UNIVERSITAT DE BARCELONA

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

MÉTODO DE MARKOWITZ Y MODELO DE BLACK-LITTERMAN

Autor: Mercedes Pons Salord

Director: Dr. José Manuel Corcuera
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica
Barcelona, 18 de enero de 2020

Abstract

Nowadays the theory of selection of investment portfolios has become a topic of main interest in the field of finances. There is a large number of investment opportunities and knowing how to optimize these investments and create the best portfolio is a fundamental aspect.

Markowitz's method has achieved theoretical success in terms of portfolio structuring and in the search for the implicit diversification in investment analysis. However, in practice, there are difficulties and inconveniences that have influenced on the success of its application.

This project is a theoretical and practical study about this method in real situations and the Black-Litterman model is presented as a methodological alternative that helps to neutralize some of these disadvantages and allows to maximize the expected yield, generating a more efficient, stable and diversified portfolio.

Resumen

Actualmente la teoría de selección de carteras de inversión se ha convertido en un tema de principal interés en el mundo de las finanzas. Existe un gran número de oportunidades de inversión y saber cómo optimizar tales inversiones y crear así las mejores carteras es un aspecto fundamental.

El método de Markowitz ha logrado un gran éxito a nivel teórico en cuanto a la estructuración de carteras y en la búsqueda de la diversificación implícita en el análisis de inversiones. Sin embargo, en la práctica, se presentan dificultades e inconvenientes, que han influido notoriamente en el poco éxito de su aplicación.

En este trabajo se hace un estudio teórico y práctico sobre este método en situaciones reales, y se presenta el modelo de Black-Litterman como alternativa metodológica que contribuye a neutralizar algunas de esas desventajas y permite maximizar el rendimiento esperado, generando una cartera más eficiente, estable y diversificada.

2010 Mathematics Subject Classification. 62P25, 91G10, 49N10

Agradecimientos

Este trabajo cierra una intensa etapa de formación tanto en el mundo de las matemáticas como a nivel personal y por ello querría agradecer a todas las personas que han estado conmigo en este camino.
En primer lugar, dar las gracias al Dr. José Manuel Corcuera por su gran ayuda y dedicación durante todo el trabajo, debatiendo cada detalle de las explicaciones. Agradecer también a todos los profesores que he tenido a lo largo de la carrera por hacernos descubrir todo un mundo en las matemáticas, por todas las dudas resueltas y por aguantar las largas colas de revisión de los exámenes para intentar rascar algunas décimas más.
En segundo lugar, agradecer a todos los compañeros y amigos, en especial a mi pareja, por su incondicional paciencia y ayuda en este trabajo y con el cual he podido compartir esta fantástica experiencia. Gracias a todos por las largas horas de estudio juntos, por los intercambios de apuntes y las grandes alegrías compartidas al entender esa demostración.
Finalmente agradecer en especial a mi familia, que desde la distancia, siempre me han apoyado y han creído en mi en los momentos más difíciles. Gracias por aguantar las quejas de esos exámenes tan injustos y difíciles que me parecían en esos momentos, pero también gracias por compartir los gritos de alegría al aprobar esa asignatura que tantas horas y esfuerzo le había dedicado.
Sin todos vosotros nada habría sido posible. Gracias.

"Quien se atreve a enseñar,
nunca debe dejar de aprender."

John Cotton Dana

Índice

Parte I

Introducción y conceptos básicos

En general, se entiende por inversión, *la adquisición por parte de un sujeto económico, ya sea persona física o jurídica, de un conjunto de activos capaces de proporcionarle servicios o rentas durante un cierto período de tiempo.*

Según explica J. García Boza en su libro *Inversiones Financieras: selección de carteras. Teoría y práctica* (véase [1]), invertir implica ceder dinero en el momento presente en el que se efectúa la inversión, a cambio de recibir dinero en el futuro. En consecuencia, desde el punto de vista financiero, se caracteriza a cualquier inversión por el *conjunto de pagos* que debe realizar el inversor, y por el *conjunto de cobros* que percibe a consecuencia de la citada inversión. Tales conjuntos constituyen la corriente financiera, teniendo lugar durante un cierto período de tiempo denominado *horizonte temporal.*
Cuando el activo objeto de la inversión es un bien material (un edificio, maquinaria, etc.), se habla de *inversiones reales*, mientras que cuando sea un título o activo financiero (acciones, bonos, letras del Tesoro, derivados,...), se trata de *inversiones financieras.*

En función de las cuantías a percibir por el poseedor de un activo financiero, se diferencian entre activos de renta fija y activos de renta variable. Un activo de renta fija promete un conjunto conocido de cobros o flujos de caja, mientras que en un activo de renta variable, tales cobros, a priori, son desconocidos. Las letras del Tesoro o bonos del Estado son un ejemplo de activos de renta fija, mientras que las acciones lo son de activos de renta variable.

Las inversiones financieras suelen realizarse distribuyendo los recursos financieros a invertir entre distintos productos, formando *carteras de inversión.* Dicho esto, todo el trabajo hará referencia a inversiones financieras materializadas en activos de renta variable, negociables en mercados financieros y agrupados en carteras.

La parte del campo de las inversiones conocido bajo el nombre de *Gestión de carteras* comprende las siguientes fases:

1. *Análisis de los títulos.* Trata de hacer predicciones de los rendimientos esperados, riesgos y covarianzas entre los activos disponibles para formar carteras.

2. *Análisis de las carteras.* Determinación de sus rendimientos esperados y riesgos en función de los títulos escogidos anteriormente y de las cuantías invertidas en cada uno de ellos.

3. De entre las carteras consideradas más apropiadas en el análisis, se efectúa la *selección de la cartera óptima*, es decir, aquella que se ajuste más a las preferencias y objetivos concretos del inversor.

En una concepción más amplia y vinculada a las tres fases anteriores, está la *administración de inversiones o administración de carteras*, que es el proceso por el que un gestor administra los recursos financieros que un inversor le encomienda para que sean invertidos. Entre sus funciones se incluyen las tres anteriores y se pueden señalar las cinco siguientes:

- Identificar las preferencias y objetivos del inversor en cuanto a la cuantía que está dispuesto a invertir, la rentabilidad esperada y el riesgo a soportar, estableciendo así una política de inversión.
- Realizar un análisis de activos.
- Formar y analizar las posibles carteras.
- De acuerdo con las preferencias del inversor, elegir la cartera específica en la que invertir.
- Evaluación periódica del rendimiento y riesgo que corre el inversor con la cartera concreta en la que ha invertido, así como la revisión y reestructuración de la misma.

Tal y como se ha señalado, la segunda fase del proceso de gestión de carteras es el análisis de los activos para su posterior análisis de la cartera. Todo ello se analiza en la *Teoría de selección de carteras*, la cual trata sobre la selección óptima de carteras de activos financieros de renta variable. Dicha selección se realiza por inversores que actúan racionalmente y con una razonable aversión al riesgo, es decir, lo que intentan es maximizar sus rendimientos para cada nivel de riesgo o minimizar el riesgo para cada nivel de rendimiento.

En el siguiente apartado se estudiará el proceso de análisis cuantitativo de los activos a partir de la tasa de retorno esperada y la varianza como medidas para el rendimiento y la volatilidad de la cartera.

1. Análisis de los activos

Siguiendo la teoría de *Portfolio mean and variance* de Karl Sigman y los apuntes académicos de la Universidad de Washington *Markowitz Mean-Variance Portfolio Theory* (véase [2], [4] respectivamente), en esta sección se pretende dar a conocer los conceptos básicos necesarios para entender la teoría de carteras de Markowitz.

1.1. Conceptos previos

Un activo es un instrumento financiero que otorga a su comprador el derecho a recibir ingresos futuros. En un principio la cartera está formada por n activos de riesgo, en tiempo inicial se dispone de un capital de X_0 euros para invertir y al cabo de un tiempo, el capital es de X_1.
A priori, se desconoce cómo distribuir el dinero entre los activos, de manera que el objetivo es repartir X_0 entre estos n activos de la mejor forma posible, con el fin de obtener el máximo rendimiento.

Definimos $x_{0i} = w_i X_0$ como la cantidad que decide invertirse en el activo i, siendo w_i el peso que ocupa dicho activo en la cartera. Debe satisfacerse por un lado que $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ y además, no se puede sobrecargar el presupuesto, de manera que

$$\sum_{i=1}^{n} w_i X_0 = X_0 \sum_{i=1}^{n} w_i = X_0.$$

Por otro lado, R_i es la variable aleatoria asociada al retorno del activo i, $\forall i = \{1, ...n\}$

$$R_i = \frac{x_{1i}}{x_{0i}}$$

siendo x_{1i} el retorno obtenido en tiempo $t = 1$ después de haber invertido x_{0i} en este activo, así $X_1 = x_{11} + ... + x_{1n}$, equivalentemente

$$X_1 = \sum_{i=1}^{n} R_i w_i X_0 = X_0 \sum_{i=1}^{n} R_i w_i$$

y por tanto el retorno total de la cartera será

$$\frac{X_1}{X_0} = \sum_{i=1}^{n} R_i w_i = R.$$

Así, se define la tasa de retorno del activo como

$$r_i = R_i - 1 = \frac{x_{1i} - x_{0i}}{x_{0i}},$$

de esta forma

$$x_{1i} - x_{0i} = x_{0i}(R_i - 1) \Leftrightarrow x_{1i} = x_{0i} R_i \Leftrightarrow x_{1i} = x_{0i}(r_i + 1).$$

Con todo esto, la tasa de retorno total será

$$r = R - 1 = \sum_{i=1}^{n} R_i w_i - \sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i=1}^{n} (R_i - 1) w_i = \sum_{i=1}^{n} r_i w_i.$$

Otro concepto importante es la tasa de retorno esperada (también conocida como media) y viene dada por

$$m_i = E(r_i),$$

por tanto $E(x_{1i}) = E(x_{0i}(r_i + 1)) = (1 + m_i) x_{0i}$.

Así, la tasa de retorno esperada total de la cartera viene dada por

$$m = E(r) = E(\sum_{i=1}^{n} r_i w_i) = \sum_{i=1}^{n} m_i w_i.$$

Finalmente, definiremos la varianza y covarianza entre activos. Teniendo en cuenta que $\sigma_i^2 = Var(r_i) = E(r_i^2) - m_i^2$ y $\sigma_{ij} = Cov(r_i, r_j) = E(r_i r_j) - m_i m_j$, la varianza total de la cartera vendrá dada por

$$\sigma^2 = Var(r) = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} w_i w_j \sigma_{ij}.$$

Observación 1.1. La varianza de la cartera es una medida de riesgo; lo que hace es medir cuánto de lejos está la tasa de retorno esperada m de la cartera creada respecto la verdadera tasa de retorno r.

1.2. Ventas en descubierto

Es natural el hecho de poder vender algo que tenemos pero, ¿se puede vender algo que no se tiene?. Pues bien, en el mundo financiero sí y es conocido como *Short selling*, o lo que es lo mismo, *Venta en descubierto*. El funcionamiento es el siguiente.

Consideremos el supuesto que se quiere vender un activo del que no se dispone, para ello, se debe acudimos a un *broker* con el fin de comprar una cierta cantidad de esas acciones a un precio x_0 y en un fecha determinada. A partir de ese momento, automáticamente figura en la cartera la adquisición de tal cantidad de ese activo, de modo que se puede vender.
Supongamos que ejecutamos la venta de dicho activo a un precio x_1.

De esta forma, si $x_1 < x_0$ significa que el precio de las acciones ha bajado y por tanto, la operación ha generado pérdidas de $x_1 - x_0$ euros. En caso contrario, si $x_1 > x_0$, las ganancias son de $x_1 - x_0$ euros.
Este tipo de operaciones tiene como retorno y tasa de retorno

$$\begin{aligned} R &= \frac{-x_1}{-x_0} = \frac{x_1}{x_0} \\ r &= \frac{(-x_1) - (-x_0)}{-x_0} = \frac{x_1 - x_0}{x_0} \end{aligned}$$

Antes de continuar la nomenclatura que se va a utilizar durante todo el trabajo es la siguiente:

$r = (r_1, r_2, ..., r_n)$ es el vector aleatorio de rentabilidades,

$m_i = E(r_i)$ es la rentabilidad esperada del activo $i, \forall i \in \{1, ..., n\}$, fijando así $m = (m_1, m_2, ..., m_n)$ el vector de rentabilidades esperadas,

$w = (w_1, w_2, ..., w_n)^T$ es el vector de pesos asociados a la cartera,

$\sigma_{ij} = Cov(r_i, r_j) = \Sigma$, con $\Sigma = (\sigma_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la covarianza de las rentabilidades respecto todos los títulos.

Con todo esto, la tasa de retorno de la cartera será una variable aleatoria con media $m^T w$ y varianza $w^T \Sigma w$. Además μ_b es la rentabilidad esperada mínima que acepta el inversor.

Una vez dadas todas las bases y conceptos principales, vamos a empezar con la teoría de Markowitz.

Parte II

Los fundamentos de la teoría de Markowitz

En el campo de la Teoría de selección de carteras, ocupa un lugar destacado Harry Max Markowitz por su publicación en 1952 de un artículo en el *Journal of Finance* titulado *Portfolio Selection*. Posteriormente su trabajo fue desarrollado por el propio autor en 1959, publicando su libro, *Portfolio Selection: Efficient of diversification of investments*.

Markowitz es un economista estadounidense especializado en el análisis de inversiones al cual se le considera el padre de la teoría moderna de carteras. Con su publicación, había desarrollado una teoría para un sistema de carteras en el que planteaba las bases de los sistemas de cartera actuales; estaba basado en un modelo matemático (como todas las teorías económicas modernas) que ofrecía a los inversionistas las mejores ganancias con el mínimo riesgo. Su trabajo fue la primera formalización matemática en la búsqueda de aquella cartera que maximizara la rentabilidad para un determinado nivel de riesgo.

En 1990 el premio Nobel de Economía se entregó a los tres distinguidos teóricos, Harry Markowitz, Merton Miller y William Sharpe, quienes habían desarrollado ya desde hacía tiempo sus teorías económicas, pero hasta ese año no se reconoció su contribución en el campo de las finanzas.

El modelo de Markowitz consiguió un gran éxito a nivel teórico, dando lugar a múltiples desarrollos y derivaciones, sentando las bases de diversas teorías de equilibrio en el mercado financiero. Sin embargo, su utilización en la práctica entre gestores de carteras y analistas de inversiones no ha sido tan extensa como podría suponerse dado su éxito teórico. Después veremos cuáles fueron los inconvenientes de este modelo y las soluciones que se plantean.

2. Hipótesis

L.A. Hernández publicó un artículo en *Rankia* titulado *Las 5 preguntas claves para entender el modelo de Markowitz*, (véase [7]). En esta publicación, se comentan las condiciones que presupone Markowitz para poder aplicar su modelo de selección de carteras.

Observar que muchas de estas hipótesis no pueden ser aplicadas, ya que la realidad es que la economía es mucho más compleja, pero es una forma de simplificar los cálculos.

2.1. Hipótesis sobre el comportamiento y método racional de elección del inversor

- Todos los individuos se comportan racionalmente y por tanto son maximizadores de su función de utilidad esperada.[2]

- La función de utilidad esperada del inversor depende únicamente del rendimiento esperado como medida de la rentabilidad y la varianza o desviación típica como medida del riesgo.

- Las funciones de utilidad de los inversores son monótonas crecientes por lo que para carteras de valores con una misma varianza se prefiere la cartera de mayor rendimiento esperado.

- Los inversores tienen aversión al riesgo, por lo que para carteras de valores con un mismo rendimiento esperado, se prefiere la cartera con menor varianza.

- Las curvas de indiferencia son crecientes (a mayor riesgo mayor rentabilidad exigida) y convexas (a mayor riesgo aumenta en mayor medida la rentabilidad exigida) e indica las combinaciones rentabilidad-riesgo que proporcionan la misma utilidad al inversor.

2.2. Hipótesis sobre los activos y los mercados financieros

- Se considera que los mercados son perfectos:
  - Toda la información está igualmente disponible y de forma gratuita para todos los participantes en los mercados.
  - No existen costes de transacción en las operaciones de compraventa de los activos financieros ni hay inflación ni impuestos en la economía.
  - Los títulos son infinitamente divisibles, es decir, es posible invertir en ellos en cualquier proporción.
  - Los inversores son precio-aceptantes.

- Todos los inversores tienen la misma amplitud en su horizonte de planificación, que es de un período. Al principio adquieren una cartera de valores determinada que venden al final del período en cuestión.

- En los mercados financieros se negocian n activos financieros arriesgados y sus combinaciones. No se contempla la existencia de un activo financiero libre de riesgo en el que poder invertir o con el que poder financiarse.

- Los valores tienen liquidez inmediata al final del período de referencia.

- No se permiten ventas en descubierto.

[2] La teoría de la utilidad esperada aborda el análisis de situaciones donde los individuos deben tomar una decisión bajo incertidumbre. Éstos elegirán el acto que dará lugar a la utilidad esperada más alta. La decisión también dependerá de la aversión al riesgo.

3. Problema de Markowitz

Siguiendo con los documentos *Markowitz Mean-Variance Portfolio Theory*, entramos ya en la sección del problema de Markowitz donde explica que lo que busca el inversor es la cartera más eficiente, es decir, aquella que presente el menor riesgo posible para un nivel determinado de rentabilidad.

Partiendo así de un capital inicial y de una serie de activos disponibles, es necesario calcular los pesos correspondientes de cada activo para obtener una cartera óptima.

Manteniendo la misma notación que hasta ahora, el conjunto de carteras eficientes puede calcularse resolviendo el siguiente problema cuadrático

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M}: & \text{Minimizar} & \frac{1}{2}Var(r) = \frac{1}{2}w^T\Sigma w \\ & \text{Sujeto a} & E(r) = m^T w \geq \mu_b \\ & & e^T w = 1 \end{array}$$

siendo e^T el vector unitario y μ_b el menor retorno que acepta el inversor.

Dado que el problema de Markowitz es un problema no lineal, en la siguiente sección se formaliza el método utilizado para su resolución.

4. Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker

En esta sección se presentan algunas condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir los candidatos a solución óptima del problema, para ello, se ha seguido unas notas publicadas en el departamento de matemática aplicada y estadística de la *Universidad Politécnica de Cartagena*, (véase [8]). En estas, se explica la resolución de problemas de optimización no lineal. Estas condiciones son las llamadas condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT).

Presentaremos la resolución general del siguiente problema

$$\begin{array}{rll} \text{Optimizar} & f(x_1, ..., x_n) & \\ \text{Sujeto a} & g_j(x_1, ..., x_n) \leq 0, & j = 1, ..., p \\ & h_i(x_1, ..., x_n) = 0, & i = 1, ..., m. \end{array}$$

A continuación, se trataran diferentes variantes del problema anterior dependiendo de las restricciones, para ello empezaremos con el caso más simple el cual solo consta de una restricción de desigualdad y fijando $n = 2$. Así tenemos el siguiente problema

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x, y) \\ \text{Sujeto a} & g(x, y) \leq 0 \end{array}$$

Definición 4.1. Una restricción de desigualdad es *activa* en $x \in \mathbb{R}^n$ si cumple $g(x) = 0$, por otro lado, diremos que es *inactiva* si $g(x) < 0$.

Teorema 4.2. *Sea x^* una solución del problema anterior. Supongamos que $g(x^*) = 0$ y $\bigtriangledown g(x^*) \neq 0$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{aligned} \bigtriangledown L(x^*, \lambda) &= 0 \\ \lambda g(x^*) &= 0 \\ \lambda &\leq 0 \\ g(x^*) &\leq 0 \end{aligned}$$

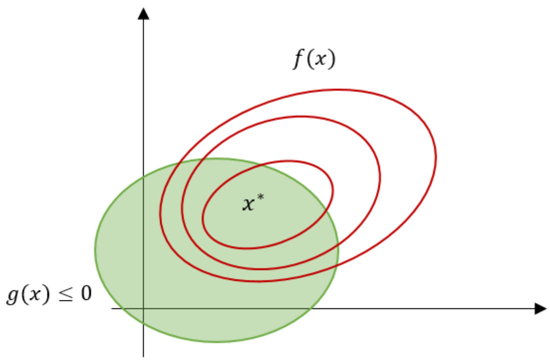
son las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) y $L(x^*, \lambda) = f(x^*) - \lambda g(x^*)$ es el Lagrangiano del problema.

La resolución del problema debe discutirse por casos:

Caso 1: $g(x^*) < 0$
Esto implica que x^* minimiza la función f, pero está dentro de la región limitada por la restricción, por tanto $\bigtriangledown f(x^*) = 0$.

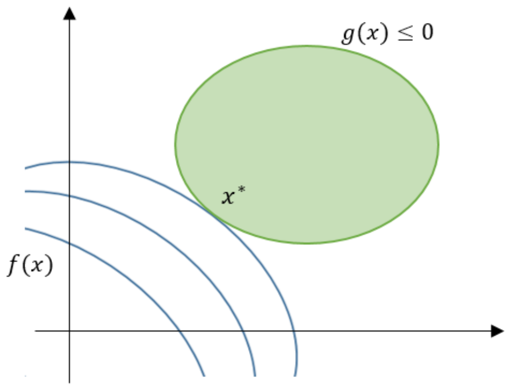
En este caso, $\lambda = 0$ de forma que las condiciones KKT son

$$\begin{aligned} \bigtriangledown f(x^*) &= 0 \\ g(x^*) &< 0 \end{aligned}$$



Caso 2: $g(x^*) = 0$
De esta forma, las condiciones ahora son las siguientes

$$\begin{aligned} \bigtriangledown L(x^*, \lambda) &= 0 \\ \lambda &\leq 0 \\ g(x^*) &= 0 \end{aligned}$$



A continuación, se va a suponer el caso de n variables, así el planteamiento del problema es prácticamente el mismo que en el apartado anterior

$$\begin{array}{rl} \text{Optimizar} & f(x_1, ..., x_n) \\ \text{Sujeto a} & g_j(x_1, ..., x_n) \leq 0, \quad j = 1, ..., p \end{array}$$

Teorema 4.3. *Sea $x^* \in \mathbb{R}^n$ solución del problema anterior, supongamos que las primeras p_0 restricciones de desigualdades son activas mientras que las $p - p_0$ restantes son inactivas. Además, se supone que el vector gradiente de las restricciones activas es linealmente independiente.*

El Lagrangiano será de la forma

$$L(x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_p) = f(x_1, ..., x_n) - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j g_j(x_1, ..., x_n)$$

obteniendo así las condiciones KKT siguientes

$$\nabla f(x_1^*, ..., x_n^*) - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \nabla g_j(x_1^*, ..., x_n^*) = 0$$
$$g_j(x_1^*, ..., x_n^*) \leq 0$$
$$\lambda_j g_j(x_1^*, ..., x_n^*) = 0$$
$$\lambda_j \leq 0$$

con $j = 1, ..., p$.

Para finalizar este apartado, trataremos el caso más complejo de optimización el cual nos interesa para resolver el problema de Markowitz. Éste incluye tanto igualdades como desigualdades en las restricciones. El problema se plantea de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rll} \text{Minimizar} & f(x_1, ..., x_n) & \\ \text{Sujeto a} & g_j(x_1, ..., x_n) \leq 0, & j = 1, ..., p \\ & h_i(x_1, ..., x_n) = 0, & i = 1, ..., m. \end{array}$$

Teorema 4.4. *Sea $x^* \in \mathbb{R}^n$ solución del problema anterior, supongamos que las primeras p_0 restricciones de desigualdades son activas mientras que las $p - p_0$ restantes son inactivas. Además, supondremos que el vector gradiente de las restricciones activas junto con las restricciones de igualdades son linealmente independientes en el punto x^*.*

El Lagrangiano será de la forma

$$L(x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_p, \gamma_1, ..., \gamma_m) = f(x_1, ..., x_n) - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j g_j(x_1, ..., x_n) - \sum_{i=1}^{m} \gamma_i h_i(x_1, ..., x_n)$$

obteniendo así las condiciones KKT siguientes

1. *Condición estacionaria*
$$\nabla f(x_1^*, ..., x_n^*) - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \nabla g_j(x_1^*, ..., x_n^*) - \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \nabla h_i(x_1^*, ..., x_n^*) = 0$$

2. *Condición de factibilidad*
$$\begin{aligned} g_j(x_1^*, ..., x_n^*) &\leq 0, \quad j = 1, ..., p \\ h_i(x_1^*, ..., x_n^*) &= 0, \quad i = 1, ..., m \end{aligned}$$

3. *Condición de holgura*
$$\lambda_j g_j(x_1^*, ..., x_n^*) = 0, \quad j = 1, ..., p$$

4. *Condición de signo*
$$\lambda_j \leq 0$$

Para la búsqueda práctica de puntos que cumplan las condiciones KKT, primero hay que resolver el sistema de ecuaciones compuesto por la condición estacionaria,

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1^*, ..., x_n^*) - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_k}(x_1^*, ..., x_n^*) - \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \frac{\partial h_i}{\partial x_k}(x_1^*, ..., x_n^*) = 0, \quad k = 1, ..., n$$

la condición de factibilidad para las restricciones de igualdad

$$h_i(x_1^*, ..., x_n^*) = 0, \quad i = 1, ..., m$$

y la condición de holgura

$$\lambda_j g_j(x_1^*, ..., x_n^*) = 0, \quad j = 1, ..., p.$$

Este sistema está compuesto por $(n + p + m)$ ecuaciones y $(n + p + m)$ incógnitas. La forma usual de resolver el sistema es comenzar por la condición de holgura ya que dichas ecuaciones proporcionan dos opciones

$$\lambda_j g_j(x_1^*, ..., x_n^*) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_j = 0 \\ g_j(x_1^*, ..., x_n^*) = 0 \end{cases}$$

Una vez resuelto el sistema, para ver cuál o cuáles de las soluciones obtenidas son puntos de KKT hay que, por una parte comprobar que $g_j(x_1^*, ..., x_n^*) \leq 0$ y por otra que $\lambda_j \leq 0$, $\forall j = 1, ..., p$.

5. Resolución del problema

Continuando con la lectura de *Portfolio mean and variance* y *Markowitz Mean-Variance Portfolio Theory*, el siguiente paso es encontrar la solución del problema de Markowitz ($\mathcal{M}$) utilizando la teoría explicada en el apartado anterior.

El Lagrangiano es el siguiente

$$L(w, \lambda, \gamma) = \frac{1}{2} w^T \Sigma w - \lambda(m^T w - \mu_b) - \gamma(e^T w - 1)$$

A partir de aquí, las condiciones KKT son las siguientes,

$$\frac{\partial L}{\partial w} = \Sigma w - \lambda m - \gamma e = 0 \tag{5.1}$$

$$\mu_b \leq m^T w \tag{5.2}$$

$$e^T w = 1 \tag{5.3}$$

$$\lambda(m^T w - \mu_b) = 0 \tag{5.4}$$

para algun $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$.

Como la matriz de covarianzas es simétrica y definida positiva, sabemos que si (w, λ, γ) es una tripleta que cumple las condiciones KKT, entonces necesariamente w será solución del problema de Markowitz ($\mathcal{M}$).

Sea $\bar{w}$ la solución del problema, para su resolución se van a considerar los siguientes casos:

Caso 1: $\mu_b < m^T \bar{w}$
Por la condición (5.4) tenemos que $\lambda = 0$, así las condiciones KKT se reducen a

$$\Sigma \bar{w} - \gamma e = 0 \tag{5.5}$$

$$e^T \bar{w} = 1 \tag{5.6}$$

Es necesario encontrar la tripleta $(\bar{w}, \lambda, \gamma)$ que cumpla las condiciones KKT. Para eso se debe resolver el sistema.
Partiendo de (5.5) y multiplicando por Σ^{-1}, obtenemos $\bar{w} = \gamma \Sigma^{-1} e$ que substituido en (5.6) resulta $e^T(\gamma \Sigma^{-1} e) = 1 = \gamma e^T \Sigma^{-1} e$. Por tanto, $\gamma = (e^T \Sigma^{-1} e)^{-1}$. De este modo

$$\bar{w} = (e^T \Sigma^{-1} e)^{-1} \Sigma^{-1} e$$

Así, la tripleta que satisface las condiciones KKT es

$$(\bar{w}, \lambda, \gamma) = ((e^T \Sigma^{-1} e)^{-1} \Sigma^{-1} e, 0, (e^T \Sigma^{-1} e)^{-1})$$

siendo $\bar{w}$ solución del problema de optimización buscada.

Corol·lari 5.1. *Este valor $\bar{w}$ proporciona la cartera de mínima varianza sobre todas las demás carteras y resuelve el siguiente problema*

$$\mathcal{M}_{min-var}: \qquad \textit{Minimizar} \quad \frac{1}{2} w^T \Sigma w$$
$$\textit{Sujeto a} \quad e^T w = 1$$

A consecuencia, sustituyendo el valores de $\bar{w}$ en la desigualdad $\mu_b \leq m^T\bar{w}$, el retorno asociado sería

$$\mu_{min-var} = \frac{m^T\Sigma^{-1}e}{e^T\Sigma^{-1}e},$$

denotando al conjunto de pesos asociados al de mínima varianza de la solución $\bar{w}$ como $w_{min-var}$.

Caso 2: $\mu_b = m^T\bar{w}$
Siguiendo la metodología anterior, empezamos multiplicando (5.1) por Σ^{-1} obteniendo

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \Sigma^{-1}\lambda m + \Sigma^{-1}\gamma e \\ &= \lambda\Sigma^{-1}m + \gamma\Sigma^{-1}e. \end{aligned}$$

Si sustituimos este resultado a las condiciones (5.2) y (5.3) se obtiene

$$\begin{aligned} \mu_b &= \lambda m^T\Sigma^{-1}m + \gamma m^T\Sigma^{-1}e \\ 1 &= \lambda m^T\Sigma^{-1}e + \gamma e^T\Sigma^{-1}e, \end{aligned}$$

que expresado en forma matricial sería

$$\begin{pmatrix} m^T\Sigma^{-1}m & m^T\Sigma^{-1}e \\ m^T\Sigma^{-1}e & e^T\Sigma^{-1}e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_b \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

La matriz M $= \begin{pmatrix} m^T\Sigma^{-1}m & m^T\Sigma^{-1}e \\ m^T\Sigma^{-1}e & e^T\Sigma^{-1}e \end{pmatrix}$ es semidefinida positiva ya que

$$\begin{aligned} 0 < \delta = |M| &= \left| \begin{pmatrix} m & e \end{pmatrix}^T \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} m & e \end{pmatrix} \right| \\ &= (m^T\Sigma^{-1}m)(e^T\Sigma^{-1}e) - (m^T\Sigma^{-1}e)^2, \end{aligned}$$

y esto siempre se cumple si m y e son linealmente independientes.

Caso 2.1: $\delta = 0$
Este es el caso en que $m = \tau e$ para alguna $\tau \in \mathbb{R}$. En tal caso, si $\mu_b/\tau \neq 1$, entonces el problema de Markowitz no es factible. En cambio, si $\mu_b/\tau = 1$, $w_{min-var}$ es solución del problema.

Caso 2.1: $\delta > 0$
El sistema (5.7) puede ser resuelto dando

$$\lambda = e^T v \quad y \quad \gamma = -m^T v,$$

donde

$$v = \delta^{-1}\Sigma^{-1}(\mu_b e - m).$$

Substituyendo todos estos valores en $\bar{w}$ encontrada anteriormente obtenemos la solución óptima

$$
\begin{aligned}
\bar{w} &= e^T v \Sigma^{-1} m - m^T v \Sigma^{-1} e \\
&= e^T \delta^{-1} \Sigma^{-1} (\mu_b e - m)(\Sigma^{-1} m) - m^T \delta^{-1} \Sigma^{-1} (\mu_b e - m)(\Sigma^{-1} e) \\
&= \frac{e^T \Sigma^{-1} (\mu_b e - m)}{\delta} (\Sigma^{-1} m) - \frac{m^T \Sigma^{-1} (\mu_b e - m)}{\delta} (\Sigma^{-1} e) \\
&= \frac{e^T \Sigma^{-1} \mu_b e - e^T \Sigma^{-1} m}{\delta} (\Sigma^{-1} m) - \frac{m^T \Sigma^{-1} \mu_b e - m^T \Sigma^{-1} m}{\delta} (\Sigma^{-1} e) \\
&= \frac{(e^T \Sigma^{-1} \mu_b e)(e^T \Sigma^{-1} m) - (e^T \Sigma^{-1} m)^2}{\delta} \frac{\Sigma^{-1} m}{e^T \Sigma^{-1} m} \\
&+ \frac{(m^T \Sigma^{-1} m)(e^T \Sigma^{-1} e) - \mu_b (m^T \Sigma^{-1} e)(e^T \Sigma^{-1} e)}{\delta} \frac{\Sigma^{-1} e}{e^T \Sigma^{-1} e} \\
&= \alpha w_M + (1 - \alpha) w_{min-var}
\end{aligned}
$$

siendo

$$
w_M = \frac{\Sigma^{-1} m}{e^T \Sigma^{-1} m}
$$

el peso del mercado y

$$
\alpha = \frac{\mu_b (m^T \Sigma^{-1} e)(e^T \Sigma^{-1} e) - (m^T \Sigma^{-1} e)^2}{\delta}.
$$

Definición 5.2. La ***cartera de mercado*** es una cartera teórica que incluye todos los valores que se cotizan en el mercado y en la misma proporción que el valor que cada uno de ellos guarda con relación al valor total del mercado. Tanto su rendimiento como su riesgo suelen estimarse a partir de algún índice de mercado.

Visto esto, toda solución del problema de Markowitz puede ser representada como una combinación lineal de dos carteras: la cartera de mínima varianza de pesos $w_{min-var}$ y la cartera de mercado con pesos w_M.

Este resultado es conocido como *Teorema de dos fondos*, el cual se va a formalizar más adelante.

5.1. Equilibrio entre: Maximizar beneficios - Minimizar riesgos

En la realidad no se espera únicamente la maximización de beneficios ya que va ligado a un elevado riesgo, así como tampoco se busca la mínima volatilidad al implicar un menor rendimiento. De este modo, lo que se intenta es encontrar un equilibrio entre tales parámetros.

Así, el problema a resolver se puede plantear como

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{M}_\lambda : & \text{Minimizar} & \frac{1}{2} w^T \Sigma w - \lambda m^T w \\
& \text{Sujeto a} & e^T w = 1
\end{array}
$$

El procedimiento de su resolución es prácticamente el mismo que en la sección anterior.

El Lagrangiano sería

$$L(w,\lambda,\gamma) = \frac{1}{2}w^T\Sigma w - \lambda m^T w - \gamma(e^T w - 1).$$

De esta forma, las condiciones KKT asociadas al problema son

$$\Sigma w - \lambda m - \gamma e = 0 \tag{5.8}$$
$$e^T w = 1. \tag{5.9}$$

De nuevo, considerando $\bar{w}$ como la solución del problema, se procede a resolver el problema como en el apartado anterior. Para ello, a partir de (5.8) se obtiene

$$\bar{w} = \lambda\Sigma^{-1}m + \gamma\Sigma^{-1}e = 0, \tag{5.10}$$

que substituyendo tal valor en (5.9)

$$\begin{aligned} e^T(\lambda\Sigma^{-1}m + \gamma\Sigma^{-1}e) &= 1 \\ \lambda e^T\Sigma^{-1}m + e^T\gamma\Sigma^{-1}e &= 1 \\ e^T\gamma\Sigma^{-1}e &= 1 - \lambda e^T\Sigma^{-1}m \\ \gamma &= \frac{1-\lambda e^T\Sigma^{-1}m}{e^T\Sigma^{-1}e}. \end{aligned}$$

Finalmente substituyendo en (5.10) obtenemos el valor de $\bar{w}$ en función de λ

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \lambda\Sigma^{-1}m + \frac{1-\lambda e^T\Sigma^{-1}m}{e^T\Sigma^{-1}e}\Sigma^{-1}e \\ &= \lambda\Sigma^{-1}m + \frac{\Sigma^{-1}e - \lambda e^T\Sigma^{-1}m\Sigma^{-1}e}{e^T\Sigma^{-1}e} \\ &= \lambda\Sigma^{-1}m + \frac{\Sigma^{-1}e}{e^T\Sigma^{-1}e} - \frac{\lambda(m^T\Sigma^{-1}e)\Sigma^{-1}e}{e^T\Sigma^{-1}e} \\ &= \frac{\Sigma^{-1}e}{e^T\Sigma^{-1}e} + \lambda(m^T\Sigma^{-1}e)\left(\frac{\Sigma^{-1}m}{m^T\Sigma^{-1}e} - \frac{\Sigma^{-1}e}{e^T\Sigma^{-1}e}\right) \\ &= (1-\alpha)\frac{\Sigma^{-1}e}{e^T\Sigma^{-1}e} + \alpha\frac{\Sigma^{-1}m}{m^T\Sigma^{-1}e} \\ &= (1-\alpha)w_{min-var} + \alpha w_M, \end{aligned}$$

siendo $w_{min-var}$ y w_M los pesos definidos anteriormente y $\alpha = \lambda(m^T\Sigma^{-1}e)$.

Además la rentabilidad es

$$\begin{aligned} \mu_\lambda &= m^T w_\lambda = (1-\alpha)m^T w_{min-var} + \alpha m^T w_M \\ &= m^T w_{min-var} + \alpha m^T(w_M - w_{min-var}) \\ &= \mu_{min-var} + \lambda(m^T\Sigma^{-1}e)(w_M - w_{min-var}) \\ &= \mu_{min-var} + \lambda\frac{\delta}{e^T\Sigma^{-1}e}, \end{aligned}$$

siendo

$$\delta = (m^T\Sigma^{-1}m)(e^T\Sigma^{-1}e) - (m^T\Sigma^{-1}e)^2.$$

Observación. Si $\lambda = 0$, entonces $\mu_0 = \mu_{min-var}$ ya que en este caso no fijamos ninguna rentabilidad mínima, es decir, solo pretendemos que nuestro riesgo sea el mínimo posible.

Observación. Fijémonos que si $\lambda \to \infty$, entonces $\mu_\lambda \to \infty$ de modo que $\lambda \in (0, \infty)$ y $\mu_\lambda \in (\mu_0, \infty)$. A partir de aquí, podemos representar la curva $\left(\sqrt{w_\lambda^T \Sigma^{-1} w_\lambda}, r_\lambda\right) = \left(\sqrt{Var(r_\lambda)}, E(r_\lambda)\right)$, siendo $r_\lambda = w_\lambda^T r$.

Definición. La curva mencionada anteriormente se llama curva de eficiencia, más conocida como ***Frontera Eficiente***.

6. Teorema de fondos

En el problema de Markowitz se supone que todos los n activos tienen riesgo; $\sigma^2 > 0$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Luego, veremos qué pasa cuando añadimos un activo sin riesgo. Para esta sección he continuado con los apuntes anteriores y además he seguido otro documento de Karl Sigman, *Fund theorems*, (véase [3]).

6.1. Teorema de dos fondos

Teorema 6.1. *Dadas dos soluciones diferentes del problema de Markowitz, podemos generar toda una colección de nuevas soluciones y además, todo este conjunto de puntos se encuentran en la frontera eficiente.*

Demostración. Sea μ_1 y μ_2 tales que $\mu_{min-var} < \mu_1, \mu_2$ siendo $\mu_1 < \mu_2$. Considerando las condiciones KKT iniciales

$$\begin{aligned} \Sigma w - \lambda m - \gamma e = 0 \\ \mu \leq m^T w \\ e^T w = 1 \\ \lambda(m^T w - \mu) = 0, \end{aligned}$$

como $\mu_{min-var} \neq \mu_1, \mu_2$ esto implica que la desigualdad $\mu_i \leq m^T w$ es activa, es decir, $\mu_i = m^T w$. De este modo las condiciones KKT son

$$\begin{aligned} \Sigma w - \lambda m - \gamma e = 0 \\ \mu = m^T w \\ e^T w = 1 \end{aligned}$$

Obteniendo así un sistema de ecuaciones lineal, el cual tiene solución para todo valor de $\mu > \mu_{min-var}$.

Sea $(w_i, \lambda_i, \gamma_i)$ para $i = 1, 2$ las soluciones buscadas, entonces

$$(w_\alpha, \lambda_\alpha, \gamma_\alpha) = (1 - \alpha)(w_1, \lambda_1, \gamma_1) + \alpha(w_2, \lambda_2, \gamma_2)$$

Obviamente $\mu_\alpha = (1 - \alpha)\mu_1 + \alpha\mu_2$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces la cartera asociada está definida por $r_\alpha = (1 - \alpha)r_1 + \alpha r_2$ para $\alpha \in \left(\frac{\mu_{min-var} - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1}, \infty\right)$. A medida que va variando el valor de α, los pares $\left(\sqrt{var(r_\alpha)}, E(r_\alpha)\right)$ van dibujando la frontera eficiente y la curva de desviación media estándar entre las carteras r_1 y r_2. □

6.2. Teorema de un fondo

Un activo libre de riesgo es aquel que siempre tiene el mismo retorno r_0, de modo que $\sigma^2 = 0$. Si lo que se desea es obtener una cartera sin riesgo, debe invertirse todo el capital en este activo, teniendo en cuenta que el retorno será menor. Por esta razón, se hace una combinación de activos sin riesgo, los cuales mantienen una volatilidad baja, incluyendo también activos con riesgo, los cuales aumentan la tasa de retorno.

6.2.1. Planteamiento y resolución del problema

Vamos ahora a repetir el análisis del problema de Markowitz de media-varianza incluyendo un activo libre de riesgo. Si escribimos nuestro vector aleatorio de retornos como $r_M = (r_0, r^T)^T$, donde $r = (r_1, r_2, ..., r_n)^T$ siendo r_i la tasa de retorno del activo de riesgo i, entonces la matriz de covarianzas para r_M será

$$\bar{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Sigma \end{pmatrix}$$

Recordemos que Σ es la matriz de covarianzas de r. Además, el problema de Markowitz se puede escribir como

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M}_0 : & \text{Minimizar} & \frac{1}{2} w^T \Sigma w \\ & \text{Sujeto a} & r_0 w_0 + m^T w \geq \mu_b \\ & & w_0 + e^T w = 1 \end{array}$$

con w_0 el peso que le asignamos al activo libre de riesgo. Supondremos que $\mu_b \geq r_0$ y continuamos suponiendo que Σ es invertible.
El Lagrangiano de la operación sería

$$L(w, \lambda, \gamma) = \frac{1}{2} w^T \Sigma w - \lambda(r_0 w_0 + m^T w - \mu_b) - \gamma(w_0 + e^T w - 1).$$

Así, las condiciones KKT son las siguientes

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial w_0} &= \lambda r_0 + \gamma = 0 && (6.1) \\ \frac{\partial L}{\partial w} &= \Sigma w - \lambda m - \gamma e = 0 && (6.2) \\ 0 &= \lambda(r_0 w_0 + m^T w - \mu_b) && (6.3) \\ 1 &= w_0 + e^T w && (6.4) \\ \mu_b &\leq r_0 w_0 + m^T w && (6.5) \\ 0 &\leq \lambda && (6.6) \end{aligned}$$

Como en el apartado anterior, vamos a resolver por casos.

Caso 1: $\mu_b < r_0 w_0 + m^T w$
Entonces $\lambda = 0$, lo cual implica que $\gamma = 0$ en (6.1) y que $w = 0$ en (6.2). En este caso, la solución viene dada por $w_0 = 1$, es decir, la cartera óptima consiste en invertirlo todo en

el activo libre de riesgo.

Caso 2: $\mu_b = r_0 w_0 + m^T w$
Para su resolución, se siguen los pasos del apartado anterior obteniendo así

$$w = \lambda \Sigma^{-1}(m - r_0 e) \tag{6.7}$$

Utilizando (6.4) obtenemos las dos ecuaciones siguientes

$$\begin{aligned} 1 - w_0 &= e^T w = \lambda e^T \Sigma^{-1}(m - r_0 e) \\ \mu_b - r_0 w_0 &= m^T w = \lambda m^T \Sigma^{-1}(m - r_0 e). \end{aligned}$$

Matricialmente se escribe como

$$\begin{pmatrix} 1 & e^T \Sigma^{-1}(m - r_0 e) \\ r_0 & m^T \Sigma^{-1}(m - r_0 e) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_b \end{pmatrix}$$

Resolviendo por el sistema de eliminación Gaussiana obtenemos

$$\begin{pmatrix} w_0 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - (\mu_b - r_0) \dfrac{e^T \Sigma^{-1}(m - r_0 e)}{(m - r_f e)^T \Sigma^{-1}(m - r_0 e)} \\ \dfrac{\mu_b - r_0}{(m - r_0 e)^T \Sigma^{-1}(m - r_0 e)} \end{pmatrix}$$

Se supone que $m \neq r_0 e$ ya que sinó, $w_0 = 1$ y $w = 0$ lo que implicaría que los activos tienen el mismo rendimiento promedio. Entonces aplicando esto en (6.7) resulta

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} w_0 \\ w \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \left(\begin{pmatrix} 1 - e^T \Sigma^{-1}(m - r_0 e) \\ \Sigma^{-1}(m - r_0 e) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) && (6.8) \\ &= (1 - \alpha) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 - e^T \Sigma^{-1}(m - r_0 e) \\ \Sigma^{-1}(m - r_0 e) \end{pmatrix} && (6.9) \end{aligned}$$

siendo

$$\alpha = \frac{\mu_b - r_0}{(m - r_0 e)^T \Sigma^{-1}(m - r_0 e)}$$

Por lo tanto, los pesos para la cartera óptima es una combinación lineal de dos conjuntos de pesos

$$w_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_M = \begin{pmatrix} 1 - e^T \Sigma^{-1}(m - r_0 e) \\ \Sigma^{-1}(m - r_0 e) \end{pmatrix}$$

Dicho esto, se puede formular el siguiente resultado

Teorema 6.2. *Supongamos que nuestra cartera está formada por un activo libre de riesgo y un fondo de inversiones F formado por ciertas cantidades de activos con riesgo. Entonces cualquier cartera eficiente puede ser expresada como una combinación lineal del activo sin riesgo y tal fondo.*

6.2.2. Nueva frontera eficiente

Consideramos n activos con riesgo que denotaremos por $A_1, ..., A_n$ con tasa de retorno r_i, rentabilidad esperada m_i y varianza σ_i^2. Supongamos ahora que hay un activo A_0 libre de riesgo con tasa de retorno r_0. Vamos a ver como afecta este activo a la frontera eficiente.

Nos referiremos a la frontera eficiente de los n activos con riesgo como *frontera eficiente inicial* y al añadir el activo libre de riesgo a estos n activos, la diferenciaremos como la *nueva frontera eficiente*.

Diremos que $(\beta_1, ..., \beta_n)$ es una cartera de n activos de riesgo y la llamaremos "fondo". Además, diremos que $(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n)$ es la cartera de $n+1$ activos.
Sabemos que $\alpha_0 + \alpha_1 + ... + \alpha_n = 1$, lo que implica que $1 - \alpha_0 = \alpha_1 + ... + \alpha_n$. De esta forma, podemos rescribir la cartera como

$$(\alpha_0, (1-\alpha_0)(\beta_1, ..., \beta_n))$$

donde

$$\beta_i = \frac{\alpha_i}{1-\alpha_0}$$

Del mismo modo $\beta_1 + ... + \beta_n = 1$ y por tanto podemos rescribir la cartera con solo dos activos: A_0 y el fondo $(\beta_1, ..., \beta_n)$ con pesos α_0 y $1-\alpha_0$. Podemos determinar la *nueva frontera eficiente* determinando los puntos (σ, m) de las carteras de dos activos $(A_0, fondo)$.

Cada fondo tiene su propia tasa de retorno $\beta_1 r_1 + ... + \beta_n r_n$, su propia rentabilidad esperada

$$m_\beta = \sum_{i=1}^{n} \beta_i m_i$$

y su propia varianza

$$\sigma_\beta^2 = Var(\beta_1 r_1 ... + \beta_n r_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \beta_i \beta_j \sigma_{ij}$$

Así, la cartera $(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n)$ tiene rentabilidad esperada y varianza

$$m_\alpha = \alpha_0 r_0 + (1-\alpha_0) m_\beta$$
$$\sigma_\alpha^2 = (1-\alpha_0)^2 \sigma_\beta^2,$$

respectivamente.

La cartera corresponde así al punto

$$(\sigma_\alpha, m_\alpha) = (|1-\alpha_0|\sigma_\beta, \alpha_0 r_0 + (1-\alpha_0) m_\beta).$$

Para $\alpha_0 \leq 1$, $|1-\alpha_0| = 1-\alpha_0$ por lo tanto, el punto puede rescribirse como

$$(1-\alpha_0)(\sigma_\beta, m_\beta) + \alpha_0(0, r_0).$$

Como $\alpha_0 \in (0,1)$, el punto se extiende por la línea que conecta $(0, r_0)$ con $(\sigma_\beta^2, m_\beta)$ los cuales corresponden a los dos extremos, que son invertirlo todo en A_0 o todo en el fondo. La línea viene dada por la ecuación

$$m_\alpha = \frac{(m_\beta - r_0)}{\sigma_\beta} \sigma_\alpha + r_0 \tag{6.10}$$

Supongamos que $m_\beta > r_0$, de modo que la recta tiene pendiente positiva la cual tiende a infinito cuando $\alpha_0 \to -\infty$, lo cual corresponde a invertir más cantidad en el activo libre de riesgo que en el fondo.
Eligiendo un fondo con una pendiente mayor obtenemos una linea más eficiente, ya que obtenemos una mayor tasa de retorno para un mismo riesgo.
De la pendiente obtenida en (6.12), observamos que puede ser creada eligiendo fondos con puntos sobre la *frontera eficiente inicial* (una menor varianza σ_β dada una rentabilidad esperada m_β). Entonces la línea que va de $(0, r_0)$ hasta $F = (\sigma_\beta, m_\beta)$ es una línea tangente a la *frontera eficiente inicial.*

Observación 6.3. El caso $\alpha_0 > 1$ no es relevante, puesto que se crea una recta empezando del punto $(0, r_0)$ con pendiente negativa

$$m_\alpha = \frac{(r_0 - m_\beta)}{\sigma_\beta}\sigma_\alpha + r_0 \tag{6.11}$$

6.2.3. Encontrar el valor de F

Para encontrar el valor de F, simplemente debemos encontrar el fondo $(\beta_1, .., \beta_n)$ que corresponde al par (σ_β, m_β) que maximiza $\dfrac{m_\beta - r_0}{\sigma_\beta}$. En otras palabras, debemos maximizar la función

$$f(\beta_1, ..., \beta_n) = \frac{(m_\beta - r_0)}{\sigma_\beta}$$

donde

$$\begin{aligned} m_\beta &= \sum_{i=1}^{n} \beta_i m_{\beta_i} \\ \sigma_\beta &= \sqrt{Var(\beta_1 r_1 + ... + \beta_n r_n)} \\ &= (\sum_{i=1}^{n} \beta_i \beta_j \sigma_{\alpha ij})^{1/2} \end{aligned}$$

Como $\sum_{j=1}^{n} \beta_j = 1$ y $r_0 = \beta_1 r_0 + ... + \beta_n r_0$, podemos rescribir f como

$$f(\beta_1, ..., \beta_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \beta_i (m_{\beta_i} - r_0)}{(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \beta_j \sigma_{ij})^{1/2}}$$

Entonces la diferencial $\dfrac{\partial f}{\partial \beta_i} = 0, i \in \{1, ..., n\}$ es un sistema lineal de n ecuaciones de la forma

$$\sum_{j=1}^{n} v_j \sigma_{ij} = m_{\beta_i} - r_0$$

donde $v_j = c\beta_j$, siendo c una variable constante definida como

$$c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \beta_i (m_i - r_0)}{\sum_{i=1}^{n} \beta_i \beta_j \sigma_{ij}}$$

siendo β_i la solución óptima.

De este modo, podemos dar el siguiente teorema

Teorema 6.4. *El fondo $F = (\beta_1, ..., \beta_n)$ en el teorema de un fondo viene dado por*

$$\beta_i = \frac{v_i}{\sum_{j=1}^n v_j},$$

donde $(v_1, ..., v_n)$ es la solución del sistema linal de n ecuaciones

$$\sum_{j=1}^n v_j \sigma_{ij} = m_{\beta_i} - r_0,$$

Parte III

El modelo CAPM

Tomando de nuevo los documentos de Karl Sigman como referencia para este capítulo, *Capital Asset Pricing Model* (véase [4]), nos dice que para este modelo partimos de las siguientes suposiciones: tenemos un mercado abierto en el que todos los activos con riesgo están a nuestra disposición, además, la información de mercado (rendimiento esperado, riesgo y covarianza de los activos) está a disposición de todos los inversores.

En este mercado tenemos un único activo libre de riesgo con tasa de retorno r_0 y además cualquier inversor puede prestar dinero o pedirlo prestado.

Estamos suponiendo también que todos los inversores son adversos al riesgo, los cuales parten de las bases de Markowitz sobre la teoría de carteras. Dicho esto, podemos concluir que en el momento en que todos tienen los mismos activos disponibles, con la misma información sobre cada uno de estos y el mismo método de decisión, todos los inversores deben tener la misma cartera, sobre la misma frontera eficiente y su cartera es una combinación entre el activo libre de riesgo y el mismo fondo $\mathcal{F}$ creado por activos con riesgo. En otras palabras, todos tienen el mismo problema de optimización con la misma cartera eficiente como solución.

Este fondo eficiente es conocido como *cartera de mercado* y la denotaremos por $M = (\sigma_M, m_M)$. La ponderación de cada activo en la cartera de mercado viene dada por el valor de su capital (el valor total de sus acciones) dividido entre el valor del capital total del mercado. Por ejemplo, tenemos un activo i el cual representa las acciones de la compañía A, y esta compañía tiene 10.000 activos a 20$ cada uno. Por tanto, el valor del capital del activo i es $V_i = 10000 * 20 = 200000$. Suponiendo que el mercado tiene un total de n activos, el valor total del mercado será $V = V_1 + V_2 + ... + V_n$ y la ponderación de cada activo dentro de la cartera de mercado será $w_i = \dfrac{V_i}{V}$.

En la situación descrita, se dice que *el mercado financiero está en equilibrio*, lo que significa:

- El tipo de interés libre de riesgo es único, determinándose el valor a través del juego de la oferta y la demanda, de forma que la cuantía de dinero prestado y tomado a préstamo se igualan.
- Todos los títulos con riesgo tienen una demanda igual a su oferta, por lo que el exceso de demanda es cero y todos los títulos pertenecerán a algún inversor.

El modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model) es un modelo de valoración de activos financieros desarrollado por William Sharpe, su desarrollo está basado en diversas formulaciones de Harry Markowitz sobre la diversificación y la teoría moderna de *Portfolio*. En su introducción, también formaron parte Jack L. Treynor, John Lintner y Jan Mossin.

7. Línea de mercado de capital

Recordemos que el teorema de un fondo decía que si en nuestra cartera añadíamos un activo libre de riesgo, la frontera eficiente era una línea recta desde el punto del activo libre de riesgo hasta el fondo $\mathcal{F}$.
Sea (σ_M, m_M) el punto correspondiente a la cartera de mercado M, entonces todos los puntos (σ, m) elegidos de forma racional por el inversor están sobre la recta

$$m = r_0 + \frac{m_M - r_0}{\sigma_M}\sigma \tag{7.1}$$

conocida como *línea de mercado de capital.*

La pendiente de esta línea es conocida como *precio del riesgo* o también conocida como ratio de Sharpe.

Teorema 7.1. *Capital Asset Pricing Model (CAPM). El retorno esperado del activo i, m_i, cumple*

$$m_i = r_0 + \beta_i(m_M - r_0) \tag{7.2}$$

donde

$$\beta_i = \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2}$$

y $\sigma_{i,M}$ es la covarianza entre el activo i y la cartera de mercado M. Tal valor de beta es una variable importante que mide el riesgo individual por activo.
Más en general, para cada cartera $p = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ de activos con riesgo, tendríamos

$$m_p = r_0 + \beta_p(m_M - r_0) \tag{7.3}$$

donde

$$\beta_p = \frac{\sigma_{p,M}}{\sigma_M^2} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i$$

Demostración. Crearemos una cartera con un activo i y la cartera de mercado M, $(\alpha, 1-\alpha)$ con $\alpha \in [0,1]$. La tasa de retorno es $r(\alpha) = \alpha r_i + (1-\alpha)r_M$. Supondremos que este activo i no es eficiente, es decir, no se encuentra sobre la frontera eficiente y así como vamos variando el valor de α va trazando una curva $(\sigma(\alpha), m_M(\alpha))$ con

$$m(\alpha) = \alpha m_i + (1-\alpha)m_M = \alpha(m_i - m_M) + m_M$$

$$\sigma^2(\alpha) = \alpha^2\sigma_i^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{i,M} + (1-\alpha)^2\sigma_M^2 =$$
$$\alpha^2(\sigma_i^2 + \sigma_M^2 - 2\sigma_{i,M} + 2\alpha(\sigma_{i,M} - \sigma_M^2) + \sigma_M^2)$$

Cuando $\alpha = 0$, $(\sigma(0), m(0)) = (\sigma_M, m_M)$ y cuando $\alpha = 1$, $(\sigma(1), m(1)) = (\sigma_i, m_i)$, así tal curva es tangente a la línea de mercado de capital en el punto (σ_M, m_M) y además cuando $\alpha = 0$,

$$\frac{dm(\alpha)}{d\sigma(\alpha)}|_{\alpha=0} = \frac{m_M - r_0}{\sigma_M}$$

Además

$$\frac{dm(\alpha)}{d\sigma(\alpha)} = \frac{dm(\alpha)/d\alpha}{d\sigma(\alpha)/d\alpha} = \frac{m_i - m_M}{(\sigma_{i,M} - \sigma_M^2)/\sigma_M}.$$

Entonces tenemos

$$\frac{m_i - m_M}{(\sigma_{Mi} - \sigma_M^2)/\sigma_M} = \frac{m_M - r_0}{\sigma_M} \tag{7.4}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_M(m_i - m_M)}{\sigma_{Mi} - \sigma_M^2} = \frac{m_M - r_0}{\sigma_M} &\iff m_i - m_M = \frac{(m_M - r_0)(\sigma_{Mi} - \sigma_M^2)}{\sigma_M^2} \iff \\
m_i - m_M = \frac{(m_M - r_0)}{\sigma_M}\frac{\sigma_{Mi} - \sigma_M^2}{\sigma_M} &\iff m_i - m_M = \frac{\sigma_M(m_M - r_0)}{\sigma_M}\frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M} \iff \\
m_i - m_M = \beta_i\frac{\sigma_M(m_M - r_0)}{\sigma_M} &
\end{aligned}$$

Obteniendo así la fórmula de CAPM para el activo i. $\square$

8. Riesgo sistemático

Teniendo en mente la fórmula de CAPM, dado un activo i, podemos expresar su tasa de retorno como

$$r_i = r_0 + \beta_i(r_M + r_0) + \epsilon_i$$

donde ϵ_i es una variable aleatoria la cual expresa el término de error. Vamos a determinar algunas propiedades de este error.

Es inmediato de la fórmula CAPM que $E(\epsilon_i) = 0$. Además $Cov(\epsilon_i, r_M) = 0$:

$$\begin{aligned}
Cov(\epsilon_i, r_M) &= Cov(r_i - r_0 - \beta_i(r_M - r_0), r_M) \\
&= Cov(r_i - \beta_i(r_M - r_0), r_M) \\
&= Cov(r_i, r_M) - \beta_i Cov(r_M, r_M) \\
&= \sigma_{i,M} - \frac{\sigma_{M,i}}{\sigma_M^2}\sigma_M^2 \\
&= \sigma_{i,M} - \sigma_{i,M} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto el término de error tiene media 0 y está incorrelacionado con la cartera de mercado.

Para la varianza, partiendo de la fórmula CAPM con el término de error tenemos

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2\sigma_M^2 + Var(\epsilon_i)$$

El primer término de la suma, $\beta_i^2\sigma_M^2$ es conocido como *riesgo sistemático* y representa la parte del riesgo de invertir en el activo i y la otra parte, $Var(\epsilon_i)$ es conocida como *riesgo no sistemático* el cual puede ser reducido diversificando, al contrario del otro cuando $\beta_i^2 > 0$.

9. Precio de los activos

Consideramos un activo de precio $P = X_0$ en $t = 0$, rentabilidad $Q = X_1$ y rentabilidad esperada $E(X_1)$ en tiempo $t = 1$. Entonces la rentabilidad esperada viene dada por $m = \dfrac{E(X_1) - X_0}{X_0} = \dfrac{E(X_1) - P}{P}$, equivalentemente

$$P = \frac{E(X_1)}{1+m}$$

aplicando la fórmula CAPM obtenemos la expresión

$$P = \frac{E(X_1)}{1 + r_0 + \beta(m_M - r_0}$$

conocida como *versión de precios de la fórmula CAPM.*

Podemos re-expresar la fórmula utilizando $r = \dfrac{Q-P}{P} = \dfrac{Q}{P} - 1$, entonces

$$\begin{aligned} Cov(r, r_M) &= Cov((Q/P) - 1, r_M) \\ &= Cov((Q/P), r_M) \\ &= \frac{1}{P} Cov(Q, r_M); \end{aligned}$$

obteniendo así

$$\beta = \frac{1}{P}(Cov(Q, r_M)/\sigma_M^2).$$

Añadiendo esto en versión de precios de la fórmula CAPM obtenemos

$$P = \frac{E(X_1)}{1 + r_0 + \frac{1}{P}(Cov(Q, r_M)/\sigma_M^2)(m_M - r_0)}$$

equivalentemente

$$P = \frac{E(X_1) - \frac{Cov(Q,r_M)/\sigma_M^2)(m_M - r_0)}{\sigma_M^2}}{1 + r_0}$$

Si el activo no está correlacionado con el mercado, entonces el precio es exactamente $\dfrac{E(X_1)}{1+r_0}$. El ajuste

$$-\frac{Cov(Q, r_M)(m_M - r_0)}{\sigma_M^2}$$

produce un precio más bajo si el activo se correlaciona positivamente con el mercado, y un precio más alto si el activo se correlaciona negativamente con el mercado.

Parte IV

El modelo de Black Litterman

Esta es ya la última sección teórica del trabajo, la cual he desarrollado gracias a una publicación realizada por Henry Stewart en el *Journal of Asset Management* titulada *A demystification of the Black-Litterman model: Managing quantitative and traditional portfolio construction*, (véase [6]).

El modelo de Black-Litterman fue desarrollado en 1990 por Fischer Black y Robert Litterman. Este modelo combina las ideas del *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), el modelo Bayesiano, los cuales hablaremos a continuación y el modelo de Markowitz explicado anteriormente con el fin de calcular la cartera de pesos óptima bajo unos parámetros específicos. Como hemos visto en el capítulo anterior los inversores usaban como datos de partida los retornos esperados de los activos y los aplicaban en el modelo de Markowitz el cual generaba la cartera de pesos. Veremos ahora que en el modelo de Black-Litterman, los inversores parten de su punto de vista, su opinión sobre los retornos esperados de las carteras, de modo que el modelo combina los puntos de vista de forma equilibrada, produciendo el conjunto de retornos esperados de los activos, así como de la cartera de pesos óptima. El modelo de Black-Litterman utiliza los pesos que debemos poner en la cartera según la certeza que tengamos de nuestro punto de vista, la covarianza entre tal opinión y el equilibrio y la covarianza entre los puntos de vista. Este capítulo nos hablará de cómo desarrollar el método de Black-Litterman siguiendo tres pasos que vamos a desarrollar en las tres siguientes secciones. La primera tratará sobre el cálculo de la información a priori para estimar los retornos. Esto partirá de la cartera de equilibrio CAPM. El segundo paso es especificar la opinión de los inversores y finalmente el tercero hace una combinación del proceso de estimación para los retornos con los puntos de vista de los inversores.

10. Suposiciones y conceptos previos del modelo

Antes de presentar el teorema de Black-Litterman, fijaremos la notación que se va a utilizar durante todo este capítulo y los conceptos básicos necesarios. Para ello, volviendo al teorema *Capital Asset Pricing Model (CAPM)* se pueden obtener los siguientes resultados.

Sea r el vector de retornos de los activos, entonces $E(r)$ será el vector de exceso de retorno, es decir, el rendimiento real. Se expresa de la siguiente forma

$$M = E(r) = m - r_0$$

Por otro lado se considera el vector de exceso de rendimientos en equilibrio, Π. Dicho de otra forma, es el rendimiento que se deduce del mercado. Su expresión es

$$\Pi = \beta(m_M - r_0)$$

con $\beta = \dfrac{Cov(r, r^T w_m)}{\sigma_m^2}$, siendo $r^T w_m$ es el retorno de mercado, w_m el vector de pesos de mercado y σ_m^2 su volatilidad. Fijando $\Sigma = Cov(r, r^T)$, entonces

$$\Pi = \delta \Sigma w_m$$

con $\delta = \dfrac{\mu_m - r_0}{\sigma_m^2}$ una constante positiva.

En el modelo de Black-Litterman, lo que se intenta es dar el conjunto de retornos esperados en base a la combinación de opiniones de los inversores. Ahora la pregunta es, ¿cómo se puede representar la opinión de los inversores? Para responder la pregunta será necesario el uso del Teorema de Bayes.

Utilizando la notación anterior, el teorema se expresaría de la siguiente forma

$$\begin{aligned} f_{M|\Pi}(m|\pi) &= \frac{f_{M|\Pi}(m,\pi)}{f_\Pi(\pi)} && (10.1) \\ &= \frac{f_{\Pi|M}(\pi,m) f_M(m)}{f_\Pi(\pi)} && (10.2) \\ &\propto f_{\Pi|M}(\pi,m) f_M(m) && (10.3) \end{aligned}$$

por ser $f_\Pi(\pi)$ un valor constante.

Además, tenemos las siguientes suposiciones,

A1:

Los inversores tienen un conjunto de k opiniones las cuales son representadas por los siguientes parámetros, definidos de esta forma según los *papers* relacionados con este tema:

- P es la matriz $(k \times n)$ de relaciones lineales sobre las que tenemos conocimiento a priori.
  Los activos que muestran un mejor comportamiento, recibirán peso positivo y deberán sumar 100 %. Si hay más de uno, el peso será proporcional al peso original. Los activos que muestran un peor comportamiento recibirán peso negativo y deberán sumar −100 %. Si hay más de uno, el peso será proporcional al peso original.

  Por ejemplo, supongamos que TEF tiene una rentabilidad esperada de un 8 % con un 85 % de confianza. Por otro lado BBVA va a experimentar un outperformance frente a IBE y TEF de un 3 % con un 95 % de confianza.
  La matriz P que se obtiene es

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- q es un vector $k \times 1$ que contiene el valor medio de esas relaciones lineales que conocemos.

- Ω es una matriz $k \times k$ que expresa la precisión (varianza) de las valores de esas relaciones lineales es una matriz diagonal.

$$\Omega = diag(P(\tau\Sigma)P^T)$$

siendo

$$\begin{aligned} w_{ij} = P(\tau\Sigma)P^T, \forall i = j \\ w_{ij} = 0, \forall i \neq j \end{aligned}$$

Cuanto mayor w_{ij} mayor será el grado de incertidumbre.

Con esto, la primera suposición del teorema es que

$$PM \backsim N(q, \Omega) \tag{10.4}$$

A2:

$$\Pi | M \backsim N(M, \tau\Sigma) \tag{10.5}$$

siendo τ una constante de proporcionalidad.

Observación 10.1. En el modelo CAPM, se obtenía que $\Pi = M$, pero en el modelo de Black-Litterman, al haber la incorporación de la opinión del inversor, ahora la igualdad es falsa. En este capítulo, Π tendirá a una Normal centrada en M pero con una variación $\tau\Sigma$.

11. Fórmula de Black-Litterman

Aplicando las suposiciones anteriores a la expresión obtenida en (8.2), queremos ver que

$$f_{M|\Pi}(m|\pi) \backsim N(\mu_*, \sigma) \tag{11.1}$$

siendo

$$\begin{aligned} \mu_* &= ((\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P)^{-1}((\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P^T\Omega^{-1}q) \\ \sigma &= ((\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P)^{-1} \end{aligned}$$

Demostración. Sabemos por ***A1*** que $PM \backsim N(q, \Omega)$, por tanto su función de densidad es

$$f_{PM}(Pm) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k det(\Omega)}} exp(-\frac{1}{2}(Pm - q)^T(\Omega)^{-1}(Pm - q))$$

Por otro lado gracias a ***A2***, $\Pi|M \backsim N(M, \tau\Sigma)$ tenemos la siguiente función de densidad

$$f_{\Pi|M}(\pi, m) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n det(\tau\Sigma)}} exp(-\frac{1}{2}(\pi - m)^T(\tau\Sigma)^{-1}(\pi - m))$$

Observación 11.1. Antes de continuar, observar que como hipótesis ***A1*** tenemos la semejanza de PM a una Normal, pero lo que necesitamos es la semejanza de M para encontrar $f_M(m)$ y resolver el problema (10.3).

Si P fuera invertible $f_M(m) = f_{PM}(Pm) * det(P)^{-1}$, siendo el determinante un valor constante y por tanto no habría problema, la condición ***A1*** sería totalmente válida.
El hecho está en que P, al no ser una matriz cuadrada, no puede tener inversa. Para solucionar este problema, lo que se hace es terminar de completar la matriz con 0 y así P será de dimensión $(n \times n)$.

Al realizar esta modificación, se está variando también la matriz Ω, ya que debe completarse de forma que sea de dimensión $(n \times n)$. Para ello, el resto de coeficientes de la diagonal serán infinitos,

$$\Omega = \begin{bmatrix} w_{11} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & w_{kk} & & & \\ & & & \infty & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \infty \end{bmatrix}$$

por el hecho de que se desconoce totalmente su valor y por tanto, el grado de incertidumbre es mayor. Además, al hacer la inversa esos coeficientes tienden a cero y por tanto no nos afecta en el resultado.

Por todo esto, a partir de ***A1*** podemos llegar también a la solución del problema.

Dicho esto, vamos a aplicar tales funciones en la fórmula de Bayes expresada en (10.3)

$$\begin{gathered} f_{\Pi|M}(\pi, m) f_{PM}(Pm) = \\ \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n det(\tau\Sigma)}} exp\left\{-\frac{1}{2}(\pi - m)^T(\tau\Sigma)^{-1}(\pi - m)\right\} \times \\ \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k det(\Omega)}} exp\left\{-\frac{1}{2}(Pm - q)^T\Omega^{-1}(Pm - q)\right\} \end{gathered}$$

Dejando de lado las constantes obtenemos

$$\begin{gathered} f_{\Pi|M}(\pi, m) f_{PM}(Pm) = \\ k * exp\left\{\frac{-1}{2\tau}(\pi - m)^T\Sigma^{-1}(\pi - m) - \frac{1}{2}(Pm - q)^T\Omega^{-1}(Pm - q)\right\} \end{gathered}$$

Resolvemos el término cuadrático del exponente

$$\begin{gathered} m^T P^T \Omega^{-1} Pm - 2q^T\Omega^{-1}Pm + q^T\Omega^{-1}q + \\ m^T(\tau\Sigma)^{-1}m - 2\pi^T(\tau\Sigma)^{-1}m + \pi^T(\tau\Sigma)^{-1}\pi \end{gathered}$$

Equivalentemente

$$m^T\left[P^T\Omega^{-1}P + (\tau\Sigma)^{-1}\right]m - 2\left[q^T\Omega^{-1}P + \pi^T(\tau\Sigma)^{-1}\right]m + q^T\Omega^{-1}q + \pi^T(\tau\Sigma)^{-1}\pi$$

Podemos simplificar la fórmula introduciendo las variables C, H, A:

$$\begin{aligned} C &= (\tau\Sigma)^{-1}\pi + P^T\Omega^{-1}q, \\ H &= (\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P, \\ A &= q^T\Omega^{-1}q + \pi^T(\tau\Sigma)^{-1}\pi \end{aligned}$$

Utilizando la notación anterior y que $H = H^T$, $H^{-1}H = I$ obtenemos

$$\begin{aligned} m^T Hm - 2C^T m + A = \\ mH^T H^{-1}Hm - 2C^T H^{-1}Hm + A = \\ (Hm - C)^T H^{-1}(Hm - C) + A - C^T H^{-1}C = \\ (m - H^{-1}C)^T H(m - H^{-1}C) + A - C^T H^{-1}C. \end{aligned}$$

Fijémonos que el término $A - C^T H^{-1}C$ no depende de Pm así que desaparece con la constante de integración. De este modo

$$f_{M|\Pi}(m|\pi) = exp\left\{-\frac{1}{2}(m - H^{-1}C)^T H(m - H^{-1}C)\right\}$$

tiene media

$$\mu_* = H^{-1}C = ((\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P)^{-1}((\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P^T\Omega^{-1}q)$$

y varianza

$$\sigma = H^{-1} = ((\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P)^{-1}$$

$\square$

Parte V

Caso práctico

Para finalizar el trabajo, he decidido poner en práctica el funcionamiento del método de Markowitz y así poder aplicar a la realidad de una forma clara y visual todo lo explicado hasta ahora.

12. Datos

El primer paso es fijar un horizonte temporal, para ello he decidido tomar desde enero de 2014 hasta diciembre de 2018. El siguiente paso es tener claro con qué activos trabajar, por eso, primero he decidido considerar que el Dow Jones es el mercado de referencia y he recopilado los precios de cierre ajustados mensualmente de las 30 empresas que cotizan en este mercado. Las empresas son las siguientes: 3M (MMM), American Express (AXP), Apple (AAPL), Boeing (BA), Caterpillar, Inc. (CAT), Chevron Corporation (CVX), Cisco (CSCO), Coca-Cola (KO), DuPont (DD), ExxonMobil (XOM), Goldman Sachs (GS), Home Depot (GS), Home Depot (HD), Intel (INTC), IBM (IBM), Johnson & Johnson (JNJ), JPMorgan Chase (JPM), McDonald's (MCD), Merck (MRK), Microsoft (MSFT), Nike (NKE), Pfizer (PFE), Procter Gamble (PG), The Travelers Companies (TRV), UnitedHealth Group (UNH), United Technologies Corporation (UTX), Verizon Communications (VZ), Visa (V), Walt-Mart (WMT) y Walt Disney (DIS).

Como se ha visto en *Capítulo I: Introducción y conceptos básicos*, Markowitz trabaja con las tasas de retorno de los activos, no con los precios, es por eso que debemos calcular el rendimiento mensual de cada título. Por ejemplo, para calcular la rentabilidad mensual de feb-15 de AAPL haremos

$$r_{feb15} = \frac{P_{feb15} - P_{ene15}}{P_{ene15}},$$

siendo P_{ene15} y P_{feb15} el precio de cierre ajustado de ene-15 y feb-15 respectivamente.

Una vez calculados todos los rendimientos mensuales de los activos de nuestro mercado, tomamos el rendimiento medio de cada uno para crear el vector aleatorio de rentabilidades del mercado $r_M = (r_{AAPL}, r_{AXP}, r_{BA}, ..., r_{XOM})$.

Otra variable que considera Markowitz es la varianza o bien desviación estándar como medida de riesgo. Durante este trabajo utilizo la desviación típica para evitar utilizar medidas cuadráticas. Entonces lo que hacemos es calcular la varianza y desviación media de cada activo. Podemos utilizar las fórmulas de Excel para tales parámetros y así simplificar los cálculos.

La *Figura 1* muestra algunos de los resultados de las rentabilidades mensuales obtenidas, y la *Figura 2* el vector de rentabilidades, varianza y desviación media de cada activo.

Date	AAPL	AXP	BA	CAT
ene-14	64,3542	77,7924	106,868	76,6
feb-14	67,6504	83,7358	109,99	80,2
mar-14	69,4132	82,5891	107,668	82,1
abr-14	76,3126	80,204	110,696	87,1
may-14	81,8619	84,1499	116,042	85,0
jun-14	84,5963	87,2492	109,773	90,
jul-14	87,0268	80,931	103,949	83,
ago-14	93,308	82,5836	109,402	91,3
sep-14	92,1712	80,73	110,568	82,9
oct-14	98,8038	82,9525	108,424	84,9
nov-14	108,803	85,4842	116,627	84,8
dic-14	101,419	86,0577	113,483	77,2
ene-15	107,649	74,6345	126,92	67,4
feb-15	118,031	75,689	131,704	70,5
mar-15	114,78	72,47	131,843	68,0
abr-15	115,444	72,0886	125,922	73,9
may-15	120,176	74,2014	123,444	73,1
jun-15	116,185	72,3399	122,644	72,7
jul-15	112,36	71,0597	127,462	67
ago-15	104,597	71,6763	115,536	65,4
sep-15	102,633	69,2566	116,513	56,5
oct-15	111,194	68,4437	131,746	63,1
nov-15	110,077	67,1836	129,415	63,5
dic-15	98,3626	65,2236	129,445	59,4
ene-16	90,9615	50,172	107,547	54,4
feb-16	90,3542	52,3507	105,801	60,7
mar-16	102,401	57,8326	114,695	68,7
abr-16	88,0728	61,6284	121,797	69,
may-16	93,8228	62,2391	113,981	65,7

→

Date	AAPL	AXP	BA	CAT
feb-14	5,122%	7,640%	2,922%	4,6
mar-14	2,606%	-1,369%	-2,112%	2,4
abr-14	9,940%	-2,888%	2,813%	6,0
may-14	7,272%	4,920%	4,829%	-2,4
jun-14	3,340%	3,683%	-5,402%	6,3
jul-14	2,873%	-7,241%	-5,305%	-7,2
ago-14	7,218%	2,042%	5,246%	8,9
sep-14	-1,218%	-2,245%	1,066%	-9,2
oct-14	7,196%	2,753%	-1,939%	2,4
nov-14	10,120%	3,052%	7,565%	-0,0
dic-14	-6,787%	0,671%	-2,695%	-9,0
ene-15	6,142%	-13,274%	11,840%	-12,6
feb-15	9,645%	1,413%	3,770%	4,5
mar-15	-2,755%	-4,253%	0,105%	-3,4
abr-15	0,579%	-0,526%	-4,491%	8,5
may-15	4,099%	2,931%	-1,967%	-0,9
jun-15	-3,321%	-2,509%	-0,648%	-0,5
jul-15	-3,293%	-1,770%	3,929%	-7,2
ago-15	-6,908%	0,868%	-9,357%	-2,8
sep-15	-1,878%	-3,376%	0,846%	-13,6
oct-15	8,341%	-1,174%	13,074%	11,6
nov-15	-1,004%	-1,841%	-1,769%	0,6
dic-15	-10,642%	-2,917%	0,023%	-6,4
ene-16	-7,524%	-23,077%	-16,917%	-8,4
feb-16	-0,668%	4,343%	-1,623%	11,5
mar-16	13,333%	10,471%	8,406%	13,0
abr-16	-13,992%	6,564%	6,192%	1,5
may-16	6,529%	0,991%	-6,417%	-5,7

Figura 1

	AAPL	AXP	BA	CAT	CSCO	CVX	DD	DIS	GE	GS	HD
Rendimiento	1,760%	0,498%	2,066%	1,100%	1,602%	0,462%	0,660%	0,930%	-1,514%	0,356%	1,687
Varianza	0,507%	0,335%	0,442%	0,567%	0,333%	0,337%	0,411%	0,243%	0,392%	0,426%	0,260
Desviación	7,122%	5,784%	6,651%	7,530%	5,770%	5,802%	6,410%	4,932%	6,264%	6,529%	5,095

Figura 2

Nota. Para ver todos los resultados de este análisis de datos, consultar el Anexo *Datos*.

A continuación, de entre las 30 empresas del mercado se ha seleccionado 9 en base a las correlaciones entre ellas, ya que Markowitz apuesta por una cartera diversificada y para ello, cuanta menos correlación mejor. Además, se ha intentado no elegir más de dos empresas por sector.

Estas son las que compondrán la cartera de inversión:

- Informática
    - Apple (AAPL)
- Software
    - Microsoft (MSFT)
- Banca
    - Visa (V)
    - JPMorgan Chase (JPM)
- Seguros
    - The Travelers Companies (TRV)
- Salud
    - UnitedHealth Group (UNH)
- Minoristas
    - Wal-Mart (WMT)
- Bebidas
    - Coca-Cola (KO)

Elegir en qué empresas invertir es el primer paso a dar para la creación de fondos de inversión, pero no es tan directo como parece. Este proceso requiere tiempo de estudio de la empresa a la que se decide invertir y un amplio conocimiento de indicadores macroeconomómicos.
Para la elección de estas 9 empresas tan sólo me he fijado en su correlación y en diversificar el fondo, pero en la realidad se deberian tener en cuenta indicadores como el EBITDA de la empresa, el índice de apalancamiento crediticio, el cashflow, etc. y hacer un buen estudio de mercado. Con todo esto, se tendría una opinión personal de cada empresa y una predicción del futuro en base a lo estudiado. A partir de aquí se podría aplicar el método de Black-Litterman explicado en el *Capítulo IV*.
Este método requiere tener un buen nivel económico y sale de la línea de trabajo, por ello he decidido ceñirme en el método de Markowitz y no en el de Black-Litterman.

Cabe destacar que en el mundo de las finanzas siempre se trabaja con valores anualizados, es por eso que antes de plantear el método de Markowitz debemos calcular $m = (m_{AAPL}, m_{AXP}, ..., m_{XOM})$, el vector de rentabilidades medias anuales esperadas y la varianza media anual de los 9 activos seleccionados.

Nota. Ver Anexo *Benchmark* con los resultados completos.

Date	Dow Jones	JPM	AAPL	V	TRV	UNH	VZ	WMT	KO	MSFT
feb-14	3,96755%	3,309%	5,122%	4,879%	3,150%	6,904%	0,160%	0,027%	6,740%	1,242%
mar-14	0,83294%	6,846%	2,606%	-3,769%	1,503%	6,108%	-0,021%	2,316%	-3,535%	7,798%
abr-14	0,74846%	-7,791%	9,940%	-6,138%	7,074%	-8,146%	-1,766%	4,964%	1,058%	-1,439%
may-14	0,82221%	-0,107%	7,272%	6,031%	3,168%	6,117%	8,103%	-3,688%	0,906%	1,337%
jun-14	0,65459%	3,689%	3,340%	-1,172%	0,664%	2,662%	-2,062%	-1,609%	0,910%	2,575%
jul-14	-1,56478%	0,087%	2,873%	0,142%	-4,240%	-0,390%	3,045%	-1,985%	0,448%	3,501%
ago-14	3,23093%	3,807%	7,218%	0,716%	5,750%	6,946%	-0,126%	2,609%	15,646%	5,259%
sep-14	-0,32488%	1,329%	-1,218%	1,170%	-0,813%	-0,496%	0,341%	1,952%	-1,882%	2,684%
oct-14	2,03967%	0,398%	7,196%	13,151%	7,933%	10,625%	0,520%	-0,262%	6,837%	1,273%
nov-14	2,51701%	0,141%	10,120%	6,942%	3,621%	3,810%	1,804%	14,776%	1,928%	1,832%
dic-14	-0,02900%	4,023%	-6,787%	2,340%	1,340%	2,494%	-7,531%	-1,896%	5,604%	-2,232%
ene-15	-3,69252%	-13,103%	6,142%	-2,780%	-2,352%	5,501%	-2,287%	-0,495%	-0,049%	-13,025%
feb-15	5,63794%	13,413%	9,645%	6,434%	4,493%	6,946%	9,462%	-1,236%	9,893%	8,540%
mar-15	-1,96650%	-1,142%	-2,755%	-2,859%	0,642%	4,101%	-1,658%	-2,002%	-0,993%	-6,615%
abr-15	0,36229%	4,424%	0,579%	0,978%	-6,012%	-5,510%	3,722%	-4,536%	-5,351%	19,626%
may-15	0,95378%	4,675%	4,099%	3,982%	0,010%	7,908%	-0,876%	-4,843%	4,150%	-3,660%
jun-15	-2,17188%	3,010%	-3,321%	-2,057%	-4,411%	1,489%	-5,724%	-3,894%	-0,260%	-5,171%
jul-15	0,39927%	1,136%	-3,293%	12,197%	10,465%	-0,070%	0,386%	1,480%	5,868%	5,776%
ago-15	-6,56777%	-5,853%	-6,908%	-5,362%	-4,448%	-4,695%	-0,509%	-10,072%	-0,487%	-6,809%
sep-15	-1,47222%	-4,883%	-1,878%	-2,140%	-1,844%	0,268%	-5,434%	0,854%	-0,833%	2,371%
oct-15	8,46708%	5,380%	8,341%	11,369%	14,135%	1,965%	7,745%	-11,721%	7,602%	18,934%
nov-15	0,31919%	4,531%	-1,004%	1,843%	1,488%	-4,305%	-1,791%	2,795%	8,282%	3,248%
dic-15	-1,66418%	-0,975%	-10,642%	-1,671%	-1,493%	4,374%	1,694%	4,181%	-1,218%	2,767%
ene-16	-5,50202%	-9,889%	-7,524%	-3,946%	-4,645%	-1,685%	8,113%	9,161%	-4,486%	-0,703%
feb-16	0,30486%	-4,743%	-0,668%	-2,819%	0,448%	3,421%	2,770%	-0,030%	-1,304%	-7,642%
mar-16	7,07529%	5,187%	13,333%	6,076%	8,547%	8,228%	6,604%	3,241%	7,501%	9,329%
abr-16	0,50071%	6,721%	-13,992%	0,994%	-5,312%	2,578%	-5,806%	-1,642%	0,897%	-9,705%

	DOW JONES	JPM	AAPL	V	TRV	UNH	VZ	WMT	KO	MSFT
Rentabilidad media mensual	0,724%	1,351%	1,760%	1,749%	0,959%	2,367%	0,777%	0,731%	1,687%	2,069%
Rentabilidad anual	8,687%	16,214%	21,116%	20,987%	11,506%	28,406%	9,319%	8,770%	20,247%	24,826%
Desviación media mensual	3,171%	5,616%	7,122%	4,627%	4,840%	4,761%	4,875%	5,355%	5,095%	5,974%
Desviación anual	10,985%	19,455%	24,670%	16,027%	16,766%	16,491%	16,889%	18,552%	17,651%	20,694%
Varianza	1,2646	1,1999	1,1683	0,7637	1,4572	0,5805	1,8123	2,1154	0,8718	0,8336

13. Matrices

Recordemos que en el *Capítulo II. Los fundamentos de la teoría de Markowitz*, se planteaba el problema de Markowitz y lo que hacíamos era minimizar la varianza sujeto a una rentabilidad mínima fijada,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}: \quad & \text{Minimizar} \quad \frac{1}{2}Var(r) = \frac{1}{2}w^T\Sigma w \\ & \text{Sujeto a} \qquad E(r) = m^T w \geq \mu_b \\ & \qquad\qquad\qquad e^T w = 1 \end{aligned}$$

En este capítulo lo que haremos es calcular el vector de pesos w para cada nivel de riesgo fijado y por tanto necesitamos la matriz de covarianzas anuales Σ entre los activos seleccionados. Es decir, lo planteamos de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathcal{M}: \quad & \text{Maximizar} \quad & E(r) = m^T w \\ & \text{Sujeto a} \quad & \frac{1}{2} w^T \Sigma w \leq \beta \\ & & e^T w = 1 \end{aligned}$$

donde β es el máximo riesgo que estamos dispuestos a aceptar.

La matriz resulante es la siguiente

MATRIZ DE COVARIANZA ANUAL									
	JPM	AAPL	V	TRV	UNH	VZ	WMT	KO	MSFT
JPM	0,03785119	0,005391	0,010527	0,013925	0,013582	0,003768	-1,8E-05	0,013961	0,018458
AAPL	0,00539139	0,06086	0,017512	0,011816	0,008063	0,00496	0,006539	0,00852	0,019804
V	0,01052691	0,017512	0,025688	0,012861	0,009788	0,004308	0,002686	0,014538	0,018183
TRV	0,01392481	0,011816	0,012861	0,02811	0,010755	0,010693	0,009336	0,014873	0,014952
UNH	0,01358178	0,008063	0,009788	0,010755	0,027195	0,008346	0,007989	0,012057	0,005246
VZ	0,00376777	0,00496	0,004308	0,010693	0,008346	0,028523	0,010783	0,004703	0,009329
WMT	-1,8384E-05	0,006539	0,002686	0,009336	0,007989	0,010783	0,034416	0,003815	0,003431
KO	0,01396086	0,00852	0,014538	0,014873	0,012057	0,004703	0,003815	0,031156	0,010496
MSFT	0,01845774	0,019804	0,018183	0,014952	0,005246	0,009329	0,003431	0,031156	0,042822

Por ejemplo, para calcular la covarianza anual entre TRV y V, lo que haremos es $= COVARIANCE.P$(vector rentabilidad mensual TRV, vector rentabilidad mensual V)

14. Método de Markowitz

Ahora sólo nos queda desarrollar el método de Markowitz, para ello vamos a explicar paso a paso su resolución.

Paso 1.
La tabla que aparece a continuación es la que he utilizado para aplicar la función *Solver*, la cual me irá dando los diversos valores de pesos correspondientes a cada activo, fijando un riesgo total para la cartera y la tasa libre de riesgo.

ACTIVO	PESO	RENTABILIDAD ANUAL	BETA
JPM		16,214%	
AAPL		21,116%	
V		20,987%	
TRV		11,506%	
UNH		28,406%	
VZ		9,319%	
WMT		8,770%	
KO		20,247%	
MSFT		24,826%	
SUMA	100%	BETA	

Retorno portafolio	
Varianza portafolio	0,018014863
Desviación estándar	0,134219457
Sharpe portafolio	
TLR	4,00%

En este caso he fijado un riesgo del 13 % y tasa libre de riesgo 4 %, al aplicar la función *Solver* obtendremos los resultados observados en la *Figura 3*.

Los cálculos para los resultados de cada portafolio son muy simples gracias a las funciones implementadas en Excel:

- El retorno de la cartera es $\sum_{i=1}^{9} m_i^T w_i$, pero utilizando la función Excel

$$= SUMPRODUCT$$

  se convierte en un cálculo muy rápido.

- Para la varianza del portafolio la he calculado de dos formas, una es utilizando la función Excel

$$= MMULT(TRANSPOSE(VectorPeso);\\ MMULT(MatrizCovarianza; VectorPeso)).$$

  La otra forma es mucho más intuitiva teniendo en cuenta la función de varianza $w^T \Sigma w$

ACTIVO	PESO	RENTABILIDAD ANUAL	BETA
JPM	0,00%	16,214%	0,999394687
AAPL	3,28%	21,116%	1,164647253
V	8,12%	20,987%	1,294291686
TRV	0,00%	11,506%	1,567994175
UNH	62,51%	28,406%	1,054199275
VZ	0,00%	9,319%	1,380735258
WMT	0,00%	8,770%	0,867934032
KO	0,00%	20,247%	1,169734849
MSFT	26,09%	24,826%	0,86013076
SUMA	100%	BETA	1,026671879

Retorno portafolio	26,631%
Varianza portafolio	0,01801486
Desviación estándar	0,13421946
Sharpe portafolio	1,68610562
TLR	4%

JPM	AAPL	V	TRV	UNH	VZ	WMT	KO	MSFT
0,00%	3,28%	8,12%	0,00%	62,51%	0,00%	0,00%	0,00%	26,09%

VARIANZA PORTAFOLIO

	JPM	AAPL	V	TRV	UNH	VZ	WMT	KO	MSFT
JPM	0	0	0	0	0	0	0	0	0
AAPL	0	6,54395E-05	4,66074E-05	0	0,00016528	0	0	0	0,000169433
V	0	4,66074E-05	0,000169214	0	0,00049661	0	0	0	0,000385045
TRV	0	0	0	0	0	0	0	0	0
UNH	0	0,000165281	=O$5*$D11*MATRICES!E22		0,01062759	0	0	0	0,000855719
VZ	0	0	0	0	0	0	0	0	0
WMT	0	0	0	0	0	0	0	0	0
KO	0	0	0	0	0	0	0	0	0
MSFT	0	0,000169433	0,000385045	0	0,00085572	0	0	0	0,002915229

Figura 3

Una vez obtenida toda la matriz, la varianza total de la cartera será la suma de todos los elementos de la matriz.

- La desviación estándar no es más que la raíz cuadrada de la varianza.
- El *ratio de Sharpe* como ya vimos en el *Capítulo III. El modelo CAPM*, este valor corresponde a la pendiente de la línea de mercado de capital

$$\frac{m - r_0}{\sigma}$$

Paso 2.
El primer *Solver* que debemos realizar es para encontrar la cartera de mínima varianza, para ello si revisamos la parte de la resolución del problema de Markowitz del *Capítulo II*, vemos que debemos plantearnos el siguiente problema

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M}: & \text{Minimizar} & \frac{1}{2}Var(r) = \frac{1}{2}w^T\Sigma w \\ & \text{Sujeto a} & e^T w = 1 \end{array}$$

Entonces para la función *Solver*, el *Objetivo* es minimizar la desviación estándar, cambiando los valores de los pesos correspondientes a cada activo y sujeto a las condiciones:

- La suma de los pesos debe ser 1
- Todos los retornos tienen que ser positivos, ya que no contemplamos ventas en descubierto

De esta forma obtenemos el siguiente resultado

CARTERA DE MÍNIMA VARIANZA

ACTIVO	PESO		
JPM	16,99%	Retorno portafolio	15,604%
AAPL	9,48%	Varianza portafolio	0,0117582
V	2,03%	Desviación estándar	10,84%
TRV	0,00%	Sharpe portafolio	1,0701748
UNH	10,86%		
VZ	23,52%		
WMT	20,66%		
KO	16,47%		
MSFT	0,00%		

Paso 3.
A continuación haremos un proceso similar pero ahora vamos a encontrar la cartera de máxima rentabilidad, es decir, esta vez resolveremos el problema

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M}: & \text{Maximizar} & E(r) = m^T w \\ & \text{Sujeto a} & e^T w = 1 \end{array}$$

así el *Objetivo* es maximizar el retorno de la cartera, cambiando los valores de los pesos correspondientes a cada activo sujeto a las mismas condiciones que en el caso anterior.

El resultado obtenido es el siguiente

CARTERA MÁXIMA RENTABILIDAD

ACTIVO	PESO		
JPM	0,00%	Retorno portafolio	28,406%
AAPL	0,00%	Varianza portafolio	0,027195231
V	0,00%	Desviación estándar	16,491%
TRV	0,00%	Sharpe portafolio	1,47998268
UNH	100,00%		
VZ	0,00%		
WMT	0,00%		
KO	0,00%		
MSFT	0,00%		

Observación. El resultado es obvio, si lo que queremos es la máxima rentabilidad de la cartera, lo que debemos hacer es invertir todo el dinero en el activo de más rendimiento, que en este caso sería UNH.
De todas formas, no nos interesa este tipo de cartera ya que no está nada diversificada y, por tanto, tiene mucho riesgo.

Paso 4.
Una vez obtenida la desviación estándar para la cartera de mínima varianza ($\beta_{min-var}$) y la de máximo retorno ($\beta_{max-ret}$), se obtienen 10 carteras fijando su desviación (β) de la siguiente forma:

$$\beta_i = \beta_{i-1} + \epsilon$$

con $\epsilon = \dfrac{\beta_{max-ret} - \beta_{min-var}}{n+1}$, siendo n el número de carteras.

De este modo, el problema de Markowitz a resolver es el siguiente

$$\begin{aligned} \mathcal{M}: \quad & \text{Maximizar} & & E(r) = m^T w \\ & \text{Sujeto a} & & \frac{1}{2} w^T \Sigma w = \beta \\ & & & e^T w = 1. \end{aligned}$$

Aplicaremos un *Solver* para cada cartera fijando como *Objetivo* maximizar el retorno del portafolio cambiando como siempre el vector de pesos, sujeto a las condiciones anteriores pero añadiendo ahora una más:

- Desviación estándar del portafolio ya está fijada según lo comentado anteriormente

Así cada vez que apliquemos el Solver sólo tendremos que cambiar la nueva condición fijando la desviación correspondiente a cada cartera.

El resultado de la cartera 6 por ejemplo, ha sido el siguiente

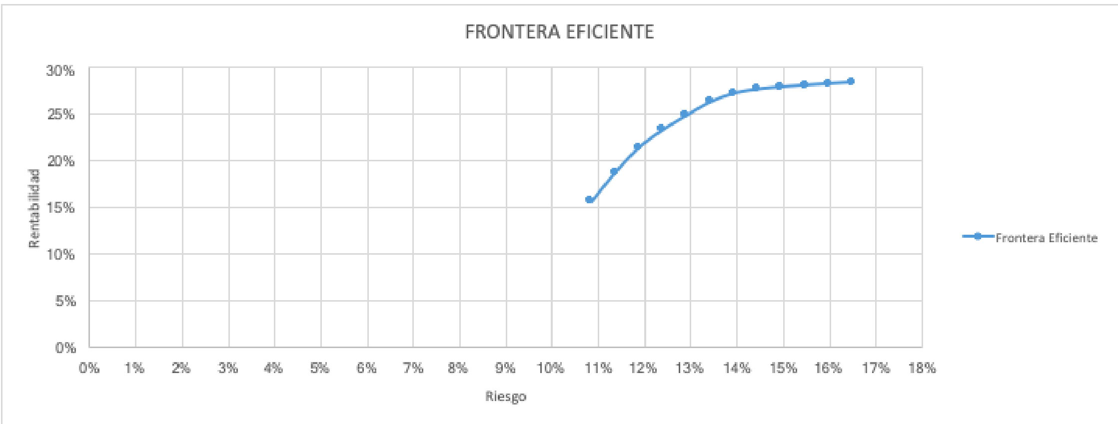
CARTERA 6

ACTIVO	PESO		
JPM	0,00%	Retorno portafolio	27,207%
AAPL	2,03%	Varianza portafolio	0,019093182
V	0,07%	Desviación estándar	13,818%
TRV	0,00%	Sharpe portafolio	1,679530058
UNH	68,69%		
VZ	0,00%		
WMT	0,00%		
KO	0,00%		
MSFT	29,21%		

Nota. Ver Anexo *Portfolio* con los resultados completos.

Paso 5.
Finalmente, sólo nos queda representar la frontera eficiente obtenida a partir del riesgo y la rentabilidad de las 12 carteras calculadas.

El resultado es el siguiente



Paso 6.
Todas estas carteras son eficientes según el método de Markowitz, pero ahora la pregunta es, de entre todas estas, ¿cuál es la mejor?.

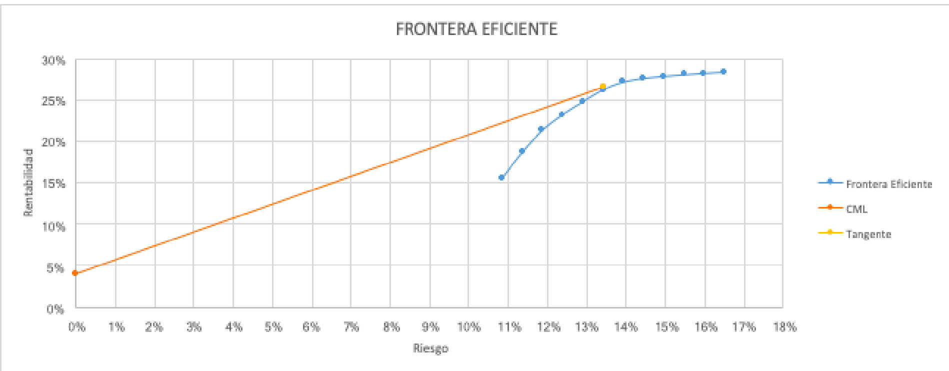
Si revisamos el *Capítulo III. El Modelo CAPM*, el punto de tangencia entre la línea de mercado de capital y la frontera eficiente era el resultado de la cartera óptima. Para encontrar tal punto, debemos calcular la cartera que maximiza el *ratio de Sharpe*, es decir, aquella que hace máxima la pendiente.

Aplicando nuevamente el *Solver* fijando ahora como *Objetivo* maximizar el *ratio de Sharpe*, cambiando el vector de pesos y sujeto a las mismas condiciones para crear la cartera de mínima varianza y la de máximo retorno, obtenemos la siguiente cartera

CARTERA MÁXIMO RATIO DE SHARPE			
ACTIVO	PESO		
JPM	0,00%	Retorno portafolio	26,631%
AAPL	3,28%	Varianza portafolio	0,018014851
V	8,12%	Desviación estándar	13,422%
TRV	0,00%	Sharpe portafolio	1,686105631
UNH	62,51%		
VZ	0,00%		
WMT	0,00%		
KO	0,00%		
MSFT	26,09%		

y por tanto el siguiente gráfico

PORTAFOLIO DE MARKOWITZ					
CARTERA	DESVIACIÓN ESTÁNDAR	RENDIMIENTO ESPERADO	ÍNDICE DE SHARPE	BETA DEL PORTAFOLIO	
MIN. VAR	10,844%	15,604%	1,070174804	1,144290533	
1	11,357%	18,729%	1,321661179		0,51%
2	11,870%	21,403%	1,490045841		
3	12,384%	23,290%	1,579326644		
4	12,897%	24,843%	1,634899551		
5	13,411%	26,282%	1,677455918		
6	13,924%	27,207%	1,679530058		
7	14,437%	27,654%	1,648076766		
8	14,951%	27,898%	1,605281045		
9	15,464%	28,090%	1,562092118		
10	15,978%	28,256%	1,520167587		
MAX. RET	16,491%	28,406%	1,47998268	1,054199275	
MAX. SHARPE	13,422%	26,631%	1,686105631		
TLR	0	4,000%			



Parte VI

Conclusiones

Una vez terminado el estudio, las conclusiones son diversas respecto los diferentes métodos. En primer lugar, cabe comentar que los mercados financieros no se rigen por una ciencia cierta. El mercado es muy inestable y los valores de los activos pueden variar dependiendo del gobierno del momento, por una fusión entre empresas, un catastrófico derrame de petróleo en el mar o simplemente con un twit del presidente Trump. Es por eso que cualquier método debe complementarse con un análisis macroeconómico.

Respecto al método de Markowitz es fácilmente observable la sencillez de éste, lo que permite una implementación sin grandes conocimientos en materia financiera y/o matemática. Por contraposición, son necesarias aplicar diversas restricciones que aseguren la diversificación de la cartera de inversión y además es un método que se basa en exceso en rentabilidades pasadas, lo que no asegura rentabilidades futuras. Este hecho se soluciona con el modelo de Black-Litterman al poder aplicar una opinión sobre los activos financieros a incluir en la cartera.

Terminamos el trabajo obteniendo como resultado la mejor cartera dentro del mercado del Dow Jones, pero ahora la pregunta es, ¿realmente el resultado es fiable?, ¿debería invertir ciegamente mi capital tal y como dicen estos resultados?.

Para comprobar la fiabilidad de los resultados, se ha simulado el riesgo y rentabilidad que habría tenido tal cartera aplicada ahora en el año 2019.
Nota. Ver Anexo *Performance* con los resultados completos.

Según tales resultados, la cartera ha obtenido una rentabilidad de un 26,37 % respecto al 26,63 % pasado y un riesgo del 16,9 % frente al 13,42 % inicial. La rentabilidad se ha mantenido prácticamente igual, aunque el riesgo ha aumentado casi un 3 %. Se puede decir que es una cartera volátil debido a que todos los activos invertidos son acciones y por ello se obtiene también una mayor rentabilidad.
Para diversificar más la cartera se debería invertir en otro tipo de activos, como en renta fija, y hacer así una cartera mixta, lo que nos llevaría a una cartera con menos rentabilidad esperada pero también menos volátil.

Teniendo en cuenta los puntos mencionados anteriormente sobre el método de Markowitz, vemos que la cartera resultante está poco diversificada lo que conlleva un riesgo elevado. Adicionalmente, deberíamos continuar nuestro estudio cuantitativo con la inclusión de algunos ratios para analizar la sensibilidad de la cartera ante cambios inesperados en la rentabilidad de los activos elegidos o comprobar si el fondo se mueve en consonancia con el mercado. Estos son la *Beta del fondo*, el *ratio de Treynor* y el *Alpha de Jensen*, entre otros.

Este análisis debe ser complementado con un análisis fundamental de los activos financieros a incluir en nuestro fondo, lo cuál nos permite obtener una mejor aproximación sobre el futuro de las empresas, los rendimientos que puedan obtener y los planes estratégicos que puedan plantear.

Por último, debemos comentar que la solución que se propone es estática pero, adicionalmente, tal cartera se debe rebalancear de manera dinámica y periódica ateniendo a las nuevas estimaciones de rentabilidad media y riesgo.

Referencias

[1] García Boza, Juan, *Inversiones financieras: Selección de carteras. Teoría y práctica.* Ed. Pirámide, 2013.

[2] Sigman, Karl, *Portafolio mean and variance*, 2005.
http://www.columbia.edu/ ks20/FE-Notes/4700-07-Notes-portfolio-I.pdf

[3] Sigman, Karl, *Fund Theorems*, 2005.
http://www.columbia.edu/ ks20/FE-Notes/4700-07-Notes-funds.pdf

[4] Sigman, Karl, *Capital Asset Pricing Model, (CAPM)*, 2005.
http://www.columbia.edu/ ks20/FE-Notes/4700-07-Notes-CAPM.pdf

[5] University of Washington, *Markowitz Mean-Variance Portfolio Theory.*
https://sites.math.washington.edu/ burke/crs/408/fin-proj/mark1.pdf

[6] Stewart, Henry, *A demystification of the Black-Litterman model: Managing quantitative and traditional portfolio construction*, 2000.
https://www.researchgate.net/publication/31962785_A_demystification_of_the_Black-Litterman_model_Managing_quantitative_and_traditional_portfolio_construction

[7] Hernández, Luís Ángel, *5 preguntas claves para entender el modelo de Markowitz*, 2017.
https://www.rankia.com/blog/bolsa-desde-cero/3479118-5-preguntas-claves-para-entender-modelo-markowitz

[8] Universidad politécnica de Cartagena, *Capítulo 2. Optimización no lineal.*
http://www.dmae.upct.es/ jose/mastering/optimizacion.pdf

Nota: Todas las imágenes publicadas en este trabajo son de elaboración propia.

Parte VII

Anexos

Date	AAPL	AXP	BA	CAT	CSCO	CVX	DD	DIS	GE	GS	HD	IBM	INTC	JNJ	JPM	KO
ene-14	64,3542	77,7924	106,868	76,6755	18,1442	87,8468	57,1581	67,2245	20,1953	150,265	67,6182	138,997	20,6886	75,0403	46,9871	31,1972
feb-14	67,6504	83,7358	109,99	80,2144	18,1909	90,7585	61,1771	74,8163	20,4686	152,398	72,176	145,677	20,8741	78,1362	48,5417	31,5106
mar-14	69,4132	82,5891	107,668	82,1997	18,7083	94,407	61,0264	74,1312	20,9879	150,524	69,6243	152,266	21,9668	83,9183	51,8649	31,8901
abr-14	76,3126	80,204	110,696	87,1878	19,2841	99,6549	63,0031	73,4554	21,7985	146,822	70,3611	155,414	22,7157	86,5325	47,824	33,9137
may-14	81,8619	84,1499	116,042	85,0635	20,7197	97,4874	65,806	77,779	21,7175	146,813	70,9983	145,834	23,2519	86,6777	47,773	34,0134
jun-14	84,5963	87,2492	109,773	90,422	20,9132	104,533	64,9727	79,3807	21,304	154,347	71,6442	144,225	26,5248	90,0002	49,5354	35,219
jul-14	87,0268	80,931	103,949	83,832	21,233	103,484	64,8005	79,5103	20,5562	159,352	71,9653	152,5	29,0914	86,1032	49,5784	32,9122
ago-14	93,308	82,5836	109,402	91,3288	21,1916	103,652	67,9472	83,2136	21,2346	165,104	83,2252	153,001	29,9756	89,2346	51,4659	34,9477
sep-14	92,1712	80,73	110,568	82,9219	21,3442	96,3532	66,5388	82,4267	20,9403	169,741	81,6586	151,929	30,0886	92,3151	52,1498	35,7352
oct-14	98,8038	82,9525	108,424	84,9147	20,9088	96,8619	62,9897	84,6024	21,2738	175,677	87,242	131,576	29,3887	93,3458	52,3575	35,3373
nov-14	108,803	85,4842	116,627	84,8782	23,6174	87,9146	62,0589	85,6485	21,8343	174,216	88,9238	129,791	32,1884	93,7528	52,4314	37,8265
dic-14	101,419	86,0577	113,483	77,2256	23,7712	91,4276	58,1571	87,2039	20,8287	179,8	93,9068	129,286	31,5645	91,1555	54,5405	35,8705
ene-15	107,649	74,6345	126,92	67,4723	22,5323	83,5627	57,9512	85,2839	19,8766	159,93	93,8609	123,54	28,7377	87,2938	47,394	34,9784
feb-15	118,031	75,689	131,704	70,5179	25,3887	86,945	63,1869	97,5851	21,6238	176,052	103,146	130,494	28,9203	89,3598	53,7511	36,7881
mar-15	114,78	72,47	131,843	68,0765	23,6852	86,4001	61,57	98,3446	20,8318	174,911	102,122	130,241	27,3932	88,3086	53,1371	34,4516
abr-15	115,444	72,0886	125,922	73,9034	24,9935	91,404	65,8601	101,936	22,7378	182,774	96,6569	138,997	28,5145	87,0797	55,4878	34,7461
may-15	120,176	74,2014	123,444	73,1779	25,4096	84,7705	67,2419	103,483	22,8974	191,866	100,668	137,666	30,1877	87,9048	58,0817	35,0887
jun-15	116,185	72,3399	122,644	72,7491	23,8058	80,1874	66,0797	107,017	22,3096	194,891	100,406	134,017	26,8413	86,1762	59,83	33,6067
jul-15	112,36	71,0597	127,462	67,44	24,638	73,546	61,1109	112,512	22,1014	191,419	106,299	133,466	25,5442	88,6078	60,5099	35,4819
ago-15	104,597	71,6763	115,536	65,4919	22,6089	67,3202	56,8256	96,078	22,0255	176,045	105,781	121,848	25,1825	83,0991	56,9683	33,9617
sep-15	102,633	69,2566	116,513	56,5761	22,9322	66,3924	55,0596	96,3798	21,3562	162,752	104,9	120,434	26,8152	83,1734	54,1865	34,6527
oct-15	111,194	68,4437	131,746	63,1807	25,2035	76,4927	67,5685	107,263	24,7085	175,622	112,874	116,372	30,1248	90,0162	57,1016	36,8957
nov-15	110,077	67,1836	129,415	63,5892	23,9978	76,863	68,1701	107,008	25,58	177,982	122,223	115,823	30,9344	90,2033	59,6888	37,1309
dic-15	98,3626	65,2236	129,445	59,4841	23,9185	76,6431	67,3201	99,0957	26,6137	169,39	120,735	115,4	30,8656	92,1966	59,107	37,7142
ene-16	90,9615	50,172	107,547	54,4775	20,9507	73,6697	55,2651	90,9423	25,0482	151,843	115,318	104,642	27,7925	93,7404	53,2616	37,679
feb-16	90,3542	52,3507	105,801	60,7802	23,2351	71,0883	63,9628	90,6576	25,0827	140,537	113,814	109,874	26,5113	94,4316	50,7352	37,8634
mar-16	102,401	57,8326	114,695	68,7166	25,2675	82,3087	66,9234	94,2547	27,5827	148,18	122,351	128,295	29,2392	97,819	53,3666	40,7253
abr-16	88,0728	61,6284	121,797	69,776	24,3978	88,1584	69,6628	98,0036	26,6804	154,91	123,448	123,627	27,3683	101,327	56,9532	39,6362
may-16	93,8228	62,2391	113,981	65,7332	26,0181	87,1403	68,0076	94,1693	26,2292	150,539	121,816	130,235	28,5523	101,878	59,2541	39,4592
jun-16	90,3672	57,5068	118,3	68,7248	25,6956	91,4008	65,8228	92,8405	27,3138	140,825	118,341	131,061	29,902	110,445	56,4125	40,1051
jul-16	98,5059	61,3158	121,752	75,0253	27,3436	89,3519	71,529	91,0657	27,2235	150,521	128,119	138,694	31,78	114,023	58,0739	38,8971
ago-16	100,292	62,3812	117,917	75,0067	28,4152	87,6953	71,4891	90,3028	27,3109	160,616	124,3	137,192	32,719	108,661	61,7555	38,7188
sep-16	107,441	60,9163	120,998	81,2488	28,6682	90,681	69,0768	88,7732	25,8946	153,451	119,87	138,35	34,6756	108,276	60,923	37,7292
oct-16	107,907	63,1802	130,816	76,3887	27,7283	92,2934	72,1593	88,6107	25,6386	169,598	113,657	133,856	32,0301	106,315	63,3658	38,1093
nov-16	105,036	68,8709	138,283	88,2356	27,1737	98,2935	74,7206	94,7577	27,1011	208,658	120,541	141,285	31,874	102,016	73,8805	36,2668
dic-16	110,639	70,8212	145,196	85,6317	27,5382	104,742	76,7321	99,6333	27,8412	228,546	125,564	145,88	33,5684	106,33	78,7831	38,069
ene-17	115,921	73,02	152,415	88,328	27,9939	99,0907	80,4062	106,596	26,3641	218,878	128,842	153,377	34,0774	104,521	77,9906	37,6792
feb-17	130,862	76,8646	168,093	89,9919	31,4143	100,114	83,9526	106,056	26,4618	236,764	135,706	158,035	33,5036	112,79	83,9727	38,0327
mar-17	137,828	75,9525	166,369	86,3609	31,065	96,4635	85,6785	109,235	26,6639	219,833	137,504	154,253	33,6216	115,71	81,3966	38,4678
abr-17	137,819	76,0869	173,866	95,2055	31,3132	95,8615	85,1039	111,364	25,9391	214,167	147,075	141,985	33,6961	114,707	80,6183	39,4565
may-17	146,559	74,1724	176,5	98,9722	29,2311	92,9686	83,9655	103,985	24,4986	202,167	144,635	135,2	33,6589	119,148	77,0024	41,5779
jun-17	138,744	81,2098	187,444	100,878	29,0179	94,6858	85,4698	102,357	24,1675	213,064	145,366	137,594	31,6837	123,716	85,6728	41,011
jul-17	143,281	82,1642	229,824	106,97	29,157	99,0965	87,5035	105,902	23,3092	216,357	141,765	129,401	33,3083	124,118	86,0477	42,2612
ago-17	157,992	83,3162	227,17	111,09	30,1406	97,6716	91,2302	98,217	22,3444	214,831	142,021	127,934	32,9326	123,791	85,6633	41,9939
sep-17	149,057	87,5352	242,399	117,916	31,4693	107,71	94,7617	95,6646	22,0077	228,523	155,911	131,138	36,0276	122,357	90,0177	41,496
oct-17	163,487	92,4316	245,993	128,402	31,9559	106,234	98,9776	94,927	18,5322	233,62	158,027	139,255	43,0383	131,204	94,8244	42,7276
nov-17	166,204	94,9158	263,939	134,257	35,2051	109,076	98,4985	101,73	16,8131	238,591	171,41	134,79	42,4233	131,129	99,0854	42,5324
dic-17	164,259	96,4701	282,719	149,884	36,149	115,833	97,8564	104,341	16,041	246,222	181,581	140,063	43,931	132,301	101,38	42,9842
ene-18	162,512	96,5575	339,721	154,83	39,207	115,981	103,847	106,315	15,0729	258,912	192,475	149,448	45,8153	130,852	109,656	44,5863
feb-18	172,888	95,0558	347,237	147,761	42,5803	103,555	96,5923	100,925	13,1526	254,119	174,626	142,263	46,9098	122,983	110,065	40,4921
mar-18	163,515	90,9322	315,878	140,833	40,7831	106,567	87,8544	98,2636	12,6694	244,103	170,765	141,451	49,9013	122,122	104,795	40,6888
abr-18	161,06	96,2645	321,35	137,947	42,1144	116,912	87,2063	98,156	13,2239	230,99	178,059	133,643	49,4606	120,54	103,661	40,8401
may-18	182,12	96,1856	339,269	145,893	40,9385	116,155	88,406	97,3146	13,2333	218,923	179,746	130,277	52,8908	113,994	102,492	40,6416
jun-18	181,101	95,8921	324,841	130,296	41,2452	119,175	91,2831	102,539	12,7916	214,533	189,036	130,223	47,9054	116,49	99,8001	41,4544
jul-18	186,168	97,3794	344,97	138,104	40,5359	119,025	95,2296	111,099	12,9241	230,931	191,381	135,098	46,3538	127,223	110,096	44,465
ago-18	222,7	104,073	331,89	134,168	46,1455	111,663	97,1129	110,474	12,2698	231,301	194,53	136,543	46,6718	129,307	110,338	42,5007
sep-18	221,625	104,574	361,853	147,348	46,9955	116,369	89,3877	115,326	10,7053	218,824	201,741	142,475	45,8504	133,532	108,663	44,0455
oct-18	214,871	100,881	345,273	117,229	44,1942	106,252	74,9461	113,245	9,66816	219,927	171,287	108,762	45,4529	135,29	104,984	46,0453
nov-18	175,325	110,647	337,392	131,93	46,5547	113,19	80,4086	113,896	7,17933	186,085	175,611	117,091	47,8089	141,968	107,824	48,4688
dic-18	155,405	93,9424	315,237	123,568	42,1394	104,543	74,683	108,136	7,24634	163,676	168,334	108,468	45,7877	125,512	94,6644	45,8957

Date	MCD	MMM	MRK	MSFT	NKE	PFE	PG	TRV	UNH	UTX	V	VZ	WMT	XOM	DOW JONES
ene-14	78,5714	109,354	44,4609	33,0658	32,9202	24,5263	63,4416	71,275	65,9886	99,1911	50,0993	36,631	64,5775	73,8751	15698,84961
feb-14	79,3891	114,933	47,8351	33,4765	35,383	25,9059	65,6231	73,5199	70,5442	101,801	52,5434	36,6898	64,5948	77,1697	16321,70996
mar-14	82,4888	116,487	47,6504	36,0869	33,5821	26,1301	67,2415	74,6248	74,8534	102,178	50,5631	36,6821	66,0908	78,8545	16457,66016
abr-14	85,3077	119,432	49,5365	35,5675	33,1684	25,4467	68,8684	79,9038	68,7558	103,481	47,4595	36,0344	69,3718	82,6729	16580,83984
may-14	85,3498	122,403	48,9444	36,0429	34,9689	24,1044	67,9382	82,4355	72,9615	101,636	50,3219	38,9541	66,813	81,1553	16717,16992
jun-14	85,4525	123,75	48,9359	36,971	35,4832	24,3603	66,0882	82,9824	74,9039	101,467	49,7321	38,151	65,738	81,8282	16826,59961
jul-14	80,2103	121,72	48,3588	38,2654	35,291	23,5559	65,0202	79,4642	74,6115	92,4142	49,8029	39,3128	64,4333	80,4139	16563,30078
ago-14	79,4978	124,407	51,231	40,278	35,9407	24,3351	70,4471	84,0336	79,7943	94,9014	50,1592	39,2633	66,1146	80,8366	17098,44922
sep-14	81,8205	123,132	50,5236	41,3592	41,3125	24,4841	70,9811	83,3504	79,3985	93,3345	50,7459	39,3972	67,4052	76,9721	17042,90039
oct-14	80,8885	133,639	49,7417	41,8856	43,0585	24,7988	73,9733	89,9623	87,8345	94,572	57,4195	39,6021	67,2288	79,149	17390,51953
nov-14	83,5465	139,132	51,8537	42,6528	45,9856	25,7924	77,2393	93,2199	91,1811	97,2942	61,4055	40,3164	77,1629	74,0994	17828,24023
dic-14	81,5775	143,575	48,7545	41,7009	44,5313	26,0158	77,8031	94,4694	93,4553	102,2	62,8424	37,2801	75,6997	76,2089	17823,07031
ene-15	80,4805	141,81	52,1418	36,2694	42,9715	26,0993	71,9949	92,2474	98,596	102,004	61,0951	36,4274	75,3248	72,0625	17164,94922
feb-15	86,1047	147,358	50,6368	39,3667	45,24	28,6633	73,2292	96,3924	105,444	108,341	65,0258	39,8741	74,3941	72,9858	18132,69922
mar-15	85,5708	145,022	49,7199	36,7626	47,0071	29,3121	70,4852	97,0114	109,769	104,716	63,1666	39,2129	72,905	70,5951	17776,11914
abr-15	84,7893	137,496	51,9359	43,9777	46,309	28,5876	68,3949	91,1794	103,721	101,634	63,7846	40,6724	69,5977	72,5634	17840,51953
may-15	84,2448	139,861	53,0957	42,3684	47,635	29,2784	67,9738	91,1884	111,924	104,689	66,3245	40,3161	66,2271	70,7612	18010,67969
jun-15	84,2151	136,516	49,6426	40,1775	50,8872	28,4843	67,8437	87,1664	113,59	99,6575	64,9604	38,0084	63,648	69,6716	17619,50977
jul-15	88,4582	133,897	51,8038	42,4981	54,2791	30,6336	66,5083	96,2887	113,51	90,1167	72,8834	38,1552	64,5902	66,3304	17689,85938
ago-15	86,2171	125,758	47,314	39,6042	52,6444	28,2549	61,7813	92,006	108,181	82,3007	68,9751	37,961	58,0845	63,0059	16528,0293
sep-15	88,049	126,303	43,3953	40,5432	57,93	26,8918	62,8916	90,3092	108,471	80,4692	67,499	35,8984	58,5805	62,8432	16284,7002
oct-15	100,31	140,059	48,4392	48,2195	62,0408	28,9552	66,7731	103,075	110,602	88,9873	75,1733	38,6788	51,7142	69,9347	17663,53906
nov-15	102,016	139,497	46,977	49,7859	62,6327	28,0562	66,0148	104,609	105,841	86,8532	76,5589	37,9861	53,1597	69,0219	17719,91992
dic-15	106,401	135,087	46,8086	51,1636	59,1857	27,8598	70,0459	103,047	110,47	87,4328	75,2793	38,6296	55,3822	66,4604	17425,0293
ene-16	111,48	135,41	45,2913	50,8039	59,0071	26,3149	72,057	98,261	108,609	79,8062	72,3089	41,7638	60,4559	66,3751	16466,30078
feb-16	105,545	140,674	44,8801	46,9215	58,6074	25,6072	71,4393	98,7016	112,325	87,9334	70,2703	42,9205	60,4377	68,3361	16516,5
mar-16	114,049	150,506	47,2935	51,2987	58,4932	25,8384	73,2366	107,138	121,567	91,7797	74,5398	45,7548	62,3964	71,9159	17685,08984
abr-16	114,784	151,183	49,4475	46,3203	56,2303	28,5147	71,288	101,447	124,701	95,6948	75,2805	43,0982	61,3716	76,0542	17773,64063
may-16	110,764	152,032	50,7279	49,2275	52,6814	30,2495	72,6968	105,361	126,586	92,2198	76,9374	43,5189	64,96	76,5876	17787,19922
jun-16	109,203	159,228	51,9451	47,8601	52,6623	30,9689	75,9531	109,884	133,717	94,6504	72,4164	47,7425	67,5065	81,3262	17929,99023
jul-16	107,547	162,174	53,3237	53,0137	53,1032	32,4466	76,7784	107,912	136,228	99,3575	76,2047	47,3749	67,4603	77,1705	18432,24023
ago-16	105,728	162,974	57,078	53,7433	55,1508	30,6083	78,9346	110,224	129,426	98,2315	78,9873	45,1932	66,0458	75,6002	18400,88086
sep-16	106,273	161,235	56,7325	54,21	50,3763	30,038	81,1406	106,361	133,184	94,344	80,8848	44,891	67,1309	76,3674	18308,15039
oct-16	103,703	151,235	53,7696	56,3935	48,2785	28,1223	78,4735	101,014	135,07	94,9011	80,699	41,5401	65,1762	72,9025	18142,41992
nov-16	109,875	157,127	56,0314	56,7135	48,1727	28,5037	75,125	105,841	151,308	100,027	75,6229	43,5861	65,5578	76,3849	19123,58008
dic-16	113,004	164,35	53,907	58,8779	49,7602	28,3939	76,6009	114,311	153,561	102,419	76,4681	46,6258	64,3384	79,6741	19762,59961
ene-17	113,793	160,971	57,1995	61,2561	51,0791	28,4207	79,8078	110,612	155,537	102,466	81,0649	42,8087	62,5677	74,0512	19864,08984
feb-17	118,509	171,587	60,7797	60,6213	55,1924	30,5615	83,6262	114,801	158,684	105,156	86,1908	43,8137	66,4958	71,7826	20812,24023
mar-17	121,215	177,32	58,6297	62,7809	53,8117	30,9543	82,5059	113,204	157,37	105,463	87,2681	43,0369	67,5739	73,0537	20663,2207
abr-17	130,866	181,491	57,9283	65,2594	53,6694	30,6919	80,1919	114,886	168,425	111,835	89,5758	40,5297	70,9983	72,733	20940,50977
may-17	141,116	189,498	60,512	66,5749	51,3254	29,5427	81,5088	117,899	168,714	113,987	93,5135	41,6654	74,2281	71,7086	21008,65039
jun-17	143,239	194,098	59,564	66,084	57,1466	30,6875	80,639	119,485	178,576	115,395	92,253	39,8966	71,9488	72,5925	21349,63086
jul-17	146,001	187,553	59,8054	69,6984	57,39	30,2946	84,0348	121,665	185,493	112,049	97,9389	43,2377	76,0463	71,9721	21891,11914
ago-17	150,546	190,49	59,7866	71,6829	51,3254	30,9889	86,0459	115,101	192,35	113,136	101,834	43,4156	74,2209	68,636	21948,09961
sep-17	148,325	196,818	59,9458	71,795	50,5656	32,9337	84,8429	116,374	189,4	110,363	103,693	44,7913	74,7548	74,4311	22405,08984
oct-17	158,009	215,843	51,9491	80,1706	53,6278	32,3433	80,5159	126,58	204,069	113,861	108,363	43,3251	83,5275	75,6749	23377,24023
nov-17	162,799	227,986	52,1188	81,1247	58,9233	33,4503	84,5482	129,562	221,493	112,083	110,935	46,6109	93,0177	75,6204	24272,34961
dic-17	163,913	221,814	53,0618	82,8592	61,0005	33,7187	86,3239	129,629	214,731	122,013	112,543	48,4794	94,4719	76,641	24719,2207
ene-18	162,98	236,072	56,3472	92,0325	66,751	34,4821	81,1189	144,049	230,627	131,998	122,621	49,5235	102,519	79,9947	26149,39063
feb-18	150,219	221,946	51,5636	90,8313	65,5866	33,8025	74,3339	133,556	220,283	128,871	121,348	44,2238	86,5644	69,4021	25029,19922
mar-18	149,865	208,097	51,8013	88,825	65,0093	33,3452	75,0534	133,422	208,439	121,008	118,276	44,2979	85,5642	69,0657	24103,10938
abr-18	160,465	184,274	56,4754	91,0147	67,1198	34,3975	68,4833	127,105	231,02	115,555	125,455	45,7152	85,5809	71,9724	24163,15039
may-18	153,344	186,967	57,1085	96,1922	70,4664	33,7586	69,9103	124,13	236,013	120,046	129,251	44,7146	79,8536	75,203	24415,83984
jun-18	150,163	187,758	58,2309	96,3843	78,2001	34,4202	74,5824	118,161	239,756	120,926	131,172	47,1909	83,3844	77,3586	24271,41016
jul-18	151,936	202,648	63,679	103,686	75,6924	37,8831	77,2768	126,451	248,332	131,285	135,421	48,4385	86,8697	76,2178	25415,18945
ago-18	156,459	201,312	66,3085	109,795	80,8986	39,3916	79,974	127,87	263,278	127,378	145,473	51,5905	93,3243	74,9648	25964,82031
sep-18	162,347	202,459	68,5803	112,219	83,5841	42,1669	80,244	126,033	260,905	135,944	148,866	50,6606	91,9569	80,3199	26458,31055
oct-18	171,673	182,81	71,647	104,801	74,0339	41,2006	85,4985	122,293	257,17	120,775	136,726	54,1714	98,1944	75,2751	25115,75977
nov-18	182,94	199,778	77,2243	108,804	74,1128	44,2337	91,9247	127,415	276,86	118,471	140,554	57,8514	95,6191	75,105	25538,46094
dic-18	173,385	184,329	74,3724	100,09	73,363	42,0874	89,4055	117,035	245,919	104,129	131,099	53,937	91,2127	65,0733	23327,46094

Datos

Date	AAPL	AXP	BA	CAT	CSCO	CVX	DD	DIS	GE	GS	HD	IBM	INTC	JNJ	JPM	KO
feb-14	5,122%	7,640%	2,922%	4,615%	0,258%	3,315%	7,031%	11,293%	1,353%	1,420%	6,740%	4,805%	0,897%	4,126%	3,309%	1,005%
mar-14	2,606%	-1,369%	-2,112%	2,475%	2,844%	4,020%	-0,246%	-0,916%	2,537%	-1,230%	-3,535%	4,523%	5,235%	7,400%	6,846%	1,204%
abr-14	9,940%	-2,888%	2,813%	6,068%	3,078%	5,559%	3,239%	-0,912%	3,863%	-2,460%	1,058%	2,068%	3,410%	3,115%	-7,791%	6,346%
may-14	7,272%	4,920%	4,829%	-2,437%	7,445%	-2,175%	4,449%	5,886%	-0,372%	-0,006%	0,906%	-6,164%	2,360%	0,168%	-0,107%	0,294%
jun-14	3,340%	3,683%	-5,402%	6,300%	0,934%	7,227%	-1,266%	2,059%	-1,904%	5,132%	0,910%	-1,104%	14,076%	3,833%	3,689%	3,544%
jul-14	2,873%	-7,241%	-5,305%	-7,288%	1,529%	-1,003%	-0,265%	0,163%	-3,510%	3,243%	0,448%	5,737%	9,676%	-4,330%	0,087%	-6,550%
ago-14	7,218%	2,042%	5,246%	8,943%	-0,195%	0,162%	4,856%	4,658%	3,300%	3,610%	15,646%	0,329%	3,039%	3,637%	3,807%	6,185%
sep-14	-1,218%	-2,245%	1,066%	-9,205%	0,720%	-7,042%	-2,073%	-0,946%	-1,386%	2,808%	-1,882%	-0,701%	0,377%	3,452%	1,329%	2,253%
oct-14	7,196%	2,753%	-1,939%	2,403%	-2,040%	0,528%	-5,334%	2,640%	1,592%	3,497%	6,837%	-13,396%	-2,326%	1,116%	0,398%	-1,113%
nov-14	10,120%	3,052%	7,565%	-0,043%	12,955%	-9,237%	-1,478%	1,237%	2,635%	-0,832%	1,928%	-1,356%	9,527%	0,436%	0,141%	7,044%
dic-14	-6,787%	0,671%	-2,695%	-9,016%	0,651%	3,996%	-6,287%	1,816%	-4,606%	3,205%	5,604%	-0,390%	-1,938%	-2,770%	4,023%	-5,171%
ene-15	6,142%	-13,274%	11,840%	-12,630%	-5,212%	-8,602%	-0,354%	-2,202%	-4,571%	-11,051%	-0,049%	-4,444%	-8,956%	-4,236%	-13,103%	-2,487%
feb-15	9,645%	1,413%	3,770%	4,514%	12,677%	4,048%	9,035%	14,424%	8,790%	10,081%	9,893%	5,629%	0,636%	2,367%	13,413%	5,174%
mar-15	-2,755%	-4,253%	0,105%	-3,462%	-6,710%	-0,627%	-2,559%	0,778%	-3,663%	-0,648%	-0,993%	-0,194%	-5,280%	-1,176%	-1,142%	-6,351%
abr-15	0,579%	-0,526%	-4,491%	8,559%	5,524%	5,792%	6,968%	3,651%	9,150%	4,495%	-5,351%	6,723%	4,093%	-1,392%	4,424%	0,855%
may-15	4,099%	2,931%	-1,967%	-0,982%	1,665%	-7,257%	2,098%	1,518%	0,702%	4,974%	4,150%	-0,957%	5,868%	0,948%	4,675%	0,986%
jun-15	-3,321%	-2,509%	-0,648%	-0,586%	-6,312%	-5,406%	-1,728%	3,416%	-2,567%	1,577%	-0,260%	-2,650%	-11,085%	-1,967%	3,010%	-4,224%
jul-15	-3,293%	-1,770%	3,929%	-7,298%	3,496%	-8,282%	-7,519%	5,134%	-0,933%	-1,782%	5,868%	-0,412%	-4,832%	2,822%	1,136%	5,580%
ago-15	-6,908%	0,868%	-9,357%	-2,889%	-8,236%	-8,465%	-7,012%	-14,606%	-0,343%	-8,031%	-0,487%	-8,704%	-1,416%	-6,217%	-5,853%	-4,284%
sep-15	-1,878%	-3,376%	0,846%	-13,614%	1,430%	-1,378%	-3,108%	0,314%	-3,039%	-7,551%	-0,833%	-1,161%	6,483%	0,089%	-4,883%	2,035%
oct-15	8,341%	-1,174%	13,074%	11,674%	9,905%	15,213%	22,719%	11,292%	15,697%	7,907%	7,602%	-3,373%	12,342%	8,227%	5,380%	6,473%
nov-15	-1,004%	-1,841%	-1,769%	0,647%	-4,784%	0,484%	0,890%	-0,237%	3,527%	1,344%	8,282%	-0,471%	2,688%	0,208%	4,531%	0,638%
dic-15	-10,642%	-2,917%	0,023%	-6,456%	-0,330%	-0,286%	-1,247%	-7,394%	4,041%	-4,827%	-1,218%	-0,365%	-0,222%	2,210%	-0,975%	1,571%
ene-16	-7,524%	-23,077%	-16,917%	-8,417%	-12,408%	-3,880%	-17,907%	-8,228%	-5,882%	-10,359%	-4,486%	-9,323%	-9,956%	1,674%	-9,889%	-0,093%
feb-16	-0,668%	4,343%	-1,623%	11,569%	10,904%	-3,504%	15,738%	-0,313%	0,137%	-7,446%	-1,304%	5,000%	-4,610%	0,737%	-4,743%	0,489%
mar-16	13,333%	10,471%	8,406%	13,058%	8,747%	15,784%	4,629%	3,968%	9,967%	5,438%	7,501%	16,765%	10,290%	3,587%	5,187%	7,559%
abr-16	-13,992%	6,564%	6,192%	1,542%	-3,442%	7,107%	4,093%	3,977%	-3,271%	4,542%	0,897%	-3,638%	-6,399%	3,586%	6,721%	-2,674%
may-16	6,529%	0,991%	-6,417%	-5,794%	6,641%	-1,155%	-2,376%	-3,912%	-1,691%	-2,821%	-1,322%	5,345%	4,326%	0,544%	4,040%	-0,446%
jun-16	-3,683%	-7,603%	3,789%	4,551%	-1,239%	4,889%	-3,213%	-1,411%	4,135%	-6,453%	-2,853%	0,634%	4,727%	8,409%	-4,795%	1,637%
jul-16	9,006%	6,624%	2,918%	9,168%	6,413%	-2,242%	8,669%	-1,912%	-0,331%	6,885%	8,262%	5,824%	6,280%	3,240%	2,945%	-3,012%
ago-16	1,814%	1,737%	-3,150%	-0,025%	3,919%	-1,854%	-0,056%	-0,838%	0,321%	6,706%	-2,980%	-1,083%	2,955%	-4,703%	6,340%	-0,458%
sep-16	7,128%	-2,348%	2,612%	8,322%	0,891%	3,405%	-3,374%	-1,694%	-5,186%	-4,461%	-3,564%	0,845%	5,980%	-0,354%	-1,348%	-2,556%
oct-16	0,433%	3,716%	8,114%	-5,982%	-3,279%	1,778%	4,462%	-0,183%	-0,989%	10,523%	-5,183%	-3,248%	-7,629%	-1,812%	4,010%	1,008%
nov-16	-2,660%	9,007%	5,708%	15,509%	-2,000%	6,501%	3,550%	6,937%	5,704%	23,031%	6,057%	5,550%	-0,488%	-4,043%	16,594%	-4,835%
dic-16	5,334%	2,832%	5,000%	-2,951%	1,341%	6,560%	2,692%	5,145%	2,731%	9,532%	4,167%	3,252%	5,316%	4,228%	6,636%	4,969%
ene-17	4,775%	3,105%	4,972%	3,149%	1,655%	-5,395%	4,788%	6,988%	-5,305%	-4,231%	2,610%	5,139%	1,516%	-1,701%	-1,006%	-1,024%
feb-17	12,888%	5,265%	10,286%	1,884%	12,218%	1,033%	4,411%	-0,506%	0,370%	8,172%	5,328%	3,037%	-1,684%	7,912%	7,670%	0,938%
mar-17	5,324%	-1,187%	-1,026%	-4,035%	-1,112%	-3,646%	2,056%	2,998%	0,764%	-7,151%	1,325%	-2,393%	0,352%	2,589%	-3,068%	1,144%
abr-17	-0,007%	0,177%	4,506%	10,241%	0,799%	-0,624%	-0,671%	1,949%	-2,718%	-2,577%	6,960%	-7,953%	0,222%	-0,867%	-0,956%	2,570%
may-17	6,342%	-2,516%	1,515%	3,956%	-6,649%	-3,018%	-1,338%	-6,626%	-5,554%	-5,603%	-1,659%	-4,779%	-0,111%	3,871%	-4,485%	5,377%
jun-17	-5,332%	9,488%	6,200%	1,925%	-0,729%	1,847%	1,791%	-1,566%	-1,351%	5,390%	0,506%	1,771%	-5,868%	3,834%	11,260%	-1,364%
jul-17	3,270%	1,175%	22,609%	6,039%	0,479%	4,658%	2,380%	3,464%	-3,552%	1,546%	-2,477%	-5,955%	5,127%	0,325%	0,438%	3,048%
ago-17	10,267%	1,402%	-1,155%	3,851%	3,373%	-1,438%	4,259%	-7,257%	-4,139%	-0,706%	0,180%	-1,134%	-1,128%	-0,264%	-0,447%	-0,633%
sep-17	-5,655%	5,064%	6,704%	6,145%	4,409%	10,277%	3,871%	-2,599%	-1,507%	6,374%	9,780%	2,505%	9,398%	-1,158%	5,083%	-1,186%
oct-17	9,681%	5,594%	1,483%	8,893%	1,546%	-1,370%	4,449%	-0,771%	-15,792%	2,230%	1,357%	6,190%	19,459%	7,230%	5,340%	2,968%
nov-17	1,662%	2,688%	7,295%	4,560%	10,168%	2,675%	-0,484%	7,167%	-9,276%	2,128%	8,469%	-3,207%	-1,429%	-0,057%	4,494%	-0,457%
dic-17	-1,171%	1,637%	7,115%	11,640%	2,681%	6,195%	-0,652%	2,566%	-4,593%	3,198%	5,934%	3,912%	3,554%	0,894%	2,315%	1,062%
ene-18	-1,064%	0,091%	20,162%	3,300%	8,460%	0,128%	6,122%	1,892%	-6,035%	5,154%	5,999%	6,701%	4,289%	-1,095%	8,163%	3,727%
feb-18	6,385%	-1,555%	2,212%	-4,566%	8,604%	-10,714%	-6,986%	-5,070%	-12,740%	-1,852%	-9,273%	-4,808%	2,389%	-6,013%	0,373%	-9,183%
mar-18	-5,421%	-4,338%	-9,031%	-4,689%	-4,221%	2,909%	-9,046%	-2,637%	-3,674%	-3,941%	-2,211%	-0,571%	6,377%	-0,700%	-4,788%	0,486%
abr-18	-1,502%	5,864%	1,732%	-2,049%	3,264%	9,707%	-0,738%	-0,110%	4,377%	-5,372%	4,272%	-5,520%	-0,883%	-1,295%	-1,082%	0,372%
may-18	13,076%	-0,082%	5,576%	5,760%	-2,792%	-0,647%	1,376%	-0,857%	0,071%	-5,224%	0,947%	-2,518%	6,935%	-5,431%	-1,128%	-0,486%
jun-18	-0,560%	-0,305%	-4,253%	-10,691%	0,749%	2,601%	3,254%	5,368%	-3,338%	-2,005%	5,169%	-0,042%	-9,426%	2,190%	-2,626%	2,000%
jul-18	2,798%	1,551%	6,197%	5,992%	-1,720%	-0,127%	4,323%	8,348%	1,036%	7,644%	1,240%	3,744%	-3,239%	9,214%	10,317%	7,262%
ago-18	19,623%	6,873%	-3,792%	-2,850%	13,839%	-6,185%	1,978%	-0,563%	-5,062%	0,160%	1,645%	1,069%	0,686%	1,637%	0,220%	-4,418%
sep-18	-0,482%	0,481%	9,028%	9,824%	1,842%	4,214%	-7,955%	4,392%	-12,751%	-5,394%	3,707%	4,344%	-1,760%	3,267%	-1,519%	3,635%
oct-18	-3,048%	-3,531%	-4,582%	-20,441%	-5,961%	-8,693%	-16,156%	-1,804%	-9,688%	0,504%	-15,095%	-23,662%	-0,867%	1,317%	-3,385%	4,541%
nov-18	-18,404%	9,681%	-2,283%	12,541%	5,341%	6,529%	7,289%	0,575%	-25,743%	-15,388%	2,524%	7,658%	5,183%	4,936%	2,705%	5,263%
dic-18	-11,362%	-15,098%	-6,567%	-6,339%	-9,484%	-7,640%	-7,121%	-5,057%	0,933%	-12,042%	-4,144%	-7,365%	-4,228%	-11,592%	-12,204%	-5,309%

Date	MCD	MMM	MRK	MSFT	NKE	PFE	PG	TRV	UNH	UTX	V	VZ	WMT	XOM	DOW JONES
feb-14	1,041%	5,102%	7,589%	1,242%	7,481%	5,625%	3,438%	3,150%	6,904%	2,631%	4,879%	0,160%	0,027%	4,460%	3,968%
mar-14	3,904%	1,352%	-0,386%	7,798%	-5,090%	0,865%	2,466%	1,503%	6,108%	0,370%	-3,769%	-0,021%	2,316%	2,183%	0,833%
abr-14	3,417%	2,528%	3,958%	-1,439%	-1,232%	-2,615%	2,419%	7,074%	-8,146%	1,275%	-6,138%	-1,766%	4,964%	4,842%	0,748%
may-14	0,049%	2,488%	-1,195%	1,337%	5,428%	-5,275%	-1,351%	3,168%	6,117%	-1,783%	6,031%	8,103%	-3,688%	-1,836%	0,822%
jun-14	0,120%	1,100%	-0,017%	2,575%	1,471%	1,062%	-2,723%	0,664%	2,662%	-0,166%	-1,172%	-2,062%	-1,609%	0,829%	0,655%
jul-14	-6,135%	-1,641%	-1,179%	3,501%	-0,542%	-3,302%	-1,616%	-4,240%	-0,390%	-8,922%	0,142%	3,045%	-1,985%	-1,728%	-1,565%
ago-14	-0,888%	2,207%	5,939%	5,259%	1,841%	3,308%	8,346%	5,750%	6,946%	2,691%	0,716%	-0,126%	2,609%	0,526%	3,231%
sep-14	2,922%	-1,024%	-1,381%	2,684%	14,946%	0,612%	0,758%	-0,813%	-0,496%	-1,651%	1,170%	0,341%	1,952%	-4,781%	-0,325%
oct-14	-1,139%	8,533%	-1,548%	1,273%	4,226%	1,285%	4,215%	7,933%	10,625%	1,326%	13,151%	0,520%	-0,262%	2,828%	2,040%
nov-14	3,286%	4,110%	4,246%	1,832%	6,798%	4,007%	4,415%	3,621%	3,810%	2,879%	6,942%	1,804%	14,776%	-6,380%	2,517%
dic-14	-2,357%	3,193%	-5,977%	-2,232%	-3,162%	0,866%	0,730%	1,340%	2,494%	5,042%	2,340%	-7,531%	-1,896%	2,847%	-0,029%
ene-15	-1,345%	-1,229%	6,948%	-13,025%	-3,503%	0,321%	-7,465%	-2,352%	5,501%	-0,191%	-2,780%	-2,287%	-0,495%	-5,441%	-3,693%
feb-15	6,988%	3,913%	-2,887%	8,540%	5,279%	9,824%	1,714%	4,493%	6,946%	6,212%	6,434%	9,462%	-1,236%	1,281%	5,638%
mar-15	-0,620%	-1,586%	-1,811%	-6,615%	3,906%	2,264%	-3,747%	0,642%	4,101%	-3,345%	-2,859%	-1,658%	-2,002%	-3,276%	-1,967%
abr-15	-0,913%	-5,189%	4,457%	19,626%	-1,485%	-2,472%	-2,966%	-6,012%	-5,510%	-2,944%	0,978%	3,722%	-4,536%	2,788%	0,362%
may-15	-0,642%	1,720%	2,233%	-3,660%	2,863%	2,417%	-0,616%	0,010%	7,908%	3,007%	3,982%	-0,876%	-4,843%	-2,484%	0,954%
jun-15	-0,035%	-2,391%	-6,504%	-5,171%	6,827%	-2,712%	-0,191%	-4,411%	1,489%	-4,806%	-2,057%	-5,724%	-3,894%	-1,540%	-2,172%
jul-15	5,038%	-1,918%	4,354%	5,776%	6,665%	7,545%	-1,968%	10,465%	-0,070%	-9,574%	12,197%	0,386%	1,480%	-4,796%	0,399%
ago-15	-2,534%	-6,079%	-8,667%	-6,809%	-3,012%	-7,765%	-7,107%	-4,448%	-4,695%	-8,673%	-5,362%	-0,509%	-10,072%	-5,012%	-6,568%
sep-15	2,125%	0,434%	-8,282%	2,371%	10,040%	-4,824%	1,797%	-1,844%	0,268%	-2,225%	-2,140%	-5,434%	0,854%	-0,258%	-1,472%
oct-15	13,925%	10,891%	11,623%	18,934%	7,096%	7,673%	6,172%	14,135%	1,965%	10,585%	11,369%	7,745%	-11,721%	11,284%	8,467%
nov-15	1,702%	-0,401%	-3,019%	3,248%	0,954%	-3,105%	-1,136%	1,488%	-4,305%	-2,398%	1,843%	-1,791%	2,795%	-1,305%	0,319%
dic-15	4,298%	-3,161%	-0,358%	2,767%	-5,503%	-0,700%	6,106%	-1,493%	4,374%	0,667%	-1,671%	1,694%	4,181%	-3,711%	-1,664%
ene-16	4,774%	0,239%	-3,241%	-0,703%	-0,302%	-5,545%	2,871%	-4,645%	-1,685%	-8,723%	-3,946%	8,113%	9,161%	-0,128%	-5,502%
feb-16	-5,324%	3,887%	-0,908%	-7,642%	-0,677%	-2,689%	-0,857%	0,448%	3,421%	10,184%	-2,819%	2,770%	-0,030%	2,954%	0,305%
mar-16	8,057%	6,989%	5,377%	9,329%	-0,195%	0,903%	2,516%	8,547%	8,228%	4,374%	6,076%	6,604%	3,241%	5,239%	7,075%
abr-16	0,644%	0,450%	4,554%	-9,705%	-3,869%	10,358%	-2,661%	-5,312%	2,578%	4,266%	0,994%	-5,806%	-1,642%	5,754%	0,501%
may-16	-3,502%	0,562%	2,589%	6,276%	-6,312%	6,084%	1,976%	3,858%	1,511%	-3,631%	2,201%	0,976%	5,847%	0,701%	0,076%
jun-16	-1,409%	4,733%	2,400%	-2,778%	-0,036%	2,378%	4,479%	4,293%	5,633%	2,636%	-5,876%	9,705%	3,920%	6,187%	0,803%
jul-16	-1,517%	1,850%	2,654%	10,768%	0,837%	4,771%	1,087%	-1,795%	1,878%	4,973%	5,231%	-0,770%	-0,068%	-5,110%	2,801%
ago-16	-1,691%	0,493%	7,041%	1,376%	3,856%	-5,665%	2,808%	2,143%	-4,993%	-1,133%	3,652%	-4,605%	-2,097%	-2,035%	-0,170%
sep-16	0,516%	-1,067%	-0,605%	0,868%	-8,657%	-1,863%	2,795%	-3,504%	2,903%	-3,958%	2,402%	-0,669%	1,643%	1,015%	-0,504%
oct-16	-2,419%	-6,202%	-5,223%	4,028%	-4,164%	-6,377%	-3,287%	-5,027%	1,416%	0,591%	-0,230%	-7,464%	-2,912%	-4,537%	-0,905%
nov-16	5,952%	3,896%	4,206%	0,567%	-0,219%	1,356%	-4,267%	4,779%	12,022%	5,401%	-6,290%	4,925%	0,586%	4,777%	5,408%
dic-16	2,848%	4,597%	-3,791%	3,816%	3,295%	-0,385%	1,965%	8,002%	1,489%	2,391%	1,118%	6,974%	-1,860%	4,306%	3,342%
ene-17	0,698%	-2,056%	6,108%	4,039%	2,651%	0,095%	4,187%	-3,235%	1,287%	0,046%	6,011%	-8,187%	-2,752%	-7,057%	0,514%
feb-17	4,145%	6,595%	6,259%	-1,036%	8,053%	7,532%	4,784%	3,787%	2,023%	2,626%	6,323%	2,348%	6,278%	-3,064%	4,773%
mar-17	2,283%	3,341%	-3,537%	3,562%	-2,502%	1,285%	-1,340%	-1,391%	-0,828%	0,291%	1,250%	-1,773%	1,621%	1,771%	-0,716%
abr-17	7,962%	2,352%	-1,196%	3,948%	-0,264%	-0,848%	-2,805%	1,486%	7,025%	6,042%	2,644%	-5,826%	5,068%	-0,439%	1,342%
may-17	7,832%	4,412%	4,460%	2,016%	-4,367%	-3,744%	1,642%	2,622%	0,172%	1,925%	4,396%	2,802%	4,549%	-1,408%	0,325%
jun-17	1,504%	2,427%	-1,567%	-0,737%	11,342%	3,875%	-1,067%	1,346%	5,845%	1,235%	-1,348%	-4,245%	-3,071%	1,233%	1,623%
jul-17	1,928%	-3,372%	0,405%	5,469%	0,426%	-1,280%	4,211%	1,824%	3,873%	-2,899%	6,163%	8,374%	5,695%	-0,855%	2,536%
ago-17	3,113%	1,566%	-0,031%	2,847%	-10,567%	2,292%	2,393%	-5,395%	3,696%	0,970%	3,977%	0,411%	-2,400%	-4,635%	0,260%
sep-17	-1,476%	3,322%	0,266%	0,156%	-1,480%	6,276%	-1,398%	1,106%	-1,533%	-2,452%	1,825%	3,169%	0,719%	8,443%	2,082%
oct-17	6,529%	9,667%	-13,340%	11,666%	6,056%	-1,793%	-5,100%	8,770%	7,745%	3,170%	4,504%	-3,273%	11,735%	1,671%	4,339%
nov-17	3,032%	5,626%	0,327%	1,190%	9,874%	3,423%	5,008%	2,356%	8,539%	-1,561%	2,373%	7,584%	11,362%	-0,072%	3,829%
dic-17	0,684%	-2,707%	1,809%	2,138%	3,525%	0,802%	2,100%	0,052%	-3,053%	8,859%	1,450%	4,009%	1,563%	1,350%	1,841%
ene-18	-0,569%	6,428%	6,192%	11,071%	9,427%	2,264%	-6,030%	11,124%	7,403%	8,184%	8,955%	2,154%	8,518%	4,376%	5,786%
feb-18	-7,830%	-5,984%	-8,489%	-1,305%	-1,744%	-1,971%	-8,364%	-7,284%	-4,485%	-2,369%	-1,038%	-10,701%	-15,563%	-13,242%	-4,284%
mar-18	-0,235%	-6,240%	0,461%	-2,209%	-0,880%	-1,353%	0,968%	-0,101%	-5,377%	-6,101%	-2,531%	0,168%	-1,155%	-0,485%	-3,700%
abr-18	7,073%	-11,448%	9,023%	2,465%	3,246%	3,156%	-8,754%	-4,734%	10,833%	-4,506%	6,069%	3,199%	0,020%	4,209%	0,249%
may-18	-4,437%	1,461%	1,121%	5,689%	4,986%	-1,857%	2,084%	-2,340%	2,162%	3,887%	3,026%	-2,189%	-6,692%	4,489%	1,046%
jun-18	-2,075%	0,424%	1,965%	0,200%	10,975%	1,960%	6,683%	-4,809%	1,586%	0,733%	1,486%	5,538%	4,422%	2,866%	-0,592%
jul-18	1,181%	7,930%	9,356%	7,575%	-3,207%	10,061%	3,613%	7,016%	3,577%	8,566%	3,239%	2,644%	4,180%	-1,475%	4,712%
ago-18	2,977%	-0,659%	4,129%	5,892%	6,878%	3,982%	3,490%	1,122%	6,018%	-2,976%	7,423%	6,507%	7,430%	-1,644%	2,163%
sep-18	3,763%	0,570%	3,426%	2,208%	3,320%	7,045%	0,338%	-1,436%	-0,901%	6,725%	2,332%	-1,802%	-1,465%	7,143%	1,901%
oct-18	5,745%	-9,705%	4,472%	-6,610%	-11,426%	-2,292%	6,548%	-2,967%	-1,431%	-11,158%	-8,155%	6,930%	6,783%	-6,281%	-5,074%
nov-18	6,563%	9,282%	7,784%	3,820%	0,107%	7,362%	7,516%	4,188%	7,656%	-1,908%	2,800%	6,793%	-2,623%	-0,226%	1,683%
dic-18	-5,222%	-7,733%	-3,693%	-8,009%	-1,012%	-4,852%	-2,740%	-8,146%	-11,176%	-12,105%	-6,727%	-6,766%	-4,608%	-13,357%	-8,658%

Datos

	AAPL	AXP	BA	CAT	CSCO	CVX	DD	DIS	GE	GS	HD	IBM	INTC	JNJ	JPM
Rendimiento medio	1,760%	0,498%	2,066%	1,100%	1,602%	0,462%	0,660%	0,930%	-1,514%	0,356%	1,687%	-0,236%	1,531%	0,953%	1,351%
Varianza	0,507%	0,335%	0,442%	0,567%	0,333%	0,337%	0,411%	0,243%	0,392%	0,426%	0,260%	0,350%	0,357%	0,154%	0,315%
Desviación	7,122%	5,784%	6,651%	7,530%	5,770%	5,802%	6,410%	4,932%	6,264%	6,529%	5,095%	5,916%	5,977%	3,920%	5,616%

KO	MCD	MMM	MRK	MSFT	NKE	PFE	PG	TRV	UNH	UTX	V	VZ	WMT	XOM	DOW JONES
0,728%	1,429%	0,998%	0,998%	2,069%	1,513%	1,011%	0,662%	0,959%	2,367%	0,214%	1,749%	0,777%	0,731%	-0,106%	0,724%
0,142%	0,160%	0,217%	0,243%	0,357%	0,295%	0,186%	0,158%	0,234%	0,227%	0,260%	0,214%	0,238%	0,287%	0,214%	0,101%
3,769%	3,997%	4,663%	4,935%	5,974%	5,429%	4,311%	3,970%	4,840%	4,761%	5,096%	4,627%	4,875%	5,355%	4,628%	3,171%

Datos

Date	Dow Jones	JPM	AAPL	V	TRV	UNH	VZ	WMT	KO	MSFT
feb-14	3,96755%	3,309%	5,122%	4,879%	3,150%	6,904%	0,160%	0,027%	6,740%	1,242%
mar-14	0,83294%	6,846%	2,606%	-3,769%	1,503%	6,108%	-0,021%	2,316%	-3,535%	7,798%
abr-14	0,74846%	-7,791%	9,940%	-6,138%	7,074%	-8,146%	-1,766%	4,964%	1,058%	-1,439%
may-14	0,82221%	-0,107%	7,272%	6,031%	3,168%	6,117%	8,103%	-3,688%	0,906%	1,337%
jun-14	0,65459%	3,689%	3,340%	-1,172%	0,664%	2,662%	-2,062%	-1,609%	0,910%	2,575%
jul-14	-1,56478%	0,087%	2,873%	0,142%	-4,240%	-0,390%	3,045%	-1,985%	0,448%	3,501%
ago-14	3,23093%	3,807%	7,218%	0,716%	5,750%	6,946%	-0,126%	2,609%	15,646%	5,259%
sep-14	-0,32488%	1,329%	-1,218%	1,170%	-0,813%	-0,496%	0,341%	1,952%	-1,882%	2,684%
oct-14	2,03967%	0,398%	7,196%	13,151%	7,933%	10,625%	0,520%	-0,262%	6,837%	1,273%
nov-14	2,51701%	0,141%	10,120%	6,942%	3,621%	3,810%	1,804%	14,776%	1,928%	1,832%
dic-14	-0,02900%	4,023%	-6,787%	2,340%	1,340%	2,494%	-7,531%	-1,896%	5,604%	-2,232%
ene-15	-3,69252%	-13,103%	6,142%	-2,780%	-2,352%	5,501%	-2,287%	-0,495%	-0,049%	-13,025%
feb-15	5,63794%	13,413%	9,645%	6,434%	4,493%	6,946%	9,462%	-1,236%	9,893%	8,540%
mar-15	-1,96650%	-1,142%	-2,755%	-2,859%	0,642%	4,101%	-1,658%	-2,002%	-0,993%	-6,615%
abr-15	0,36229%	4,424%	0,579%	0,978%	-6,012%	-5,510%	3,722%	-4,536%	-5,351%	19,626%
may-15	0,95378%	4,675%	4,099%	3,982%	0,010%	7,908%	-0,876%	-4,843%	4,150%	-3,660%
jun-15	-2,17188%	3,010%	-3,321%	-2,057%	-4,411%	1,489%	-5,724%	-3,894%	-0,260%	-5,171%
jul-15	0,39927%	1,136%	-3,293%	12,197%	10,465%	-0,070%	0,386%	1,480%	5,868%	5,776%
ago-15	-6,56777%	-5,853%	-6,908%	-5,362%	-4,448%	-4,695%	-0,509%	-10,072%	-0,487%	-6,809%
sep-15	-1,47222%	-4,883%	-1,878%	-2,140%	-1,844%	0,268%	-5,434%	0,854%	-0,833%	2,371%
oct-15	8,46708%	5,380%	8,341%	11,369%	14,135%	1,965%	7,745%	-11,721%	7,602%	18,934%
nov-15	0,31919%	4,531%	-1,004%	1,843%	1,488%	-4,305%	-1,791%	2,795%	8,282%	3,248%
dic-15	-1,66418%	-0,975%	-10,642%	-1,671%	-1,493%	4,374%	1,694%	4,181%	-1,218%	2,767%
ene-16	-5,50202%	-9,889%	-7,524%	-3,946%	-4,645%	-1,685%	8,113%	9,161%	-4,486%	-0,703%
feb-16	0,30486%	-4,743%	-0,668%	-2,819%	0,448%	3,421%	2,770%	-0,030%	-1,304%	-7,642%
mar-16	7,07529%	5,187%	13,333%	6,076%	8,547%	8,228%	6,604%	3,241%	7,501%	9,329%
abr-16	0,50071%	6,721%	-13,992%	0,994%	-5,312%	2,578%	-5,806%	-1,642%	0,897%	-9,705%
may-16	0,07628%	4,040%	6,529%	2,201%	3,858%	1,511%	0,976%	5,847%	-1,322%	6,276%
jun-16	0,80277%	-4,795%	-3,683%	-5,876%	4,293%	5,633%	9,705%	3,920%	-2,853%	-2,778%
jul-16	2,80117%	2,945%	9,006%	5,231%	-1,795%	1,878%	-0,770%	-0,068%	8,262%	10,768%
ago-16	-0,17013%	6,340%	1,814%	3,652%	2,143%	-4,993%	-4,605%	-2,097%	-2,980%	1,376%
sep-16	-0,50395%	-1,348%	7,128%	2,402%	-3,504%	2,903%	-0,669%	1,643%	-3,564%	0,868%
oct-16	-0,90523%	4,010%	0,433%	-0,230%	-5,027%	1,416%	-7,464%	-2,912%	-5,183%	4,028%
nov-16	5,40810%	16,594%	-2,660%	-6,290%	4,779%	12,022%	4,925%	0,586%	6,057%	0,567%
dic-16	3,34153%	6,636%	5,334%	1,118%	8,002%	1,489%	6,974%	-1,860%	4,167%	3,816%
ene-17	0,51355%	-1,006%	4,775%	6,011%	-3,235%	1,287%	-8,187%	-2,752%	2,610%	4,039%
feb-17	4,77319%	7,670%	12,888%	6,323%	3,787%	2,023%	2,348%	6,278%	5,328%	-1,036%
mar-17	-0,71602%	-3,068%	5,324%	1,250%	-1,391%	-0,828%	-1,773%	1,621%	1,325%	3,562%
abr-17	1,34195%	-0,956%	-0,007%	2,644%	1,486%	7,025%	-5,826%	5,068%	6,960%	3,948%
may-17	0,32540%	-4,485%	6,342%	4,396%	2,622%	0,172%	2,802%	4,549%	-1,659%	2,016%
jun-17	1,62305%	11,260%	-5,332%	-1,348%	1,346%	5,845%	-4,245%	-3,071%	0,506%	-0,737%
jul-17	2,53629%	0,438%	3,270%	6,163%	1,824%	3,873%	8,374%	5,695%	-2,477%	5,469%
ago-17	0,26029%	-0,447%	10,267%	3,977%	-5,395%	3,696%	0,411%	-2,400%	0,180%	2,847%
sep-17	2,08214%	5,083%	-5,655%	1,825%	1,106%	-1,533%	3,169%	0,719%	9,780%	0,156%
oct-17	4,33897%	5,340%	9,681%	4,504%	8,770%	7,745%	-3,273%	11,735%	1,357%	11,666%
nov-17	3,82898%	4,494%	1,662%	2,373%	2,356%	8,539%	7,584%	11,362%	8,469%	1,190%
dic-17	1,84107%	2,315%	-1,171%	1,450%	0,052%	-3,053%	4,009%	1,563%	5,934%	2,138%
ene-18	5,78566%	8,163%	-1,064%	8,955%	11,124%	7,403%	2,154%	8,518%	5,999%	11,071%
feb-18	-4,28381%	0,373%	6,385%	-1,038%	-7,284%	-4,485%	-10,701%	-15,563%	-9,273%	-1,305%
mar-18	-3,70004%	-4,788%	-5,421%	-2,531%	-0,101%	-5,377%	0,168%	-1,155%	-2,211%	-2,209%
abr-18	0,24910%	-1,082%	-1,502%	6,069%	-4,734%	10,833%	3,199%	0,020%	4,272%	2,465%
may-18	1,04576%	-1,128%	13,076%	3,026%	-2,340%	2,162%	-2,189%	-6,692%	0,947%	5,689%
jun-18	-0,59154%	-2,626%	-0,560%	1,486%	-4,809%	1,586%	5,538%	4,422%	5,169%	0,200%
jul-18	4,71246%	10,317%	2,798%	3,239%	7,016%	3,577%	2,644%	4,180%	1,240%	7,575%
ago-18	2,16261%	0,220%	19,623%	7,423%	1,122%	6,018%	6,507%	7,430%	1,645%	5,892%
sep-18	1,90061%	-1,519%	-0,482%	2,332%	-1,436%	-0,901%	-1,802%	-1,465%	3,707%	2,208%
oct-18	-5,07421%	-3,385%	-3,048%	-8,155%	-2,967%	-1,431%	6,930%	6,783%	-15,095%	-6,610%
nov-18	1,68301%	2,705%	-18,404%	2,800%	4,188%	7,656%	6,793%	-2,623%	2,524%	3,820%
dic-18	-8,65753%	-12,204%	-11,362%	-6,727%	-8,146%	-11,176%	-6,766%	-4,608%	-4,144%	-8,009%

Benchmark

	DOW JONES	JPM	AAPL	V	TRV	UNH	VZ	WMT	KO	MSFT
Rentabilidad media mensual	0,724%	1,351%	1,760%	1,749%	0,959%	2,367%	0,777%	0,731%	1,687%	2,069%
Rentabilidad anual	8,687%	16,214%	21,116%	20,987%	11,506%	28,406%	9,319%	8,770%	20,247%	24,826%
Desviación media mensual	3,171%	5,616%	7,122%	4,627%	4,840%	4,761%	4,875%	5,355%	5,095%	5,974%
Desviación anual	10,985%	19,455%	24,670%	16,027%	16,766%	16,491%	16,889%	18,552%	17,651%	20,694%
Varianza	1,2646	1,1999	1,1683	0,7637	1,4572	0,5805	1,8123	2,1154	0,8718	0,8336

TLR	4,00%									
SHARPE	0,426643452	0,627819	0,693784	1,059857	0,44768	1,479983	0,314939	0,2571	0,920452	100,638%
TREYNOR	0,046866818	0,097457	0,17126	0,190269	0,066744	0,281201	0,092081	0,117214	0,154206	0,17926207
BETA	1	1,253315	0,999395	0,892777	1,124576	0,867934	0,577638	0,406915	1,053595	1,16174028
ALFA	0	0,004439	0,010362	0,011026	0,001448	0,017389	0,003584	0,004362	0,009246	0,01227827

Benchmark

MATRIZ DE CORRELACIÓN

	JPM	AAPL	V	TRV	UNH	VZ	WMT	KO	MSFT
JPM	1	0,112329	0,337597	0,426891	0,423322	0,114669	-0,00051	0,406536	0,458462
AAPL	0,11232949	1	0,442912	0,285676	0,198192	0,119053	0,142878	0,195656	0,38792
V	0,33759674	0,442912	1	0,478622	0,370323	0,159142	0,090334	0,513881	0,548223
TRV	0,4268907	0,285676	0,478622	1	0,388982	0,377624	0,300172	0,502552	0,430956
UNH	0,42332176	0,198192	0,370323	0,388982	1	0,299646	0,261128	0,414197	0,153737
VZ	0,11466911	0,119053	0,159142	0,377624	0,299646	1	0,344152	0,157767	0,266931
WMT	-0,00050935	0,142878	0,090334	0,300172	0,261128	0,344152	1	0,1165	0,08936
KO	0,40653618	0,195656	0,513881	0,502552	0,414197	0,157767	0,1165	1	0,287345
MSFT	0,45846165	0,38792	0,548223	0,430956	0,153737	0,266931	0,08936	0,287345	1

MATRIZ DE COVARIANZA ANUAL

	JPM	AAPL	V	TRV	UNH	VZ	WMT	KO	MSFT
JPM	0,03785119	0,005391	0,010527	0,013925	0,013582	0,003768	-1,8E-05	0,013961	0,018458
AAPL	0,00539139	0,06086	0,017512	0,011816	0,008063	0,00496	0,006539	0,00852	0,019804
V	0,01052691	0,017512	0,025688	0,012861	0,009788	0,004308	0,002686	0,014538	0,018183
TRV	0,01392481	0,011816	0,012861	0,02811	0,010755	0,010693	0,009336	0,014873	0,014952
UNH	0,01358178	0,008063	0,009788	0,010755	0,027195	0,008346	0,007989	0,012057	0,005246
VZ	0,00376777	0,00496	0,004308	0,010693	0,008346	0,028523	0,010783	0,004703	0,009329
WMT	-1,8384E-05	0,006539	0,002686	0,009336	0,007989	0,010783	0,034416	0,003815	0,003431
KO	0,01396086	0,00852	0,014538	0,014873	0,012057	0,004703	0,003815	0,031156	0,010496
MSFT	0,01845774	0,019804	0,018183	0,014952	0,005246	0,009329	0,003431	0,031156	0,042822

Matrices

CARTERA DE MÍNIMA VARIANZA

ACTIVO	PESO		
JPM	16,99%	Retorno portafolio	15,604%
AAPL	9,48%	Varianza portafolio	0,0117582
V	2,03%	Desviación estándar	10,84%
TRV	0,00%	Sharpe portafolio	1,0701748
UNH	10,86%		
VZ	23,52%		
WMT	20,66%		
KO	16,47%		
MSFT	0,00%		

CARTERA 1

ACTIVO	PESO		
JPM	10,57%	Retorno portafolio	18,729%
AAPL	9,13%	Varianza portafolio	0,0124203
V	0,08%	Desviación estándar	11,145%
TRV	0,00%	Sharpe portafolio	1,3216612
UNH	26,13%		
VZ	16,65%		
WMT	16,05%		
KO	13,59%		
MSFT	7,80%		

CARTERA 2

ACTIVO	PESO		
JPM	4,71%	Retorno portafolio	21,403%
AAPL	8,08%	Varianza portafolio	0,0136406
V	0,09%	Desviación estándar	11,679%
TRV	0,00%	Sharpe portafolio	1,4900458
UNH	38,64%		
VZ	10,66%		
WMT	12,42%		
KO	9,84%		
MSFT	15,56%		

CARTERA 3

ACTIVO	PESO		
JPM	0,57%	Retorno portafolio	23,290%
AAPL	7,33%	Varianza portafolio	0,014918
V	0,09%	Desviación estándar	12,214%
TRV	0,00%	Sharpe portafolio	1,5793266
UNH	47,46%		
VZ	6,48%		
WMT	9,81%		
KO	7,25%		
MSFT	21,02%		

CARTERA 4

ACTIVO	PESO		
JPM	0,00%	Retorno portafolio	24,843%
AAPL	6,79%	Varianza portafolio	0,0162525
V	0,13%	Desviación estándar	12,749%
TRV	0,00%	Sharpe portafolio	1,6348996
UNH	54,56%		
VZ	2,25%		
WMT	7,12%		
KO	4,09%		
MSFT	25,06%		

CARTERA 5

ACTIVO	PESO		
JPM	0,00%	Retorno portafolio	26,282%
AAPL	5,58%	Varianza portafolio	0,0176443
V	3,95%	Desviación estándar	13,283%
TRV	0,00%	Sharpe portafolio	1,6774559
UNH	60,83%		
VZ	0,00%		
WMT	2,26%		
KO	0,00%		
MSFT	27,38%		

CARTERA 6

ACTIVO	PESO		
JPM	0,00%	Retorno portafolio	27,207%
AAPL	2,03%	Varianza portafolio	0,019093182
V	0,07%	Desviación estándar	13,818%
TRV	0,00%	Sharpe portafolio	1,679530058
UNH	68,69%		
VZ	0,00%		
WMT	0,00%		
KO	0,00%		
MSFT	29,21%		

CARTERA 7

ACTIVO	PESO		
JPM	0,00%	Retorno portafolio	27,654%
AAPL	0,00%	Varianza portafolio	0,020599255
V	0,00%	Desviación estándar	14,352%
TRV	0,00%	Sharpe portafolio	1,648076766
UNH	78,99%		
VZ	0,00%		
WMT	0,00%		
KO	0,00%		
MSFT	21,01%		

CARTERA 8

ACTIVO	PESO		
JPM	0,00%	Retorno portafolio	27,898%
AAPL	0,00%	Varianza portafolio	0,022162539
V	0,00%	Desviación estándar	14,887%
TRV	0,00%	Sharpe portafolio	1,605281045
UNH	85,80%		
VZ	0,00%		
WMT	0,00%		
KO	0,00%		
MSFT	14,20%		

CARTERA 9

ACTIVO	PESO		
JPM	0,00%	Retorno portafolio	28,090%
AAPL	0,00%	Varianza portafolio	0,02378296
V	0,00%	Desviación estándar	15,422%
TRV	0,00%	Sharpe portafolio	1,562092118
UNH	91,17%		
VZ	0,00%		
WMT	0,00%		
KO	0,00%		
MSFT	8,83%		

CARTERA 10

ACTIVO	PESO		
JPM	0,00%	Retorno portafolio	28,256%
AAPL	0,00%	Varianza portafolio	0,02546053
V	0,00%	Desviación estándar	15,956%
TRV	0,00%	Sharpe portafolio	1,520167587
UNH	95,81%		
VZ	0,00%		
WMT	0,00%		
KO	0,00%		
MSFT	4,19%		

CARTERA MÁXIMA RENTABILIDAD

ACTIVO	PESO		
JPM	0,00%	Retorno portafolio	28,406%
AAPL	0,00%	Varianza portafolio	0,027195231
V	0,00%	Desviación estándar	16,491%
TRV	0,00%	Sharpe portafolio	1,47998268
UNH	100,00%		
VZ	0,00%		
WMT	0,00%		
KO	0,00%		
MSFT	0,00%		

CARTERA MÁXIMO RATIO DE SHARPE

ACTIVO	PESO		
JPM	0,00%	Retorno portafolio	26,631%
AAPL	3,28%	Varianza portafolio	0,018014851
V	8,12%	Desviación estándar	13,422%
TRV	0,00%	Sharpe portafolio	1,686105631
UNH	62,51%		
VZ	0,00%		
WMT	0,00%		
KO	0,00%		
MSFT	26,09%		

Portfolio

Date	Dow Jones	JPM	AAPL	V	TRV	UNH	VZ	WMT	KO	MSFT
ene-19	24999,66992	100,366371	163,976242	134,149216	34,310799	265,706543	52,825508	93,927734	46,651779	102,9084
feb-19	25916	102,022186	170,586929	147,175629	36,825932	238,191849	55,179493	97,024994	43,947472	110,3977
mar-19	25928,67969	98,962303	187,940842	155,465042	36,875443	243,148026	57,321918	95,593979	45,420784	116,7179
abr-19	26592,91016	113,45031	198,547455	163,666779	38,543407	230,068802	55,441238	101,340942	47,968349	129,2467
may-19	24815,03906	104,37896	173,218231	160,581192	37,679821	238,686386	53,230465	99,961349	48,036789	122,3984
jun-19	26599,96094	110,131828	196,580658	173,010162	36,657425	240,86792	55,953205	109,457817	49,786957	133,0626
jul-19	26864,26953	114,269157	211,598358	177,44632	37,1707	246,892044	54,131516	109,348846	51,860619	135,3572
ago-19	26403,2793	108,986938	207,327454	180,257553	36,494141	232,009735	57,561066	113,192604	54,23539	136,9365
sep-19	26916,83008	116,754715	223,299591	171,722366	36,951813	215,471603	59,738407	118,150047	53,644157	138,5585
oct-19	27046,23047	123,927254	248,015381	178,560913	34,1063	251,732208	59,847279	116,736389	54,02644	142,8838
nov-19	28051,41016	131,759995	266,450043	184,201462	34,260288	278,798157	60,240002	118,558212	53,004078	150,8666
dic-19	28376,96094	137,350006	280,019989	186,539993	34,280235	293,491669	60,799999	119,543793	54,32	155,71

Date	Dow Jones	JPM	AAPL	V	TRV	UNH	VZ	WMT	KO	MSFT
feb-19	0,036653687	0,01649771	0,040314907	0,097103907	0,073304414	-0,10355294	0,044561521	0,032974925	-0,05796793	0,072776
mar-19	0,000489261	-0,0299923	0,101730614	0,056323272	0,00134446	0,0208075	0,038826471	-0,01474893	0,033524386	0,05725
abr-19	0,025617597	0,14639925	0,056435913	0,05275615	0,045232379	-0,0537912	-0,03280909	0,060118462	0,05608809	0,107343
may-19	-0,06685508	-0,0799588	-0,12757265	-0,01885286	-0,02240554	0,037456552	-0,03987597	-0,01361338	0,001426774	-0,05299
jun-19	0,071929037	0,05511521	0,134872795	0,077399911	-0,02713378	0,00913975	0,051150032	0,095001399	0,036433909	0,087127
jul-19	0,009936428	0,03756706	0,076394596	0,025641026	0,014001938	0,025010072	-0,03255737	-0,00099555	0,041650708	0,017244
ago-19	-0,01715998	-0,0462261	-0,02018401	0,015842724	-0,01820141	-0,06027861	0,063355883	0,035151336	0,045791413	0,011668
sep-19	0,019450265	0,07127255	0,077038215	-0,04734995	0,012540972	-0,07128206	0,037826627	0,043796528	-0,01090124	0,011845
oct-19	0,004807416	0,06143254	0,110684439	0,039823275	-0,07700605	0,168284844	0,001822479	-0,01196494	0,007126275	0,031216
nov-19	0,037165241	0,06320435	0,074328705	0,031588935	0,004514943	0,107518816	0,006562086	0,015606299	-0,01892336	0,055869
dic-19	0,011605505	0,04242571	0,050928669	0,012695507	0,000582219	0,052703046	0,009296099	0,008313056	0,024826807	0,032104

	DOW JONES	JPM	AAPL	V	TRV	UNH	VZ	WMT	KO	MSFT
Rentabilidad media mensual	1,215%	3,070%	5,227%	3,118%	0,062%	1,200%	1,347%	2,269%	1,446%	3,922%
Rentabilidad anual	14,579%	36,844%	62,724%	37,415%	0,739%	14,402%	16,163%	27,233%	17,354%	47,068%
Desviación media mensual	3,348%	6,020%	6,883%	3,923%	3,728%	7,743%	3,493%	3,313%	3,252%	4,186%
Desviación anual	11,598%	20,853%	23,845%	13,591%	12,915%	26,823%	12,099%	11,477%	11,266%	14,500%
Varianza	0,7955	0,5660	0,3802	0,3633	17,4759	1,8625	0,7486	0,4214	0,6492	0,3081

Performance

MATRIZ DE COVARIANZA ANUAL									
	JPM	AAPL	V	TRV	UNH	VZ	WMT	KO	MSFT
JPM	0,043486343	0,03142747	0,005145745	0,006239628	0,001378166	-0,00470032	0,011466159	0,002427572	0,020458544
AAPL	0,031427474	0,05685699	0,014108266	-0,00138061	0,012434464	0,009215223	0,008258624	0,002967605	0,024012678
V	0,005145745	0,01410827	0,018471992	0,00463791	-0,00219001	0,0039819	0,004307709	-0,00069566	0,014973949
TRV	0,006239628	-0,0013806	0,00463791	0,016680728	-0,02514979	9,89951E-06	0,003908056	-0,00413727	0,007493718
UNH	0,001378166	0,01243446	-0,00219001	-0,02514979	0,071945071	-0,01164375	-0,0160976	0,001845977	-0,00725419
VZ	-0,00470032	0,00921522	0,0039819	9,89951E-06	-0,01164375	0,014637966	0,005496144	-0,0024057	0,004418154
WMT	0,011466159	0,00825862	0,004307709	0,003908056	-0,0160976	0,005496144	0,013172545	0,001870063	0,009700999
KO	0,002427572	0,00296761	-0,00069566	-0,00413727	0,001845977	-0,0024057	0,001870063	0,012692464	0,001817664
MSFT	0,020458544	0,02401268	0,014973949	0,007493718	-0,00725419	0,004418154	0,009700999	0,012692464	0,021024242

TLR	4,00%									
BETA	1	1,23571284	1,679389533	0,6629117	0,308988568	-0,2677109	0,408952099	0,673935846	-0,08464476	1,039186
ALFA	0	0,01569066	0,031867238	0,023125525	-0,00313804	0,015253863	0,008500606	0,014506803	0,015489791	0,026598
SHARPE	0,912128507	1,57499898	2,462779164	2,458589936	-0,25248626	0,387797182	1,005292231	2,024311373	1,185303338	2,970253
TREYNOR	0,105788418	0,26579032	0,349676108	0,504065855	-0,10553654	-0,38854303	0,297413204	0,344741526	-1,57762	0,414439

CARTERA MÁXIMO RATIO DE SHARPE INICIAL				
ACTIVO	PESO	RENTABILIDAD		
JPM	0,00%	16,214%	Retorno portafolio	26,631%
AAPL	3,28%	21,116%	Varianza portafolio	0,018015
V	8,12%	20,987%	Desviación estándar	13,422%
TRV	0,00%	11,506%	Sharpe portafolio	1,686106
UNH	62,51%	28,406%		
VZ	0,00%	9,319%		
WMT	0,00%	8,770%		
KO	0,00%	20,247%		
MSFT	26,09%	24,826%		

CARTERA MÁXIMO RATIO DE SHARPE FINAL				
ACTIVO	PESO	RENTABILIDAD		
JPM	0,00%	36,844%	Retorno portafolio	26,377%
AAPL	3,28%	62,724%	Varianza portafolio	0,028771
V	8,12%	37,415%	Desviación estándar	16,962%
TRV	0,00%	0,739%	Sharpe portafolio	1,31926
UNH	62,51%	14,402%		
VZ	0,00%	16,163%		
WMT	0,00%	27,233%	TLR	4%
KO	0,00%	17,354%		
MSFT	26,09%	47,068%		

Performance