



UNIVERSITAT DE  
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques  
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

---

**DINÀMICA SIMBÒLICA I  
APLICACIONS ALS SISTEMES  
DINÀMICS**

---

**Autora: Cristina Sallent Martinez**

**Directora: Dra. Núria Fagella Rabionet**

**Realitzat a: Departament  
de Matemàtiques i Informàtica**

**Barcelona, 19 de gener de 2020**

## Abstract

Chaos theory is a branch of mathematics focusing on dynamic systems with irregular behavior. Despite being deterministic dynamical systems, their behavior cannot be predicted since small differences in initial conditions can cause the system to evolve very differently.

In this paper we will see some examples of very simple dynamical systems but with chaotic dynamics. We will focus mainly on the study of the family  $Q_c(x) = x^2 + c$  on the real and complex case.

We will talk about symbolic dynamics and topological conjugacy as a useful tool to compare dynamical systems and transfer information from one to another. These two concepts will be used to prove that a dynamical system is chaotic.

## Resum

La teoria del caos és una branca de les matemàtiques que estudia sistemes dinàmics amb un comportament irregular. Tot i ser sistemes dinàmics deterministes, el seu comportament no es pot predir ja que petits canvis en les condicions inicials poden provocar que el sistema evolucioni de manera molt diferent.

En aquest treball veurem alguns exemples de models matemàtics molt senzills però amb dinàmica caòtica en certs conjunts. Ens centrarem sobretot en l'estudi de la família de funcions  $Q_c(x) = x^2 + c$  pel cas de variable real i també pel cas complex.

Parlarem de dinàmica simbòlica i de la conjugació topològica com a eina per comparar sistemes dinàmics i traslladar informació d'un a l'altre. Aquests dos conceptes seran els que utilitzarem per a demostrar que una funció és caòtica en un conjunt.

## Agraïments

Especialment vull donar les gràcies a la meva tutora, la Dra. Núria Fagella pel seu temps i la seva dedicació. També per haver-me ajudat i guiat sempre que ho he necessitat.

D'altra banda, també vull agrair a l'Anna, la Laia, la Sara, la Maria Rosa i la Marina el seu suport durant aquests mesos.

# Índex

<b>1</b>	<b>Introducció</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Preliminars. Conceptes bàsics</b>	<b>3</b>
2.1	Iteració de funcions . . . . .	3
2.1.1	Tipus d'òrbites . . . . .	5
2.2	Caos . . . . .	7
2.3	Conjugació topològica . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Dinàmica simbòlica</b>	<b>14</b>
3.1	Espai de seqüències . . . . .	14
3.2	Shift de Bernoulli . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Aplicacions als sistemes dinàmics de variable real</b>	<b>19</b>
4.1	Funció doblament d'angle . . . . .	19
4.2	La família quadràtica . . . . .	20
4.2.1	Bifurcació i transició al caos . . . . .	24
4.2.2	Cas $c < -2$ . . . . .	26
<b>5</b>	<b>Aplicacions als sistemes dinàmics de variable complexa</b>	<b>32</b>
5.1	Conjunts de Julia i Fatou . . . . .	32
5.1.1	Famílies normals. Definició general dels conjunts de Julia i Fatou .	32
5.1.2	Conjunts de Julia i Fatou per a polinomis . . . . .	34
5.2	Propietats del conjunt de Julia . . . . .	35
5.3	Conjunt de Julia de $Q_c(z) = z^2 + c$ , $ c  > 2$ . . . . .	37
<b>6</b>	<b>Conclusions</b>	<b>42</b>

# 1 Introducció

La teoria de sistemes dinàmics té per objectiu estudiar el comportament d'un sistema que evoluciona amb el temps. Qualsevol sistema que evoluciona amb el temps es pot modelar com un sistema dinàmic,  $(X, f)$ , on  $X$  és el conjunt de possibles estats del sistema i  $f$  és la llei d'evolució que relaciona l'estat present del sistema en funció dels estats passats. Si considerem un sistema dinàmic determinista, és a dir, un sistema en el qual l'atzar no hi juga cap paper, i partim d'una condició inicial  $x_0$  de  $X$ , aleshores la seva trajectòria queda determinada per aquest valor.

Ja en el segle XIX, H. Poincaré va observar que petites variacions en les condicions inicials podien implicar grans diferències en el comportament futur del sistema, complicant així la predicció dels estats futurs. Tot i així, no va ser fins a principis de la dècada de 1960 quan va sorgir el concepte de "caos" de la mà de E. Lorenz. Mentre intentava predir el clima amb l'ajut d'un ordinador, Lorenz va observar que petites diferències en les dades d'entrada produïen grans canvis en les prediccions resultants. A causa d'aquestes observacions, Lorenz va escriure un article en el qual es van establir les bases del que més endavant es coneixeria com la Teoria del Caos. Així doncs, la teoria del caos és la branca de les matemàtiques que es dedica a estudiar sistemes sensibles a petits canvis de les condicions inicials. Tot i així, no s'ha acceptat una definició universal pel concepte de caos. En aquest treball, seguirem la definició introduïda per R.L. Devaney en [1] i [2].

La dinàmica simbòlica va sorgir com a eina per analitzar sistemes dinàmics generals mitjançant la discretització de l'espai. Imaginem-nos un punt que segueix una trajectòria en un espai. La idea bàsica és dividir el conjunt de possibles estats en un número finit de "peces". Aquestes peces s'associen a un símbol i d'aquesta manera el sistema queda descrit per una seqüència de símbols més senzill d'analitzar. Així, treballarem en un espai de seqüències de símbols, que denotarem  $\Sigma_N$ , i una funció  $\sigma$  que, senzillament, obvia el primer terme de la seqüència d'entrada. Els elements de l'espai  $\Sigma_N$  seran seqüències de la forma  $(s_i)_{i \in \mathbb{N}} = (s_0 s_1 s_2 \dots)$  amb  $s_i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ . Aleshores, veurem que el sistema dinàmic generat per la funció  $\sigma$  recull totes les característiques essencials del caos.

Però, podem treure informació sobre la dinàmica del sistema original a partir de la seva trajectòria simbòlica? La resposta a aquesta pregunta no només depèn del sistema dinàmic sinó de com fem la partició de l'espai. Diem que dues funcions són topològicament conjugades si existeix un homeomorfisme que conjuga l'una amb l'altra. La conjugació topològica és molt útil en sistemes dinàmics i en l'estudi de les funcions iterades. Veurem que moltes propietats dinàmiques són preservades per la conjugació i això ens permetrà demostrar que si dues funcions són conjugades i una és caòtica, l'altra també ho és. Per tant, si entenem com és la dinàmica d'una funció iterada, aleshores podem entendre com és la de qualsevol funció que sigui topològicament conjugada amb ella.

Com veurem en aquest treball, es dona el cas que molts sistemes dinàmics són conjugats (en algun domini apropiat, normalment en conjunts de Cantor) a la funció shift i per tant exhibeixen caos en aquests conjunts.

L'objectiu d'aquest treball és doncs estudiar comportaments caòtics de sistemes dinàmics a partir de la dinàmica simbòlica i la conjugació topològica entre funcions.

## Estructura de la memòria

Per poder assolir els objectius proposats, hem estructurat la memòria de la següent manera.

En el **Capítol 2**, començarem farem un recordatori dels conceptes més bàsics d'iteració de funcions. Parlarem de punts fixos, punts periòdics i de les seves òrbites. Veurem que les òrbites d'aquests punts determinen el comportament de punts veïns i, al llarg del treball, que tenen un paper rellevant en l'estudi dels sistemes dinàmics. Seguidament, introduïrem el concepte de caos. Com ja s'ha dit, introduïrem la definició de caos introduïda per R.L. Devaney en [1] i [2] així definint els tres conceptes que aquesta engloba. Finalment, parlarem de la conjugació topològica, l'eina que ens permetrà comparar diferents sistemes dinàmics i passar informació d'un a l'altre. També demostrarem un seguit de propietats que són preservades per la conjugació i que si un sistema dinàmic té un comportament caòtic i és conjugat amb un altre, aquest segon també ho és.

El **Capítol 3** està dedicat a la dinàmica simbòlica. Definirem l'espai de seqüències en  $N$  símbols,  $\Sigma_N$  i el convertirem en un espai mètric. També definirem la funció shift,  $\sigma$ , i veurem que el sistema dinàmic  $(\Sigma_N, \sigma)$  és caòtic.

Finalment, ens els **Capítols 4 i 5** es demostren comportaments caòtics en sistemes dinàmics reals i complexos respectivament. En els dos casos, s'estudia la dinàmica de la família de funcions  $Q_c(x) = x^2 + c$ . Veurem que existeix un conjunt de Cantor en els qual la dinàmica d'aquesta funció és caòtica. Per fer-ho, veurem que existeix una conjugació topològica entre les funcions  $Q_c$  i  $\sigma$ . En el cas real, també donarem una idea molt general de com  $Q_c$  passa de tenir una dinàmica senzilla a una dinàmica més complexa. Pel cas complex, introduïrem el concepte de família normal, concepte que ens permetrà definir el conjunt de Julia, on tindrà lloc la dinàmica caòtica, i el conjunt de Fatou.

## 2 Preliminars. Conceptes bàsics

Aquest primer capítol recull els resultats més generals. Començarem parlant d'iteració de funcions i de les seves òrbites més rellevants. Seguirem amb la definició de caos. Definirem tots els conceptes que aquesta engloba i en veurem alguna propietat. Finalment, parlarem de la conjugació topològica com a eina per a comparar sistemes dinàmics.

### 2.1 Iteració de funcions

En aquest primer capítol, introduïrem conceptes bàsics i resultats fonamentals sobre iteració de funcions. Parlarem de punts fixos, punts periòdics i com aquests punts fixos determinen el comportament de l'òrbita de punts veïns.

Considerem  $X$  un espai mètric i  $f : X \rightarrow X$  una funció contínua. Sigui  $x_0 \in X$  i considerem  $f(x_0)$ , és a dir, la imatge de  $x_0$  per  $f$ . Com que  $f(x_0) \in X$ , podem tornar a aplicar  $f$  a aquest valor i obtenim  $f(f(x_0)) = f^2(x_0)$  que torna a ser un element de  $X$ . Per tant, podem repetir aquest procés reiteradament i obtenim una successió de la forma

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f^2(x_0), \dots, x_n = f^n(x_0), \dots$$

Aquesta successió és la *successió d'iterats* de  $f$  en el punt  $x_0$ . El conjunt de tots els iterats de  $f$  per als diferents punts  $x_0$  es pot entendre com un sistema dinàmic determinat per la funció  $f$  i que, després de  $n$  iterats, situa una partícula que inicialment es trobava a l'estat  $x_0$ , a l'estat  $f^n(x_0)$ . La formulació de la noció de sistema dinàmic associat als iterats d'una funció indica el caràcter discret de la variable  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

Definim l'*òrbita* d'un punt  $x_0$ , que anomenem *condició inicial*, com la successió d'iterats de  $f$  en aquest punt i la denotem per  $\omega(x_0, f)$ . És a dir,

$$\omega(x_0, f) = \{x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f^2(x_0), \dots, x_n = f^n(x_0), \dots\}$$

on  $f^n(x_0) = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ vegades}}(x_0)$ . Ara, ens preguntem on es troba  $f^n(x_0)$  quan  $n$  és molt gran.

Per resoldre aquesta qüestió hem de calcular, si existeix,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0).$$

Aquest límit dependrà de la condició inicial  $x_0$  amb la qual comencem a iterar la funció. Per exemple, considerem  $X = \mathbb{R}$  i la funció  $Q_0(x) = x^2$ . Llavors l'òrbita de la condició inicial  $x_0$  és

$$\{x_0, x_0^2, x_0^4, x_0^8, \dots, x_0^{2^n}, \dots\}.$$

Si prenem un punt  $x_0$  tal que  $|x_0| < 1$ ,  $Q_0^n(x_0)$  tendeix a 0 quan la  $n$  tendeix a infinit per a tota  $n$ . En canvi, si  $x_0$  és tal que  $|x_0| > 1$ , aleshores  $Q_0^n(x_0)$  tendeix a infinit quan  $n$  tendeix a infinit. D'altra banda, si prenem  $x_0 = 0$ ,  $Q_0^n(0) = 0$  per a tota  $n$  i si prenem  $x_0 = 1$ ,  $Q_0^n(1) = 1$  per a tota  $n$ . Com hem vist, en aquest exemple és fàcil veure quin és el comportament asimptòtic de les òrbites però no sempre és així. L'anàlisi gràfic és una eina que pot servir d'ajuda en aquests casos. Per tenir un exemple de com funciona l'anàlisi gràfic, veurem els resultats anteriors a partir de la gràfica de la funció.

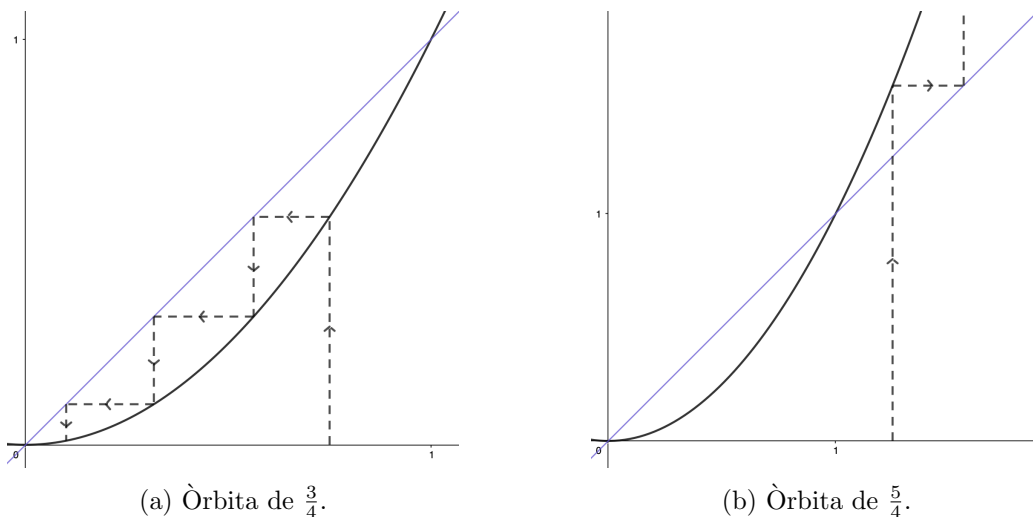


Figura 1: Representació gràfica dels iterats d'un punt.

En la figura 1a podem veure com després d'uns iterats de  $Q_0$ , l'òrbita del punt  $x_0 = 3/4$  tendeix a 0. De la mateixa manera, en la figura 1b veiem que l'òrbita del punt  $x_0 = 5/4$  tendeix a infinit.

En el cas en què  $X = \mathbb{C}$ , al no poder representar la funció  $f$  en el pla, es dibuixa l'òrbita d'un punt  $z_0$  com una successió a  $\mathbb{C}$ .

Fins ara hem considerat sempre  $n \geq 0$ , és a dir, hem iterat la funció  $f$  en temps positiu. De la mateixa manera, podríem preguntar-nos pel passat, és a dir, podríem preguntar-nos com hem arribat fins a  $x_0$ , quin és el punt  $x_{-1}$  tal que  $f(x_{-1}) = x_0$ . Tornant a la funció  $Q_0(x) = x^2$ , és clar que aquesta resposta pot no ser única. Per a tot punt  $x_0 > 0$  existeixen dos valors  $x_{-1}^+ = +\sqrt{x_0}$  i  $x_{-1}^- = -\sqrt{x_0}$  tal que  $f(x_{-1}^+) = f(x_{-1}^-) = x_0$ . Aquests punts s'anomenen *antiimatges* de  $x_0$  per  $f$ . La iteració inversa no determina explícitament d'on venim sinó que ens indica possibles camins. És per aquest motiu que es diu que la iteració de funcions defineix semisistemes dinàmics. D'ara en endavant, si no es diu el contrari, quan es parli d'òrbita d'un punt  $x_0$  sempre farà referència a l'òrbita positiva, és a dir, l'òrbita en temps positiu.

En l'exemple dels iterats de la funció  $Q_0$  hem vist que les òrbites dels seus punts presenten un comportament molt senzill però no sempre és així. Considerem la funció  $f(x) = 4x(1-x)$ . Aquesta funció també té per punt fix el 0. El punt  $x = 1$  també té una dinàmica simple:  $f^n(1) = 0$  per a tota  $n \geq 0$ . Ara bé, considerem un punt  $x_0$  arbitrari i observem com la seva òrbita pot presentar una dinàmica molt complicada.



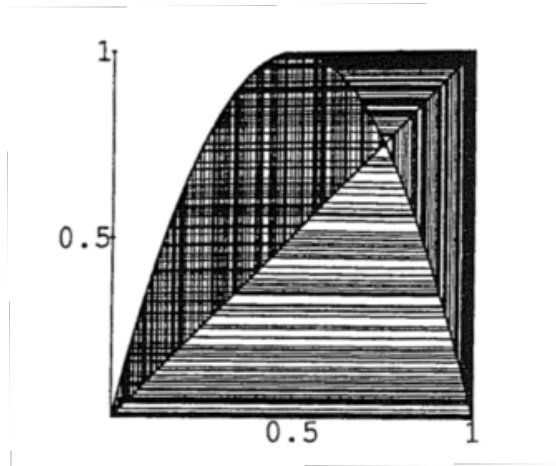


Figura 2: Anàlisi gràfic de l'òrbita d'un punt  $x_0$  arbitrari per la funció  $f(x) = 4x(1-x)$ .

### 2.1.1 Tipus d'òrbites

Ara que ja tenim definit el concepte d'iteració de funcions i d'òrbita, ens centrarem en els punts les òrbites dels quals tenen un paper important en la dinàmica de les funcions. Veurem que hi ha punts que tenen òrbites molt senzilles però que, alhora, determinen l'òrbita de molts altres punts propers a aquests.

Començarem parlant de punts fixos. Diem que un punt  $x_0 \in X$  és un *punt fix* si  $f(x_0) = x_0$ . Aleshores,  $x_n = f^n(x_0) = x_0$  per a tota  $n \geq 0$  i la seva òrbita és la successió constant  $\{x_0, x_0, x_0, \dots\}$ . Es calculen a partir de l'equació  $f(x) = x$ .

Si considerem l'espai dels reals, identificar gràficament els punts fixos és senzill: són els punts de tall de la gràfica de  $f$  amb la recta  $y = x$ .

A continuació, veurem que podem classificar els punts fixos d'una funció definida en els reals en atractors, repulsors o neutres. Per entendre aquests conceptes tornem a fixar-nos en el cas particular de la funció  $Q_0(x) = x^2$ . Ja hem vist que aquesta funció té dos punts fixos,  $x = 0$  i  $x = 1$ . A més, si  $x_1$  és tal que  $|x_1| < 1$ , llavors la seva òrbita s'aproxima a 0, és a dir,  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_0^n(x_1) = 0$ . Podem dir, doncs, que el punt  $x = 0$  "atrau" les òrbites d'un entorn d'aquest mateix punt fix. En canvi, si agafem un punt tal que  $|x_1| > 1$ , la seva òrbita s'allunya del punt  $x = 1$  i tendeix a infinit.

A partir del teorema del valor mitjà, podem formalitzar els conceptes de punt fix atractor i punt fix repulsor.

**Proposició 2.1.** *Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funció de classe  $C^1$  i  $p$  un punt fix de  $f$  complint que  $|f'(p)| < 1$ . Aleshores, hi ha un entorn obert  $U$  de  $p$  tal que si  $x \in U$ , llavors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p.$$

*Demostració.* Com que  $f$  és una funció  $C^1$ , existeixen un  $\varepsilon > 0$  i  $K < 1$  tal que si  $x \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ , aleshores  $|f'(x)| < K$ . Llavors, pel teorema del valor mitjà

$$|f(x) - f(p)| = |f(x) - p| < K|x - p| < |x - p| < \varepsilon.$$

Per tant, tenim que  $f(x) \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$  i podem repetir el mateix argument. Obtenim doncs

$$|f^2(x) - f^2(p)| = |f(f(x)) - p| < K|f(x) - p| < K^2|x - p| < \varepsilon$$

i, en general,

$$|f^n(x) - f^n(p)| = |f^n(x) - p| < K^n|x - p|$$

Per tant, com que  $K < 1$ ,  $f^n(x) \rightarrow p$  quan  $n \rightarrow \infty$ . □

**Proposició 2.2.** *Si sigui  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funció de classe  $C^1$  i  $p$  un punt fix de  $f$  complint que  $|f'(p)| > 1$ . Aleshores, hi ha un entorn obert  $U$  de  $p$  tal que si  $x \in U$  i  $x \neq p$ , llavors existeix una  $k > 0$  amb  $f^k(x) \notin U$ .*

*Demostració.* Com que  $f$  és una funció  $C^1$ , existeixen un  $\varepsilon > 0$  i  $\mu > 1$  tal que si  $x \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ , aleshores  $|f'(x)| > \mu$ . Llavors, pel teorema del valor mitjà

$$|f(x) - f(p)| = |f(x) - p| > \mu|x - p|.$$

Si suposem que  $f^n(x) \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$  per a tota  $n \in \mathbb{N}$ , aleshores

$$|f^n(x) - f(p)| = |f^n(x) - p| > \mu^n|x - p|.$$

Però, com que  $\mu > 1$ ,  $\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  i tenim una contradicció. □

Diem que un punt fix  $p$  és un punt fix *atractor* si compleix que  $|f'(p)| < 1$  i que és un punt fix *repulsor* si  $|f'(p)| > 1$ . En cas contrari, quan  $|f'(p)| = 1$ , diem que  $p$  és un punt fix *neutre*.

Un altre tipus d'òrbites interessants són les òrbites de punts periòdics i s'anomenen *òrbites periòdiques* o bé *cicles*. Diem que un punt  $x_0 \in X$  és un *punt periòdic* de període  $k$  si  $f^k(x_0) = x_0$ . Aquest valor  $k$  no és únic. És fàcil comprovar que si  $f^k(x_0) = x_0$ , aleshores  $f^{nk}(x_0) = x_0$  per a tota  $n$ . Anomenem *període principal* al primer enter positiu  $k$  que compleix que  $f^k(x_0) = x_0$ . Notem que els punts fixos són punts periòdics de període 1.

Si sigui  $x_0$  un punt periòdic de període principal  $k$ . En aquest cas, la seva òrbita és de la forma

$$\{x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f^2(x_0), \dots, x_{k-1} = f^{k-1}(x_0), x_0, x_1, \dots\}.$$

Es diu també que  $x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0)$  formen un *k-cicle*. Notem que tots els punts d'un k-cicle són punts periòdics de període  $k$ . En efecte, per a tota  $i \leq k - 1$  es compleix

$$f^k(x_i) = f^k(f^i(x_0)) = f^i(f^k(x_0)) = f^i(x_0) = x_i.$$

Igual que amb els punts fixos, si  $X = \mathbb{R}$  podem classificar els punts periòdics en atractors, repulsors o neutres. Notem que si  $x_0$  és un punt periòdic de període  $k$  d'una funció  $f$ , aleshores  $x_0$  és un punt fix per  $f^k$ . Així, diem que un punt periòdic de període  $k$  de  $f$  és un *punt periòdic atractor* si és un punt fix atractor de  $f^k$  i diem que és un *punt periòdic repulsor* si és un punt fix repulsor per  $f^k$ . Per tant, per saber si un punt periòdic  $x_0$  és atractor o repulsor, hem de trobar el valor de la derivada de  $f^k$  en el punt  $x_0$ .

Ara bé, podem classificar de la mateixa manera les òrbites periòdiques? Poden haver-hi punts periòdics atractors i punts periòdics repulsors en un mateix cicle? Suposem que  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$  formen un  $k$ -cicle de  $f$ . Aleshores,  $f^i(x_0) = x_i$ . Usant la regla de la cadena, veiem que

$$(f^2)'(x_0) = f'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = f'(x_1) \cdot f'(x_0)$$

$$(f^3)'(x_0) = f'(f^2(x_0)) \cdot (f^2)'(x_0) = f'(x_2) \cdot f'(x_1) \cdot f'(x_0).$$

Seguint amb el mateix procediment, obtenim que

$$(f^k)'(x_0) = f'(x_{k-1}) \cdot \dots \cdot f'(x_1) \cdot f'(x_0).$$

A més, com que els punts del cicle són exactament els mateixos sigui quina sigui la condició inicial, deduïm que

$$(f^k)'(x_0) = (f^k)'(x_1) = \dots = (f^k)'(x_{k-1}).$$

Per tant, tots els punts d'un mateix cicle tenen el mateix comportament. Anomenem *multiplicador* de l'òrbita periòdica a  $(f^k)'(x_0)$  i, com en el cas de punts fixos, el seu valor ens indica si l'òrbita és atractora, repulsora o neutra.

També podem trobar-nos amb punts no fixos ni periòdics però que algun punt de la seva òrbita sí que ho sigui. Aquests punts s'anomenen *eventualment fixos* o *periòdics*. Per exemple, si considerem la funció  $f(x) = 1 - x^2$ , tenim que  $\sqrt{2}$  és un punt eventualment periòdic ja que  $f(\sqrt{2}) = -1$ ,  $f(-1) = 0$  i  $0$  és un punt periòdic.

Els resultats de les proposicions 2.1 i 2.2 es comproven de manera similar pel cas  $X = \mathbb{C}$ . Aleshores, diem que un punt  $z_0 \in \mathbb{C}$  és un punt fix

$$\begin{aligned} \textit{atractor} & \text{ si } |f'(z_0)| < 1, \\ \textit{repulsor} & \text{ si } |f'(z_0)| > 1, \\ \textit{neutre} & \text{ si } |f'(z_0)| = 1. \end{aligned}$$

Com ja hem vist, per a tot punt fix atractor  $z_0$  existeix un entorn obert de punts del pla les òrbites dels quals tendeixen a ell. Aquest conjunt s'anomena *conca d'atracció* de  $z_0$  i es denota per  $A(z_0)$ .

## 2.2 Caos

En la secció anterior hem vist com en el cas dels iterats de la funció  $Q_0(x)$  o bé la successió era constant o el seu comportament asimptòtic era senzill de determinar. En canvi, en la figura 2 no està clar quin serà el límit de la successió del punt  $x_0$  per la funció  $f(x) = 4x(1 - x)$ . De fet, la figura sembla indicar que la successió d'iterats no té límit ni segueix cap patró. Podríem dir que presenta un comportament "caòtic".

En aquesta secció, introduïrem la noció de caos. Tot i que no hi ha una definició universal d'aquest concepte, en aquest cas utilitzarem la definició introduïda per R.L. Devaney en [1]. Aquesta definició estableix tres components com a característiques essencials del caos. Aquests conceptes estan formulats per a funcions contínues i definides en un espai mètric  $(X, d)$ .

Una d'aquestes components és la dependència lineal respecte condicions inicials. Per tenir-ne una idea, aquest concepte es refereix a que un petit canvi en les condicions inicials pot provocar que el sistema evolucioni de manera força diferent.

**Definició 2.3.** Sigui  $(X, d)$  un espai mètric. Diem que una funció  $f : X \rightarrow X$  té dependència sensible respecte condicions inicials si existeix un  $\delta > 0$  tal que per a tota  $x \in X$  i per a tot  $\varepsilon > 0$  existeix un  $y \in X$  amb  $d(x, y) < \varepsilon$  i existeix  $k \geq 0$  tal que  $d(f^k(x), f^k(y)) > \delta$ .

Dit en paraules, una funció té dependència lineal respecte condicions inicials si existeixen punts propers a  $x$  que se separen de  $x$  després d'iterats de la funció. Això no vol dir que les òrbites de punts propers no estiguin a prop durant molts iterats de  $f$  ja que, en la definició,  $k$  pot ser molt gran. D'altra banda, la sensibilitat respecte condicions inicials no significa que tot punt proper a  $x$  se separi de  $x$  sota iteració de  $f$ , sinó que almenys n'existeix un que sí que ho compleix.

Un altre concepte que ens cal introduir és el concepte de transitivitat d'una funció.

**Definició 2.4.** Diem que una funció  $f : X \rightarrow X$  és topològicament transitiva si per a tot  $U, V \subset X$  oberts existeix  $k > 0$  tal que  $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ .

Aquesta definició diu que una funció és topològicament transitiva si donats dos punts de  $X$ , podem trobar un altre punt l'òrbita del qual s'aproxima a aquests dos. Veurem que l'existència d'una òrbita densa implica la transitivitat. Per poder demostrar-ho, primer de tot recordarem la definició de conjunt dens.

**Definició 2.5.** Sigui  $X$  un conjunt i sigui  $Y \subset X$ . Diem que  $Y$  és dens en  $X$  si  $\bar{Y} = X$ , és a dir, si per a tota  $x \in X$  i per a tot  $\varepsilon > 0$  existeix  $y \in Y$  tal que  $d(x, y) < \varepsilon$ .

Aquesta definició és equivalent a dir que per a tot obert no buit  $U$  de  $X$  es compleix que  $U \cap Y \neq \emptyset$ .

**Proposició 2.6.** Si  $f$  té una òrbita densa, llavors  $f$  és topològicament transitiva.

*Demostració.* Suposem que  $\omega(x_0, f)$  és una òrbita densa i siguin  $U, V$  oberts no buits de  $X$ . Com que  $\omega(x_0, f)$  és densa en  $X$ , existeixen  $k_1, k_2 > 0$  tals que  $f^{k_1}(x_0) \in U$  i  $f^{k_2}(x_0) \in V$ . Suposem que  $k_2 \geq k_1$  i sigui  $k = k_2 - k_1 \geq 0$ . Aleshores

$$f^k(f^{k_1}(x_0)) = f^{k_2-k_1}(f^{k_1}(x_0)) = f^{k_2}(x_0) \in V.$$

amb  $f^{k_1}(x_0) \in U$  i  $f^{k_2}(x_0) \in V$ . Per tant,  $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$  i  $f$  és topològicament transitiva.  $\square$

Aquesta proposició mostra que la condició d'existència d'una òrbita densa és més forta que la de transitivitat.

Un cop introduïts aquests conceptes, ja podem definir el concepte de funció caòtica.

**Definició 2.7.** Diem que  $f : X \rightarrow X$  és caòtica si:

1.  $f$  té dependència sensible respecte condicions inicials.
2.  $f$  és topològicament transitiva.
3. Els punts periòdics de  $f$  són densos en  $X$ .

**Observació 2.8.** Si una funció contínua  $f : X \rightarrow X$  té el conjunt de punts periòdics densos i, a més, és topològicament transitiva, llavors  $f$  té dependència sensible sobre condicions inicials.

*Demostració.* Siguin  $q_1$  i  $q_2$  punts periòdics diferents i amb òrbites disjunes. Definim

$$\delta_0 = \min\{d(f^n(q_1), f^m(q_2)) : n, m \in \mathbb{N}\} > 0.$$

Llavors,

$$\delta_0 \leq d(f^n(q_1), f^m(q_2)) \text{ per a tota } n, m \in \mathbb{N}$$

i per la desigualtat triangular, per a tota  $x \in X$  tenim que

$$\delta_0 \leq d(f^n(q_1), x) + d(x, f^m(q_2)) \text{ per a tota } n, m \in \mathbb{N}.$$

Per tant, si per a alguna  $n \in \mathbb{N}$  es compleix que  $d(f^n(q_1), x) < \delta_0/2$ , aleshores per a tota  $m \in \mathbb{N}$  tenim que  $d(x, f^m(q_2)) > \delta_0/2$ . Anàlogament, es veu el mateix per a  $m$ . És a dir, per a tota  $x \in X$ ,  $x$  està a distància major o igual que  $\delta_0/2$  de l'òrbita de  $q_1$  o de l'òrbita de  $q_2$ .

Prenem  $\delta = \delta_0/8$ . Sigui  $x \in X$  i sigui  $U$  un entorn obert de  $x$ . Com que els punts periòdics són densos, existeix un punt periòdic  $p$  tal que  $d(x, p) < \varepsilon$  per a tot  $0 < \varepsilon < \delta$ .

Com ja hem vist, existeix un punt periòdic  $q$  tal que la seva òrbita està a distància major o igual que  $\delta_0/2 = 4\delta$  de  $x$ .

Sigui  $n$  el període de  $p$ . Definim

$$\begin{aligned} V &= \bigcap_{i=0}^n f^{-i}(B_\delta(f^i(q))) = \bigcap_{i=0}^n \{x : f^i(x) \in B_\delta(f^i(q))\} \\ &= \bigcap_{i=0}^n \{x : d(f^i(x), f^i(q)) < \delta\}. \end{aligned}$$

Per definició,  $q \in V$ . A més,  $V$  és obert ja que  $f$  és contínua i  $B_\delta(f^i(q))$  és un obert.

Com que  $f$  és transitiva, existeix un valor  $k$  tal que  $f^k(B_\varepsilon) \cap V \neq \emptyset$ , és a dir, existeix  $y \in B_\varepsilon$  tal que  $f^k(y) \in V$ . Sigui  $j$  entera tal que  $k/n < j \leq k/n + 1$ . És a dir, sigui  $j$  la part entera de  $k/n + 1$ . Aleshores,  $0 < nj - k \leq n$ . Com que  $f^{nj}(y) = f^{nj-k}(f^k(y))$  i  $nj - k \leq n$ , tenim que

$$d(f^{nj}(y), f^{nj-k}(q)) < \delta.$$

Per la desigualtat triangular,

$$d(x, f^{nj-k}(q)) \leq d(x, f^{nj}(p)) + d(f^{nj}(p), f^{nj}(y)) + d(f^{nj}(y), f^{nj-k}(q))$$

i com que  $f^{nj}(p) = p$ ,

$$\begin{aligned} d(f^{nj}(p), f^{nj}(y)) &\geq d(x, f^{nj-k}(q)) - d(f^{nj}(y), f^{nj-k}(q)) - d(x, p) \\ &> 4\delta - \delta - \delta = 2\delta. \end{aligned}$$

Utilitzant un altre cop la desigualtat triangular, obtenim que

$$2\delta < d(f^{nj}(p), f^{nj}(y)) \leq d(f^{nj}(p), f^{nj}(x)) + d(f^{nj}(x), f^{nj}(y)).$$

Per tant, o bé  $d(f^{nj}(p), f^{nj}(x)) > \delta$  o  $d(f^{nj}(x), f^{nj}(y)) > \delta$  i això demostra que  $f$  té dependència lineal sobre condicions inicials.  $\square$

Aquesta observació ens diu que el primer punt de la definició 2.7 és conseqüència dels altres dos i que, per tant, per veure que una funció és caòtica només és necessari demostrar que és topològicament transitiva i que el conjunt de punts periòdics és dens.

### 2.3 Conjugació topològica

En aquesta secció definirem el concepte de conjugació topològica i veurem propietats dinàmiques que aquesta preserva. Així, demostrarem que dos sistemes dinàmics topològicament són dinàmicament equivalents. Però, en què consisteix la conjugació? Fàcilment, podem deduir que el primer pas serà veure que els espais en els quals estan definits els dos sistemes dinàmics són “el mateix”. Això es demostra veient que existeix un homeomorfisme entre ells. És a dir, veient que existeix una aplicació bijectiva, contínua i amb inversa contínua entre els dos espais.

**Definició 2.9.** Siguin  $X$  i  $Y$  dos espais topològics i siguin  $f : X \rightarrow X$  i  $g : Y \rightarrow Y$  dues funcions almenys contínues. Diem que  $f$  i  $g$  són topològicament conjugades si existeix un homeomorfisme  $h : X \rightarrow Y$  tal que  $h \circ f = g \circ h$ .

En aquest cas, diem que  $h$  és una *conjugació topològica* entre  $f$  i  $g$ .

**Exemple 2.10.** Siguin  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  i  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  les funcions donades per  $f(x) = tx$  i  $g(x) = x + \log(t)$  amb  $t > 0$ . Considerem l’homeomorfisme  $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definit per  $h(x) = \log(x)$ . Llavors, tenim que  $f$  i  $g$  són topològicament conjugades per l’homeomorfisme  $h$ . En efecte,

$$\begin{aligned} h \circ f &= h(f(x)) = h(tx) = \log(tx) = \log(t) + \log(x) \\ g \circ h &= g(h(x)) = g(\log(x)) = \log(x) + \log(t) \end{aligned}$$

Observem que si  $h$  és una conjugació topològica entre  $f$  i  $g$ , aleshores  $h^{-1}$  és una conjugació topològica entre  $g$  i  $f$ . Com que  $h$  és un homeomorfisme, es compleix que

$$h^{-1} \circ g = h^{-1} \circ g \circ h \circ h^{-1} = h^{-1} \circ h \circ f \circ h^{-1} = f \circ h^{-1}.$$

A continuació, veurem que moltes propietats dinàmiques són invariants per la conjugació topològica.

**Teorema 2.11.** *Siguin  $X$  i  $Y$  dos espais topològics i siguin  $f : X \rightarrow X$  i  $g : Y \rightarrow Y$  dues funcions contínues. Suposem que  $f$  i  $g$  són conjugades mitjançant un homeomorfisme  $h : X \rightarrow Y$ . Aleshores:*

1.  $h \circ f^n = g^n \circ h$  per a tota  $n \in \mathbb{N}$ .
2.  $x$  és punt periòdic de  $f$  si i només si  $h(x)$  és punt periòdic de  $g$ .
3. El conjunt  $Per(f)$  és dens a  $X$  si i només si  $Per(g)$  és dens a  $Y$ .
4.  $f$  és topològicament transitiva si i només si  $g$  és topològicament transitiva.
5.  $f$  és caòtica si i només si  $g$  és caòtica.

*Demostració.* El punt 1. el demostrarem per inducció.

Per a  $n = 1$  ja sabem que  $h \circ f = g \circ h$ . Suposem que és cert per a  $n$  i demostrem-ho per a  $n + 1$ .

$$h \circ f^{n+1} = (h \circ f^n) \circ f \stackrel{HI}{=} (g^n \circ h) \circ f = g^n \circ (h \circ f) = g^n \circ (g \circ h) = g^{n+1} \circ h$$

(2.) ( $\Rightarrow$ ) Sigui  $x$  un punt periòdic de període  $k$  de  $f$ , és a dir,  $f^k(x) = x$ . Per 1. tenim que  $h(x) = h(f^k(x)) = g^k(h(x))$ . Per tant, veiem que  $h(x)$  és punt fix de període  $k$  de  $g$ .

( $\Leftarrow$ ) Sigui  $h(x)$  punt periòdic de període  $k$  de  $g$ , és a dir,  $g^k(h(x)) = h(x)$ . Aleshores, per 1. tenim que  $h(f^k(x)) = h(x)$  i per tant  $f^k(x) = x$ .

(3.) ( $\Rightarrow$ ) Sigui  $P_g = Per(g)$ . Volem veure que  $P_g$  és dens a  $Y$ .

Sigui  $U \subset Y$  un obert qualsevol. Llavors,  $h^{-1}(U)$  és un obert de  $X$  i com que els punts periòdics de  $f$  són densos a  $X$ , tenim que existeix un element  $x \in h^{-1}(U)$  i una  $k > 0$  tal que  $f^k(x) = x$ . Aleshores,  $h(x) \in U$  i compleix que  $g^k(h(x)) = h(f^k(x)) = h(x)$ , és a dir,  $h(x)$  és un punt periòdic de  $g$ . Per tant,  $P_g$  és dens a  $Y$ .

( $\Leftarrow$ ) Sigui  $P_f = Per(f)$ . Volem veure que  $P_f$  és dens a  $X$ .

Sigui  $V \subset X$  un obert qualsevol. Llavors,  $h(V)$  és un obert de  $Y$  i com que  $P_g$  és dens a  $Y$ , tenim que existeix una  $y \in h(V)$  i una  $k > 0$  tal que  $g^k(y) = y$ . Aleshores,  $h^{-1}(y) \in V$  i compleix que  $h^{-1}(y) = h^{-1}(g^k(y)) = f^k(h^{-1}(y))$ , és a dir,  $h^{-1}(y)$  és un punt periòdic de  $f$ . Per tant,  $P_f$  és dens a  $X$ .

(4.) ( $\Rightarrow$ ) Siguin  $U', V'$  oberts de  $Y$ . Llavors  $h^{-1}(U')$  i  $h^{-1}(V')$  són oberts de  $X$ . Com que  $f$  és topològicament transitiva, tenim que existeix  $k > 0$  tal que  $f^k(h^{-1}(U')) \cap h^{-1}(V') \neq \emptyset$ , és a dir, hi ha un element  $x \in h^{-1}(U')$  i una  $k > 0$  amb  $f^k(x) \in h^{-1}(V')$ . Considerem  $h(x)$ , aleshores

$$g^k(h(x)) = h(f^k(x))$$

però  $f^k(x) \in h^{-1}(V')$  i per tant,  $h(f^k(x)) \in V'$ . En conseqüència tenim que  $g^k(h(x)) \in V'$ .

Hem vist doncs que existeixen  $y = h(x) \in U'$  i  $k > 0$  complint  $g^k(y) \in V'$  amb  $U'$  i  $V'$  oberts de  $Y$ . Per tant,  $g$  és topològicament transitiva.

( $\Leftarrow$ ) Siguin  $U, V$  oberts de  $X$ . Llavors  $h(U)$  i  $h(V)$  són oberts de  $Y$ . Com que  $g$  és topològicament transitiva, tenim que existeix  $k > 0$  tal que  $g^k(h(U)) \cap h(V) \neq \emptyset$ , és a dir, existeixen  $y \in h(U)$  i  $k > 0$  amb  $g^k(y) \in h(V)$ .

Considerem  $h^{-1}(y)$ , aleshores

$$f^k(h^{-1}(y)) = h^{-1}(g^k(y))$$

però  $g^k(y) \in h(V)$  i per tant,  $h^{-1}(g^k(y)) \in V$ . En conseqüència tenim que  $f^k(h^{-1}(y)) \in V$ . Hem vist doncs que existeixen  $x = h^{-1}(y) \in U$  i  $k > 0$  complint  $f^k(x) \in V$  amb  $U$  i  $V$  oberts de  $X$ . Per tant,  $f$  és topològicament transitiva.

(5.) Hem vist que els punts periòdics de  $f$  són densos si i només si ho són els de  $g$  i també que  $f$  és topològicament transitiva si i només si  $g$  és topològicament transitiva. Llavors, per definició de funció caòtica i per l'observació 2.8 tenim que  $f$  és caòtica si i només si  $g$  és caòtica.  $\square$

D'aquests resultats anteriors, és senzill deduir-ne algunes altres propietats. Per exemple, de 1. veiem que si  $f$  i  $g$  són conjugades per  $h$ , aleshores  $f^n$  i  $g^n$  també ho són. A més, podem veure que  $h$  envia òrbites de  $f$  a òrbites de  $g$ . En efecte, si

$$\omega(x_0, f) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots\}$$

llavors

$$\begin{aligned} h(\omega(x_0, f)) &= \{h(x_0), h(f(x_0)), h(f^2(x_0)), \dots\} = \\ &= \{h(x_0), g(h(x_0)), g^2(h(x_0)), \dots\} = \omega(h(x_0), g). \end{aligned}$$

A més, com que  $h$  és un homeomorfisme i per tant envia conjunts densos a conjunts densos, tenim que si  $f$  té una òrbita densa, llavors la seva imatge per  $h$  és una òrbita densa de  $g$ .

També podem deduir de 2. que el nombre de punts periòdics de  $f$  i el nombre de punts periòdics de  $g$  coincideixen. És a dir,  $\#\{Per(f)\} = \#\{Per(g)\}$ .

Comprovem algun d'aquests resultats amb un exemple molt senzill:

**Exemple 2.12.** Sigui  $f = x^2 - 2$  i sigui  $g = 4x(1 - x)$ . Si considerem  $h = \frac{-1}{4}x + \frac{1}{2}$ , es pot comprovar fàcilment que  $h$  és una conjugació topològica entre  $f$  i  $g$ .

Ara, calcularem els punts fixos de  $g$  a partir dels punts fixos de  $f$ . Els punts fixos de  $f$  són les solucions de  $x^2 - 2 = x$ , és a dir,  $x_1 = -1$  i  $x_2 = 2$ . Per tant, tenim que  $f$  té dos punts fixos i com que  $f$  i  $g$  són conjugades, ja sabem que  $g$  també en tindrà 2. Calculem-los:

$$\begin{aligned} h(x_1) &= h(-1) = \frac{-1}{4}(-1) + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \\ h(x_2) &= h(2) = \frac{-1}{4}2 + \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

Comprovem que aquests són punts fixos de  $g$ :

$$\begin{aligned} g(3/4) &= 4 \cdot \frac{3}{4} \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} \\ g(0) &= 0 \cdot (1 - 0) = 0. \end{aligned}$$



Podem veure que la conjugació de l'exemple anterior és un cas particular d'un resultat més general.

**Teorema 2.13.** *Sigui  $P$  un polinomi quadràtic arbitrari. Llavors,  $P$  és conjugat amb un polinomi de la forma  $Q_\lambda(x) = x^2 + \lambda$  via un homeomorfisme  $h(x) = \alpha x + \beta$ .*

*Demostració.* Sigui  $P(x) = ax^2 + bx + c$ . Considerem  $Q(x) = x^2 + ac + \frac{b}{2} - (\frac{b}{2})^2$  i  $h(x) = ax + \frac{b}{2}$ . Aleshores,

$$h \circ P = a(ax^2 + bx + c) + \frac{b}{2} = a^2x^2 + abx + ac + \frac{b}{2}$$

$$Q \circ h = (ax + \frac{b}{2})^2 + ac + \frac{b}{2} - (\frac{b}{2})^2 = a^2x^2 + abx + ac + \frac{b}{2}.$$

□

Hem vist que si tenim dues funcions topològicament conjugades, estudiar la dinàmica d'una és equivalent a estudiar-ne la de l'altra. Per tant, amb el teorema anterior veiem que estudiar la dinàmica de les funcions  $Q_\lambda$ , és equivalent a estudiar la de qualsevol polinomi quadràtic.

**Observació 2.14.** Observem que en la demostració del teorema 2.11, per a demostrar la implicació cap a la dreta dels punts 3. i 4. no hem utilitzat la injectivitat. Només hem usat l'exhaustivitat i la continuïtat.

Això ens permet introduir un altre concepte.

**Definició 2.15.** Siguin  $X$  i  $Y$  dos espais topològics i siguin  $f : X \rightarrow X$  i  $g : Y \rightarrow Y$  dues funcions almenys contínues. Diem que una funció  $h : X \rightarrow Y$  és una semiconjugació entre  $f$  i  $g$  si és contínua, exhaustiva i compleix que

$$h \circ f = g \circ h.$$

**Corol·lari 2.16.** *Siguin  $f : X \rightarrow X$  i  $g : Y \rightarrow Y$  dues funcions contínues i suposem que existeix un semiconjugat topològic  $h : X \rightarrow Y$  entre  $f$  i  $g$ . Aleshores, si  $f$  és caòtica en  $X$ ,  $g$  és caòtica en  $Y$ .*

*Demostració.* És immediata a partir de l'observació 2.14 i el teorema 2.11. □

### 3 Dinàmica simbòlica

La dinàmica simbòlica és de les eines més útils per analitzar comportaments caòtics dels sistemes dinàmics. Consisteix en caracteritzar l'estructura de les òrbites d'un sistema dinàmic mitjançant una successió de símbols. Aquesta tècnica redueix un sistema complicat a un conjunt de seqüències molt més senzill d'estudiar.

L'objectiu d'aquesta secció és donar un model que permeti descriure dinàmiques complexes d'altres sistemes. Per això, definirem un espai mètric, l'espai de seqüències, i una funció, la funció shift de Bernoulli.

#### 3.1 Espai de seqüències

Com el seu nom indica, l'espai en el qual definirem el sistema dinàmic consisteix en seqüències. Aquestes seqüències seran infinites i de nombres enters. Tot i que en els següents capítols usarem l'espai de seqüències en dos símbols, en aquesta secció introduïrem la definició general per a  $N$  símbols.

**Definició 3.1.** Definim l'espai de seqüències en  $N$  símbols com

$$\Sigma_N := \{s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \mid s_i \in \{0, 1, \dots, N-1\}\}.$$

És a dir, considerem l'espai que consisteix en seqüències infinites de nombres enters compresos entre 0 i  $N-1$ . Per exemple, si considerem l'espai de seqüències en 2 símbols,  $\Sigma_2$ , els seus elements són seqüències infinites de 0's i 1's, com ara (111...) o (001001...).

Podem convertir aquest espai en un espai mètric. Per fer-ho, ens cal definir una distància entre elements de  $\Sigma_N$ .

**Definició 3.2.** Siguin  $s, t \in \Sigma_N$ . Definim la distància de  $s$  a  $t$  com:

$$d(s, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{N^i}.$$

Notem que la sèrie que defineix  $d(s, t)$  convergeix. En efecte, tenim que

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{N^i} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{N-1}{N^i} = (N-1) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{N^i}.$$

Aleshores, com que  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{N^i}$  convergeix, la sèrie que defineix  $d(s, t)$  també convergeix.

**Proposició 3.3.**  $d$  és una mètrica a  $\Sigma_N$ .

*Demostració.* Per veure que  $d$  és una mètrica cal demostrar que per a tot  $s, t, r \in \Sigma_N$ , es compleix:

1.  $d(s, t) \geq 0$

Clarament,  $\frac{|s_i - t_i|}{N^i} \geq 0$  per a tota  $i$ . Per tant,

$$d(s, r) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{N^i} \geq 0.$$

2.  $d(s, t) = d(t, s)$

Sabem que  $|s_i - t_i| = |t_i - s_i|$  i en conseqüència

$$d(s, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{N^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|t_i - s_i|}{N^i} = d(t, s).$$

3.  $d(s, t) = 0 \Leftrightarrow s = t$

És trivial ja que  $s = t$  si i només si  $s_i = t_i$  per a tota  $i$ .

4. *Desigualtat triangular:*  $d(s, t) \leq d(s, r) + d(r, t)$

Ja sabem que  $|s_i - t_i| \leq |s_i - r_i| + |r_i - t_i|$ . Aleshores, tenim que

$$d(s, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{N^i} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - r_i|}{N^i} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|r_i - t_i|}{N^i} = d(s, r) + d(r, t).$$

□

Com que tot espai mètric és un espai topològic, aquesta distància ens permetrà saber quins subconjunts de  $\Sigma_N$  són oberts i quins tancats. D'altra banda, també ens servirà per decidir quines seqüències són properes i quines no. La següent proposició resol aquest fet i serà molt útil al llarg del capítol.

**Proposició 3.4.** *Siguin  $s, t \in \Sigma_N$  i suposem que  $s_i = t_i$  per a  $i = 0, \dots, n$ . Llavors,  $d(s, t) \leq 1/N^n$ . A més, si  $d(s, t) < 1/N^n$ , aleshores  $s_i = t_i$  per a  $i = 0, \dots, n$ .*

*Demostració.* Començarem per veure la primera part de la proposició.

$$d(s, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{N^i} = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{N^i} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{N-1}{N^i} = \frac{1}{N^n}.$$

La segona part la demostrarem mitjançant el contrarecíproc, és a dir, demostrarem que si  $s_j \neq t_j$  per a alguna  $j \leq n$ , llavors  $d(s, t) \geq 1/N^n$ . Tenim que

$$d(s, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{N^i} = \sum_{i=0}^{j-1} \frac{|s_i - t_i|}{N^i} + \frac{|s_j - t_j|}{N^j} + \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{N^i}.$$

Com que  $|s_j - t_j| \geq 1$  ja que  $s_j \neq t_j$ , llavors  $\frac{|s_j - t_j|}{N^j} \geq 1/N^j$  i com que els altres dos sumatoris de l'expressió són positius o bé zero, ens queda que  $d(s, t) \geq 1/N^j \geq 1/N^n$  ja que  $j \leq n$ . □

Dit en paraules, tenim que dues seqüències són properes quan coincideixen en els primers termes.

Siguin  $s, t \in \Sigma_N$ . Per definició,  $s_i, t_i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ . Aleshores,  $|s_i - t_i| \leq N-1$  i

$$d(s, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{N^i} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{N-1}{N^i} = N.$$

Per tant, la distància màxima entre dos elements de l'espai de seqüències en  $N$  símbols és  $N$ .

Per exemple, si considerem l'espai  $\Sigma_2$  i les seqüències  $r = (101010\dots)$  i  $s = (010101\dots)$ , tenim que

$$d(r, s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|r_i - s_i|}{2^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2.$$

Per tant, la distància entre  $r$  i  $s$  és màxima. Aquest càlcul no sempre és tan senzill. Per exemple, si  $t = (001001001\dots)$ , aleshores

$$d(r, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|r_i - t_i|}{2^i} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{7}{2^{6k}} = 1 + \frac{1}{9} = 1.\bar{1}.$$

### 3.2 Shift de Bernoulli

Ara que ja tenim definit l'espai de seqüències, definim una funció en aquest espai. Aquesta funció ens permetrà definir un sistema dinàmic i serà el que s'utilitzarà com a model per a demostrar comportaments caòtics d'altres sistemes.

**Definició 3.5.** Sigui  $s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma_N$ . La funció  $\sigma : \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N$  ve donada per

$$\sigma(s_0 s_1 s_2 \dots) = (s_1 s_2 s_3 \dots).$$

Aquesta funció el que fa és eliminar el primer terme de la seqüència. Per exemple,

$$\sigma(101010\dots) = (010101\dots)$$

$$\sigma(1000\dots) = (000\dots).$$

**Proposició 3.6.**  $\sigma : \Sigma_N \rightarrow \Sigma_N$  és una funció contínua amb la mètrica  $d$ .

*Demostració.* Recordem que  $\sigma$  és contínua si per a tot  $s, t \in \Sigma_N$  i per a tot  $\varepsilon > 0$ , existeix un  $\delta > 0$  tal que si  $d(s, t) < \delta$  aleshores  $d(\sigma(s), \sigma(t)) < \varepsilon$ .

Sigui  $s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma_N$  i sigui  $\varepsilon > 0$ . Agafem  $n$  prou gran tal que  $1/N^n < \varepsilon$  i sigui  $\delta = 1/N^{n+1}$ . Considerem  $t = (t_0 t_1 t_2 \dots) \in \Sigma_N$  de manera que  $d(s, t) < \delta$ . Llavors, per la proposició 3.4 tenim que  $s_i = t_i$  per a  $i = 0, 1, \dots, n+1$ .

Aplicant  $\sigma$  a  $s$  i  $t$  veiem que  $\sigma(s) = (s_1 s_2 s_3 \dots)$  i  $\sigma(t) = (t_1 t_2 t_3 \dots)$  coincideixen en els  $n$  primers termes i usant altra vegada la proposició 3.4 obtenim que

$$d(\sigma(s), \sigma(t)) < \frac{1}{N^n} < \varepsilon.$$

□

Ara, ja podem definir el sistema dinàmic en l'espai  $\Sigma_N$ . Podem buscar els punts fixos, punts periòdics, etc. Notem que en iterar la funció  $\sigma$  obtenim que, si  $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$ , llavors

$$\begin{aligned}\sigma(s) &= (s_1 s_2 s_3 \dots) \\ \sigma^2(s) &= \sigma(\sigma(s)) = (s_2 s_3 s_4 \dots)\end{aligned}$$

i així successivament. Per tant podem concloure fàcilment que

$$\sigma^k(s) = (s_k s_{k+1} s_{k+2} \dots).$$

Sabem que els punts periòdics de període  $k$  de  $\sigma$  són els elements de  $\Sigma_N$  que compleixen que  $\sigma^k(s) = s$ . És a dir, les seqüències tals que

$$\sigma^k(s_0 s_1 s_2 \dots) = (s_k s_{k+1} s_{k+2} \dots) = (s_0 s_1 s_2 \dots).$$

Per tant, els punts periòdics de la funció shift de Bernoulli són les seqüències de la forma  $s = (\overline{s_0 s_1 \dots s_{k-1}})$ . Per definició, cada  $s_i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ , és a dir, per a cada  $i \geq 0$ ,  $s_i$  té  $N$  possibles valors. Aleshores,

$$\#\{Per_k(\sigma)\} = \prod_{i=0}^{k-1} N = N^k.$$

**Observació 3.7.** En  $Per_k(\sigma)$ ,  $k$  no té perquè ser el període principal.

Per exemple, si considerem l'espai  $\Sigma_2$ , tenim dos únics punts fixos que són (000...) i (111...). Els de període 2 són els fixos, (101010...) i (010101...). En la següent secció veurem altres propietats de la funció  $\sigma$ .

**Teorema 3.8.**  $\sigma$  és caòtica en  $\Sigma_N$ .

*Demostració.* (1.) Agafem  $\delta < 1$ . Sigui  $s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma_N$  qualsevol i sigui  $\varepsilon > 0$ . Prenem  $n$  tal que  $1/N^n < \varepsilon$  i  $t \in \Sigma_N$ ,  $t \neq s$ , complint  $d(s, t) < 1/N^n < \varepsilon$ . Llavors, per la proposició 3.4 tenim que  $s_i = t_i$  per a  $i = 0, 1, \dots, n$ . Però com que  $t \neq s$ , existeix  $k > n$  complint  $s_k \neq t_k$ .

Considerem  $\sigma^k(s) = (s_k s_{k+1} \dots)$  i  $\sigma^k(t) = (t_k t_{k+1} \dots)$ . Per hipòtesi, aquests punts tenen el primer terme diferent i per tant tenim que

$$d(\sigma^k(s), \sigma^k(t)) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|s_{j+k} - t_{j+k}|}{N^j} \geq \frac{|s_k - t_k|}{N^0} = |s_k - t_k| \geq 1 > \delta.$$

Per demostrar (2.), usarem la proposició 2.6 i veurem que  $\sigma$  té una òrbita densa.

Hem de veure que existeix un element de  $\Sigma_N$  tal que la seva òrbita és densa. Per fer-ho, demostrarem que per a tot element  $s \in \Sigma_N$  i per a tot  $\varepsilon > 0$ , existeix un element  $s' \in \Sigma_N$  complint que  $d(\sigma^k(s'), s) < \varepsilon$ .

Considerem  $s' = (0 \ 1 \ 2 \dots N-1 \ 00 \ 01 \ 02 \dots 10 \ 11 \ 12 \dots)$ , és a dir,  $s'$  consisteix en tots els possibles blocs de combinacions de números entre 0 i  $N-1$  de llargada 1, seguidament de llargada 2 i així successivament.

Sigui  $s = (s_0s_1s_2\dots)$  un element qualsevol de  $\sum_N$ , sigui  $\varepsilon > 0$  i triem  $n$  prou gran tal que  $1/N^n < \varepsilon$ . Per construcció, a  $s'$  existeix un bloc de llargada  $n + 1$  tal que els seus elements coincideixen amb  $s_0s_1s_2\dots s_n$ . Suposem que en  $s'$ ,  $s_0$  es troba a la posició  $k$ . Llavors,  $\sigma^k(s')$  i  $s$  coincideixen en els  $n + 1$  primers termes i per la proposició 3.4 tenim que  $d(\sigma^k(s'), s) \leq 1/N^n < \varepsilon$ .

(3.) Veurem que per a tot  $s \in \sum_N$  i per a tot  $\varepsilon > 0$  existeix  $t \in Per(\sigma)$  tal que  $d(s, t) < \varepsilon$ .

Sigui  $s = (s_0s_1s_2\dots) \in \sum_N$ . Considerem els punts periòdics  $t_n = (\overline{s_0s_1\dots s_n})$ . Llavors, per la proposició 3.4, tenim que  $d(s, t_n) < \frac{1}{N^n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ . És a dir, hem vist que  $t_n \rightarrow s$  com volíem veure.  $\square$

## 4 Aplicacions als sistemes dinàmics de variable real

En aquest capítol veurem dos exemples de sistemes dinàmics caòtics. Per demostrar-ho, buscarem conjugacions topològiques entre les funcions donades i la funció shift del capítol anterior. En els dos exemples usarem l'espai de seqüències en dos símbols,  $\Sigma_2$ .

### 4.1 Funció doblament d'angle

En aquesta secció, veurem un primer exemple de com aplicar la (semi)conjugació topològica i la dinàmica simbòlica per a demostrar que una funció és caòtica en un conjunt.

Considerem el cercle unitat  $S^1$ , és a dir,

$$S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Identificant  $\mathbb{R}^2$  amb el pla complex  $\mathbb{C}$  podem reescriure  $S^1$  com

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{e^{i\theta}, 0 \leq \theta < 2\pi\}.$$

La funció *doblament d'angle*  $D : S^1 \rightarrow S^1$  ve donada per  $D(\theta) = 2\theta \pmod{2\pi}$ . És a dir, com el seu nom indica, donat un punt de  $S^1$ ,  $D$  consisteix en doblar el seu angle.

Ara, si considerem  $I/\sim$  on  $I = [0, 1]$  i  $\sim$  denota la relació  $0 \sim 1$ , aleshores  $I/\sim$  és equivalent a  $S^1$ .

Per tant, la funció doblament d'angle és equivalent a la funció  $D : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$  definida per  $D(x) = 2x \pmod{1}$ , és a dir,

$$D(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x < 1/2 \\ 2x - 1 & \text{si } 1/2 \leq x < 1 \end{cases}$$

Observem que aquesta funció també està ben definida en  $I/\sim$ . En efecte, tenim que  $f(0) = 0$  i  $f(1) = 1$  i per tant,  $f(0) = f(1) \pmod{1}$ .

**Teorema 4.1.** *La funció  $D$  és caòtica.*

*Demostració.* Veurem que existeix una semiconjugació  $h$  entre la funció shift  $\sigma$  i la funció  $D$ .

Observem que donar  $x \in [0, 1]$ , podem expressar  $x$  en forma binària i tenim que

$$x = \sum_{i \geq 0} \frac{x_i}{2^{i+1}}$$

on  $x_i = 0$  o  $1$  per a tota  $i$ .

Sigui  $h : \Sigma_2 \rightarrow I/\sim$  la funció definida per  $h((s_0 s_1 s_2 \dots)) = \sum_{i \geq 0} \frac{s_i}{2^{i+1}}$ . Com que  $s_i \in \{0, 1\}$  per a tota  $i$ , tenim que  $\sum_{i \geq 0} \frac{s_i}{2^{i+1}} \leq \sum_{i \geq 0} \frac{1}{2^{i+1}} \leq 1$  i la funció  $h$  està ben definida.

Per l'observació anterior, clarament  $h$  és exhaustiva. Donat un punt  $x$  de  $[0, 1)$ , podem escriure  $x = \sum_{i \geq 0} \frac{s_i}{2^{i+1}}$  amb  $s_i \in \{0, 1\}$ . Aleshores, la seqüència  $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$  pertany a  $\Sigma_2$  i és tal que  $h(s) = x$ .

Hem de veure que  $h$  és contínua. Sigui  $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$  i sigui  $\varepsilon > 0$ . Prenem  $n$  prou gran tal que  $1/2^{n+1} < \varepsilon$  i considerem  $\delta = 1/2^n$ . Sigui  $t = (t_0 t_1 t_2 \dots) \in \Sigma_2$  tal que  $d(s, t) < \delta$ . Per la proposició 3.4 tenim que  $s_i = t_i$  per a tota  $i = 0, 1, \dots, n$ . Aleshores,

$$\begin{aligned} |h(s) - h(t)| &= \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{s_i - t_i}{2^{i+1}} \right| \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^{i+1}} \\ &\leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Això demostra la continuïtat de  $h$ .

Per veure que és una semiconjugació, falta comprovar que es compleix

$$h \circ \sigma = D \circ h.$$

Sigui  $s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma_2$ . Llavors,  $\sigma(s) = (s_1 s_2 s_3 \dots)$  i  $h(\sigma(s)) = \sum_{i \geq 0} \frac{s_{i+1}}{2^{i+1}} = \sum_{i \geq 1} \frac{s_i}{2^i}$ .

D'altra banda,  $h(s) = \sum_{i \geq 0} \frac{s_i}{2^{i+1}}$  i aleshores,

$$\begin{aligned} D(h(s)) &= 2 \sum_{i \geq 0} \frac{s_i}{2^{i+1}} \pmod{1} = \sum_{i \geq 0} \frac{s_i}{2^i} \pmod{1} \\ &= s_0 + \sum_{i \geq 1} \frac{s_i}{2^i} \pmod{1} = \sum_{i \geq 1} \frac{s_i}{2^i}. \end{aligned}$$

Per tant,  $h(\sigma(s)) = D(h(s))$ .

Com que  $\sigma$  és caòtica, pel corol·lari 2.16 tenim que  $D$  és caòtica.  $\square$

En aquest cas tenim que  $h$  semiconjugació i no una conjugació ja que  $h$  no és injectiva. En efecte, si considerem les seqüències  $s = (1000\dots)$  i  $t = (0111\dots)$  tenim que

$$\begin{aligned} h(s) &= \frac{1}{2} + \sum_{n \geq 1} \frac{0}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \\ h(t) &= 0 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

## 4.2 La família quadràtica

En aquesta secció estudiarem la dinàmica de la família de funcions  $Q_c(x) = x^2 + c$  on  $c$  és un paràmetre real. Com hem vist en el primer capítol, tot polinomi quadràtic  $p(x) = ax^2 + bx + c$  amb  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , admet una conjugació topològica de la forma  $h(x) = \alpha x + \beta$ ,  $\alpha \neq 0$ , que el transforma en algun element de la família  $Q_c$ . Per tant, estudiar la dinàmica d'aquesta família és equivalent a estudiar la dinàmica de tot polinomi quadràtic.



Un altre fet que fa important l'estudi d'aquesta família de funcions és que quan n'estudiem la seva dinàmica, observem diferents fenòmens que apareixen en l'estudi d'altres funcions més complicades, fins i tot en funcions no polinòmiques.

Al llarg de la secció veurem que tot i ser una funció força simple, per alguns valors de  $c$  la seva dinàmica és molt complexa. Veurem que per a aquests valors existeix un interval  $I$  tal que les òrbites que marxen d'aquest interval sota alguna iteració de  $Q_c$  tendeixen a infinit. En cas contrari, veurem que el conjunt de punts que mai marxa de  $I$  formen un conjunt tancat, totalment disconnex i perfecte, és a dir, un *conjunt de Cantor*. A més, veurem que la funció  $Q_c$  conjuga amb el shift de Bernoulli definida en la secció 3 i, en conseqüència, que  $Q_c$  és caòtica en  $\Lambda$ .

Primerament, veurem que per a valors de  $c > -2$ , la dinàmica d'aquestes funcions presenta un comportament senzill. Com és habitual, comencem per veure quins són els punts fixos d'aquestes funcions. Aquests són les solucions de l'equació  $x^2 + c = x$ . Resolent, obtenim que

$$p_+(c) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4c})$$

$$p_-(c) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4c})$$

Cal tenir en compte que aquests punts fixos depenen del paràmetre  $c$  però, per simplificar la notació, escriurem  $p_+$  i  $p_-$ .

Notem que si  $1 - 4c < 0$  o, equivalentment,  $c > 1/4$ , la funció  $Q_c$  no té punts fixos. En aquest cas, doncs,  $Q_c$  és una paràbola sense punts fixos i, per tant, la seva gràfica no talla la recta  $y = x$ . Això ens permet veure que totes les òrbites tendeixen a infinit com podem veure en la figura 3.

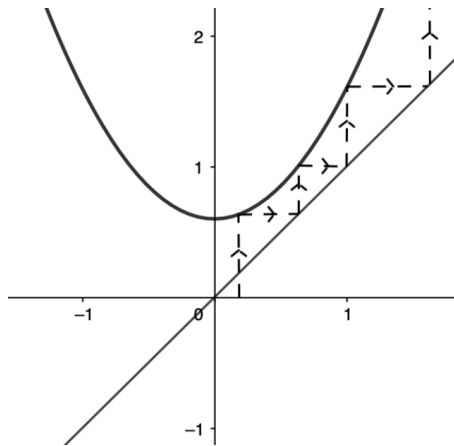


Figura 3: Si  $c > 1/4$ , totes les òrbites tendeixen a infinit.

En cas contrari, tenim que si  $c = \frac{1}{4}$  llavors  $Q_c$  té un únic punt fix  $p_+ = p_- = \frac{1}{2}$  que compleix que  $Q'_c(\frac{1}{2}) = 1$ . Per tant, és un punt fix neutre. Si  $c < 1/4$  tenim dos punts fixos reals i diferents  $p_+$  i  $p_-$ . En aquest cas,  $|Q'_c(p_+)| > 1$  ja que  $\sqrt{1 - 4c} > 0$  i per tant,  $p_+$  és un punt fix repulsor. En el cas de  $p_-$ , hem de trobar quins són els valors de  $c$  que compleixen que  $|Q'_c(p_-)| < 1$ . Per fer-ho, hem de veure quan es compleix

$$-1 < 1 - \sqrt{1 - 4c} < 1$$

i això passa si

$$\frac{-3}{4} < c < \frac{1}{4}.$$

Hem vist, doncs, que  $p_-$  és atractor quan  $-3/4 < c < 1/4$  i repulsor quan  $c < -3/4$ . Si  $c = -3/4$ ,  $Q'_c(p_-) = -1$  i per tant,  $p_-$  és un punt fix neutre.

Resumim tots els resultats anteriors en una proposició.

**Proposició 4.2.** *Sigui  $Q_c = x^2 + c$ . Llavors*

1. *Si  $c > 1/4$ , totes les òrbites tendeixen a infinit.*
2. *Si  $c = 1/4$ ,  $Q_c$  té un únic punt fix neutre  $p = 1/2$ .*
3. *Si  $c < 1/4$ ,  $Q_c$  té dos punts fixos  $p_+$  i  $p_-$ . El punt  $p_+$  és repulsor i el caràcter de  $p_-$  varia en funció de  $c$ .*
  - (a)  *$p_-$  és atractor si  $-3/4 < c < 1/4$ .*
  - (b)  *$p_-$  és neutre si  $c = -3/4$ .*
  - (c)  *$p_-$  és repulsor si  $c < -3/4$ .*

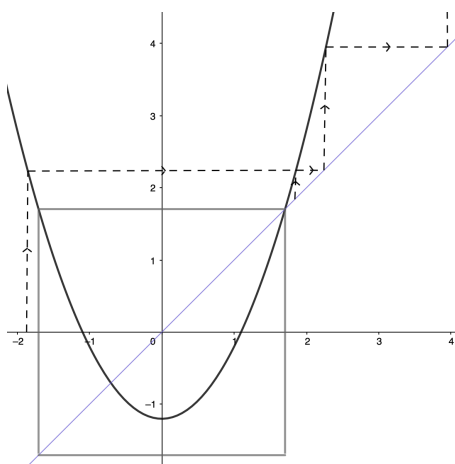


Figura 4: Si  $c \leq 1/4$ , les òrbites de tota  $x < -p_+$  i  $x > p_+$  tendeixen a infinit.

Observem que  $Q_c(-p_+) = \frac{1}{4}(2 - 4c + \sqrt{1 - 4c}) + c = p_+$  i per tant,  $p_-$  és un punt eventualment fix. D'aquí en endavant ens centrarem en estudiar la dinàmica de la família  $Q_c$  en l'interval  $I = [-p_+, p_+]$  ja que, com podem veure en la figura 4, si  $x$  és tal que  $x < -p_+$  o  $x > p_+$ , llavors la seva òrbita tendeix a infinit. En la figura 5, també podem veure que les òrbites de l'interval  $(-p_+, p_+)$  tendeixen al punt fix atractor  $-p_+$  quan  $-3/4 < c < 1/4$ .

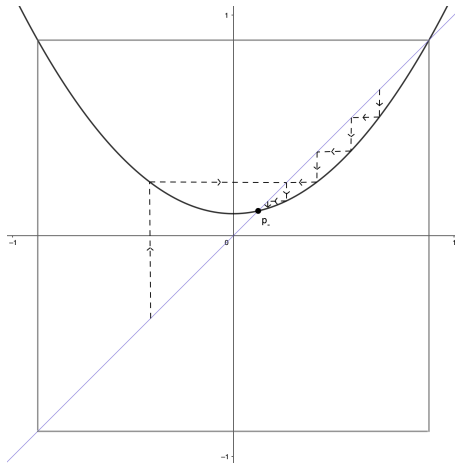


Figura 5: Si  $-3/4 < c < 1/4$ , les òrbites dels punts de  $x$  tal que  $-p_+ < x < p_+$  tendeixen a  $p_-$ .

Ja hem vist què passa amb les òrbites quan el valor del paràmetre  $c$  és major que  $-3/4$ . Ara, ens centrarem en estudiar la dinàmica de la família  $Q_c$  quan  $c < -3/4$ .

Si el valor de  $c$  es més petit que  $-3/4$ , apareix un 2-cicle. Per veure-ho, resollem l'equació  $Q_c^2(x) = x$ . Tenint en compte que  $p_+$  i  $p_-$  són dues solucions d'aquesta equació, resollem i obtenim que les dues solucions restants són

$$q_+(c) = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-4c - 3})$$

$$q_-(c) = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-4c - 3}).$$

Com abans, els denotarem per  $q_+$  i  $q_-$ . Notem que els valors de  $q_+$  i  $q_-$  són reals quan  $c \leq -3/4$ . Si  $c = -3/4$ , tenim que  $q_+ = q_- = -1/2 = p_-$  i no hi ha 2-cicle. Però, si  $c < -3/4$  tenim un 2-cicle en  $q_+$  i  $q_-$  i es compleix que

$$Q'_c(q_+) \cdot Q'_c(q_-) = (-1 + \sqrt{-4c - 3})(-1 - \sqrt{-4c - 3}) = 4c + 4.$$

Per tant, quan  $-5/4 < c < -3/4$  tenim que  $q_+$  i  $q_-$  formen un 2-cicle atractiu i en cas contrari, un 2-cicle repulsor.

Amb la proposició 4.2 i els resultats anteriors hem vist el següent:

**Proposició 4.3.** Si  $c \leq -3/4$ , la família  $Q_c(x) = x^2 + c$  té dos punts fixos repulsors  $p_+$  i  $p_-$  i:

1. Si  $-5/4 < c < -3/4$ ,  $Q_c$  té un 2-cicle atractiu en  $q_+$  i  $q_-$ .
2. Si  $c = -5/4$ ,  $Q_c$  té un 2-cicle neutre.
3. Si  $c < -5/4$ ,  $Q_c$  té un 2-cicle repulsor.

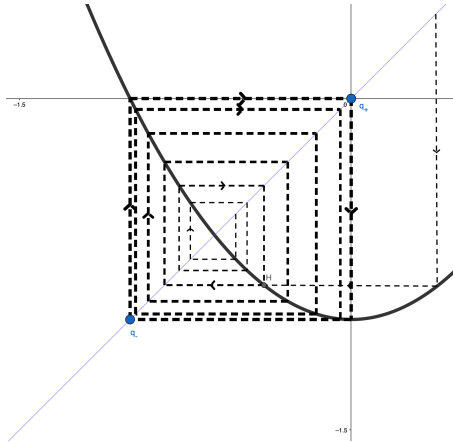


Figura 6: Si  $-5/4 < c < -3/4$ ,  $Q_c$  té un 2-cicle atractiu en  $q_+$  i  $q_-$ .

#### 4.2.1 Bifurcació i transició al caos

Les bifurcacions són canvis qualitius en l'estructura de les òrbites d'un sistema dinàmic en variar el valor d'un paràmetre. En aquest cas, veurem que la funció  $Q_c$  experimenta una bifurcació per al valor del paràmetre  $c = -3/4$ .

**Definició 4.4.** Una família de funcions uniparamètrica  $f_\lambda$  experimenta una bifurcació de doblament de període en el paràmetre  $\lambda = \lambda_0$  si existeix un interval obert i un  $\varepsilon > 0$  tal que:

1. Per a cada  $\lambda$  de l'interval  $[\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon]$ , hi ha un únic punt fix  $p_\lambda$  de  $f_\lambda$  en  $I$ .
2. Per  $\lambda_0 - \varepsilon < \lambda \leq \lambda_0$ ,  $f_\lambda$  no té 2-cicles en  $I$  i  $p_\lambda$  és atractiu (respectivament, repulsor).
3. Per  $\lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + \varepsilon$ , hi ha un únic 2-cicle  $q_1, q_2$  en  $I$  tal que  $f(q_1) = q_2$ . Aquest 2-cicle és atractiu (respectivament, repulsor). A més, el punt fix  $p_\lambda$  és repulsor (respectivament, atractiu).
4.  $q_i \rightarrow \lambda_0$  si  $\lambda \rightarrow \lambda_0$ .

Amb els resultats de la secció 4.2 veiem que la família  $Q_c(x)$  experimenta una bifurcació de doblament de període en el paràmetre  $c = -3/4$ . Observem que en aquest cas el punt fix  $p_-$  passa de ser atractiu a repulsor i que les òrbites dels punts propers a  $p_-$  tendeixen al 2-cicle atractiu format per  $q_+$  i  $q_-$ .

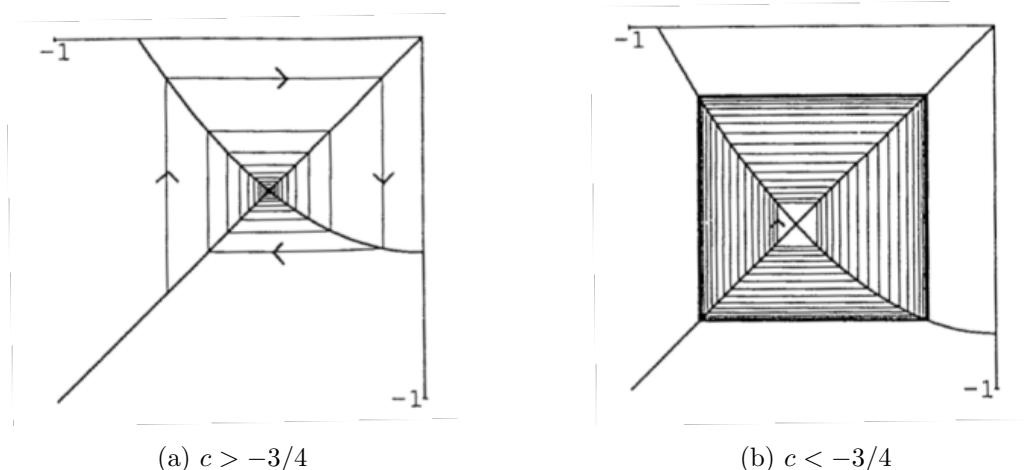


Figura 7: Si  $c > -3/4$ ,  $Q_c$  té un punt fix atractiu. En canvi, si  $c < -3/4$ , el punt fix és repulsor i hi ha un 2-cicle atractiu.

Fins ara hem vist com per valors de  $c > -5/4$ , la dinàmica de la família de funcions  $Q_c$  presenta un comportament força senzill. No obstant, a mesura que el paràmetre  $c$  es va aproximant a  $-2$  la seva dinàmica es va complicant cada vegada més. A continuació donarem una idea molt general de perquè això passa.

Per entendre com la funció  $Q_c$  passa de tenir una dinàmica simple a una dinàmica complexa, estudiarem el diagrama d'òrbita de la família  $Q_c$ . El diagrama d'òrbita intenta capturar la dinàmica de  $Q_c$  per a molts valors de  $c$  diferents i a partir d'aquest, podem veure com és la dinàmica de tota la família.

En el diagrama d'òrbita, l'eix horitzontal és el de valors per el paràmetre  $c$  i el vertical, l'òrbita asimptòtica del punt crític  $x = 0$ .

En el diagrama, si l'òrbita del 0 per  $Q_{c_i}$  és atreta per un punt fix  $p_1$ , dibuixem el punt  $(c_i, p_1)$ . Si aquesta òrbita és atreta per un 2-cicle format pels punts  $q_1$  i  $q_2$ , dibuixem els punts  $(c_i, p_1)$  i  $(c_i, q_2)$ . En general, si l'òrbita és atreta per un  $n$ -cicle, aleshores dibuixem els  $n$  punts en el valor de  $c = c_i$ .

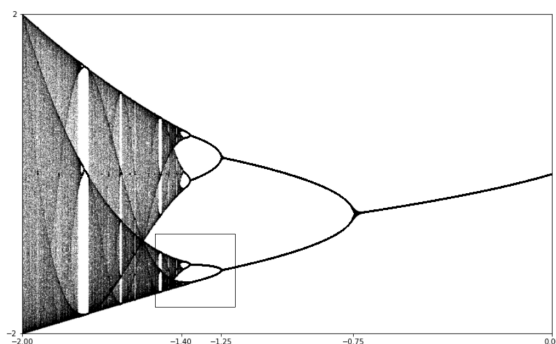


Figura 8: Diagrama d'òrbita de la família  $Q_c(x) = x^2 + c$ .

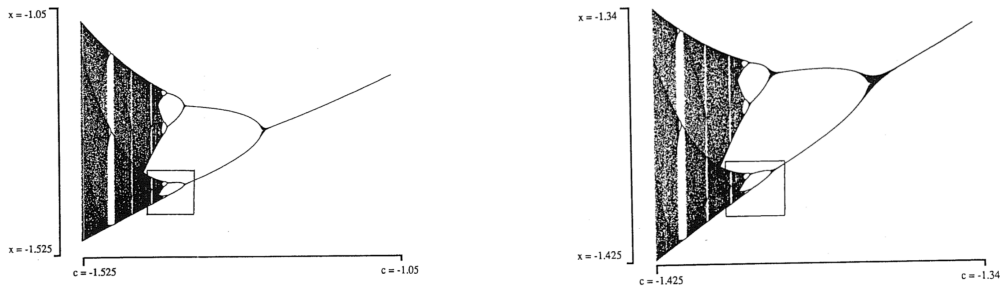


Figura 9: Ampliacions del diagrama de la figura 8.

A mesura que  $c$  va decreixent, veiem com apareix una successió de bifurcacions de doblament de període. Es veu també que els punts periòdics apareixen en ordre de  $1, 2, 4, \dots, 2^n, \dots$

Així, veiem que a mesura que  $c$  s'aproxima a  $-2$  la lectura i interpretació del diagrama de bifurcació es va complicant. Però, quin és el motiu d'aquest fet? El caos. En la següent secció veurem que per a valors de  $c < -2$  la dinàmica de la família  $Q_c$  presenta un comportament caòtic.

#### 4.2.2 Cas $c < -2$

Fins ara hem estudiat el comportament de les òrbites per a valors del paràmetre  $c$  majors que  $-5/4$  i hem vist que la dinàmica en aquests casos presenta un comportament força senzill d'analitzar. Aquest fet canvia quan el paràmetre  $c$  pren valors menors que  $-2$  i l'objectiu d'aquesta secció és estudiar què passa en aquest cas. Suposarem sempre que el valor del paràmetre  $c$  és menor que  $-2$  i denotarem per  $I$  l'interval  $[-p_+, p_+]$ . Notem que, com en el cas anterior,  $p_+$ ,  $p_-$  i  $I$  depenen del valor del paràmetre. També dependran d'aquest valor tots els intervals que aniran sorgint en l'estudi d'aquesta secció. Però, tot i que hauríem d'indexar-ho tot, per simplificar la notació ho evitarem.

Com ja hem comentat, veurem que per a certs valors de  $c$  i un conjunt  $\Lambda$  format pels punts que mai marxen de  $I$ , la funció  $Q_c$  és caòtica. Demostrarem el teorema següent:

**Teorema 4.5.** *Suposem  $c < -(5 + 2\sqrt{5})/4$ . Aleshores, el conjunt definit per*

$$\Lambda = \{x \in I \mid Q_c^n(x) \in I \text{ per a tota } n\}.$$

*és un conjunt de Cantor. A més,  $Q_c : \Lambda \rightarrow \Lambda$  és caòtica.*

**Observació 4.6.** El teorema següent és cert per a valors de  $c < -2$ . El fet de suposar que  $c < -(5 + 2\sqrt{5})/4$  ens permet afirmar que, aleshores, per a tot element  $x$  de  $\Lambda$  es compleix que  $|Q'_c(x)| > 1$  i això ens facilita la demostració.

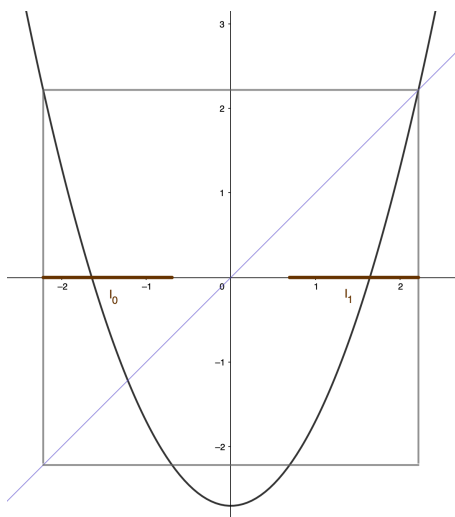


Figura 10: Gràfica de  $Q_c$  quan  $c < -2$ .

En la figura 10 veiem que el conjunt de punts de  $I$  tal que la seva imatge per  $Q_c$  també pertany a  $I$  forma un parell d'intervals tancats. Anomenarem  $I_0$  a l'interval de l'esquerra i  $I_1$  al de la dreta com en la figura. L'interval restant, és un interval obert centrat en el zero i la seva imatge per  $Q_c$  no pertany a  $I$ . Aquest interval coincideix amb el conjunt de punts que queden fora de la caixa i com es pot veure en la figura 11, les òrbites dels seus elements tendeixen a infinit. Denotem per  $A_1$  aquest interval obert.

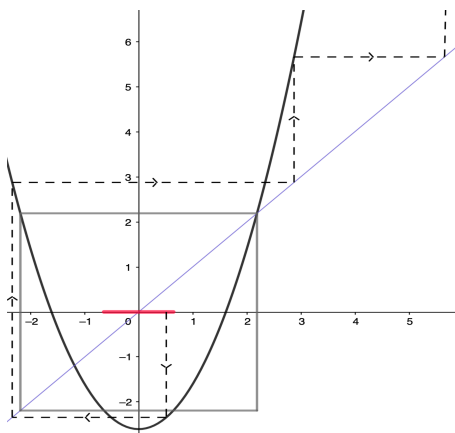


Figura 11: Les òrbites de  $A_1$  tendeixen a infinit.

Hem vist, doncs, que totes les òrbites que marxen de  $I$  sota algun iterat de  $Q_c$  tendeixen a infinit. Per això, d'aquí en endavant ens centrem en les òrbites que mai marxen d'aquest interval.

Tenim que

$$\Lambda = \{x \in I \mid Q_c^n(x) \in I \text{ per a tota } n\}.$$

Observem que aquesta definició és equivalent a dir que  $x \in \Lambda$  si i només si  $x \in Q_c^{-n}(I)$  per a tota  $n$ . En particular,

$$Q_c^{-1}(I) = \{x \in I \mid Q_c(x) \in I\} = I_0 \cup I_1 = I - A_1.$$

Per entendre com és aquest conjunt  $\Lambda$ , construïrem el complementari. En la figura 12a, veiem que hi ha un parell d'interval·ls oberts tals que la imatge per  $Q_c$  dels seus elements pertany a  $A_1$  i, en conseqüència, les seves òrbites tendeixen a infinit. Denotem aquest parell d'interval·ls per  $A_2$ . Aleshores,  $A_2$  és el conjunt de punts que marxen de  $I$  en exactament dos iterats de  $Q_c$ .

En la figura 12b, veiem que hi ha quatre interval·ls oberts tals que si  $x$  és un element d'un d'ells, llavors  $Q_c(x)$  pertany a  $A_2$  i  $Q_c^2(x)$  pertany a  $A_1$  i per tant la seva òrbita tendeix a infinit. Sigui  $A_3$  la unió d'aquests quatre interval·ls. Llavors,  $A_3$  és el conjunt de punts de  $I$  tals que la seva imatge per  $Q_c$  se'n va de  $I$  en tres iterats.

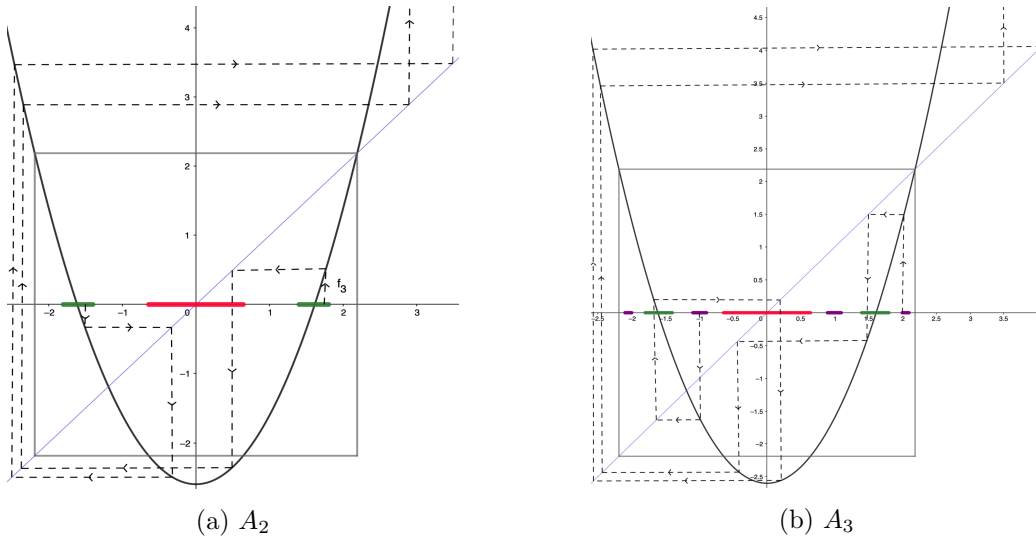


Figura 12: Les òrbites de  $A_2$  (12a) i  $A_3$  (12b) tendeixen a infinit.

Continuant amb el mateix procediment, denotem per  $A_n$  el conjunt de punts que marxen de  $I$  després de  $n$  iterats de  $Q_c$ . Aquest conjunt consta de  $2^{n-1}$  interval·ls oberts. Si  $x$  és un punt tal que la seva òrbita tendeix a infinit, aleshores existeix una  $n$  tal que  $x$  pertany a  $A_n$ . Per tant, el complementari de  $\Lambda$  és la unió dels  $A_n$  per a tota  $n$ .

Per construir  $\Lambda$ , primer traiem  $A_1$  a  $I$  i ens queden dos interval·ls tancats i disjunts,  $I_0$  i  $I_1$ . Llavors, traiem  $A_2$  i, com podem veure en la figura 12a, ens queden quatre interval·ls tancats. A continuació, traiem  $A_3$  i obtenim vuit interval·ls tancats. De la mateixa manera, quan traiem  $A_n$  ens queden  $2^n$  interval·ls tancats. El conjunt  $\Lambda$  és el conjunt de punts que queda en treure tots els  $A_n$ .

A continuació, veurem que  $\Lambda$  és un conjunt de Cantor. Per això, ens cal veure que  $\Lambda$  és tancat, perfecte i que no conté interval·ls. Observem que aquest conjunt és no buit ja que els punts fixos  $p_+$  i  $p_-$  pertanyen a  $I$  i mai marxen. També hi pertany  $-p_+$  ja que és un punt eventualment fix. A més, per construcció tenim que els extrems de cada interval de  $A_n$  també hi pertanyen.

Per veure que és tancat, demostrarem que el complementari és un obert. En efecte,  $\Lambda^c$  està format pels interval·ls  $(-\infty, -p_+)$ ,  $(p_+, +\infty)$  i la unió de tots els  $A_n$ . Com que els interval·ls  $A_n$  són oberts, la seva unió també ho és. Aleshores, tenim que  $\Lambda^c$  és unió



d'oberts i per tant, un obert.

Ara, demostrarem que  $\Lambda$  no conté intervals. Com que  $c < -(5+2\sqrt{5})/4$ , tenim que per a tota  $x \in \Lambda$ , es compleix que  $|Q'_c(x)| > 1$ . Sigui  $A_1 = (-x_1, x_1)$  i considerem  $\mu = Q'_c(x_1)$ . Com que  $Q''_c(x) = 2 > 0$  tenim que  $Q'_c$  és creixent i per tant  $|Q'_c(x)| > |Q'_c(x_1)| = \mu$  per a tota  $x$  tal que  $|x| > |x_1|$ . Suposem que existeix un interval  $J$  tal que  $J \subset \Lambda$  de longitud positiva. Si  $x \in J$ , tenim que  $|Q'_c(x)| > \mu$  ja que  $|x| > |x_1|$ . Aleshores, pel teorema del valor mitjà, per a tota  $x$  i  $y$  de  $J$  es compleix que

$$|Q_c(x) - Q_c(y)| > \mu|x - y|$$

A més, com que  $J \subset \Lambda$ , tenim que  $Q_c^n(J) \subset \Lambda$  per a tota  $n$  i podem repetir el mateix argument que l'anterior. Així, obtenim

$$|Q_c^2(x) - Q_c^2(y)| > \mu|Q_c(x) - Q_c(y)| > \mu^2|x - y|$$

...

$$|Q_c^n(x) - Q_c^n(y)| > \mu^n|x - y|$$

Com que  $\mu > 1$ , quan  $n \rightarrow \infty$  tenim que  $\mu^n \rightarrow \infty$ . Per tant, la longitud de l'interval  $Q_c^n(J)$  tendeix a infinit però sabem que  $Q_c^n(J) \subset I$  i  $I$  té longitud finita la qual cosa és una contradicció. Per tant,  $\Lambda$  no conté intervals.

Sabem que  $\Lambda = I \setminus \cup_{n \geq 1} A_n$ . Definim  $S_k = I \setminus \cup_{n=1}^k A_n$ . Per construcció,  $S_k$  consta de  $2^k$  intervals tancats i disjunts. Considerem  $p \in \Lambda$ . Aleshores,  $p \in S_k$  per a alguna  $k \geq 1$ . Sigui  $K_j$  la component de  $S_k$  que conté  $p$  i considerem  $K_j \cap S_{k+1}$ . Aquesta intersecció consta de 2 intervals tancats i disjunts. Ara, sigui  $q_j$  un dels extrems de l'interval de  $K_j \cap S_{k+1}$  que no conté  $p$ . Aleshores,

1.  $q_j \neq p$
2.  $q_j \in \Lambda$  (tots els extrems dels intervals de  $S_i$  pertanyen a  $\Lambda$ )
3.  $|p - q_j| < \text{long}(K_j)$ .

Sigui  $K_{j+1}$  la component de  $K_j \cap S_{k+1}$  que conté  $p$  i considerem  $K_{j+1} \cap S_{k+2}$  que consta altra vegada de 2 intervals tancats i disjunts. Com abans, prenem  $q_{j+1}$  un dels extrems de l'interval de  $K_{j+1} \cap S_{k+2}$  que no conté  $p$ . Aleshores,  $q_{j+1}$  també compleix els punts 1., 2. i 3. anteriors. Seguint amb aquest procediment obtenim una successió de punts  $(q_j)_j$  de  $\Lambda$ ,  $q_j \neq p$ , tal que  $q_j$  convergeix a  $p$  ja que la longitud dels intervals  $K_j$  tendeix a 0 (ho veurem més endavant). Per tant, tot punt de  $\Lambda$  és un punt límit i  $\Lambda$  és un conjunt perfecte.

Ja hem vist que  $\Lambda$  és un conjunt de Cantor. Ens falta veure que  $Q_c$  és caòtica en aquest conjunt. Per fer-ho, demostrarem que existeix una conjugació topològica entre la funció  $Q_c$  definida en aquest conjunt  $\Lambda$  i la funció  $\sigma$ .

Amb els resultats anteriors, podem afirmar que si  $x$  és un punt de  $\Lambda$ , aleshores  $Q_c^n(x)$  es troba en  $I_0 \cup I_1$  per a tota  $n$ . Com que aquests dos intervals són disjunts,  $Q_c^n(x) \in I_0$  o  $Q_c^n(x) \in I_1$  però no als dos a la vegada. Per tant, podem definir la funció següent:

**Definició 4.7.** Anomenem funció itinerari a la funció  $it : \Lambda \rightarrow \sum_2$  definida per

$$it(x) = (s_0 s_1 s_2 \dots)$$

on  $s_i = 0$  si  $Q_c^i(x) \in I_0$  i  $s_i = 1$  si  $Q_c^i(x) \in I_1$ .

**Teorema 4.8.** *Suposem que  $c < -(5 + 2\sqrt{5})/4$ . Aleshores,  $it$  és un homeomorfisme.*

*Demostració.* Provem que  $it$  és injectiva. Siguin  $x$  i  $y$  tals que  $x \neq y$  i suposem que  $it(x) = it(y)$ . Aleshores, per a tota  $n$ ,  $Q_c^n(x)$  i  $Q_c^n(y)$  viuen en el mateix subinterval  $I_0$  o  $I_1$ . Com hem vist anteriorment, sabem que  $Q_c$  és injectiva en  $I_0$  i en  $I_1$  i que existeix una constant  $\mu$  tal que  $|Q_c'(x)| > \mu > 1$  per a tota  $x \in I_0 \cup I_1$ .

Considerem l'interval  $[x, y]$ . Per a cada  $n \geq 0$ ,  $Q_c^n$  envia aquest interval a un únic interval  $[Q_c^n(x), Q_c^n(y)]$  contingut en  $I_0$  o en  $I_1$ . Però, en demostrar que  $\Lambda$  no conté intervals, hem vist que  $|Q_c^n(x) - Q_c^n(y)| \geq \mu^n |x - y|$  i com que  $\mu^n \rightarrow \infty$  tenim una contradicció. Per tant,  $x = y$ .

Per veure que  $it$  és exhaustiva, per a tota  $s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \in \sum_2$  definim

$$I_{s_0 s_1 \dots s_n} = \{x \in I \mid x \in I_{s_0}, Q_c(x) \in I_{s_1}, \dots, Q_c^n(x) \in I_{s_n}\}.$$

Usant que

$$Q_c^{-n}(J) = \{x \in I \mid Q_c^n(x) \in J\}$$

podem definir  $I_{s_0 s_1 \dots s_n}$  com

$$\begin{aligned} I_{s_0 s_1 \dots s_n} &= \{x \in I \mid x \in I_{s_0}, x \in Q_c^{-1}(I_{s_1}), \dots, x \in Q_c^{-n}(I_{s_n})\} \\ &= I_{s_0} \cap Q_c^{-1}(I_{s_1}) \cap \dots \cap Q_c^{-n}(I_{s_n}). \end{aligned}$$

Sabem que si  $A$  i  $B$  són dos intervals, llavors

$$Q_c^{-1}(A \cap B) = Q_c^{-1}(A) \cap Q_c^{-1}(B).$$

Per tant,

$$\begin{aligned} I_{s_0 s_1 \dots s_n} &= I_{s_0} \cap Q_c^{-1}(I_{s_1} \cap Q_c^{-1}(I_{s_2}) \cap \dots \cap Q_c^{-n+1}(I_{s_n})) \\ &= I_{s_0} \cap Q_c^{-1}(I_{s_1 s_2 \dots s_n}). \end{aligned}$$

Observem que si  $J \subset I$ ,  $Q_c^{-1}(J)$  denota la preimatge de  $J$  en  $I$ . A més, si  $J$  és tancat tenim que  $Q_c^{-1}(J)$  són dos intervals tancats, un inclòs en  $I_0$  i l'altre inclòs en  $I_1$ .

Com que  $s_j = 0$  o  $1$  per a cada  $j$ , l'interval  $I_{s_j}$  és o bé  $I_0$  o bé  $I_1$  i per tant, un interval tancat. Per inducció, suposem que  $I_{s_1 \dots s_n}$  és un interval tancat. Aleshores,

$$I_{s_0} \cap Q_c^{-1}(I_{s_1 \dots s_n}) = I_{s_0 s_1 \dots s_n}$$

és un interval tancat. D'altra banda, tenim que

$$I_{s_0 \dots s_n} = I_{s_0 \dots s_{n-1}} \cap Q_c^{-n}(I_{s_n}) \subset I_{s_0 \dots s_{n-1}}.$$

Considerem la intersecció

$$\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 s_1 \dots s_n}. \tag{1}$$

Pel teorema dels intervals encaixats tenim que és no buida. De fet, veurem que és un únic punt.

Suposem que  $J = [a, b]$  és un subinterval de  $Q_c^{-n}(I)$ . Aleshores,  $J \subset I_0 \cup I_1$ . Com que  $Q'_c$  només s'anul·la en el zero i aquest no pertany a  $I_0 \cup I_1$ ,  $Q_c$  és monòtona en cada un d'aquests intervals. Llavors,  $Q_c(J) = [Q_c(a), Q_c(b)]$  i pel teorema del valor mitjà tenim

$$|Q_c(a) - Q_c(b)| > \mu|a - b|$$

on  $\mu$  és el mateix valor utilitzant en veure que  $\Lambda$  no conté intervals. Aplicant successivament el teorema del valor mitjà obtenim que

$$|Q_c^n(a) - Q_c^n(b)| > \mu^n|a - b|,$$

és a dir,

$$|a - b| < \mu^{-n}|Q_c^n(a) - Q_c^n(b)|.$$

Com que  $\mu > 1$ , tenim que si  $n \rightarrow \infty$ , aleshores  $\text{long}(J) \rightarrow 0$ . Per definició,  $I_{s_0 s_1 \dots s_n} \subset Q_c^{-n}(I)$ . Per tant,  $\text{long}(I_{s_0 s_1 \dots s_n}) \rightarrow 0$  quan  $n \rightarrow \infty$  i la intersecció (1) és un únic punt.

Sigui doncs  $x = \bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 s_1 \dots s_n}$ . Clarament,  $x \in \Lambda$ . Aleshores,  $x \in I_{s_0}$ ,  $Q_c(x) \in I_{s_1}$ , i així successivament. Per tant,  $it(x) = (s_0 s_1 s_2 \dots)$  i tenim que  $it$  és exhaustiva.

Ara, volem veure que  $it$  és contínua. Sigui  $x \in \Lambda$  i  $it(x) = (s_0 s_1 s_2 \dots)$ . Sigui  $\varepsilon > 0$  i prenem  $n$  prou gran tal que  $1/2^n < \varepsilon$ . Considerem totes les possibles combinacions de  $t_0 t_1 \dots t_n$  i per a cada una d'elles, l'interval  $I_{t_0 t_1 \dots t_n}$ . Llavors, tenim  $2^{n+1}$  intervals disjunts tals que la seva unió conté  $\Lambda$  i  $I_{s_0 s_1 \dots s_n}$  n'és un d'ells. Prenem  $\delta$  prou petit tal que l'interval de longitud  $2\delta$  i centrat en  $x$  estigui inclòs en  $I_{s_0 s_1 \dots s_n}$ . Aleshores, si  $y$  és tal que  $y \in \Lambda$  i  $|x - y| < \delta$ , tenim que  $y \in I_{s_0 s_1 \dots s_n}$ . Per tant,  $it(x)$  i  $it(y)$  coincideixen en els primers  $n + 1$  termes i per la proposició 3.4 tenim que

$$d(it(x), it(y)) \leq 1/2^n < \varepsilon.$$

Finalment, hem de demostrar que  $it^{-1}$  és contínua. De la demostració que  $it$  és injectiva i exhaustiva, deduïm que  $it^{-1} : \sum_2 \rightarrow \Lambda$  és la funció definida per  $it^{-1}(s) = \bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 s_1 \dots s_n}$

on  $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$ . Sigui  $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$  i  $\varepsilon > 0$ . Prenem  $n$  prou gran tal que la longitud de l'interval  $I_{s_0 s_1 \dots s_n}$  sigui més petita que  $\varepsilon$ . Agafem  $\delta = 1/2^n$  i sigui  $t = (t_0 t_1 t_2 \dots) \in \sum_2$  tal que  $d(s, t) < \delta$ . Aleshores, es compleix que  $s_i = t_i$  per a tota  $i \leq n$ . Per definició, tenim que  $it^{-1}(s)$  i  $it^{-1}(t)$  pertanyen a  $I_{s_0 s_1 \dots s_n}$  i per tant,

$$|it^{-1}(s) - it^{-1}(t)| \leq \text{long}(I_{s_0 s_1 \dots s_n}) < \varepsilon.$$

□

Observem que si  $x$  és un element de  $\Lambda$  amb itinerari  $it(x) = (s_0 s_1 s_2 \dots)$ , aleshores  $x \in I_{s_0}$ ,  $Q_c(x) \in I_{s_1}$ ,  $Q_c^2(x) \in I_{s_2}$ , etc. És a dir,  $Q_c^n(x) \in I_{s_n}$  per a tota  $n \geq 1$ . Per tant,

$$it(Q_c(x)) = (s_1 s_2 s_3 \dots) = \sigma(it(s_0 s_1 s_2 \dots))$$

i tenim que  $it$  és una conjugació topològica entre  $Q_c : \Lambda \rightarrow \Lambda$  i  $\sigma : \sum_2 \rightarrow \sum_2$ . Llavors, pels resultats dels teoremes 3.8 i 2.11 tenim que  $Q_c$  és caòtica en  $\Lambda$ .

## 5 Aplicacions als sistemes dinàmics de variable complexa

En aquest capítol, com en gran part de l'anterior, ens centrarem en estudiar la dinàmica de la família de funcions  $Q_c$  però en aquest cas en el pla complex  $\mathbb{C}$ , és a dir, considerarem  $Q_c(z) = z^2 + c$ . De la mateixa manera que en el cas real, tenim que estudiar la dinàmica d'aquests polinomis és equivalent a estudiar la de qualsevol altre polinomi quadràtic ja que existeix una conjugació topològica entre ells.

L'objectiu principal és veure que per a alguns valors de  $c$  existeix un conjunt de Cantor en el qual  $Q_c$  és caòtica. La construcció d'aquest conjunt serà similar a la que hem fet en el cas real. No obstant, per a demostrar que efectivament és un conjunt de Cantor necessitarem introduir un seguit de definicions i resultats.

### 5.1 Conjunts de Julia i Fatou

Com ja hem dit, l'objectiu és estudiar el comportament de totes les òrbites del pla complex per a la funció  $Q_c(z) = z^2 + c$ . Per començar, podem trobar les conques d'atracció dels punts periòdics atractors, si n'hi ha.

Per tenir una idea general, suposem que tenim una funció  $f$  amb dos punts fixos atractors. Com ja sabem, per a cada un d'ells existeix un entorn els punts del qual tendeixen al punt fix. Òbviament, hi ha un conjunt frontera que els separa. Però, com es comporten els punts d'aquesta frontera? És clar que les òrbites d'aquests punts no poden aproximar-se a cap dels punts fixos, en cas contrari no serien punts de la frontera. A més, tot entorn d'un punt de la frontera ha de contenir punts d'una conca i de l'altra i per tant que tendeixen a un dels dos punts fixos. Per tant, podem dividir el pla en punts que tenen una dinàmica simple i els punts de la frontera. D'aquí sorgeixen les definicions de conjunt de Julia i Fatou.

En aquesta secció, donarem dues definicions del conjunt de Julia i Fatou, una definició general per a funcions holomorfes i l'altra pel cas concret de polinomis. Tot i així, veurem que aquestes dues definicions són equivalents quan la funció en qüestió és un polinomi.

#### 5.1.1 Famílies normals. Definició general dels conjunts de Julia i Fatou

En aquesta secció, introduïrem una definició general del conjunt de Julia i Fatou vàlida per a tota funció holomorfa del pla complex. Per fer-ho, primer definirem el concepte de *convergència uniforme sobre compactes* per a una successió de funcions holomorfes.

**Definició 5.1.** Diem que una successió de funcions definides a  $\mathbb{C}$ ,  $\{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , convergeix a  $f$  uniformement sobre compactes si per a tot  $K \subset \mathbb{C}$  compacte i per a tot  $\varepsilon > 0$  existeix un valor  $N = N(K, \varepsilon)$  tal que  $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$  per a tot  $z \in K$  si  $n \geq N$ .

Com abans, considerem la funció  $Q_0(z) = z^2$ . Hem vist que si  $|z| < 1$ , la successió d'iterats de  $f$  convergeix a 0 i, si  $|z| > 1$ , convergeix a infinit. A més, tots els punts d'un entorn de  $z$  tenen el mateix comportament. És a dir, si  $z \notin S^1$ , la successió d'iterats  $\{Q_0^n(z)\}$  convergeix uniformement sobre compactes de  $\mathbb{U}$  a la funció  $f \equiv 0$  o bé a infinit.

Però, si  $z \in S^1$  i  $U$  és un entorn de  $z$ , aleshores  $U$  conté punts de l'interior del disc unitat i punts de l'exterior. Per tant, cap parcial de  $\{Q_0^n(z)\}$  pot convergir uniformement a una funció holomorfa.

**Definició 5.2.** Sigui  $\mathcal{F} = \{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una família de funcions holomorfes definides en un domini  $U$ . Diem que  $\mathcal{F}$  és una família normal en  $U$  si tota successió de funcions de  $\mathcal{F}$  té una parcial convergent uniformement sobre compactes de  $U$  a una funció holomorfa o bé a infinit. Diem que  $z_0$  és un punt normal de  $f$  si existeix un entorn obert  $U$  de  $z_0$  tal que la família d'iterats  $\{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  és una família normal en  $U$ .

Ja podem definir els conceptes de conjunt de Julia i de Fatou per a una funció holomorfa arbitrària.

**Definició 5.3.** Definim el conjunt de Fatou d'una funció holomorfa  $f$ ,  $F(f)$ , com el conjunt de punts normals de  $f$ . El conjunt de Julia,  $J(f)$ , és el complementari del conjunt de Fatou, en altres paraules,  $J(f)$  és el conjunt de punts que no són normals de  $f$ .

A la pràctica, a partir de la definició és complicat demostrar si un punt és normal o no. Per això, utilitzarem un resultat que ens permet comprovar si una família de funcions és normal o no ho és, el Teorema de Montel.

**Teorema 5.4.** Sigui  $\mathcal{F} = \{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la successió d'iterats d'una funció holomorfa  $f$  definida en un domini  $U$ . Si existeixen  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq b$ , tals que  $a, b \notin \bigcup_{n \geq 0} f^n(U)$  aleshores  $\mathcal{F}$  és una família normal en  $U$ .

**Corol·lari 5.5.** Sigui  $f$  una funció holomorfa i  $z_0 \in J(f)$ . Sigui  $U$  un entorn de  $z_0$ . Aleshores,  $W = \bigcup_{n \geq 0} f^n(U)$ , omet, com a molt, un punt de  $\mathbb{C}$ . Aquest punt s'anomena punt excepcional i no pertany al conjunt de Julia.

*Demostració.* Si la família dels iterats evités 2 punts o més, aleshores tindríem que  $z_0$  és un punt normal de  $f$  la qual cosa és una contradicció ja que  $z_0 \in J(f)$ .

Falta veure la segona part. Suposem que  $w$  és un punt excepcional, és a dir,  $w$  no pertany a  $\bigcup_{n \geq 0} f^n(U)$ . Per definició,  $f(W) \subset W$ . Per tant, si  $f(z) = v$  i  $v \notin W$ ,  $z \notin W$  però com que  $\mathbb{C} \setminus W$  és com a molt un punt, tenim que  $z = v$ . Aleshores,  $f$  és un polinomi de grau  $d$  tal que la única solució de  $f(z) - v = 0$  és  $v$ . Per tant,  $f(z) - v = \lambda(z - v)^n$  per alguna constant  $\lambda$ . Si prenem  $z$  prou proper a  $v$ , aleshores  $f^k(z) - v$  tendeix a 0 quan  $k$  tendeix a infinit. Per tant,  $v$  és un punt normal i conseqüentment no pertany al conjunt de Julia de  $f$ .  $\square$

Una propietat fonamental dels conjunts de Julia és que és un conjunt *totalment invariant*, és a dir, que si  $z$  és un punt de  $J(f)$  aleshores tota la seva òrbita  $\{f^n(z)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  també pertany a aquest conjunt. Com que el conjunt de Fatou  $F(f)$  és el complementari del conjunt de Julia, si  $J(f)$  és invariant aleshores també ho és  $F(f)$ .

**Proposició 5.6.** El conjunt de Julia és totalment invariant.

*Demostració.* Demostrarem que el conjunt de Fatou ho és. Sigui  $U$  un entorn d'un punt  $z$  amb  $U \subset F(f)$ . Aleshores,  $\{f^n\}$  és normal en  $U$  i existeix una parcial  $\{f^{n_j}\}$  convergent en  $U$ . Com que  $f$  és holomorfa,  $f(U)$  és un conjunt obert i la successió parcial  $\{f^{n_j-1}\}_{j \geq 0}$  és convergent en  $f(U)$ . Per tant,  $f(z)$  té un entorn,  $f(U)$ , en el qual és normal, és a dir,  $f(z) \in F(f)$ . Repetint el mateix argument per a  $\{f^n\}$  per a tota  $n$  veiem que  $f(F) = F$ . Com que  $f^{-1}(U)$  és obert, per veure que  $f^{-1}(F) = F$  considerem la parcial  $\{f^{n_j+1}\}_{j \geq 0}$  i fent el mateix que en el cas anterior, obtenim que  $f^{-1}(F) = F$ .  $\square$

### 5.1.2 Conjunts de Julia i Fatou per a polinomis

Per entendre millor la definició dels conjunts de Julia i Fatou per a polinomis, començarem amb un exemple particular de la família de funcions  $Q_c(z) = z^2 + c$ . Considerem la funció  $Q_0(z) = z^2$ . En el capítol 2.1 hem vist els resultats següents,

1. Si  $|z| < 1$  aleshores  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_0^n(z) = 0$ .
2. Si  $|z| > 1$  aleshores  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_0^n(z) = \infty$ .
3. Si  $|z| = 1$  aleshores només sabem que es compleix que  $|Q_0^n(z)| = 1$  per a tota  $n \in \mathbb{Z}$ .

Si considerem el pla complex més el punt de l'infinit, el que rep el nom d'*esfera de Riemann* i es denota per  $\widehat{\mathbb{C}}$ , tenim que la funció  $Q_0$  té dos punts fixos atractors,  $z = 0$  i  $z = \infty$ , amb conques d'atracció determinades per

$$A(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \text{ i,}$$

$$A(\infty) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}.$$

Veiem que la frontera entre les dues conques és el conjunt  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ . És a dir,  $S^1$  és el conjunt de punts que limita entre els punts que tenen òrbita acotada i els que tendeixen a infinit.

Observem que per a tot  $z$  de  $S^1$ ,  $z = e^{i\theta}$ , tenim que  $Q_0(z) = e^{2i\theta}$ . És a dir, la funció  $Q_0$  consisteix en doblar el seu angle. Per tant, la dinàmica de  $Q_0(z) = z^2$  sobre  $S^1$  és equivalent a la de la funció de doblament d'angle,  $D$ , de la secció 4.1 que, com ja hem demostrat, té dinàmica caòtica.

**Definició 5.7.** Sigui  $P$  un polinomi de grau  $d \geq 2$ . Definim el conjunt ple de Julia del polinomi  $P$ ,  $K_P$ , com el conjunt de tots els punts que tenen òrbita acotada, és a dir,

$$K_P = \{z \in \mathbb{C} \mid P^n(z) \nrightarrow \infty\} = \mathbb{C} \setminus A(\infty).$$

Definim el conjunt de Julia,  $J_P$ , com la frontera de  $K_P$ . Per últim, definim el conjunt de Fatou,  $F_P$ , com el complementari del conjunt de Julia, és a dir,  $F_P = \mathbb{C} \setminus J_P$ .

En el cas del polinomi  $Q_c$  denotarem el conjunt ple de Julia per  $K_c$ , el conjunt de Julia per  $J_c$  i el conjunt de Fatou per  $F_c$ . Pel cas particular estudiat anteriorment, tenim

$$K_c = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$$

$$J_c = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Tornant al cas  $Q_0$ , tenim que el conjunt de Julia és la circumferència  $S^1$  i el conjunt de Fatou és la unió de les conques d'atracció dels punts  $z = 0$  i  $z = \infty$ .

Aquestes definicions coincideixen amb les de la secció anterior quan  $f$  és un polinomi. Per veure-ho, demostrarem el resultat següent.

**Proposició 5.8.** *Sigui  $f$  un polinomi. Un punt  $z \in \mathbb{C}$  no és normal si i només si  $z \in \partial K_c$ .*

*Demostració.* Demostrem la implicació cap a l'esquerra. Sigui  $z \in \partial K_c$  i  $U$  un entorn de  $z$ . Per definició,  $U$  conté punts amb òrbita acotada i punts les òrbites dels quals tendeixen a infinit. Llavors, la funció límit de la successió d'iterats  $\{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  no seria contínua i per tant  $z$  no és normal.

Per demostrar l'altra implicació, suposarem que  $z \notin \partial K_c$  i veurem que aleshores  $z$  és normal. Sigui  $U$  un entorn de  $z$ . Tenim dos casos. Si  $U \subset A(\infty)$  la família d'iterats  $\{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  definida en  $U$  ha d'ometre tots els punts periòdics ja que no pertanyen a la conca d'atracció d'infinit. Com que per a cada  $n$  tenim punts periòdics, existeixen infinits punts periòdics. Aplicant el Teorema de Montel obtenim que  $\{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  és normal en  $z$ . D'altra banda, si  $U \subset \text{int}(K_c)$  la família  $\{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  definida en  $U$  ha d'ometre tots els punts de  $A(\infty)$  (que és no buida ja que  $f$  és un polinomi). Aplicant el Teorema de Montel, obtenim que  $\{f^n\}$  és normal en  $z$ .  $\square$

## 5.2 Propietats del conjunt de Julia

A continuació veurem un seguit de propietats del conjunt de Julia. Tot i que la majoria les demostrarem a partir de la definició general i són vàlides per a qualsevol funció holomorfa, en aquesta secció les demostrarem pel cas en què  $f$  sigui un polinomi. És a dir, suposarem en tot moment que la funció  $f$  és un polinomi de grau  $d \geq 2$ .

**Proposició 5.9.**  *$J(f)$  és compacte.*

*Demostració.* Primer veurem que  $J(f)$  és tancat. Observem que, per definició,

$$F(f) = \mathbb{C} \setminus J(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{existeix un obert } U \text{ amb } z \in U \text{ i } \{f^n\} \text{ normal en } U\}$$

que és un obert. Per tant,  $F(f)$  és un tancat (és el complementari).

Demostrem que és acotat. Com que  $f$  és un polinomi de grau major o igual que dos, existeix una  $r > 0$  tal que  $|f(z)| \geq 2$  si  $|z| \geq r$ . Aleshores, si  $|z| > r$ ,  $|f^n(z)| > r^n|z|$  i per tant,  $f^n(z)$  convergeix uniformement a infinit en el conjunt  $V = \{z \mid |z| > r\}$ . Per definició,  $\{f^n\}$  és normal en  $V$  la qual cosa implica que  $c \subset F(f) = \mathbb{C} \setminus J(f)$ . Per tant,  $J(f) \subset \overline{B_r(0)}$  i és compacte.  $\square$

**Proposició 5.10.**  *$J(f) \neq \emptyset$ .*

*Demostració.* Suposem el contrari. Aleshores, la família  $\{f^n\}_{n \geq 0}$  és normal en tot punt  $z \in \mathbb{C}$ . Per tant, per a tota  $r > 0$ ,  $\{f^n\}$  és normal en  $B_r(0)$ . Prenent  $r$  prou gran, podem

assegurar que  $B_r(0)$  conté un punt que, sota iteració, tendeix a infinit i un altre punt fix de  $f^n$  per a cada  $n$ . Llavors, cap parcial de  $\{f^n\}$  pot convergir uniformement a una funció holomorfa o a infinit en compactes de  $B_r(0)$  contradient que  $\{f^n\}$  és normal.  $\square$

**Proposició 5.11.**  $J(f) = J(f^k)$  per a tota  $k$ .

*Demostració.* Demostrarem la igualtat pel seu complementari, és a dir, veurem que  $F(f) = F(f^n)$  per a tota  $n$ .

Suposem que  $\{f^n\}$  és normal en  $U$ , aleshores tota parcial  $\{f^{n_j}\}_{j \geq 0}$  convergeix a una funció holomorfa  $g$  en  $U$ . Llavors,  $\{f^{n_j k}\} = \underbrace{\{f^{n_j} \circ \dots \circ f^{n_j}\}}_{k \text{ vegades}}$  convergeix a  $g^k$  en  $U$ . Això

demostra  $F(f) \subset F(f^n)$ .

Observem que si  $\{f^n\}$  convergeix uniformement en  $K$  compacte, aleshores també ho fa  $\{h \circ f^n\}$  per a tot polinomi  $h$ . Ara, suposem que  $\{f^{nk}\}$  és normal en un conjunt obert  $U$ . Aleshores,  $\{f^{nk+r}\}$  per a valors de  $r = 0, 1, \dots, k-1$  també ho és. A més, tota parcial de  $\{f^n\}$  conté una parcial de  $\{f^{nk+r}\}$  per algun valor de  $0 \leq r \leq k-1$  que té una parcial convergent en compactes de  $U$ . Per tant  $\{f^n\}$  és normal i tenim que  $F(f^n) \subset F(f)$ .  $\square$

Amb el resultat anterior i el corol·lari 5.5 hem vist que les imatges d'un entorn de qualsevol punt de  $J(f)$  ha de cobrir qualsevol punt no excepcional. Si apliquem aquest fet al conjunt  $J(P)$ , veiem que les antiimatges de qualsevol punt de  $J(P)$  han de ser denses en  $J$ . Per tant,

**Corol·lari 5.12.** *Si sigui  $z_0 \in J(f)$ . Aleshores,*

$$J(f) = \text{clausura} \left( \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(z_0) \right).$$

Un altre resultat que es pot deduir de la proposició 5.6 i el corol·lari 5.5 és la següent

**Corol·lari 5.13.**  $J(f)$  té interior buit.

*Demostració.* Suposem que no. Aleshores, existeix un obert  $U$  inclòs en  $J(f)$ . Com que  $f$  és totalment invariant, tenim que  $\bigcup_{n \geq 0} f^n(U) \subset J(f)$ . Pel corol·lari 5.5, tenim que  $\bigcup_{n \geq 0} f^n(U) = \mathbb{C} \setminus \{a\}$ , on  $a$  és un punt excepcional i per tant  $\mathbb{C} \setminus \{a\} \subset J(f)$ . Però  $J(f)$  és acotat i tenim una contradicció.  $\square$

**Proposició 5.14.** *El conjunt de Julia és un conjunt perfecte, és a dir, tancat i sense punts aïllats.*

*Demostració.* Com que ja sabem que  $J(f)$  és tancat, falta veure que no té punts aïllats. Sigui  $z_0 \in J(f)$  i sigui  $U$  un entorn de  $z_0$ . Veurem que  $U$  conté algun altre punt de  $J(f)$ . Considerarem tres casos.

1.  $z_0$  no és fix ni periòdic. Pel corol·lari 5.12 i sabent que  $J(f)$  és totalment invariant, tenim que  $U$  conté un punt de  $f^{-n}(U) \subset J(f)$  per a alguna  $n$  i ha de ser diferent de  $z_0$ .



2.  $z_0$  és un punt fix. Si  $f(z) = z_0$  només té per solució  $z_0$ , igual que en la demostració del corol·lari 5.5 tenim que  $z_0 \notin J(f)$ . Per tant, existeix un punt  $z_1$  diferent de  $z_0$  tal que  $f(z_1) = z_0$  i pel corol·lari 5.12,  $U$  conté un punt de  $f^{-n}(z_1)$  per a algun valor de  $n$ . Aquest punt és del conjunt de Julia (per la invariància) i és diferent de  $z_0$  ja que  $f^k(z_0) = z_0$ .
3.  $z_0$  és un punt periòdic de període  $p > 1$ . Ja sabem que  $J(f) = J(f^p)$ . Aplicant 2. a  $f^p$  tenim que  $U$  conté punts de  $J(f^p) = J(f)$  diferent de  $v$ .

□

Ja hem vist que el conjunt de Julia d'un polinomi és tancat i perfecte. En particular, doncs,  $J(Q_c) = J_c$  és tancat i perfecte. De fet, veurem que  $J_c$  és un conjunt de Cantor. Per veure que és un conjunt totalment disconnex enunciaré un resultat conegut com *dicotomia fonamental* però no el demostrarem.

Hem vist que si  $c = 0$ , aleshores el seu conjunt ple de Julia és el disc unitat i que si  $|c| > 2$ , com hem avançat,  $J_c$  és un conjunt de Cantor. En el primer cas tenim que  $J_c$  és un conjunt connex i en el segon  $J_c$  és un conjunt totalment disconnex. Es veu doncs que els conjunts de Julia i Fatou del polinomi  $Q_c$  experimenten canvis topològics en variar el valor del paràmetre  $c$ . De fet, veurem que la dicotomia fonamental estableix que només hi ha aquestes dues opcions per als conjunts plens de Julia dels polinomis de la família  $Q_c$ .

**Teorema 5.15. (Dicotomia fonamental)** *Sigui  $Q_c(z) = z^2 + c$ . Aleshores, només existeix una de les dues possibilitats següents:*

1. *L'òrbita del punt crític  $z = 0$  és acotada i aleshores el conjunt ple de Julia  $K_c$  és un conjunt connex, o bé*
2. *L'òrbita del punt  $z = 0$  tendeix a infinit i el conjunt ple de Julia  $K_c$  és un conjunt de Cantor.*

### 5.3 Conjunt de Julia de $Q_c(z) = z^2 + c$ , $|c| > 2$ .

En aquesta secció, suposarem sempre que  $|c| > 2$ . En el capítol 4 hem vist que, pel cas real, si  $c > 2$ , totes les òrbites de  $Q_c(x)$  tendeixen a infinit i que, si  $c < -2$ , hi ha un conjunt de Cantor en el qual  $Q_c$  és caòtica. En aquesta secció veurem que aquests dues subfamílies de  $Q_c$  són molt semblants quan les considerem com a sistemes dinàmics en el pla complex. De fet, aquesta secció està dedicada a demostrar el resultat següent:

**Teorema 5.16.** *Suposem  $|c| > 2$ . Llavors,  $J_c = K_c$  és un conjunt de Cantor. A més, la funció  $Q_c : J_c \rightarrow J_c$  conjuga amb la funció  $\sigma$  i, en conseqüència,  $Q_c$  és caòtica en el seu conjunt de Julia.*

Primer de tot veurem que el conjunt ple de Julia és un conjunt de Cantor. Començarem veient que  $K_c$  està inclòs en el disc  $\{z : |z| < |c|\}$ . És a dir, demostrarem que les òrbites dels punts que no pertanyen a aquest disc tendeixen a infinit. D'aquest resultat en podrem deduir que l'òrbita del punt crític  $z = 0$  tendeix a infinit i per la dicotomia fonamental, tindrem que  $K_c$  és un conjunt de Cantor.

**Proposició 5.17.** *Suposem  $|z| \geq |c| > 2$ . Aleshores,  $|Q_c^n(z)| \rightarrow \infty$  quan  $n \rightarrow \infty$ .*

*Demostració.* Per la desigualtat triangular, tenim que

$$|Q_c(z)| = |z^2 + c| \geq |z|^2 - |c|.$$

Com que  $|z| \geq |c|$ , aleshores

$$|Q_c(z)| \geq |z|^2 - |c| \geq |z|^2 - |z| = |z|(|z| - 1).$$

Per hipòtesis,  $|z| > 2$ . Per tant, existeix un valor  $\lambda > 0$  tal que  $|z| - 1 > 1 + \lambda$  i aleshores,

$$|Q_c(z)| \geq |z|(|z| - 1) > |z|(1 + \lambda).$$

En particular,  $|Q_c(z)| > |z|$  i podem aplicar el mateix argument. Així, obtenim que

$$|Q_c^n(z)| > (1 + \lambda)^n |z|.$$

Com que  $\lambda > 0$ , tenim que  $(1 + \lambda)^n \rightarrow \infty$  quan  $n \rightarrow \infty$  i per tant,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |Q_c^n(z)| = \infty$ .  $\square$

De fet, tenim que  $|Q_c^n(z)| \rightarrow \infty$  per a tota  $|z| > M$  sent  $M = \max\{|c|, 2\}$ . En efecte,

$$\frac{|Q_c(z)|}{|z|} = \frac{|z^2 + c|}{|z|} \geq |z| - \frac{|c|}{|z|} \geq |z| - 1 > 1.$$

Per tant,  $|Q_c(z)| > |z|$  i repetint el mateix argument obtenim que  $|Q_c^n(z)| \rightarrow \infty$ .

D'aquest últim resultat veiem que si existeix  $k > 0$  amb  $|Q_c^k(z)| > M$ , aleshores  $|Q_c^{k+1}(z)| > (1 + \lambda)|Q_c^k(z)|$  i per tant,  $|Q_c^n(z)| \rightarrow \infty$ .

Com ja hem dit, suposarem sempre que  $|c| > 2$ . Per tant,  $M = \max\{|c|, 2\} = |c|$ . Notem que  $|Q_c^2(0)| = |c^2 + c| \geq |c|(|c| - 1) > |c|$  i en conseqüència, tenim que l'òrbita del punt  $z = 0$  tendeix a infinit. Per tant,  $0 \notin K_c$ .

Per tant, ja tenim demostrat que  $K_c$  és un conjunt de Cantor i aleshores  $J_c = K_c$ .

Resumint els resultats anteriors, tenim que si per a alguna  $n$  es compleix que  $Q_c^n(z)$  no pertany al disc de radi  $|c|$ , aleshores la seva òrbita tendeix a infinit i per tant  $z$  no pertany al conjunt ple de Julia. D'altra banda, si l'òrbita de  $z$  mai marxa d'aquest disc, per definició tenim que  $z$  pertany a  $K_c$ . Sigui  $D = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } |z| \leq |c|\}$ . Aleshores, el conjunt ple de Julia de  $Q_c$  és el conjunt de punts que mai marxa de  $D$  sota iteració de  $Q_c$ . Per tant,  $K_c$  ve donat per la intersecció

$$\bigcap_{n \geq 0} Q_c^{-n}(D) \tag{2}$$

ja que si  $z \notin \bigcap_{n \geq 0} Q_c^{-n}(D)$ , aleshores existeix  $k > 0$  tal que  $Q_c^k(z) \notin D$  i per tant, la seva òrbita tendeix a infinit.

Per saber com és el conjunt  $K_c$ , necessitem entendre la intersecció de l'expressió (2). Sigui  $C$  la frontera del disc  $D$ , és a dir, sigui  $C$  la circumferència de radi  $|c|$  i centrada en l'origen. Si sabem com és  $Q_c^{-1}(C)$ , aplicant el principi del mòdul màxim obtindrem  $Q_c^{-1}(D)$ . Per definició,

$$Q_c^{-1}(C) = \{z \text{ t.q. } |Q_c(z)| = |c|\}.$$

Per tant, si  $z \in Q_c^{-1}(C)$  s'ha de complir que

$$z^2 + c = ce^{i\theta}$$

$$z = \sqrt{ce^{i\theta} - c}$$

per a algun  $\theta \in [0, 2\pi)$ .

Notem que,  $ce^{i\theta} - c$  és una circumferència centrada en el punt  $-c$  i de radi  $|c|$ . Per tant, aquesta circumferència passa per l'origen i la seva antiimatge per  $Q_c$  és una figura en forma de vuit i inclosa en  $D$ . En efecte, tots els punts de  $C$  tenen dues antiimatges excepte el punt  $c$  que només en té una,  $z = 0$ . A més, pel principi del mòdul màxim, tenim que  $Q_c^{-1}(D)$  és aquesta figura juntament amb el seu interior.

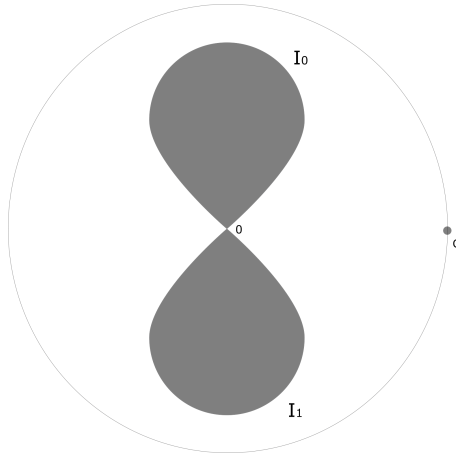


Figura 13:  $Q_c^{-1}(D)$  és una figura en forma de vuit.

Denotem, com en la figura,  $I_0$  i  $I_1$  a les dues parts de la figura. Observem que  $I_0$  i  $I_1$  són simètriques respecte l'origen i que  $Q_c$  envia cada una d'elles a tot  $D$  de manera bijectiva. En canvi, tots els punts que no pertanyen a  $I_0 \cup I_1$  són enviats fora del disc per  $Q_c$ . Per tant, el conjunt  $K_c$  es troba dins de  $I_0 \cup I_1$ .

Ara, com que  $Q_c$  envia  $I_0$  i  $I_1$  bijectivament a  $D$ , pel mateix argument que l'anterior, tenim que l'antiimatge de la figura en forma de vuit formada per  $I_0$  i  $I_1$  són dues figures en forma de vuit, una inclosa en  $I_0$  i l'altra en  $I_1$ . Definim

$$I_{00} = \{z \in I_0 \mid Q_c(z) \in I_0\}$$

$$I_{01} = \{z \in I_0 \mid Q_c(z) \in I_1\}$$

$$I_{10} = \{z \in I_1 \mid Q_c(z) \in I_0\}$$

$$I_{11} = \{z \in I_1 \mid Q_c(z) \in I_1\}$$

Aleshores, el conjunt ple de Julia de  $Q_c$  està inclòs en la unió  $I_{00} \cup I_{01} \cup I_{10} \cup I_{11}$ .

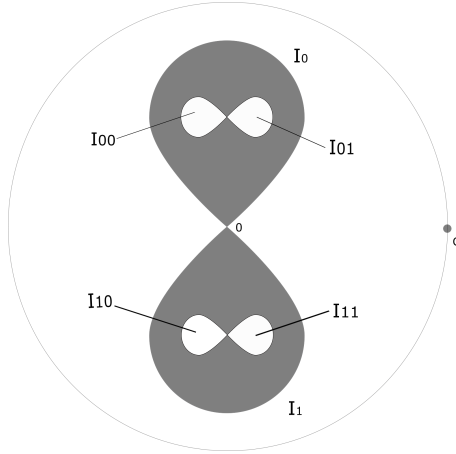


Figura 14:  $Q_c^{-2}(D)$  consisteix en dues figures en forma de vuit, una en  $I_0$  i l'altra en  $I_1$ .

Podem repetir aquest procés indefinidament de manera que després de  $n$  passos veiem que  $Q_c^{-n}(D)$  consisteix en  $2^{n-1}$  figures en forma de vuit i els seus  $2^n$  discos interiors.

Definim

$$I_{s_0 s_1 \dots s_n} = \{z \in D \mid z \in I_{s_0}, Q_c(z) \in I_{s_1}, \dots, Q_c^n(z) \in I_{s_n}\}.$$

Observem que aquesta és la mateixa definició que hem usat en el capítol 4. De la mateixa manera que hem demostrat que en el cas real  $I_{s_0 s_1 \dots s_n}$  és un tancat i que està inclòs en  $I_{s_0 s_1 \dots s_{n-1}}$ , ho veiem pel cas complex. Aleshores

$$\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 s_1 \dots s_n}$$

és una intersecció de tancats encaixats i per tant, és no buida.

Si prenem un punt  $z \in \bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 s_1 \dots s_n}$ , aleshores  $z \in I_{s_0}$ ,  $Q_c(z) \in I_{s_1}$ ,  $Q_c^2(z) \in I_{s_2}$ , etc.

És a dir,  $Q_c^n(z) \in D$  per a tota  $n$  i per tant,  $z \in K_c$ .

D'altra banda, si  $z \in K_c$  aleshores  $z$  ha de pertànyer a alguna intersecció de la forma  $\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 s_1 \dots s_n}$ .

Anomenem *component* de  $K_c$  a cada intersecció de figures en forma de vuit i el seu interior. És a dir, cada component de  $K_c$  ve donada per la intersecció

$$\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 s_1 \dots s_n}.$$

Observem que dues components de  $K_c$  diferents sempre són disjunts i que  $K_c$  és la unió de totes les components. Com que  $K_c$  és un conjunt de Cantor i per tant, és totalment disconnex, aleshores cada component de  $K_c$  és de fet un únic punt. Per tant, per a tot  $z \in K_c$ , existeix una seqüència  $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$  de  $\sum_2$  tal que

$$z = \bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 s_1 \dots s_n}.$$

Aquest fet ens diu també que el diàmetre de  $I_{s_0s_1\dots s_n}$  tendeix a 0 quan  $n$  tendeix a infinit.

Definim la funció *itinerari*  $it : J_c \rightarrow \sum_2$  per  $it(z) = (s_0s_1s_2\dots)$  on  $z = \bigcap_{n \geq 0} I_{s_0s_1\dots s_n}$ .

**Proposició 5.18.** *La funció  $it$  és un homeomorfisme i conjuga amb el shift de Bernoulli  $\sigma$ .*

*Demostració.* Pels arguments anteriors, clarament  $it$  és bijectiva. Hem de veure que  $it$  és contínua i la seva inversa també. Ho demostrarem de la mateixa manera que en el cas real.

Per veure que  $it$  es contínua, prenem  $z \in J_c$  i sigui  $it(z) = (s_0s_1s_2\dots)$ . Sigui  $\varepsilon > 0$  i prenem  $n$  prou gran tal que  $1/2^n < \varepsilon$ . Considerem totes les possibles combinacions de  $t_0t_1\dots t_n$  i per a cada una d'elles, el “disc”  $I_{t_0t_1\dots t_n}$ . Llavors, tenim  $2^{n+1}$  “discs” disjunts tals que la seva unió conté  $J_c$  i  $I_{s_0s_1\dots s_n}$  n'és un d'ells. Prenem  $\delta$  prou petit tal que la bola de radi  $\delta$  i centrada en  $z$  estigui inclosa en  $I_{s_0s_1\dots s_n}$ . Aleshores, si  $w$  és tal que  $w \in J_c$  i  $|x - w| < \delta$ , tenim que  $w \in I_{s_0s_1\dots s_n}$ . Per tant,  $it(z)$  i  $it(w)$  coincideixen en els primers  $n + 1$  termes i per la proposició 3.4 tenim que

$$d(it(z), it(w)) \leq 1/2^n < \varepsilon.$$

Hem de demostrar que  $it^{-1}$  és contínua. Clarament,  $it^{-1} : \sum_2 \rightarrow \Lambda$  és la funció definida per  $it^{-1}(s) = \bigcap_{n \geq 0} I_{s_0s_1\dots s_n}$  on  $s = (s_0s_1s_2\dots)$ . Sigui  $s = (s_0s_1s_2\dots)$  i  $\varepsilon > 0$ . Prenem  $n$  prou gran tal que el diàmetre de  $I_{s_0s_1\dots s_n}$  sigui més petit que  $\varepsilon$ . Agafem  $\delta = 1/2^n$  i sigui  $t = (t_0t_1t_2\dots) \in \sum_2$  tal que  $d(s, t) < \delta$ . Aleshores, es compleix que  $s_i = t_i$  per a tota  $i \leq n$ . Per definició, tenim que  $it^{-1}(s)$  i  $it^{-1}(t)$  pertanyen a  $I_{s_0s_1\dots s_n}$  i per tant,

$$|it^{-1}(s) - it^{-1}(t)| \leq \text{diam}(I_{s_0s_1\dots s_n}) < \varepsilon.$$

Finalment hem de veure que  $it$  conjuga  $Q_c$  amb la funció  $\sigma$ . Sigui  $z$  un element de  $J_c$  amb itinerari  $it(z) = (s_0s_1s_2\dots)$ . Aleshores  $z \in I_{s_0}$ ,  $Q_c(z) \in I_{s_1}$ ,  $Q_c^2(z) \in I_{s_2}$ , etc. És a dir,  $Q_c^n(z) \in I_{s_n}$  per a tota  $n \geq 0$ . En particular,  $Q_c^n(z) \in I_{s_n}$  per a tota  $n \geq 1$  i per tant,

$$it(Q_c(z)) = (s_1s_2s_3\dots) = \sigma(it(s_0s_1s_2\dots)).$$

□

Hem vist que  $it$  és una conjugació topològica entre  $Q_c$  i  $\sigma$ . Aleshores, aplicant el resultat del teorema 2.11 tenim que, com que  $\sigma$  és caòtica en  $\sum_2$ ,  $Q_c$  és caòtica en el seu conjunt de Julia  $J_c$ .

## 6 Conclusions

En aquest treball s'han estudiat sistemes dinàmics associats a iteració de funcions. Hem vist que tot i ser models matemàtics molt senzills, com ara la família de funcions  $Q_c(x) = x^2 + c$ , poden presentar dinàmiques molt complexes, caòtiques.

Seguint la definició de caos de la bibliografia [1] i [2], hem establert tres components essencials d'un sistema caòtic: la sensibilitat respecte condicions inicials, la transitivitat (o existència d'una òrbita densa) i la densitat del conjunt de punts periòdics. També s'ha comprovat que no són independents entre elles, hem demostrat que la primera és conseqüència de les altres dues. Tot i així, demostrar que un sistema és caòtic a partir de la definició pot ser una tasca força complicada.

En tots els exemples hem demostrat aquest comportament mitjançant la dinàmica simbòlica i la conjugació topològica. Hem vist que la dinàmica simbòlica consisteix a fer particions de l'espai i associar cada una de les "peces" d'aquesta partició a un símbol. Així, s'ha obtingut un sistema dinàmic amb totes les característiques essencials de caos i que ens ha permès traslladar aquesta informació al sistema original mitjançant una conjugació entre els dos sistemes.

La dinàmica simbòlica és doncs una de les eines principals per a establir propietats caòtiques d'un sistema.

## Referències

- [1] Devaney, R.L.: *An introduction to chaotic dynamical systems*, 2a edició, Westview Press, Boulder, 2003.
- [2] Devaney, R.L.: *A first course in chaotic dynamical systems. Theory and experiment*, Addison-Wesley Publishing Company, Boston, 1992.
- [3] Fagella, N.; Jarque, J.: *Iteración compleja y fractales*, Vicens Vives, Barcelona, 2007.
- [4] Falconer, K.: *Fractal geometry. Mathematical foundations and applications*, John Wiley & Sons, Chichester, 1990.
- [5] Robinson, C.: *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics and Chaos*, 2a edició, CRC Press, Boca Raton, 1999.
- [6] Banks, J.; Brooks, J.; Cairns, G.; Davis, G.; Stacey, P.: *On Devaney's Definition of Chaos*, The American Mathematical Monthly, Vol. 99, No. 4 (Apr., 1992), pp. 332-334 (1992), no. 4, 332–334.
- [7] Lind, D.; Marcus, B.: *An introduction to symbolic dynamics and coding*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.