec{r} respecto el origen de coordenadas se define como $\vec{l} := \vec{r} \times \vec{p}$, siendo \times el producto vectorial. El momento angular de un sistema respecto al origen de coordenadas se define como la suma de los momentos angulares de cada una de las partículas que conforman el sistema.

En nuestro sistema, el momento angular es

$$\begin{aligned} \vec{L} &:= \vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{v}_2 = \frac{-m_2}{M} \vec{r} \times \frac{-m_1 m_2}{M} \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{m_1}{M} \vec{r} \times \frac{m_1 m_2}{M} \frac{d\vec{r}}{dt} = \\ &= \vec{r} \times \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{M^2} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r} \times \mu \frac{d\vec{r}}{dt} . \end{aligned}$$

Para este resultado hemos usado las relaciones 2.3. Vemos que el momento angular del sistema coincide con el momento angular de la partícula ficticia de masa μ que hemos mencionado antes.

Definición 2.17. (Momento de las fuerzas) El momento de una fuerza \vec{F} aplicada en un punto de posición \vec{r} respecto el origen de coordenadas se define como $\vec{\tau} := \vec{r} \times \vec{F}$. El momento total de las fuerzas que actúan en un punto es el momento de la fuerza resultante en dicho punto.

Teorema 2.18. (Ecuación del momento angular) El momento de las fuerzas externas que actúan en un sistema es igual a la variación del momento angular del sistema

$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt} .$$

Corolario 2.19. (Conservación del momento angular) En el problema de 2 cuerpos se conserva el momento angular.

Demostración. En nuestro sistema sólo se consideran las interacciones entre los dos cuerpos, así que no hay fuerzas externas, por lo que no provocan momento y por tanto el momento angular no varía \square

Corolario 2.20. (Bidimensionalidad del problema de dos cuerpos) Los dos cuerpos se mueven en el mismo plano.

Demostración. Tenemos $\vec{L} = \mu \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = c\vec{e}$. Con lo que \vec{r} y $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ están siempre en el mismo plano. Como \vec{r}_1, \vec{r}_2 son paralelos a \vec{r} y \vec{v}_1, \vec{v}_2 son paralelos a \vec{v} , podemos decir que el movimiento de los dos cuerpos está siempre en el mismo plano (el plano ortogonal a \vec{L}). \square

A partir de ahora, podemos suponer que la tercera coordenada es 0 y podemos obviarla, y eso es lo que haremos. En efecto, siempre podemos realizar una rotación de nuestro sistema de referencia inercial centrado en el centro de masas hasta hacer coincidir el eje z con la dirección de \vec{L} , y el movimiento y todas sus funciones y magnitudes se podrían expresar sólo con x e y (bidimensionalmente). Así que sólo necesitaremos dos coordenadas para describir la evolución del sistema, y el potencial se reescribe de manera natural puesto que no habría dependencia real de U con z .

Pasamos ahora a tratar la energía. La energía de nuestro sistema es

$$E = T_1 + T_2 + U_{int} ,$$

siendo $T_i := \frac{1}{2}mv_i^2$ la energía cinética, y $U_{int} := U(r)$ es la energía potencial de interacción dos a dos.

Podemos reescribir la energía en términos de la coordenada de posición relativa. En efecto,

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{M^2} \right) v^2 + U(r) = \frac{1}{2} \mu v^2 + U(r) . \quad (2.9)$$

Es decir, que la energía del sistema es la energía de nuestra partícula ficticia de masa igual a la masa reducida, con lo que podemos tratar el problema de dos cuerpos en términos de energía de un sólo cuerpo, y veremos que podemos resolver el problema de dos cuerpos extendido por medio de cuadraturas integrales. Acabaremos este apartado con el último teorema de conservación.

Teorema 2.21. (Teorema de conservación de la energía) *La energía de nuestro sistema se conserva en el tiempo*

Demostración. Suponiendo $\vec{r} = (x, y)$, tenemos

$$E = \frac{1}{2} \mu v^2 = \frac{1}{2} \mu (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + U(x, y) ,$$

donde hemos introducido la notación $\dot{x} := \frac{dx}{dt}$.

Ahora,

$$\dot{E} = \mu \dot{x} \ddot{x} + \mu \dot{y} \ddot{y} + \dot{x} \frac{\partial U}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial U}{\partial y} = 0 ,$$

puesto que, de la ecuación 2.5 y de la definición de campo conservativo, se tiene que $\mu \ddot{x} = F_x = \frac{-\partial U}{\partial x}$, siendo F_x la componente x de la fuerza \vec{F} de nuestro problema. \square

Recapitulando todo lo que hemos hecho hasta ahora, hemos demostrado que estudiar el problema de dos cuerpos se ha reducido a estudiar sólo uno con una ecuación diferencial (2.5) del tipo de Segunda Ley de Newton, que además se puede hacer de manera bidimensional, y hemos encontrado las 10 integrales primeras o magnitudes conservadas de

nuestro problema de ecuaciones diferenciales, a saber, las 3 componentes de la velocidad del centro de masas (puesto que éste no tiene aceleración), las 3 componentes del momento lineal del sistema, las 3 componentes del momento angular del sistema y la energía del sistema. Todo ello lo hemos hecho mediante dos cambios de sistema de referencia inerciales, puesto que primero hemos empezado con uno cualquiera, luego hemos pasado a uno cuyo origen era el centro de masas, y luego le hemos realizado una rotación para poder tratar nuestro problema bidimensionalmente, alineando el eje z con el constante momento angular.

2.4. Estudio de las órbitas

2.4.1. Solución al problema por cuadraturas

Debido a que el problema que nos ha quedado es plano y con clara simetría central, vamos a hacer un cambio de coordenadas cartesianas (x, y) a coordenadas polares (r, φ) . Recordamos que este cambio se expresaba de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi & r &= +\sqrt{x^2 + y^2} \\ y &= r \sin \varphi & \varphi &= \arctg \frac{y}{x} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Con este cambio,

$$\vec{r} = (x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi) \quad \dot{\vec{r}} := \frac{d\vec{r}}{dt} = (\dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi, \dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi) .$$

Y por tanto, tenemos una nueva expresión para la energía del sistema:

$$E = \frac{1}{2}\mu(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + U(x, y) = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r)$$

Antes de continuar, vamos a calcular \vec{L} y para ello vamos a pasar a las tres dimensiones haciendo $\vec{r} = (x, y, 0)$ y $\dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, 0)$. Con esto, tenemos

$$\vec{L} = \vec{r} \times \mu\dot{\vec{r}} = \mu(0, 0, xy - \dot{x}y) = (0, 0, \mu r^2 \dot{\varphi}) .$$

Esto nos dice que el módulo con signo de \vec{L} es $L = \mu r^2 \dot{\varphi}$, y como el vector es una constante del movimiento, pues L también lo es por extensión. Con esto, hemos conseguido tener una expresión de la energía que depende solo de la coordenada radial (distancia relativa de los dos cuerpos del problema inicial). En efecto,

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r) . \quad (2.11)$$

Ahora, como E también es una constante del movimiento, podemos aislar la velocidad radial \dot{r} y tenemos

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U(r)) - \frac{L^2}{\mu^2 r^2}} .$$

Con la condición inicial $r(0) = r_0$, tenemos que

$$t = \int_{r_0}^r \frac{ds}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U(s)) - \frac{L^2}{\mu^2 s^2}}} . \quad (2.12)$$

Invirtiendo esta función obtenemos $r(t)$. Ahora que tenemos la coordenada radial, la angular la podemos obtener con

$$L = \mu r^2 \dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{L}{\mu r^2} .$$

Y con esto llegamos, suponiendo que $\varphi(t = 0) = 0$ a :

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{L dt'}{\mu r^2(t')} . \quad (2.13)$$

Y esta es la solución a nuestro problema, ahora sólo tendríamos que deshacer todos los cambios de coordenadas.

2.4.2. Expresión de la trayectoria por cuadratura

El problema está solucionado a nivel teórico, pero la mayoría de las integrales resultantes no tendrán expresión analítica, por lo que muchas veces nos interesará tener la órbita no parametrizada por el tiempo, si no dada de manera implícita como una trayectoria, esto es, suponer y encontrar $\varphi = \varphi(r(t))$. Así, sólo hay que calcular una integral en vez de dos, entre otras ventajas.

Entonces tenemos que

$$\frac{L}{\mu r^2} = \dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \dot{r} ,$$

y usando nuestra expresión para \dot{r} en términos de la energía, llegamos a que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{L}{\mu r^2 \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - U(r)) - \frac{L^2}{\mu^2 r^2}}} .$$

Si ahora $\beta := \frac{1}{r}$, tenemos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = - \frac{1}{\sqrt{\frac{2\mu}{L^2} \left(E - U\left(\frac{1}{\beta}\right) \right) - \beta^2}} .$$

Suponiendo la condición inicial $\varphi(\beta_0 = \frac{1}{r_0}) = \varphi_0$, llegamos a la expresión de la trayectoria:

$$\varphi = \varphi_0 - \int_{\beta_0}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{\frac{2\mu}{L^2} \left(E - U\left(\frac{1}{\beta}\right) \right) - \beta^2}} . \quad (2.14)$$

2.4.3. Órbitas circulares. Tercera Ley de Kepler extendida

Como se puede extraer del título de esta memoria, nos interesa el caso en el que los dos cuerpos describen órbitas circulares. Queremos saber, pues, cuál es el radio de dichas órbitas y si existen.

Como se puede ver en la ecuación 2.11, se puede modelizar el problema como el movimiento unidimensional de un cuerpo de coordenada r , movido bajo la acción de un potencial \bar{U} , llamado potencial efectivo, y cuya expresión es

$$\bar{U}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + U(r) . \quad (2.15)$$

Las órbitas circulares tendrán lugar cuando estemos en un máximo (inestable) o un mínimo (estable) del potencial efectivo, y el valor de E sea el de ese extremo relativo de \bar{U} . Sea \tilde{R} el radio de la órbita. Entonces se debe cumplir que $\frac{d\bar{U}}{dr}(\tilde{R}) = 0$.

$$\frac{d\bar{U}}{dr}(\tilde{R}) = -\frac{L^2}{\mu\tilde{R}^3} + Km_1m_2\tilde{R}^\alpha .$$

Debido a que en este caso de órbita circular, tenemos que $L = \mu\tilde{R}^2\omega$, donde $\omega = \dot{\varphi}$ porque es constante, llegamos a que la condición que debe cumplir \tilde{R} es :

$$\omega^2\tilde{R}^{1-\alpha} = KM . \quad (2.16)$$

Para llegar aquí hay que recordar que $\mu = \frac{m_1m_2}{M}$.

Esta condición es la Tercera Ley de Kepler Extendida (para órbitas circulares). En efecto, si consideramos el caso gravitatorio ($\alpha = -2$), y tenemos en cuenta que el periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$, llegamos a que

$$\frac{\tilde{R}^3}{T^2} = \frac{KM}{4\pi^2} .$$

Esto es lo que dicta la Tercera Ley de Kepler, que el cubo del radio de la órbita es proporcional al cuadrado del periodo de la misma.

3. El problema extendido de 3 cuerpos, restringido y circular (PE3CRC). Ecuaciones de movimiento

Sean C_1 , C_2 y C_3 tres cuerpos de masas m_1 , m_2 y m_3 , respectivamente.

Definición 3.1. (*PE3CRC*) *El problema extendido de 3 cuerpos, restringido y circular consiste en determinar las posiciones y velocidades de 3 cuerpos en el movimiento debido únicamente a su mutua interacción, siendo esta del mismo estilo que en la sección anterior. Es extendido porque no nos restringimos al caso gravitatorio, si no que hacemos que la fuerza dependa de un parámetro, y es restringido porque suponemos que $m_3 \ll m_1, m_2$, con lo que el movimiento de C_3 (el secundario) no afecta al de los otros dos, que llamaremos primarios. Es circular porque suponemos que el movimiento de los primarios son órbitas circulares alrededor del centro de masas.*

Es decir que, una vez que en la sección anterior hemos determinado el movimiento de dos cuerpos (los primarios), ahora simplemente tenemos que incluir el tercer cuerpo y suponer que los primarios no se verán afectados, así que sólo analizaremos qué pasa con el secundario.

Vamos a fijar el sistema de referencia en el centro de masas de los primarios, como en la anterior sección, y vamos a suponer que estos realizan las órbitas circulares que ya hemos estudiado. Para simplificar la notación vamos a suponer que el radio de la órbita es $\tilde{R} = \rho$. Entonces, definiendo $m := \frac{m_1}{M}$, y suponiendo que la coordenada temporal es \tilde{t} , que la velocidad angular es ω (ya demostramos que era constante en la órbita circular) y que las posiciones iniciales de los primarios son, en coordenadas cartesianas, $((m-1)\rho, 0)$ y $(m\rho, 0)$, respectivamente, tenemos que sus órbitas son las que siguen:

$$(\tilde{X}_1, \tilde{Y}_1) = (m-1)\rho(\cos \omega\tilde{t}, \sin \omega\tilde{t}) \quad (\tilde{X}_2, \tilde{Y}_2) = m\rho(\cos \omega\tilde{t}, \sin \omega\tilde{t}) . \quad (3.1)$$

Aquí los subíndices 1 y 2 se refieren a C_1 y C_2 , respectivamente. Vayamos ahora a por el tercer cuerpo, cuyas coordenadas serán (\tilde{X}, \tilde{Y}) . Aplicando sobre éste la Segunda Ley de Newton, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{X}}{d\tilde{t}^2} &= -KMm\tilde{R}_1^{\alpha-1}(\tilde{X} - (m-1)\rho \cos \omega\tilde{t}) - KM(1-m)\tilde{R}_2^{\alpha-1}(\tilde{X} - m\rho \cos \omega\tilde{t}) \\ \frac{d^2 \tilde{Y}}{d\tilde{t}^2} &= -KMm\tilde{R}_1^{\alpha-1}(\tilde{Y} - (m-1)\rho \sin \omega\tilde{t}) - KM(1-m)\tilde{R}_2^{\alpha-1}(\tilde{Y} - m\rho \sin \omega\tilde{t}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

, donde hemos usado que:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_1 &= \sqrt{(\tilde{X} - (m-1)\rho \cos \omega\tilde{t})^2 + (\tilde{Y} - (m-1)\rho \sin \omega\tilde{t})^2} . \\ \tilde{R}_2 &= \sqrt{(\tilde{X} - m\rho \cos \omega\tilde{t})^2 + (\tilde{Y} - m\rho \sin \omega\tilde{t})^2} . \end{aligned}$$

3.1. Coordenadas adimensionales sidéreas

Nos interesa trabajar con unas coordenadas más manejables, que sean adimensionales, así que vamos a introducir un reescalado de posiciones y tiempo, de tal manera que

$$(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \rho(X, Y) \quad \omega\tilde{t} = t$$

Con ese cambio, las ecuaciones quedan de la manera que sigue:

$$\rho\omega^2\frac{d^2X}{dt^2} = -KMm\rho^\alpha R_1^{\alpha-1}(X - (m-1)\cos t) - KM(1-m)\rho^\alpha R_2^{\alpha-1}(X - m\cos t)$$

$$\rho\omega^2\frac{d^2Y}{dt^2} = -KMm\rho^\alpha R_1^{\alpha-1}(Y - (m-1)\sin t) - KM(1-m)\rho^\alpha R_2^{\alpha-1}(Y - m\sin t)$$

Ahora, usando la Tercera Ley de Kepler de la sección anterior(ec. 2.16) $\omega^2\rho^{\alpha+1} = KM$, llegamos a las ecuaciones de movimiento en coordenadas adimensionales:

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -mR_1^{\alpha-1}(X - (m-1)\cos t) - (1-m)R_2^{\alpha-1}(X - m\cos t) \quad (3.3)$$

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = -mR_1^{\alpha-1}(Y - (m-1)\sin t) - (1-m)R_2^{\alpha-1}(Y - m\sin t)$$

,donde tenemos

$$R_1 = \sqrt{(X - (m-1)\cos t)^2 + (Y - (m-1)\sin t)^2} .$$

$$R_2 = \sqrt{(X - m\cos t)^2 + (Y - m\sin t)^2} .$$

Con este cambio de unidades hemos conseguido que:

1. Las masas escaladas no tienen unidades y suman 1.
2. No aparece la constante K de la fuerza.
3. Se puede comprobar fácilmente que los cuerpos primarios están a distancia 1, y que tardan un tiempo de 2π en completar una órbita.
4. Las longitudes y los tiempos no tienen unidades.

Estas coordenadas se llaman coordenadas sidéreas. Observamos también que todas estas expresiones son válidas **para cualquier** α .

Procedamos ahora a calcular el lagrangiano y hamiltoniano en este sistema con estas coordenadas. Por definición, el lagrangiano se calcula como [2], [4], [3]:

$$L := T - U = \frac{1}{2}m_3(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) - \frac{Km_1m_3}{\alpha+1} \left(\tilde{R}_1^{\alpha+1} - 1 \right) - \frac{Km_2m_3}{\alpha+1} \left(\tilde{R}_2^{\alpha+1} - 1 \right) =$$

$$= \frac{1}{2}m_3\rho^2\omega^2(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) - \rho^{\alpha+1}\frac{Km_1m_3}{\alpha+1} (R_1^{\alpha+1} - 1) - \rho^{\alpha+1}\frac{Km_2m_3}{\alpha+1} (R_2^{\alpha+1} - 1) .$$

Observamos que el -1 que aparece en las energías potenciales tiene unidades de dimensión a la $\alpha + 1$ -ésima potencia, con lo que al pasar a coordenadas adimensionales, se queda como $-\rho^{\alpha+1} \cdot 1$, siendo este último uno ya adimensional. Ahora, usando la ecuación 2.16, recordando que $m = \frac{m_1}{M}$, y dividiendo toda la expresión por $m_3\rho^2\omega^2$, podemos obtener una expresión para el lagrangiano en coordenadas sidéreas. Este paso se puede hacer puesto que sabemos que las formulaciones lagrangiana y hamiltoniana son invariantes por producto de constante.

$$L_{sid} = L_{sid}(X, Y, p_X, p_Y, t) = \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) - \frac{m}{\alpha+1} (R_1^{\alpha+1} - 1) - \frac{1-m}{\alpha+1} (R_2^{\alpha+1} - 1) .$$

Y el correspondiente hamiltoniano es

$$H_{sid}(X, Y, p_X, p_Y, t) = \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{m}{\alpha+1} (R_1^{\alpha+1} - 1) + \frac{1-m}{\alpha+1} (R_2^{\alpha+1} - 1) . \quad (3.4)$$

3.1.1. $\alpha = 1$

Las expresiones anteriores eran válidas para $\alpha \neq 1$. Para $\alpha = 1$ se procede de la misma manera y se acaba obteniendo:

$$L_{sid} = L_{sid}(X, Y, p_X, p_Y, t) = \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) - m \ln R_1 - (1 - m) \ln R_2 .$$

$$H_{sid} = H_{sid}(X, Y, p_X, p_Y, t) = \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + m \ln R_1 + (1 - m) \ln R_2 .$$

Estos hamiltonianos **dependen explícitamente del tiempo**. Nuestro siguiente paso, pues, será hacer un nuevo cambio de coordenadas que nos solvete este problema. Vamos a presentar las coordenadas sinódicas.

3.2. Coordenadas adimensionales sinódicas

La dependencia en el tiempo que hemos mencionado antes es debida a la rotación de los dos cuerpos primarios, que estan describiendo circunferencias alrededor del origen. Nos fijamos que son circunferencias recorridas con velocidad angular 1. Así que, si conseguimos fijar estos dos cuerpos, esperamos eliminar esa dependencia. Para ello, lo unico que hay que hacer es definir un nuevo sistema de coordenadas (x, y) que consiste en hacer una rotación de ángulo $-t$ a las coordenadas sidéreas. Esto es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_{-t} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} . \quad (3.5)$$

Este nuevo sistema de coordenadas vemos que deja fijas las posiciones de los primarios en

$$(x_1, y_1) = (m - 1, 0) \quad (x_2, y_2) = (m, 0) .$$

Procediendo de igual manera que en el apartado anterior, vamos a calcular el lagrangiano del sistema, y resulta que es

$$L = L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x\dot{y} - \dot{x}y - \frac{m}{\alpha + 1}(r_1^{\alpha+1} - 1) - \frac{1 - m}{\alpha + 1}(r_2^{\alpha+1} - 1) .$$

En esta expresión, hemos definido:

$$r_1 = \sqrt{(x - (m - 1))^2 + y^2} .$$

$$r_2 = \sqrt{(x - m)^2 + y^2} .$$

Entonces los momentos conjugados son :

$$\begin{cases} p_x := \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} - y \\ p_y := \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} + x \end{cases} .$$

Y con esto, al fin, el hamiltoniano resulta ser:

$$H = H(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - xp_y + yp_x + \frac{m}{\alpha + 1}(r_1^{\alpha+1} - 1) + \frac{1 - m}{\alpha + 1}(r_2^{\alpha+1} - 1) . \quad (3.6)$$

3.2.1. $\alpha = 1$

Como antes, hay que analizar por separado el caso $\alpha = 1$. En este caso, lo que obtenemos es:

$$L = L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x\dot{y} - \dot{x}y - m \ln r_1 - (1 - m) \ln r_2 .$$

$$H = H(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - xp_y + yp_x + m \ln r_1 + (1 - m) \ln r_2 .$$

Y tal y como queríamos, hemos eliminado la dependencia temporal del hamiltoniano. Es oportuno observar que hemos conseguido una simplificación del sistema, puesto que todo hamiltoniano que cumple $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ es automáticamente una **integral primera** del problema, con lo que tenemos que dada una órbita del tercer cuerpo, el hamiltoniano es constante en toda ella. Vamos a acabar esta sección calculando las ecuaciones de Hamilton para nuestro sistema, que son las que tendremos que resolver para solucionar el problema de 3 cuerpos. Estas son las que siguen:

$$\begin{cases} \dot{x} = p_x + y & \dot{p}_x = p_y - mr_1^{\alpha-1}(x - (m - 1)) - (1 - m)r_2^{\alpha-1}(x - m) \\ \dot{y} = p_y - x & \dot{p}_y = -p_x - mr_1^{\alpha-1}y - (1 - m)r_2^{\alpha-1}y \end{cases} . \quad (3.7)$$

Si las combinamos, llegamos a un sistema de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden, el cual es este:

$$\begin{cases} \ddot{x} = x + 2\dot{y} - mr_1^{\alpha-1}(x - (m - 1)) - (1 - m)r_2^{\alpha-1}(x - m) \\ \ddot{y} = y - 2\dot{x} - mr_1^{\alpha-1}y - (1 - m)r_2^{\alpha-1}y \end{cases} . \quad (3.8)$$

Observamos una cosa interesante y es que estas ecuaciones son válidas **para cualquier** α .

4. Equilibrio del campo hamiltoniano. Puntos de equilibrio y puntos de colisión

Una vez hemos obtenido el campo hamiltoniano, vamos a proceder a estudiarlo en profundidad. Para ello vamos a ver cuáles son sus **puntos de equilibrio**, es decir, aquellos puntos en que el tercer cuerpo podría permanecer en reposo. Son los puntos en que $\ddot{x} = \ddot{y} = \dot{x} = \dot{y} = 0$. En estos, no hay velocidad ni aceleración, y se llaman **Puntos de Lagrange** en el caso gravitatorio ($\alpha = -2$). Las ecuaciones que hay que resolver son, pues:

$$0 = x - mr_1^{\alpha-1}(x - m + 1) - (1 - m)r_2^{\alpha-1}(x - m)$$

$$0 = y - mr_1^{\alpha-1}y - (1 - m)r_2^{\alpha-1}y$$

Para $\alpha = 1$, este sistema de ecuaciones es degenerado, todos los puntos son solución y por tanto todos los puntos son puntos de equilibrio. Vamos a considerar entonces en esta sección que $\alpha \neq 1$ y, por coherencia con la definición, que $0 < m < 1$.

4.1. Puntos de equilibrio equilaterales ($y \neq 0$). L_4 y L_5

Estos puntos son los que están fuera del eje x , es decir, aquellos para los que $y \neq 0$. Si simplificamos y en la segunda ecuación, la multiplicamos por $x - m$ y le restamos la primera, llegamos a la condición

$$0 = m(1 - r_1^{\alpha-1}) \Rightarrow r_1 = 1$$

Por último, si sustituimos este resultado en la segunda ecuación llegamos a la condición que

$$0 = (1 - m)(1 - r_2^{\alpha-1}) \Rightarrow r_2 = 1$$

Como $r_1(x, y)$ es la distancia del punto (x, y) al cuerpo 1, y lo mismo para $r_2(x, y)$ con el cuerpo 2, la condición $r_1 = r_2 = 1$ consiste en que los puntos de equilibrio equilaterales forman un triángulo equilátero de lado 1 con los dos cuerpos primarios. Resolviendo, obtenemos que

$$L_4 = \left(m - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad L_5 = \left(m - \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

4.2. Puntos de equilibrio colineales

Estos puntos de equilibrio son aquellos que están en el eje x , es decir, aquellos para los que $y = 0$. Entonces, sólo nos queda la primera ecuación, que nos la escribimos como

$$0 = x - m \operatorname{sign}(x - m + 1)|x - m + 1|^\alpha - (1 - m) \operatorname{sign}(x - m)|x - m|^\alpha,$$

donde estamos introduciendo la función $\operatorname{sign} : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ tal que

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}.$$

4.2.1. Puntos de colisión

Vemos que, para $\alpha \geq 0$, hay dos soluciones inmediatas que son $x = m$ y $x = m - 1$, que dan lugar a los puntos de equilibrio siguientes:

$$L_0 = (m, 0) \quad , \quad L_{-1} = (m - 1, 0) .$$

4.3. Otros puntos de equilibrio colineales

A parte de las colisiones, hay otros puntos de equilibrio colineales. Para ello, vamos a intentar ver cuántas soluciones más tiene la ecuación de los puntos de equilibrio colineales. Si hacemos $\xi := x - m$ y distinguimos 3 casos, para eliminar los valores absolutos, tenemos:

$$\begin{aligned} f(\xi_1) &= \xi_1 + m - m(\xi_1 + 1)^\alpha + (1 - m)(-\xi_1)^\alpha = 0 & -1 < \xi_1 < 0 \\ g(\xi_2) &= \xi_2 + m + m(-\xi_2 - 1)^\alpha + (1 - m)(-\xi_2)^\alpha = 0 & -1 > \xi_2 \\ h(\xi_3) &= \xi_3 + m - m(\xi_3 + 1)^\alpha - (1 - m)\xi_3^\alpha = 0 & 0 < \xi_3 \end{aligned} .$$

Antes que nada, vamos a ver el aspecto de estas tres funciones para diferentes α . La figura 1 lo muestra.

Es decir, partimos el eje x en tres partes distintas, una que está a la izquierda del cuerpo 1, a la que corresponde la función g , otra que está en el medio de los dos primarios, que corresponde a la función f , y otra que está a la derecha del cuerpo 2, a la que corresponde la función h . Vemos que no hemos considerado la igualdad en las particiones; esto es porque correspondería a las colisiones, y ya las hemos tratado.

Vamos a hacer una discusión de estas tres funciones para ver, en función de α y m , cuántos ceros tienen. Gracias a la figura anterior, observamos que hay un cambio cualitativo del comportamiento de estas funciones para algunos α , como $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ o $\alpha = 2,5 = \frac{1}{m}$ en nuestro caso. Usaremos esto en la discusión. Antes de empezar observamos que f , g y h son continuas en sus respectivos intervalos, lo que nos proporciona la validez de los argumentos que ahora usaremos.

4.3.1. $\alpha < 0$

1. Se cumple que

$$\lim_{\xi_1 \rightarrow -1^+} f(\xi_1) = -\infty , \quad f'(\xi_1) > 0 , \quad \lim_{\xi_1 \rightarrow 0^-} f(\xi_1) = +\infty ,$$

por lo que f es estrictamente creciente en el intervalo considerado y empieza con valores negativos y acaba con valores positivos, por lo que sólo tiene un cero, $\xi_1(m, \alpha)$ y tenemos el punto de equilibrio

$$L_1 = (m + \xi_1(m, \alpha), 0) .$$

2. Se cumple que

$$\lim_{\xi_2 \rightarrow -\infty} g(\xi_2) = -\infty , \quad g'(\xi_2) > 0 , \quad \lim_{\xi_2 \rightarrow -1^-} g(\xi_2) = +\infty ,$$

por lo que g es estrictamente creciente en el intervalo considerado y empieza con valores negativos y acaba con valores positivos, por lo que sólo tiene un cero, $\xi_2(m, \alpha)$ y tenemos el punto de equilibrio

$$L_2 = (m + \xi_2(m, \alpha), 0) .$$

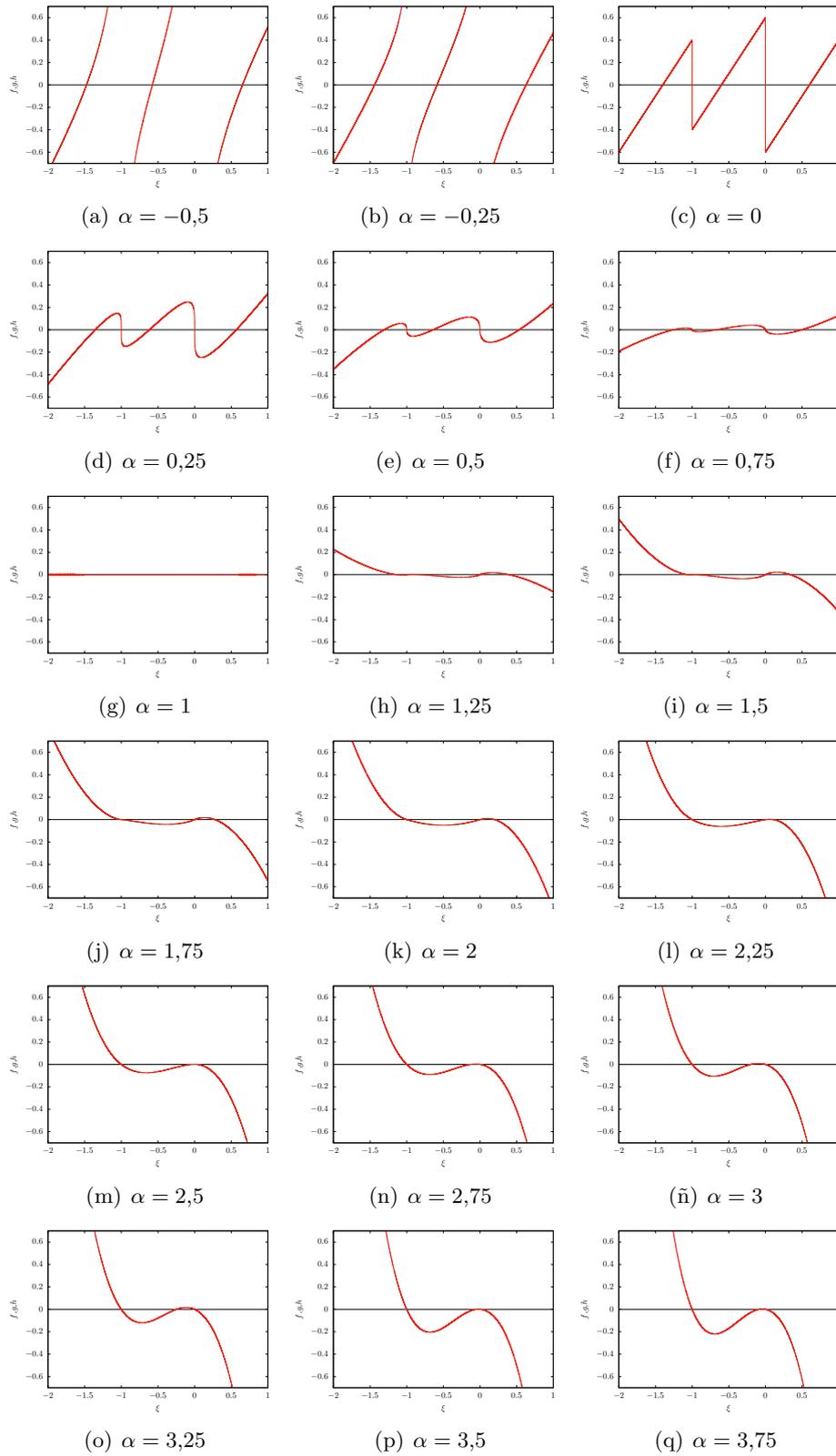


Figura 1: Representaciones gráficas de las funciones f , g y h en función de ξ para diferentes valores de α . Estos gráficos están hechos para $m = 0,4$

3. Se cumple que

$$\lim_{\xi_3 \rightarrow 0^+} h(\xi_3) = -\infty, \quad h'(\xi_3) > 0, \quad \lim_{\xi_3 \rightarrow +\infty} h(\xi_3) = +\infty,$$

por lo que h es estrictamente creciente en el intervalo considerado y empieza con valores negativos y acaba con valores positivos, por lo que sólo tiene un cero, $\xi_3(m, \alpha)$ y tenemos el punto de equilibrio

$$L_3 = (m + \xi_3(m, \alpha), 0).$$

4.3.2. $\alpha = 0$

Para $\alpha = 0$, tenemos que las colisiones dejan de ser singularidades y se convierten en discontinuidades de salto en el gráfico de las tres funciones f, g, h .

$$\begin{aligned} f(\xi_1) &= \xi_1 + 1 - m \\ g(\xi_2) &= \xi_2 + 1 + m, \\ h(\xi_3) &= \xi_3 - 1 + m \end{aligned}$$

por lo que los puntos de equilibrio son, a parte de las colisiones,

$$L_1 = (2m - 1, 0), \quad L_2 = (-1, 0), \quad L_3 = (1, 0).$$

4.3.3. $0 < \alpha < 1$

1. Se cumple que

$$\lim_{\xi_1 \rightarrow -1^+} f''(\xi_1) = +\infty, \quad f'''(\xi_1) < 0, \quad \lim_{\xi_1 \rightarrow 0^-} f''(\xi_1) = -\infty,$$

lo que nos demuestra que f'' sólo tiene un cero, es decir que f sólo tiene un punto de inflexión. Como f'' sólo cambia una vez de signo, vemos que la monotonía de f' consiste en dos intervalos, el primero en que f' es creciente y el segundo, decreciente. Como también se cumple que

$$\begin{aligned} \lim_{\xi_1 \rightarrow -1^+} f'(\xi_1) &= -\infty, & \lim_{\xi_1 \rightarrow 0^-} f'(\xi_1) &= -\infty, \\ \lim_{\xi_1 \rightarrow -1^+} f(\xi_1) &= 0, & \lim_{\xi_1 \rightarrow 0^-} f(\xi_1) &= 0, \end{aligned}$$

esto nos dice que f' tiene dos ceros, el primero correspondiente a un mínimo relativo y el segundo a un máximo relativo. La existencia de estos ceros es debida a que f comienza valiendo 0 y decreciendo, pero también acaba en cero, así que en algún momento debe crecer, existiendo un ξ_{1_0} tal que $f'(\xi_{1_0}) > 0$, con lo que f' , cuyos límites en los extremos es negativo, tiene que pasar dos y sólo dos veces por el 0. Es decir, que f primero es decreciente, luego creciente, y luego decreciente otra vez. Teniendo en cuenta los límites de f , se deduce finalmente que f tiene una única solución en este intervalo $\xi_1(m, \alpha)$, que conecta con la solución demostrada en el apartado anterior. Así pues, tenemos el punto de equilibrio

$$L_1 = (m + \xi_1(m, \alpha), 0).$$

2. Se cumple que

$$\lim_{\xi_2 \rightarrow -\infty} g'(\xi_2) = 1, \quad g''(\xi_2) < 0, \quad \lim_{\xi_2 \rightarrow -1^-} g'(\xi_2) = -\infty,$$

lo que nos demuestra que g' sólo tiene un cero, es decir que g sólo tiene un extremo relativo, que es un máximo relativo por el signo de g'' . Como además también se cumple que

$$\lim_{\xi_2 \rightarrow -\infty} g(\xi_2) = -\infty, \quad g(-1) = 0,$$

se deduce de esto g sólo tiene un cero en su correspondiente intervalo $\xi_2(m, \alpha)$, que conecta con la solución demostrada en el apartado anterior. Así pues, tenemos el punto de equilibrio

$$L_2 = (m + \xi_2(m, \alpha), 0).$$

3. Se cumple que

$$\lim_{\xi_3 \rightarrow 0^+} h'(\xi_3) = -\infty, \quad h''(\xi_3) > 0, \quad \lim_{\xi_3 \rightarrow +\infty} h'(\xi_3) = 1,$$

lo que nos demuestra que h' sólo tiene un cero, es decir que h sólo tiene un extremo relativo, que es un mínimo relativo por el signo de h'' . Como además también se cumple que

$$h(0) = 0, \quad \lim_{\xi_3 \rightarrow +\infty} h(\xi_3) = +\infty,$$

se deduce de esto h sólo tiene un cero en su correspondiente intervalo $\xi_3(m, \alpha)$ que conecta con la solución demostrada en el apartado anterior. Así pues, tenemos el punto de equilibrio

$$L_3 = (m + \xi_3(m, \alpha), 0).$$

4.3.4. $1 < \alpha < \frac{1}{1-m}$

1. Se cumple que

$$\lim_{\xi_1 \rightarrow -1^+} f''(\xi_1) = -\infty, \quad f'''(\xi_1) > 0, \quad \lim_{\xi_1 \rightarrow 0^-} f''(\xi_1) = +\infty,$$

lo que nos demuestra que f'' sólo tiene un cero, es decir que f sólo tiene un punto de inflexión. Como f'' sólo cambia una vez de signo, vemos que la monotonía de f' consiste en dos intervalos, el primero en que f' es decreciente y el segundo, creciente. Como también se cumple que

$$\lim_{\xi_1 \rightarrow -1^+} f'(\xi_1) = -1 - (1-m)\alpha > 0, \quad \lim_{\xi_1 \rightarrow 0^-} f'(\xi_1) = 1 - m\alpha > 0,$$

$$\lim_{\xi_1 \rightarrow -1^+} f(\xi_1) = 0, \quad \lim_{\xi_1 \rightarrow 0^-} f(\xi_1) = 0.$$

esto nos dice que f' tiene dos ceros, el primero correspondiente a un máximo relativo y el segundo a un mínimo relativo. La existencia de estos ceros es debida a que f comienza valiendo 0 y creciendo, pero también acaba en cero, así que en algún momento debe decrecer, existiendo un ξ_{1_0} tal que $f'(\xi_{1_0}) < 0$, con lo que f' , cuyos límites en los extremos son positivos, tiene que pasar dos y sólo dos veces por el 0. Es decir, que f primero es creciente, luego decreciente, y luego creciente otra vez.

Teniendo en cuenta los límites de f , se deduce finalmente que f tiene una única solución en este intervalo $\xi_1(m, \alpha)$, que conecta con la solución demostrada en el apartado anterior. Así pues, tenemos el punto de equilibrio

$$L_1 = (m + \xi_1(m, \alpha), 0) .$$

2. Se cumple que

$$\lim_{\xi_2 \rightarrow -\infty} g'(\xi_2) = -1 , \quad g''(\xi_2) > 0 , \quad \lim_{\xi_2 \rightarrow -1^-} g'(\xi_2) = 1 - (1-m)\alpha > 0 ,$$

lo que nos demuestra que g' sólo tiene un cero, es decir que g sólo tiene un extremo relativo, que es un mínimo relativo por el signo de g'' . Como además también se cumple que

$$\lim_{\xi_2 \rightarrow -\infty} g(\xi_2) = +\infty , \quad g(-1) = 0 ,$$

se deduce de esto g sólo tiene un cero en su correspondiente intervalo $\xi_2(m, \alpha)$, que conecta con la solución demostrada en el apartado anterior. Así pues, tenemos el punto de equilibrio

$$L_2 = (m + \xi_2(m, \alpha), 0) .$$

3. Se cumple que

$$\lim_{\xi_3 \rightarrow 0^+} h'(\xi_3) = 1 - m\alpha > 0 , \quad h''(\xi_3) < 0 , \quad \lim_{\xi_3 \rightarrow +\infty} h'(\xi_3) = -1 ,$$

lo que nos demuestra que h' sólo tiene un cero, es decir que h sólo tiene un extremo relativo, que es un máximo relativo por el signo de h'' . Como además también se cumple que

$$h(0) = 0 , \quad \lim_{\xi_3 \rightarrow +\infty} h(\xi_3) = -\infty ,$$

se deduce de esto h sólo tiene un cero en su correspondiente intervalo $\xi_3(m, \alpha)$ que conecta con la solución demostrada en el apartado anterior. Así pues, tenemos el punto de equilibrio

$$L_3 = (m + \xi_3(m, \alpha), 0) .$$

4.3.5. $\frac{1}{1-m} < \alpha < \frac{1}{m}$

1. Se cumple que

$$\lim_{\xi_1 \rightarrow -1^+} f''(\xi_1) = -\infty , \quad f'''(\xi_1) > 0 , \quad \lim_{\xi_1 \rightarrow 0^-} f''(\xi_1) = +\infty ,$$

lo que nos demuestra que f'' sólo tiene un cero, es decir que f' sólo tiene un punto de inflexión. Como f'' sólo cambia una vez de signo, vemos que la monotonía de f' consiste en dos intervalos, el primero en que f' es decreciente y el segundo, creciente. Como también se cumple que

$$\lim_{\xi_1 \rightarrow -1^+} f'(\xi_1) = -1 - (1-m)\alpha < 0 , \quad \lim_{\xi_1 \rightarrow 0^-} f'(\xi_1) = 1 - m\alpha > 0 ,$$

$$\lim_{\xi_1 \rightarrow -1^+} f(\xi_1) = 0 , \quad \lim_{\xi_1 \rightarrow 0^-} f(\xi_1) = 0 ,$$

esto nos dice que f' tiene sólo un cero, correspondiente a un máximo relativo. Es decir, que f primero es decreciente, y luego creciente. Teniendo en cuenta los límites de f , se finalmente que f no tiene ceros en su intervalo, con lo que en este caso L_1 no existe.

2. Se cumple que

$$\lim_{\xi_2 \rightarrow -\infty} g'(\xi_2) = -1, \quad g''(\xi_2) > 0, \quad \lim_{\xi_2 \rightarrow -1^-} g'(\xi_2) = 1 - (1-m)\alpha < 0,$$

lo que nos demuestra que g' no tiene ceros, siendo estrictamente negativa, es decir, haciendo que g sea estrictamente decreciente. Como además también se cumple que

$$\lim_{\xi_2 \rightarrow -\infty} g(\xi_2) = +\infty, \quad g(-1) = 0,$$

se tiene que g no tiene ceros, con lo que en este caso, L_2 no existe.

3. Se cumple que

$$\lim_{\xi_3 \rightarrow 0^+} h'(\xi_3) = 1 - m\alpha > 0, \quad h''(\xi_3) < 0, \quad \lim_{\xi_3 \rightarrow +\infty} h'(\xi_3) = -1,$$

lo que nos demuestra que h' sólo tiene un cero, es decir que h sólo tiene un extremo relativo, que es un máximo relativo por el signo de h'' . Como además también se cumple que

$$h(0) = 0, \quad \lim_{\xi_3 \rightarrow +\infty} h(\xi_3) = -\infty,$$

se deduce de esto h sólo tiene un cero en su correspondiente intervalo $\xi_3(m, \alpha)$ que conecta con la solución demostrada en el apartado anterior. Así pues, tenemos el punto de equilibrio

$$L_3 = (m + \xi_3(m, \alpha), 0).$$

Vemos que en este caso lo que ha pasado es que L_1 y L_2 han dejado de existir. L_1 está a la derecha de L_{-1} y L_2 a la izquierda, así que lo que cabe esperar es que estos tres puntos formen una bifurcación de horquilla en $\alpha = \frac{1}{1-m}$. Más adelante comprobaremos si es así.

4.3.6. $\alpha > \frac{1}{m}$

1. Se cumple que

$$\lim_{\xi_1 \rightarrow -1^+} f''(\xi_1) = +\infty, \quad f'''(\xi_1) < 0, \quad \lim_{\xi_1 \rightarrow 0^-} f''(\xi_1) = -\infty,$$

lo que nos demuestra que f'' sólo tiene un cero, es decir que f sólo tiene un punto de inflexión. Como f'' sólo cambia una vez de signo, vemos que la monotonía de f' consiste en dos intervalos, el primero en que f' es creciente y el segundo, decreciente. Como también se cumple que

$$\lim_{\xi_1 \rightarrow -1^+} f'(\xi_1) = -1 - (1-m)\alpha < 0, \quad \lim_{\xi_1 \rightarrow 0^-} f'(\xi_1) = 1 - m\alpha < 0,$$

$$\lim_{\xi_1 \rightarrow -1^+} f(\xi_1) = 0, \quad \lim_{\xi_1 \rightarrow 0^-} f(\xi_1) = 0,$$

esto nos dice que f' tiene dos ceros, el primero correspondiente a un máximo relativo y el segundo a un mínimo relativo. La existencia de estos ceros es debida a que f comienza valiendo 0 y decreciendo, pero también acaba en cero, así que en algún momento debe crecer, existiendo un ξ_{1_0} tal que $f'(\xi_{1_0}) > 0$, con lo que f' , cuyos

límites en los extremos son negativos, tiene que pasar dos y sólo dos veces por el 0. Es decir, que f primero es decreciente, luego creciente, y luego decreciente otra vez. Teniendo en cuenta los límites de f , se deduce finalmente que f tiene una única solución en este intervalo $\xi_1(m, \alpha)$. Así pues, tenemos el punto de equilibrio

$$L_1 = (m + \xi_1(m, \alpha), 0) .$$

2. Se cumple que

$$\lim_{\xi_2 \rightarrow -\infty} g'(\xi_2) = -1 , \quad g''(\xi_2) > 0 , \quad \lim_{\xi_2 \rightarrow -1^-} g'(\xi_2) = 1 - (1-m)\alpha < 0 ,$$

lo que nos demuestra que g' no tiene ceros, siendo estrictamente negativa, es decir, haciendo que g sea estrictamente decreciente. Como además también se cumple que

$$\lim_{\xi_2 \rightarrow -\infty} g(\xi_2) = +\infty , \quad g(-1) = 0 ,$$

se tiene que g no tiene ceros, con lo que en este caso, L_2 no existe.

3. Se cumple que

$$\lim_{\xi_3 \rightarrow 0^+} h'(\xi_3) = 1 - m\alpha < 0 , \quad h''(\xi_3) < 0 , \quad \lim_{\xi_3 \rightarrow +\infty} h'(\xi_3) = -1 ,$$

lo que nos demuestra que h' no tiene ceros, siendo estrictamente negativa, es decir, haciendo que h sea estrictamente decreciente. Como además también se cumple que

$$h(0) = 0 , \quad \lim_{\xi_3 \rightarrow +\infty} h(\xi_3) = -\infty ,$$

se tiene que h no tiene ceros, con lo que en este caso, L_3 no existe.

Vemos que en este caso lo que ha pasado es que L_3 ha dejado de existir y ha aparecido de nuevo L_1 . Como L_3 está a la derecha de L_0 y L_1 a la izquierda, la única bifurcación compatible con este hecho es que en $\alpha = \frac{1}{m}$, L_3 se haya convertido en L_1 . De nuevo, más adelante comprobaremos si es así.

4.4. Coincidencias de los puntos de equilibrio

En el análisis anterior ha quedado pendiente demostrar la coincidencia de los puntos de equilibrio para ciertos valores de α , concretamente en los que se producen las bifurcaciones.

4.4.1. Coincidencia en $\alpha = \frac{1}{1-m}$

Para $\alpha = \frac{1}{1-m}$, tenemos que L_1 , L_2 y L_{-1} coinciden. Para demostrarlo, vamos a tomar la ecuación de la cual L_1 es solución, la cual era

$$f(\xi_1) = \xi_1 + m - m(\xi_1 + 1)^\alpha + (1-m)(-\xi_1)^\alpha = 0 .$$

Esta ecuación, para $\xi_1 = -1$, tiene la solución L_{-1} . Lo que queremos ver es que el factor de la ecuación que nos da L_1 también da como resultado la misma solución, así que lo

que haremos será extraer de la expresión $\xi_1 + 1$ y ver que el otro factor se anula para $\alpha = \frac{1}{1-m}$. Si hacemos esto, nos queda

$$(\xi_1 + 1) \left(\frac{\xi_1}{\xi_1 + 1} + \frac{m}{\xi_1 + 1} - m(\xi_1 + 1)^{\alpha-1} + (1-m) \frac{(-\xi_1)^\alpha}{\xi_1 + 1} \right) = 0 .$$

Operando un poco la expresión y sumando y restando $\frac{1}{\xi_1 + 1}$ llegamos al siguiente resultado

$$(\xi_1 + 1) \left(1 + (1-m) \frac{(-\xi_1)^\alpha - 1}{\xi_1 + 1} - m(\xi_1 + 1)^{\alpha-1} \right) = 0 .$$

Por último, suponiendo que $\alpha > 1$, y haciendo el límite cuando ξ_1 tiende a -1 , el segundo factor tiende a

$$1 - (1-m)\alpha ,$$

que se anula para $\alpha = \frac{1}{1-m}$. Es decir, que para este valor de α , la parte de la ecuación que nos da L_1 se cumple para $\xi_1 = -1$, con lo que tenemos que L_1 y L_{-1} coinciden para $\alpha = \frac{1}{1-m}$.

Para la ecuación de L_2 , la cual era

$$g(\xi_2) = \xi_2 + m + m(-\xi_2 - 1)^\alpha + (1-m)(-\xi_2)^\alpha = 0 ,$$

vamos a hacer el mismo proceso, es decir, que si extraemos el factor $(\xi_2 + 1)$, llegamos después de operar a

$$(\xi_2 + 1) \left(1 + (1-m) \frac{(-\xi_2)^\alpha - 1}{\xi_2 + 1} - m(-\xi_2 - 1)^{\alpha-1} \right) = 0 .$$

Suponiendo que $\alpha > 1$, y haciendo el límite cuando ξ_2 tiende a -1 , el segundo factor tiende a

$$1 - (1-m)\alpha ,$$

que se anula para $\alpha = \frac{1}{1-m}$, con lo que hemos demostrado que L_2 y L_{-1} coinciden, y ya tenemos el resultado deseado.

4.4.2. Coincidencia para $\alpha = \frac{1}{m}$

Para $\alpha = \frac{1}{m}$, tenemos que L_1 , L_3 y L_0 coinciden. Para demostrarlo vamos a hacer los mismos razonamientos que para las otras coincidencias. Aquí vamos a extraer el factor que nos da la solución $\xi = 0$ de L_0 , y vamos a ver que el factor restante de las ecuaciones que nos dan L_1 y L_3 se anula también para $\xi = 0$.

Para L_1 , si extraemos ξ_1 de la ecuación y operamos un poco, llegamos a

$$\xi_1 \left(1 + m \frac{1 - (\xi_1 + 1)^\alpha}{\xi_1} - (1-m)(-\xi_1)^{\alpha-1} \right) = 0 .$$

Suponiendo que $\alpha > 0$, y haciendo el límite cuando ξ_1 tiende a 0 , el segundo factor tiende a

$$1 - m\alpha ,$$

que se anula para $\alpha = \frac{1}{m}$, lo que nos demuestra que L_0 y L_1 coinciden para este valor de α . Para L_3 , su ecuación era

$$h(\xi_3) = \xi_3 + m - m(\xi_3 + 1)^\alpha - (1 - m)\xi_3^\alpha = 0 .$$

Extrayendo el factor ξ_3 , después de operar la expresión resultante, se llega a

$$\xi_3 \left(1 + m \frac{1 - (\xi_3 + 1)^\alpha}{\xi_3} - (1 - m)\xi_3^{\alpha-1} \right) = 0 .$$

Suponiendo que $\alpha > 0$, y haciendo el límite cuando ξ_3 tiende a 0, el segundo factor tiende a

$$1 - m\alpha ,$$

que se anula para $\alpha = \frac{1}{m}$, con lo que hemos demostrado que para este valor de α , L_3 y L_0 coinciden, con lo que ya tenemos el resultado que queríamos demostrar.

4.5. Diagrama de bifurcación.

Gracias a un programa que implementa el método de Newton-Rhapson para encontrar ceros de funciones, es posible graficar, en función de α , las x de los puntos de equilibrio colineales. Esto nos servirá para comprobar si nuestra discusión es correcta, sobretodo en las bifurcaciones. El resultado obtenido está en la Figura 2.

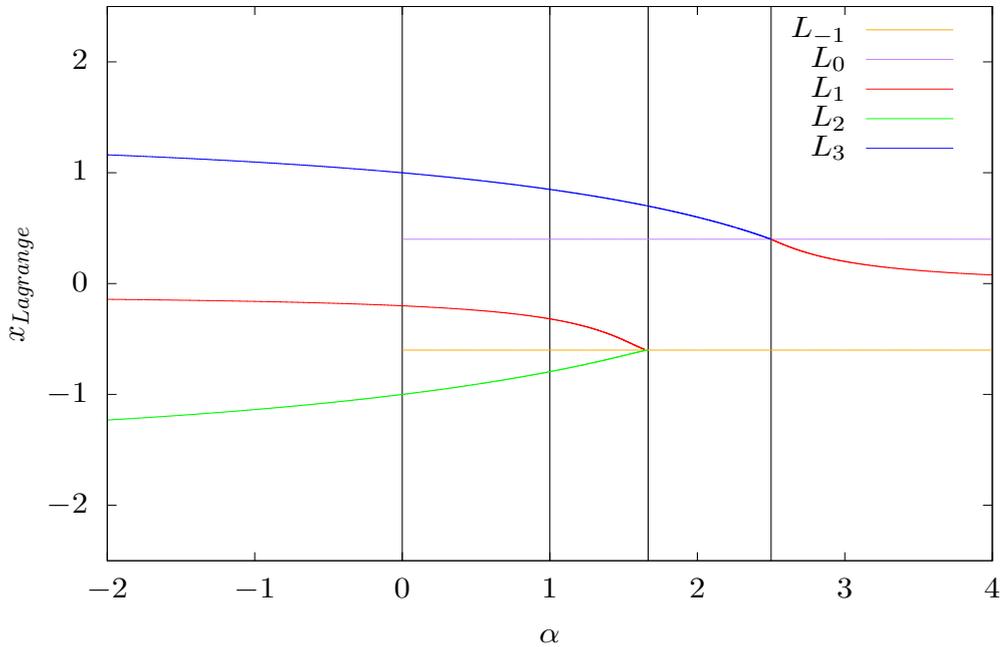


Figura 2: Representación gráfica de las x de los puntos de equilibrio colineales en función de α . Hay líneas verticales para $\alpha = 0, \alpha = 1, \alpha = \frac{1}{1-m}$ y $\alpha = \frac{1}{m}$ que separan los diferentes intervalos que hemos considerado en nuestra discusión. Este gráfico corresponde al caso $m = 0,4$

Vemos en primer lugar que, efectivamente, los intervalos de existencia de puntos de equilibrio que hemos demostrado son correctos.

En cuanto a las bifurcaciones, que era lo que nos quedaba por ver, vemos que efectivamente para $\alpha = \frac{1}{1-m}$, L_1 y L_2 coinciden con L_{-1} y desaparecen, dejando sólo L_{-1} , formando la bifurcación de horquilla que habíamos predicho.

Por último vamos a ver el caso en que $\alpha = \frac{1}{m}$. Aquí L_1 , L_3 y L_0 coinciden y, como habíamos predicho, L_3 se convierte en L_1 .

4.6. Resumen de los puntos de equilibrio

La Tabla 1 muestra de manera esquemática los resultados que hemos obtenido:

Punto de equilibrio L_i	Existencia
$L_{-1} = (m-1, 0)$	$\alpha \geq 0$
$L_0 = (m, 0)$	$\alpha \geq 0$
$L_1 = (m + \xi_1(m, \alpha)) \in (m-1, m)$	$\alpha < \frac{1}{1-m}, \alpha > \frac{1}{m}$ si $m < \frac{1}{2}$ $\alpha > \frac{1}{1-m}, \alpha < \frac{1}{m}$ si $m > \frac{1}{2}$
$L_2 = (m + \xi_2(m, \alpha)) \in (-\infty, m-1)$	$\alpha < \frac{1}{1-m}$
$L_3 = (m + \xi_3(m, \alpha)) \in (m, +\infty)$	$\alpha < \frac{1}{m}$
$L_4 = \left(m - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\forall \alpha$
$L_5 = \left(m - \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\forall \alpha$
COINCIDENCIAS	
$L_{-1} = L_1 = L_2$	$\alpha = \frac{1}{1-m}$
$L_0 = L_1 = L_3$	$\alpha = \frac{1}{m}$

Cuadro 1: Tabla resumen de la existencia de puntos de equilibrio en función de α y m

Observación 4.1. Dada la ordenación que hemos hecho, en todo el análisis que hemos hecho a partir de la sección 3.3 está la hipótesis implícita de que $\frac{1}{1-m} < \frac{1}{m}$, es decir, que $m < \frac{1}{2}$. Si fuera al revés, todos los resultados serían exactamente los mismos que muestra la tabla, excepto para L_1 , el cual existe si $\frac{1}{m} > \alpha$ o si $\alpha > \frac{1}{1-m}$. También serían válidos los razonamientos en cuanto a las coincidencias, puesto que estos no dependen del orden de $\frac{1}{1-m}$ y $\frac{1}{m}$. La Figura 3 muestra lo que dice esta observación.

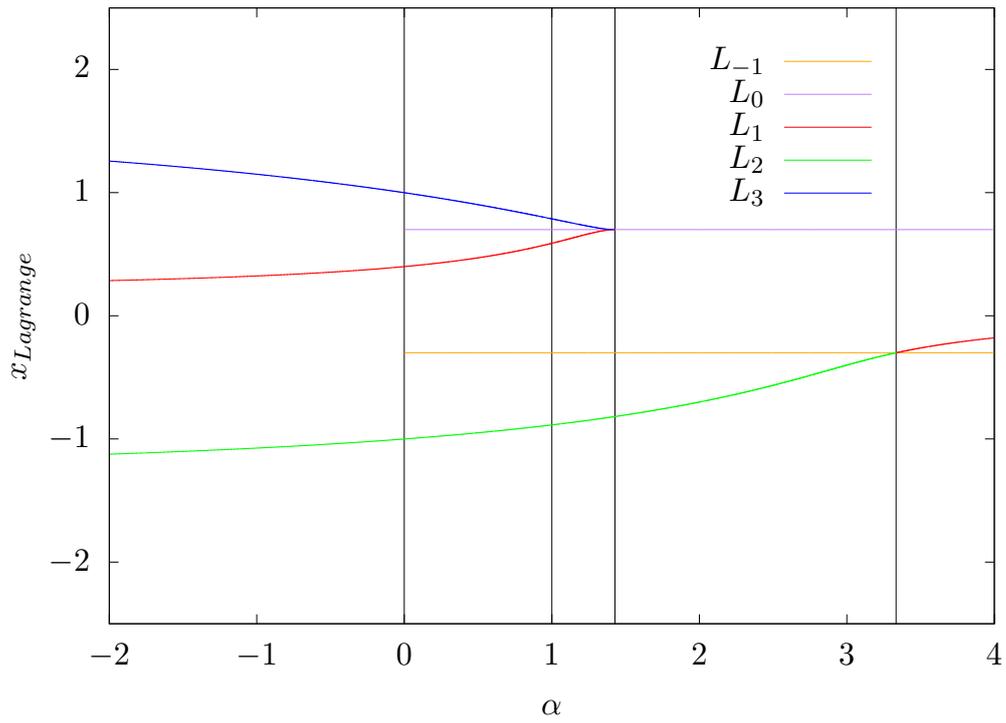


Figura 3: Representación gráfica de las x de los puntos de equilibrio colineales en función de α . Hay líneas verticales para $\alpha = 0, \alpha = 1, \alpha = \frac{1}{1-m}$ y $\alpha = \frac{1}{m}$ que separan los diferentes intervalos que hemos considerado en nuestra discusión. Este gráfico corresponde al caso $m = 0,7$

5. Curvas de velocidad cero (CVC). Regiones de Hill y constantes de Jacobi extendidas

Hemos visto que el hamiltoniano en coordenadas sinódicas es una integral primera, es decir, se mantiene constante en las órbitas.

Definición 5.1. (Constante de Jacobi extendida) Se define la Constante de Jacobi extendida J como

$$J := -2H_{sin} .$$

Escribiendo el hamiltoniano en términos de las velocidades en vez de los momentos, tenemos que

$$J = x^2 + y^2 - \frac{2m}{\alpha + 1}(r_1^{\alpha+1} - 1) - \frac{2(1-m)}{\alpha + 1}(r_2^{\alpha+1} - 1) - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 .$$

El nombre de constantes de Jacobi extendidas tiene origen en el caso gravitatorio ($\alpha = -2$), en el que el valor de J es :

$$J = x^2 + y^2 + 2m(r_1^{-1} - 1) + 2(1-m)(r_2^{-1} - 1) - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 = C - 2 .$$

Esta C se le conoce como constante de Jacobi en todos los estudios que se han realizado sobre el problema de tres cuerpos circular restringido, y es la J que se obtendría si se hubiera trabajado con un potencial con origen en el infinito. Este tipo de origen es el habitual cuando se estudia el caso gravitatorio, como ya dijimos al principio de la memoria. Esta diferencia en el origen de potencial da lugar a la diferencia de 2 entre J y C . Así pues, J es la extensión de la constante de Jacobi a nuestro problema, aunque no coincidan exactamente en el caso gravitatorio por lo que ya hemos dicho.

Observación 5.2. Para $\alpha = 1$, tenemos que

$$J = x^2 + y^2 - 2m \ln r_1 - 2(1-m) \ln r_2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 .$$

Vemos que la constante de Jacobi extendida tiene una cota superior, que corresponde a cuando $\dot{x} = \dot{y} = 0$, de tal manera que tenemos que

$$J \leq x^2 + y^2 - \frac{2m}{\alpha + 1}(r_1^{\alpha+1} - 1) - \frac{2(1-m)}{\alpha + 1}(r_2^{\alpha+1} - 1) .$$

Para $\alpha = 1$ tendríamos algo similar. Definamos:

$$\Gamma(x, y) := \begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{2m}{\alpha + 1}(r_1^{\alpha+1} - 1) - \frac{2(1-m)}{\alpha + 1}(r_2^{\alpha+1} - 1) & \alpha \neq 1 \\ x^2 + y^2 - 2m \ln r_1 - 2(1-m) \ln r_2 & \alpha = 1 \end{cases} .$$

Esto nos dice que las órbitas están restringidas a esta cota. Es decir, que si la posición inicial del tercer cuerpo es (x_0, y_0) con velocidad (\dot{x}_0, \dot{y}_0) , esto nos determina J ; entonces, dado J , la órbita sólo existe en la siguiente región del plano:

$$\{(x, y) \mid J \leq \Gamma(x, y)\} .$$

Definición 5.3. (Región de Hill) Dado un valor de J , la región de Hill es la región del plano

$$\{(x, y) \mid J \leq \Gamma(x, y)\} .$$

Así pues, dado J , las órbitas están contenidas en la región de Hill correspondiente. En esta sección vamos a centrarnos en estudiar la frontera de la región de Hill, que es lo que llamamos curvas de velocidad cero, puesto que se obtienen haciendo $\dot{x} = \dot{y} = 0$ en la expresión de J .

Definición 5.4. (Curvas de velocidad cero (CVC)) Dado un valor de J , se define la curva de velocidad como el siguiente conjunto de puntos del plano

$$\{(x, y) \mid J = \Gamma(x, y)\} = \partial\{(x, y) \mid J \leq \Gamma(x, y)\}$$

Vemos que podemos tratar las CVC como las curvas de nivel de la función Γ , y esto nos será muy útil para estudiarlas. Las curvas de nivel de una función cambian su comportamiento cualitativo cuando cortamos por los planos correspondientes a los puntos críticos de dicha función, así que vamos a estudiar dichos puntos en primer lugar.

5.1. Estudio de los puntos críticos de la función Γ

Los puntos críticos de Γ son aquellos para los que la matriz Jacobiana $\begin{pmatrix} \frac{\partial \Gamma}{\partial x} & \frac{\partial \Gamma}{\partial y} \end{pmatrix}$ es la matriz nula, es decir, los puntos en que se cumple

$$\begin{pmatrix} 2x - 2mr_1^{\alpha-1}(x - m + 1) - 2(1 - m)r_2^{\alpha-1}(x - m) & 2y - 2mr_1^{\alpha-1}y - 2(1 - m)r_2^{\alpha-1}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las ecuaciones a las que llegamos son las mismas que para los puntos de equilibrio, con lo que sacamos una importante conclusión. Los cambios cualitativos en la forma de las CVC se producen para las J de los puntos de equilibrio. Los puntos críticos pueden ser máximos, mínimos o puntos de silla, y dependiendo del tipo el comportamiento será uno u otro. Para clasificar estos puntos hay que recurrir a la matriz Hessiana, es decir la matriz de las derivadas segundas. Dicha matriz se escribe de la forma

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

Si calculamos esta matriz, obtenemos que es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 2 - 2mr_1^{\alpha-1} \left(1 + \frac{(\alpha - 1)(x - m + 1)^2}{r_1^2} \right) & -2m(\alpha - 1)(x - m + 1)r_1^{\alpha-3}y \\ -2(1 - m)r_2^{\alpha-1} \left(1 + \frac{(\alpha - 1)(x - m)^2}{r_2^2} \right) & -2(1 - m)(\alpha - 1)(x - m)r_2^{\alpha-3}y \\ -2m(\alpha - 1)(x - m + 1)r_1^{\alpha-3}y & 2 - 2mr_1^{\alpha-1} \left(1 + \frac{(\alpha - 1)y^2}{r_1^2} \right) \\ -2(1 - m)(\alpha - 1)(x - m)r_2^{\alpha-3}y & -2(1 - m)r_2^{\alpha-1} \left(1 + \frac{(\alpha - 1)y^2}{r_2^2} \right) \end{pmatrix}.$$

Vemos que tanto la matriz Jacobiana y la matriz Hessiana tienen esta expresión $\forall \alpha$. Igualmente, ya vimos en el capítulo 3 que el caso $\alpha = 1$ es trivial en el sentido que todos los puntos son puntos de equilibrio, por lo que no tiene cabida clasificarlos y no lo tendremos en cuenta.

5.1.1. Puntos de equilibrio equilaterales

Para L_4 y L_5 tenemos que las constantes de Jacobi extendidas son iguales y valen lo mismo $\forall \alpha$, es decir,

$$J_4 = J_5 = m(m-1) + 1$$

. En estos dos puntos, la matriz Hessiana es:

$$\frac{1-\alpha}{2} \begin{pmatrix} 1 & \mp\sqrt{3}(1-2m) \\ \mp\sqrt{3}(1-2m) & 3 \end{pmatrix} .$$

Aquí, cuando aparece \mp , el $-$ es para L_4 y el $+$ es para el punto L_5 . Los correspondientes valores propios son, tanto para L_4 como para L_5 :

$$(1-\alpha)(1 \pm \sqrt{1-3m+3m^2}) .$$

Aquí el \pm no tiene el mismo significado que \mp . Aquí sirve sólo para diferenciar los dos valores propios.

Gracias a un simple gráfico de las dos funciones, vemos que

$$1 \pm \sqrt{1-3m+3m^2} \geq 0 \quad \forall m \in (0,1) .$$

Entonces, de ahí podemos deducir que:

1. Para $\alpha < 1$, los dos valores propios son positivos, así que J_4 y J_5 son mínimos relativos de la función Γ .
2. Para $\alpha > 1$, los dos valores propios son negativos, así que J_4 y J_5 son máximos relativos de la función Γ .

5.1.2. Puntos de equilibrio colineales: L_1, L_2 y L_3

Para $L_i = (m+\xi_i, 0)$, con $i \in \{1, 2, 3\}$ tenemos que las constantes de Jacobi extendidas valen lo siguiente:

$$J_i = (m+\xi_i)^2 - \frac{2m}{\alpha+1} (|\xi_i+1|^{\alpha+1} - 1) - \frac{2(1-m)}{\alpha+1} (|\xi_i|^{\alpha+1} - 1) .$$

Para estos puntos, la matriz Hessiana es:

$$\begin{pmatrix} 2-2m\alpha|\xi_i+1|^{\alpha-1} - 2(1-m)\alpha|\xi_i|^{\alpha-1} & 0 \\ 0 & 2-2m|\xi_i+1|^{\alpha-1} - 2(1-m)|\xi_i|^{\alpha-1} \end{pmatrix} .$$

En este caso los valores propios son muy sencillos de obtener, puesto que la matriz ya es diagonal, así que estos son:

$$2-2m\alpha|\xi_i+1|^{\alpha-1} - 2(1-m)\alpha|\xi_i|^{\alpha-1} , \quad 2-2m|\xi_i+1|^{\alpha-1} - 2(1-m)|\xi_i|^{\alpha-1} .$$

Vamos a centrarnos primero en el **segundo valor propio**. Antes de empezar, no obstante, vamos a deducir una relación que nos será útil para esta discusión. Partiendo de la ecuación para los puntos de equilibrio colineales, y escribiéndola como

$$0 = x_i - m(x_i - m + 1)|x_i - m + 1|^{\alpha-1} - (1-m)(x_i - m)|x_i - m|^{\alpha-1} ,$$

podemos operar y extraer factor común de x_i y reescribirla de la manera que sigue (recordando que $x_i = \xi_i + m$):

$$0 = x_i(1 - m|\xi_i + 1|^{\alpha-1} - (1 - m)|\xi_i|^{\alpha-1}) + m(1 - m)(|\xi_i|^{\alpha+1} - |\xi_i + 1|^{\alpha+1}) .$$

Nos damos cuenta entonces de que, si definimos $\eta_i := m|\xi_i + 1|^{\alpha-1} + (1 - m)|\xi_i|^{\alpha-1}$, el segundo valor propio es $2(1 - \eta_i)$, y entonces el segundo valor propio se puede escribir como

$$2(1 - \eta_i) = \frac{2m(1 - m)}{x_i} (|\xi_i + 1|^{\alpha-1} - |\xi_i|^{\alpha-1}) .$$

Ahora sí, podemos empezar la discusión:

1. Para L_1 , como $\xi_1 \in (-1, 0)$ se tiene que $|\xi_1| < 1$, $|\xi_1 + 1| < 1$. Por tanto, si $\alpha > 1$, $|\xi_1|^{\alpha-1} < 1$ y $|\xi_1 + 1|^{\alpha-1} < 1$, por lo que $m|\xi_1 + 1|^{\alpha-1} + (1 - m)|\xi_1|^{\alpha-1} < 1$ y el valor propio es positivo. Razonando de la misma manera, llegamos a que si $\alpha < 1$, el valor propio es negativo.
2. Para L_2 , como $\xi_2 \in (-\infty, -1)$ y $x_2 < 0$, entonces $|\xi_2| > |\xi_2 + 1|$. Entonces ahora tenemos que si $\alpha > 1$, $|\xi_2|^{\alpha-1} < |\xi_2 + 1|^{\alpha-1}$ y por tanto $2(1 - \eta_2) > 0$ (el valor propio es positivo). Razonando de la misma manera para $\alpha < 1$ llegamos a que $2(1 - \eta_2) < 0$ (el valor propio es negativo).
3. Para L_3 , como $\xi_3 \in (0, \infty)$ y $x_3 > 0$, entonces $|\xi_3| < |\xi_3 + 1|$. Entonces ahora tenemos que si $\alpha > 1$, $|\xi_3|^{\alpha-1} < |\xi_3 + 1|^{\alpha-1}$ y por tanto $2(1 - \eta_3) > 0$ (el valor propio es positivo). Razonando de la misma manera para $\alpha < 1$ llegamos a que $2(1 - \eta_3) < 0$ (el valor propio es negativo).

Para el primer valor propio, tenemos que este es $2(1 - \alpha\eta_i)$. La aparición de esta α hace que sea muy difícil (si no imposible) el estudio analítico del signo de dicho valor propio. Pero gracias a un simple programa que analiza los signos y te avisa si hay algún cambio, vemos que el primer valor propio es positivo para $\alpha < 1$ y es negativo para $\alpha > 1$.

Lo que hemos demostrado es que :

1. Para $\alpha < 1$, el primer valor propio es positivo y el segundo negativo, por lo que L_i es un punto de silla, en el que la dirección estable (atractiva) es la del eje y , y la inestable (repulsiva) la del eje x .
2. Para $\alpha > 1$, el primer valor propio es negativo y el segundo positivo, por lo que L_i es un punto de silla, en el que la dirección inestable (repulsiva) es la del eje y y la estable (atractiva) la del eje x .

5.1.3. Puntos de colisión

Para L_0 y L_{-1} tenemos los siguientes valores para las constantes de Jacobi:

$$J_{-1} = (m - 1)^2 + \frac{2m}{\alpha + 1} , \quad J_0 = m^2 + \frac{2(1 - m)}{\alpha + 1}$$

Sólo tendremos en cuenta estas constantes de Jacobi extendidas para $\alpha > -1$, puesto que como ya hemos visto, estos dos puntos son singularidades del campo (derivadas de Γ) para $\alpha < 0$; no obstante, para $-1 < \alpha < 0$ tienen valor de J finito, aunque en sus

derivadas presenten singularidades. Esto hace que podamos incluir este intervalo en el análisis. Calculemos ahora las matrices Hessianas en cada uno de estos dos puntos. Para el punto L_{-1} , tenemos la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 - 2\alpha(1 - m) & 0 \\ 0 & 2m \end{pmatrix}.$$

Analizar los valores propios de esta matriz resulta muy sencillo, puesto que esta ya presenta su forma diagonal. El segundo valor propio es positivo $\forall \alpha$. En cambio, el primero es positivo para $\alpha < \frac{1}{1 - m}$, y negativo para $\alpha > \frac{1}{1 - m}$.

Para L_0 , tenemos la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 - 2\alpha m & 0 \\ 0 & 2 - 2m \end{pmatrix}.$$

Analizar los valores propios de esta matriz resulta muy sencillo, puesto que esta ya presenta su forma diagonal. El segundo valor propio es positivo $\forall \alpha$. En cuanto al primero, este es positivo para $\alpha < \frac{1}{m}$ y negativo para $\alpha > \frac{1}{m}$.

Así pues, hemos demostrado lo siguiente:

1. Para $\alpha < -1$, L_{-1} y L_0 son singularidades tanto del hamiltoniano como del campo hamiltoniano. Esto quiere decir que tanto las J como las diferenciales son infinitas. Son puntos de singularidad, y no se pueden tratar.
2. Para $-1 < \alpha < 0$, tenemos que estos dos puntos tienen valor de J finito pero las diferenciales son infinitas. Se dice que son puntos de cúspide.
3. Para $0 < \alpha < \min(\frac{1}{m}, \frac{1}{1 - m})$, tenemos que L_0 y L_{-1} son mínimos relativos, puesto que la matriz Hessiana es definida positiva.
4. Para $\min(\frac{1}{m}, \frac{1}{1 - m}) < \alpha < \max(\frac{1}{m}, \frac{1}{1 - m})$, tenemos que si $m < \frac{1}{2}$, L_{-1} es un punto de silla siendo el eje x la dirección estable y el eje y la inestable, y L_0 un ímimo relativo. Si $m > \frac{1}{2}$, la casuística es al revés, es decir, que L_{-1} es el mínimo relativo i L_0 el punto de silla.
5. Para $\alpha > \max(\frac{1}{m}, \frac{1}{1 - m})$, tenemos que tanto L_0 como L_{-1} son puntos de silla, con dirección estable la del eje x e inestable la del eje y .

5.2. Coincidencias de las constantes de Jacobi

Igual que hemos hecho en la sección para los puntos de equilibrio, para las constantes de Jacobi extendidas también hay ciertas coincidencias para determinados valores de α . Estas coincidencias determinan los puntos en los que la ordenación de las constantes de Jacobi extendidas de los puntos de equilibrio cambia. Esto nos interesa debido a que como ya hemos dicho antes, el comportamiento cualitativo de las CVC se produce para los valores de J de estos puntos de equilibrio. Este orden, pues, determinará la evolución del aspecto de las CVC al variar J .

5.2.1. Coincidencias para $\alpha = 0$

Vemos que si sustituimos $\alpha = 0$ en las constantes de Jacobi extendidas de L_i , con $i \in \{1, 2, 3\}$, su valor es el siguiente:

$$J_i = (m + \xi_i)^2 - 2m|\xi_i + 1| - 2(1 - m)(|\xi_i| - 1) .$$

También sabemos que para este valor de α , los puntos de equilibrio son

$$L_1 = (2m - 1, 0) , \quad L_2 = (-1, 0) , \quad L_3 = (1, 0) .$$

Sustituyéndolos en las constantes de Jacobi, tenemos que

$$J_1 = J_2 = J_3 = 1 .$$

5.2.2. Coincidencias para $\alpha = \tilde{\alpha}(m)$

Numéricamente, se puede ver que existe $0 < \tilde{\alpha} < 1$ para el que si $m < \frac{1}{2}$, J_3 y J_{-1} coinciden, y si $m > \frac{1}{2}$, J_2 y J_0 coinciden. Hemos escrito un programa para obtener dicho $\tilde{\alpha}$ y este ha sido el resultado:

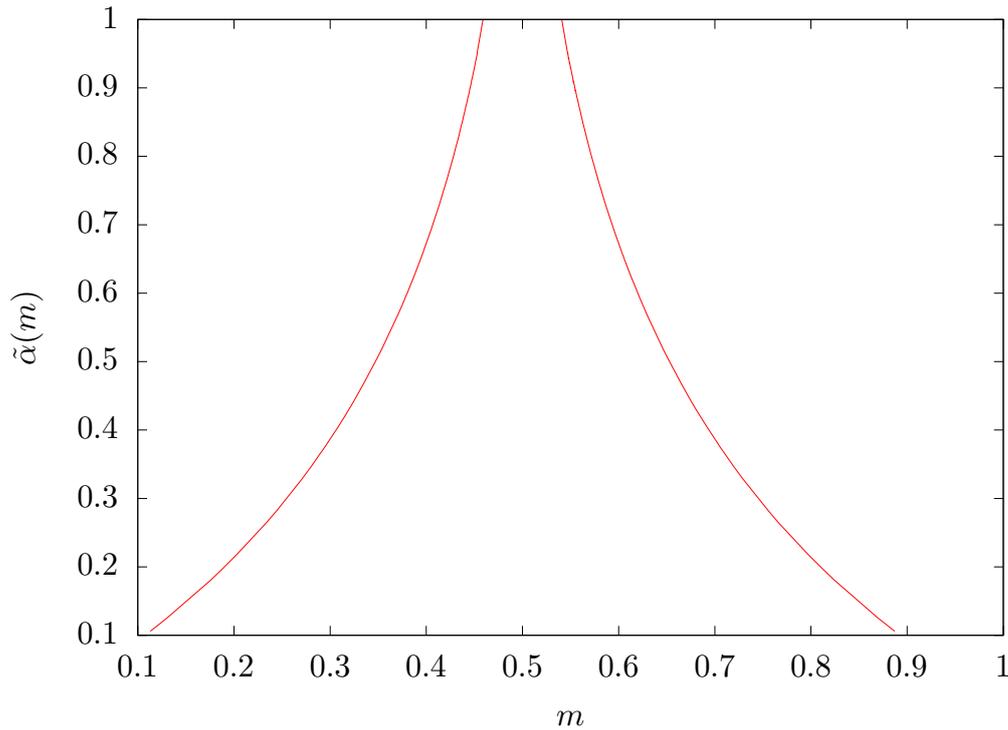


Figura 4: Representación gráfica del valor $\tilde{\alpha}$ en función de m . Observamos que, para valores cercanos a $m = \frac{1}{2}$, este $\tilde{\alpha}(m)$ puede no estar definido, puesto que es muy cercano al punto de coincidencia $\alpha = 1$.

5.2.3. Coincidencias para $\alpha = 1$

Para $\alpha = 1$, todas las constantes de Jacobi extendidas coinciden, y eso es debido a que como ya hemos dicho, para este valor de α todos los puntos son puntos de equilibrio, es un caso totalmente degenerado, así que tiene sentido que todas las J coincidan. El valor que tienen es

$$J_i = m(m - 1) + 1 \quad i \in \{-1, 0, \dots, 5\} .$$

5.2.4. Coincidencias para $\alpha = \frac{1}{1-m}$ y para $\alpha = \frac{1}{m}$

Ya hemos demostrado que L_1, L_2 y L_{-1} coinciden para $\alpha = \frac{1}{1-m}$, así que obviamente, sus valores de J también. Entonces tenemos que

$$J_1 = J_2 = J_{-1} = \frac{(m-1)(-m^2 + m - 2)}{2 - m} .$$

Por otra banda, también hemos demostrado que L_1, L_3 y L_0 coinciden para $\alpha = \frac{1}{m}$, así que obviamente, sus valores de J también. Entonces tenemos que

$$J_1 = J_3 = J_0 = \frac{m(m^2 - m + 2)}{1 + m}$$

5.3. Orden de las constantes de Jacobi. Recapitulación de la sección

En esta sección vamos a analizar el orden de las constantes de Jacobi. Habiendo determinado las coincidencias de las mismas, sólo queda mirar en los diferentes intervalos que estas determinan el orden de J . Para hacerlo, representamos gráficamente las constantes de Jacobi. Igual que en la sección de los puntos de equilibrio, nos encontramos que hay diferencia si $m < \frac{1}{2}$ o si $m > \frac{1}{2}$.

Para $m < \frac{1}{2}$, el gráfico de las constantes de Jacobi extendidas está en la Figura 5. Entonces, tenemos los siguientes resultados representados en formato de tabla en el Cuadro 2.

Para $m > \frac{1}{2}$, el gráfico de las constantes de Jacobi extendidas está en la Figura 6. Entonces, tenemos los siguientes resultados representados en formato de tabla en el Cuadro 3.

Por último, en cuanto a la clasificación de los puntos de equilibrio, presentamos también el Cuadro 4 en el que quedan recogidos todos los resultados.

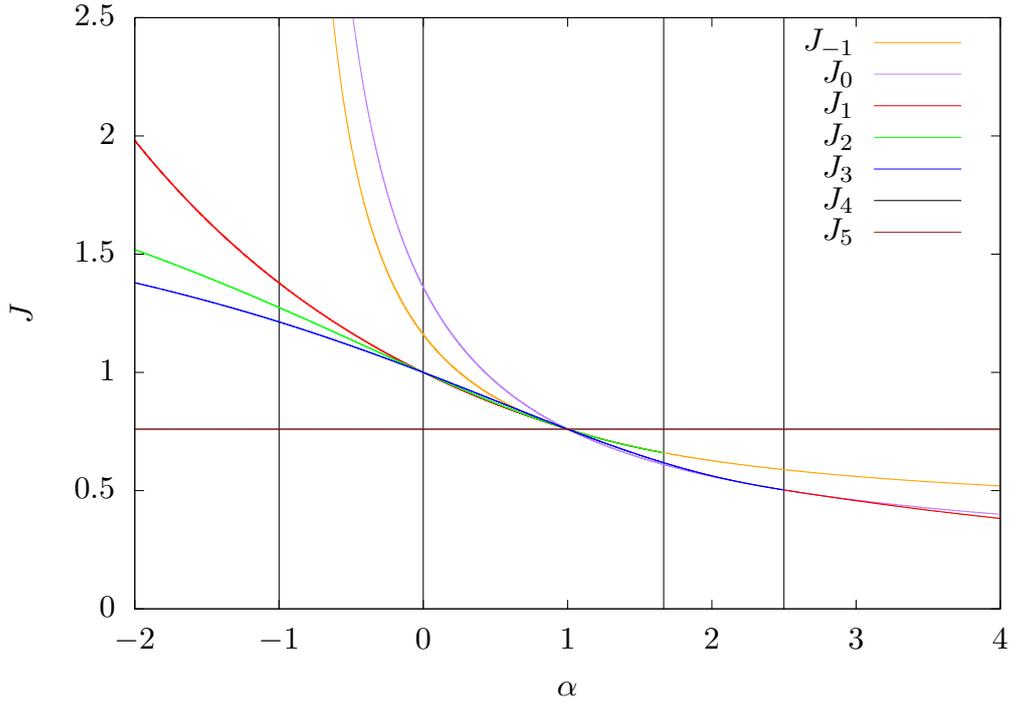


Figura 5: Representación gráfica de las constantes de Jacobi extendidas en función de α para $m = 0,4$. Hay líneas verticales para $\alpha = -1$, $\alpha = 0$, $\alpha = 1$, $\alpha = \frac{1}{1-m}$ y $\alpha = \frac{1}{m}$ que separan los intervalos en los que hay un cambio cualitativo en el comportamiento de las J , excepto $\alpha = \tilde{\alpha}(m)$.

Intervalos de α	Orden y existencia
$\alpha < -1$	$J_{4,5} < J_3 < J_2 < J_1$
$-1 < \alpha < 0$	$J_{4,5} < J_3 < J_2 < J_1 < J_{-1} < J_0$
$0 < \alpha < \tilde{\alpha}(m)$	$J_{4,5} < J_1 < J_2 < J_3 < J_{-1} < J_0$
$\tilde{\alpha}(m) < \alpha < 1$	$J_{4,5} < J_1 < J_2 < J_{-1} < J_3 < J_0$
$1 < \alpha < \frac{1}{1-m}$	$J_0 < J_3 < J_{-1} < J_2 < J_1 < J_{4,5}$
$\frac{1}{1-m} < \alpha < \frac{1}{m}$	$J_0 < J_3 < J_{-1} < J_{4,5}$
$\alpha > \frac{1}{m}$	$J_1 < J_0 < J_{-1} < J_{4,5}$
COINCIDENCIAS	
$\alpha = 0$	$J_1 = J_2 = J_3 = 1$
$\alpha = \tilde{\alpha}(m)$	$J_{-1} = J_3$
$\alpha = 1$	$J_{-1} = J_0 = J_1 = J_2 = J_3 = J_4 = J_5 = m(1-m) + 1$
$\alpha = \frac{1}{1-m}$	$J_{-1} = J_1 = J_2 = \frac{(m-1)(-m^2+m-2)}{2-m}$
$\alpha = \frac{1}{m}$	$J_0 = J_1 = J_3 = \frac{m(m^2-m+2)}{1+m}$
$\forall \alpha$	$J_4 = J_5 = m(1-m) + 1$

Cuadro 2: Tabla resumen del orden y existencia de las constantes de Jacobi extendidas en función de α y m para $m < \frac{1}{2}$.

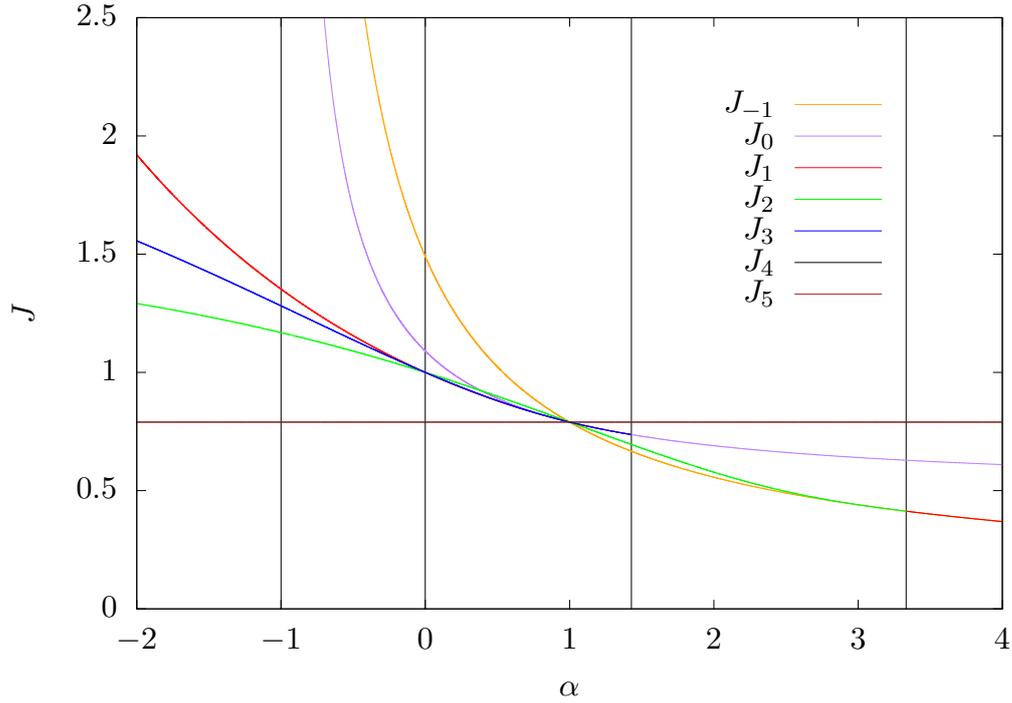


Figura 6: Representación gráfica de las constantes de Jacobi extendidas en función de α para $m = 0,7$. Hay líneas verticales para $\alpha = -1$, $\alpha = 0$, $\alpha = 1$, $\alpha = \frac{1}{1-m}$ y $\alpha = \frac{1}{m}$ que separan los intervalos en los que hay un cambio cualitativo en el comportamiento de las J , excepto $\alpha = \tilde{\alpha}(m)$.

Intervalos de α	Orden y existencia
$\alpha < -1$	$J_{4,5} < J_2 < J_3 < J_1$
$-1 < \alpha < 0$	$J_{4,5} < J_2 < J_3 < J_1 < J_0 < J_{-1}$
$0 < \alpha < \tilde{\alpha}(m)$	$J_{4,5} < J_1 < J_3 < J_2 < J_0 < J_{-1}$
$\tilde{\alpha}(m) < \alpha < 1$	$J_{4,5} < J_1 < J_3 < J_0 < J_2 < J_{-1}$
$1 < \alpha < \frac{1}{m}$	$J_{-1} < J_2 < J_0 < J_3 < J_1 < J_{4,5}$
$\frac{1}{m} < \alpha < \frac{1}{1-m}$	$J_{-1} < J_2 < J_0 < J_{4,5}$
$\alpha > \frac{1}{1-m}$	$J_1 < J_{-1} < J_0 < J_{4,5}$
COINCIDENCIAS	
$\alpha = 0$	$J_1 = J_2 = J_3 = 1$
$\alpha = \tilde{\alpha}(m)$	$J_0 = J_2$
$\alpha = 1$	$J_{-1} = J_0 = J_1 = J_2 = J_3 = J_4 = J_5 = m(1-m) + 1$
$\alpha = \frac{1}{1-m}$	$J_{-1} = J_1 = J_2 = \frac{(m-1)(-m^2+m-2)}{2-m}$
$\alpha = \frac{1}{m}$	$J_0 = J_1 = J_3 = \frac{m(m^2-m+2)}{1+m}$
$\forall \alpha$	$J_4 = J_5 = m(1-m) + 1$

Cuadro 3: Tabla resumen del orden y existencia de las constantes de Jacobi extendidas en función de α y m para $m > \frac{1}{2}$.

L	CLASIFICACIÓN					
	$\alpha < -1$	$-1 < \alpha < 0$	$0 < \alpha < 1$	$1 < \alpha < A$	$A < \alpha < B$	$\alpha > B$
L_{-1}	Singularidad	Cúspide	Mínimo	Mínimo	Silla	Silla
L_0	Singularidad	Cúspide	Mínimo	Mínimo	Mínimo	Silla
L_i	Silla	Silla	Silla	Silla	Silla	Silla
L_4	Mínimo	Mínimo	Mínimo	Máximo	Máximo	Máximo
L_5	Mínimo	Mínimo	Mínimo	Máximo	Máximo	Máximo

Cuadro 4: Clasificación de los puntos de equilibrio como puntos críticos de la función Γ . En esta tabla $i \in \{1, 2, 3\}$, y son puntos de silla sólo si existen, en concordancia con el Cuadro 1. Además, se hacen las definiciones $A := \min\left(\frac{1}{1-m}, \frac{1}{m}\right)$ y $B := \max\left(\frac{1}{1-m}, \frac{1}{m}\right)$.

6. Simulación de las curvas de velocidad cero

En esta sección nuestro objetivo es simular las curvas de velocidad cero alrededor de los puntos de equilibrio y comprobar como su comportamiento cualitativo cambia en función de la clasificación de dicho punto de equilibrio. También se ha dibujado toda la tipología de CVC existentes para dos casos distintos.

Para ello, usaremos un simulador cedido por el director de este TFG el funcionamiento del cual explicaremos a continuación.

6.1. Funcionamiento del simulador: Método de Davidenko y método de Runge-Kutta

El programa simula las curvas de velocidad cero y la manera que tiene de hacerlo es mediante el **método de Davidenko**. Éste consiste en lo siguiente:

Sea f una función de clase \mathcal{C}^1 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, para la que queremos calcular las curvas de nivel de orden k , es decir, queremos calcular el conjunto $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = k\}$. Este conjunto de puntos del plano son la imagen de una curva diferencial parametrizada por el arco $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ tal que $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ y γ es \mathcal{C}^1 . Entonces lo que tenemos es la siguiente ecuación:

$$f(x(s), y(s)) = k$$

Si derivamos esta expresión respecto s obtenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{ds} = 0 .$$

Además, como γ esta parametrizada por el arco, se cumple que

$$1 = \left| \frac{d\gamma}{ds} \right|^2 = \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 .$$

Combinando las dos últimas ecuaciones, llegamos a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{ds} = \pm \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \\ \frac{dy}{ds} = \mp \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \end{array} \right. .$$

El programa resuelve numéricamente este sistema de ecuaciones diferenciales mediante el método de Runge-Kutta-Fehlberg de órdenes 7 y 8 (RKF78), a partir de un valor inicial $(x_0, y_0) \in \Omega$, que encuentra fijando un y_0 y resolviendo la ecuación $f(x_0, y_0) = k$ para x_0 mediante el método de Newton. En nuestro problema, $f = \Gamma$ y $k = J$. Para hacerlo se fija y_0 de tal manera que la coordenada y sea la misma que la de los puntos de equilibrio colineales, o bien los equilaterales. En [6] se puede encontrar una explicación completa del método RKF45, similar al RKF78 pero con diferente orden, pero no nos adentraremos mucho puesto que no es el propósito de esta memoria.

6.2. CVC alrededor de los puntos de equilibrio

Hemos dicho previamente que el comportamiento cualitativo de las CVC cambia en los puntos de equilibrio. Veamos ahora cuál es este comportamiento.

Alrededor de un **mínimo (resp. máximo)** se tiene que si $J < J_{min}$ (resp. $J > J_{max}$) no hay CVC; en cambio, si $J > J_{min}$ (resp. $J < J_{max}$), se verían curvas parecidas a círculos concéntricos centrados en el correspondiente punto de equilibrio aumentando (resp. disminuyendo) de tamaño conforme J crece. Tendremos curvas de este estilo alrededor de L_4 y L_5 y, en ocasiones, alrededor de L_0 y L_{-1} . Veámoslo en la siguiente imagen:

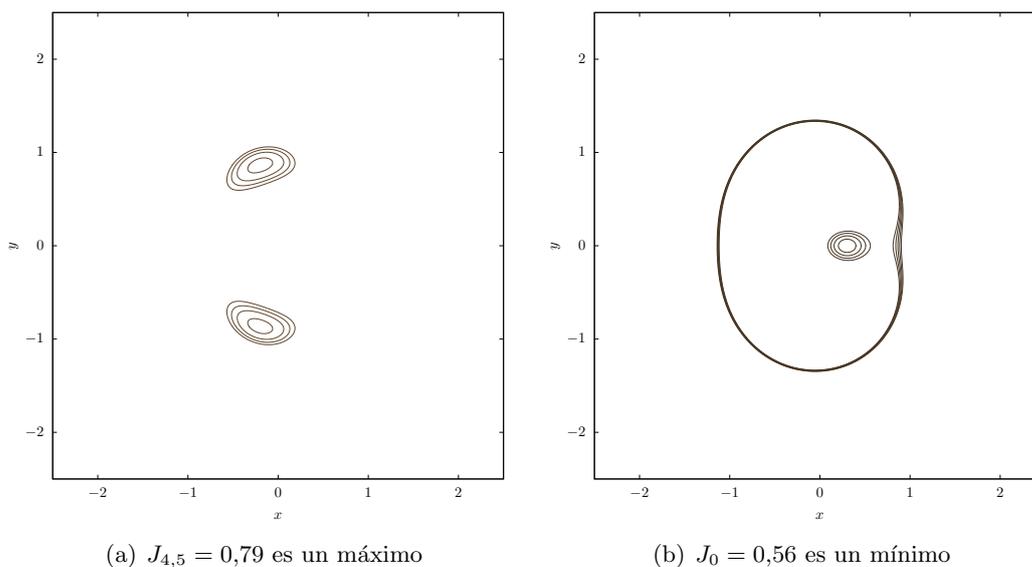
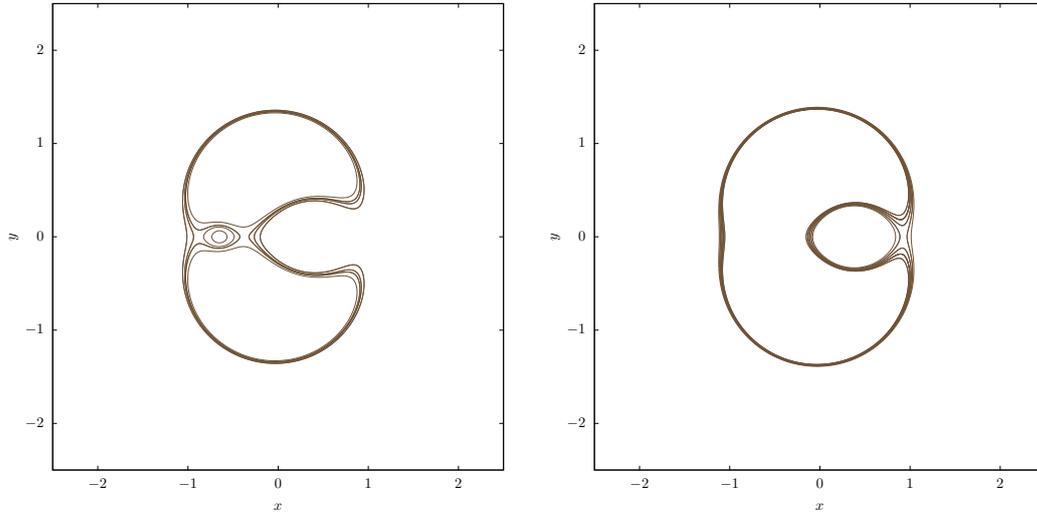


Figura 7: CVC para diferentes J cercanas a L_4 y L_5 (a) y a L_0 (b) en el que se ve el comportamiento de las CVC cerca de los máximos y mínimos. En a) las regiones de Hill son las exteriores a esos círculos concéntricos y en b) las regiones de Hill están en el interior del círculo grande intersección el exterior de los pequeños centrados en L_0 . Este gráfico es para $m = 0,3$ y $\alpha = 2$.

Observación 6.1. Habiendo dibujado la primera CVC es oportuno observar que las CVC tienen diferentes componentes conexas.

En un **punto de silla**, la curva de nivel se interseca a sí misma con dos direcciones distintas (llamadas estable e inestable), es decir, en forma de x. Por tanto, para J cercanas a puntos de silla, las curvas de nivel tienden a esa intersección, viéndose claramente esas dos direcciones. Además, en estos puntos se produce una bifurcación (un cambio) en el número de componentes conexas de la CVC. Los puntos L_1 , L_2 y L_3 siempre son de este estilo y, en ocasiones, L_0 y L_{-1} también lo son. Observamos ese comportamiento en la Figura 8.

Los **puntos de cúspide** son aquellos que tienen valor de J finito pero presentan una singularidad en la diferencial de Γ . El comportamiento de las CVC alrededor de ellos es muy parecido al de los máximos y mínimos con la diferencia que para valores de J próximos a la J del punto de cúspide, los círculos concéntricos son prácticamente idénticos, debido a esa singularidad de la diferencial. Los puntos L_0 y L_{-1} son de cúspide cuando $-1 < \alpha < 0$. Observamos su comportamiento en la Figura 9.



(a) $J_1 = 0,84$ y $J_2 = 0,85$ son puntos de silla

(b) $J_0 = 0,56$ es un punto de silla

Figura 8: CVC para diferentes J cercanas a L_1 y L_2 (a) y a L_3 (b) en el que se ve el comportamiento de las CVC cerca de los puntos de silla. Observamos, cerca de estos tres puntos, la forma de x mencionada. Este gráfico es para $m = 0,35$ y $\alpha = 0,6$.

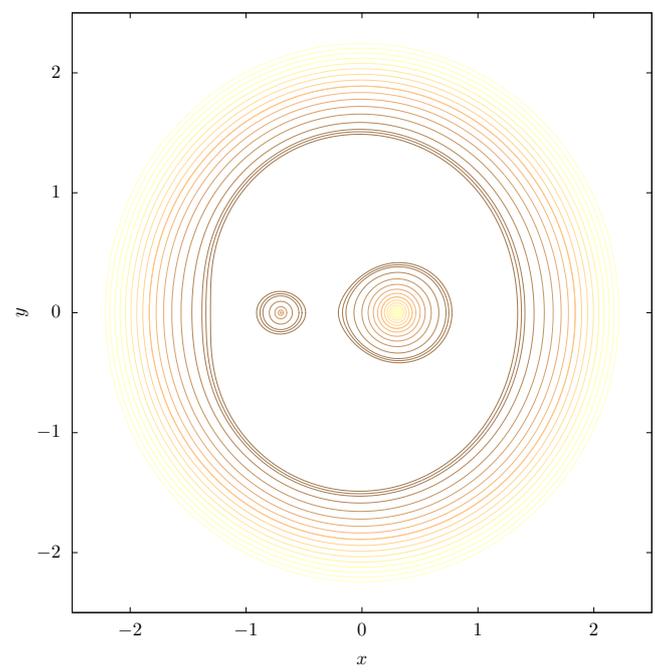


Figura 9: CVC para diferentes J cercanas a L_0 y L_{-1} , con $J_0 = 2,89$ y $J_{-1} = 1,69$. Debido a la singularidad de la diferencial de Γ , la J de estos puntos es muy alta en comparación con la de los demás puntos de equilibrio, y por eso los círculos amarillos son tan claros, sobretodo en L_0 , pues el color de las CVC se aclara a medida que J aumenta. Este gráfico es para $\alpha = -0,5$ y $m = 0,3$

Los **puntos de singularidad** son aquellos que tienen una singularidad tanto en J como en la diferencial de Γ . El comportamiento de las CVC alrededor de estos puntos es muy parecido al de los puntos de cúspide. No obstante, como J_{sing} no está definida, los círculos concéntricos no llegarán a cerrarse por muy alta que sea J . Los puntos L_0 y L_{-1} son de singularidad para $\alpha < -1$. Podemos observarlo en Figura 10.

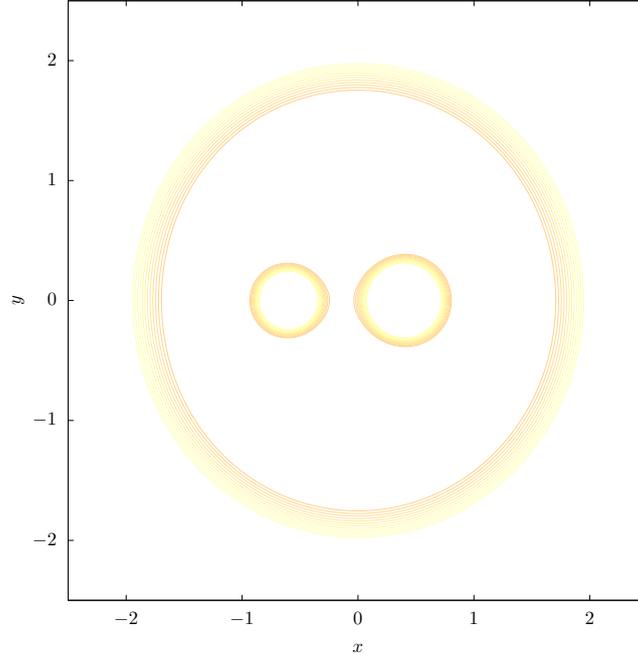


Figura 10: CVC para diferentes J cercanas a L_0 y L_{-1} . De nuevo el color de los círculos concéntricos es muy claro porque las J cuyas CVC están representadas en el gráfico son muy altas en comparación a las J de los demás puntos de equilibrio. Este gráfico es para $\alpha = -2$ (caso gravitatorio) y $m = 0,4$.

6.3. Descripción de las CVC para dos casos distintos

En este último apartado del trabajo mostraremos cómo usar lo que se ha hecho durante la memoria para dar una descripción cualitativa de las CVC a medida que aumentamos J para dos casos distintos, contando con la ayuda del simulador. También es necesario mencionar que los valores numéricos de J que aparecen a continuación han sido redondeados con dos decimales. No obstante, antes de empezar es necesario hacer una observación.

Observación 6.2. Se cumple que $\Gamma(x, -y) = \Gamma(x, y)$ por lo que las CVC son simétricas respecto el eje x .

6.3.1. Caso gravitatorio. $\alpha = -2$ y $m = 0,4$

Recordamos que la ordenación de las constantes de Jacobi extendidas en este caso es $J_{4,5} < J_3 < J_2 < J_1$.

En este caso, tenemos que $J_{4,5} \approx 0,76$ son mínimos de la función por lo que, si $J < J_{4,5}$, no habrá CVC. Para $J = J_{4,5}$ tendremos que la CVC consiste dos puntos, L_4 y L_5 .

Aumentamos J y vamos viendo curvas cerradas topológicamente equivalentes a círculos alrededor de estos dos puntos y que van aumentando con J . La región de Hill correspondiente es el exterior de esas curvas cerradas, entendiéndose las palabras interior y exterior que usaremos como a las diferentes componentes del plano que separan dichas curvas.

A medida que J se acerca a $J_3 \approx 1,38$, la parte derecha de la CVC se acerca a L_3 , hasta que si $J = J_3$ se produce el punto de silla y las CVC se intersectan en dicho punto con dos direcciones distintas. Para J_3 , las dos curvas cerradas alrededor de L_4 y L_5 han pasado a ser una sola curva cerrada que tiene en su interior a L_3 , L_4 y L_5 . La región de Hill es el exterior de la curva cerrada.

aumentamos J hasta que llegamos al siguiente punto de silla $J_2 \approx 1,52$ en el que se produce la intersección de la CVC. Debido a esas dos direcciones en las que se produce la intersección, la CVC pasa a tener dos componentes para $J > J_2$, consistentes en dos curvas cerradas C_1 y C_2 , estando C_2 contenida en el interior de C_1 . Los puntos L_2 , L_3 , L_4 y L_5 están en el interior de C_1 intersección el exterior de C_2 . La región de Hill son el interior de C_2 y el exterior de C_1

Seguimos aumentando J hasta que llegamos a otro punto de silla $J_1 \approx 1,98$, donde se produce la intersección de C_2 en dos direcciones distintas, que hace que para $J > J_1$, ésta se divida en dos. Tenemos ahora 3 componentes de CVC, la misma C_1 de antes y C_3 y C_4 que provienen de C_2 . C_3 y C_4 tienen en su interior a las colisiones, y L_1 , L_2 , L_3 , L_4 y L_5 están en el interior de C_1 intersección el exterior de C_3 y C_4 . La región de Hill es el exterior de C_1 , el interior de C_3 y el interior de C_4 . Debido a las singularidades de L_0 y L_{-1} , el comportamiento de las CVC seguirá siendo el mismo a partir de ahora, por mucho que J aumente. Esta descripción se corresponde con la Figura 11.

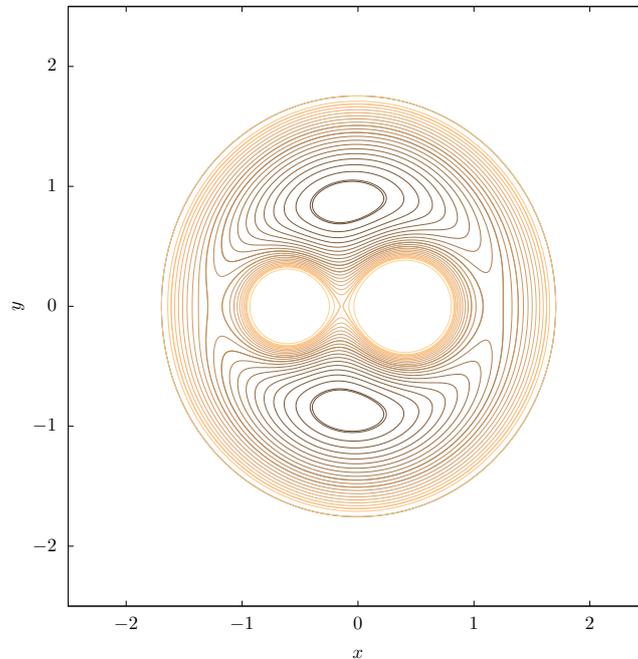


Figura 11: Gráfico de la diferente tipología de CVC que existe para el caso gravitatorio de $\alpha = -2$ y $m = 0,4$. El color de las CVC se aclara a medida que J aumenta.

6.3.2. Caso $\alpha = 1,5$ y $m = 0,35$

En este caso la ordenación de las constantes de Jacobi es $J_0 < J_3 < J_{-1} < J_{4,5}$. Tenemos que $J_0 \approx 0,57$ es un mínimo relativo, pero no absoluto, de Γ . Así que para $J < J_0$ tenemos que la CVC es una curva cerrada en cuyo interior están todos los puntos de equilibrio. Cuando $J = J_0$, a parte de esa curva cerrada, la CVC tiene otra componente que es el punto L_0 y cuando $J > J_0$ la CVC tiene dos componentes, la que ya teníamos y una en cuyo interior está L_0 . La región de Hill correspondiente es el interior de la primera curva intersección de la segunda.

Si se sigue aumentando J , se llega a $J = J_3 \approx 0,65$ que es un punto de silla, así que en este punto las dos componentes de la CVC se intersecan con dos tangentes distintas y se unen, con lo que para $J > J_3$, la CVC es una única curva cerrada en cuyo interior están todos los puntos de equilibrio excepto L_3 y L_0 , y la región de Hill correspondiente es el interior de dicha curva.

aumentamos J hasta que se llega a $J = J_{-1} \approx 0,77$ que es otro punto de silla. En L_{-1} se interseca la CVC correspondiente, y a partir de él se separa en dos componentes, de tal manera que para $J > J_{-1}$ la CVC consiste en dos curvas cerradas. En el interior de una está el punto L_4 y en la otra el punto L_5 , y la región de Hill correspondiente es el interior de estas dos curvas.

Cuando $J = J_{4,5} \approx 0,84$, que es un máximo absoluto de Γ , la CVC se reduce a los dos puntos L_4 y L_5 . Entonces, para $J > J_{4,5}$, tenemos que no hay CVC y la región de Hill correspondiente es el conjunto vacío. Vemos esta descripción en la Figura 12.

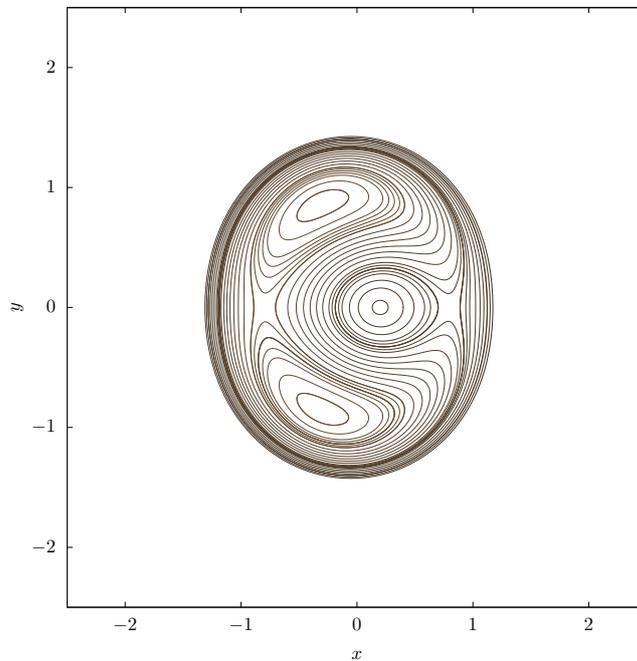


Figura 12: Gráfico de la diferente tipología de CVC que existe para el caso $\alpha = 2$ y $m = 0,2$. El color de las CVC se aclara a medida que J aumenta, pero aquí no se nota porque todos los valores de J son próximos y suficientemente bajos.

7. Conclusiones

Habiendo llegado al final de esta memoria, vamos a hacer una recapitulación de lo que hemos hecho y de los resultados obtenidos.

1. Hemos demostrado y obtenido los resultados básicos del problema de 2 cuerpos extendido. En particular, hemos obtenido las constantes del movimiento del problema, las cuales son la velocidad del centro de masas, el momento lineal, el momento angular y la energía. Gracias a la conservación del momento angular hemos podido reducir el problema del espacio al plano en el que se mueven los dos cuerpos, y gracias a la conservación de la energía y de la existencia de una función potencial, hemos podido dar la solución parametrizada por el tiempo en coordenadas polares del problema, y la expresión de la trayectoria, todo en forma de cuadraturas. También hemos podido reducir el problema al movimiento unidimensional de una partícula bajo la acción de un potencial efectivo, y gracias a eso hemos demostrado que existen órbitas circulares como solución a este problema $\forall \alpha$. Por último, hemos obtenido una expresión para la Tercera Ley de Kepler extendida que nos relaciona el radio de dichas órbitas circulares con la velocidad angular de las mismas, en función de α .
2. Gracias a la Tercera Ley de Kepler extendida y al radio que ésta nos proporciona, hemos pasado a un sistema de coordenadas adimensionalizado que nos simplifica el trabajo, llamado sistema sidéreo. Hemos dado las ecuaciones de movimiento en este sistema a partir de su lagrangiano y su hamiltoniano, los cuales dependían explícitamente del tiempo. Para solucionarlo, hemos pasado al sistema de coordenadas sinódico, que nos eliminaba esa dependencia. De nuevo, hemos presentado las ecuaciones de movimiento, el lagrangiano y el hamiltoniano en este sistema sinódico, el cual es una integral primera que nos simplificará el estudio posterior.
3. Hemos estudiado el campo determinado por el hamiltoniano, encontrando las ecuaciones que cumplen los puntos de equilibrio de dicho campo y solucionándolas. La solución ha resultado ser 7 puntos L_i , $i \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, cuya existencia ha sido discutida analíticamente en función de α y del parámetro de masa m . También hemos encontrado las coincidencias de estos puntos de equilibrio, que determinan las bifurcaciones de los mismos. Finalmente, estos resultados han sido comprobados presentando en formato de gráfico las coordenadas de estos puntos de equilibrio en función de α para dos valores de m distintos relacionados con nuestra discusión, y dichos gráficos eran congruentes con nuestros resultados teóricos. También se ha resumido todo el análisis de los puntos de equilibrio y su existencia en formato de tabla.
4. Hemos definido y justificado las regiones en las que se puede producir el movimiento del tercer cuerpo, las regiones de Hill, que vienen dadas por una restricción que presenta la existencia del hamiltoniano sinódico como integral primera. Hemos definido las constantes de Jacobi extendidas como $J := -2H$. Hemos visto que la frontera de las regiones de Hill está determinada por unas curvas llamadas curvas de velocidad cero, las cuales se pueden tratar como las curvas de nivel de una función Γ . Es decir, las curvas de velocidad cero vienen dadas por la expresión $\Gamma(x, y) = J$. Por tanto, el comportamiento cualitativo de las mismas se puede estudiar a partir del estudio de los puntos críticos de Γ , que resultan ser los puntos de equilibrio del

sistema. En definitiva, el comportamiento cualitativo de la frontera de las regiones de Hill cambia en los puntos de equilibrio. Hemos clasificado, pues, los puntos de equilibrio en función de α y m como puntos críticos de Γ , es decir, en función de si son singularidades, puntos de cúspide, máximos, mínimos o puntos de silla. De forma paralela, hemos encontrado el valor de J cuya correspondiente curva de nivel pasa por los puntos de equilibrio, y hemos presentado un gráfico con el valor de estas J en función de α para dos m diferentes. También hemos presentado una tabla con la clasificación de los puntos de equilibrio en función de α y m .

5. Por último, se han presentado y descrito diferentes gráficos en los que se observa el comportamiento de las CVC alrededor de la diferente tipología de puntos de equilibrio con la ayuda de un simulador, todo desde un enfoque cualitativo (que no menos serio).

Como se ha dicho en la introducción, en esta memoria se hace una extensión de [1]. Concretamente, se ha hecho una extensión de los capítulos 1 y 4 de esta obra, con las ecuaciones de movimiento en el sistema sidéreo y sinódico, los correspondientes hamiltonianos y lagrangianos, el sistema de coordenadas adimensional, y el estudio de los puntos de equilibrio y las regiones de Hill. No obstante, en esa obra, se tratan muchas más cosas y con mucha más profundidad. En particular, en el capítulo 5 de la misma, se presenta un estudio del comportamiento y la estabilidad de las órbitas alrededor de los puntos de equilibrio y, en el capítulo 8, se estudia la existencia y el comportamiento de órbitas periódicas.

Estos temas, que no se tratan en esta memoria por falta de tiempo y espacio, se presentan como una oportunidad para continuar con el trabajo en estas páginas realizado, debido al interés que me suscitan.

Referencias

- [1] Szebehely, V.G.: *Theory of Orbits*, New York: Acad. Press, 1967.
- [2] Goldstein, H.: *Mecánica clásica*, Ediciones Aguilar, S.A., Madrid, 1970.
- [3] Marion, Jerry B.: *Dinámica clásica de las partículas y sistemas*, Reverté, Barcelona, 1975.
- [4] Arnold, V.I.: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, 1978.
- [5] Abraham, R. and Marsden, J.: *Foundations of Mechanics*, Benjamin/Cummings, 1978.
- [6] Burden, R.L. y Faires, J.D.: *Numerical Analysis*, International Thompson, 2002.