Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Moviment Brownià. Construcció de Lévy-Ciesielski i propietats

Autor: Joel Suñé Margineda

Director: Dr. David Márquez Carreras

Realitzat a: Departament de matemàtiques i informàtica

Barcelona, 19 de gener de 2020

Abstract

The aim of this project is to study the Brownian motion highlighting its importance in relation to other more general stochastic processes. In the first place, the movement is rigorously defined and its existence is proven through a construction of the process (the Lévy-Ciesielski construction). And secondly, the properties of its sample-paths, as well as its characteristics as a martingale and a Markov process, are analyzed in detail.

Resum

Aquest treball es centra en l'estudi del moviment Brownià remarcant la seva importància en relació a altres tipus de processos estocàstics més generals. En primer lloc, es defineix el moviment de manera rigorosa i es dóna una construcció del procés per a demostrar-ne la seva existència, la construcció de Lévy-Ciesielski. I en segon lloc, es duu a terme un extens estudi de les propietats de les seves trajectòries, així com les seves característiques de martingala i de procés de Markov.

2010 Mathematics Subject Classification. 60G05, 60G07, 60G15, 60G17, 60G44

Agraïments

Al David, per la seva proximitat i suport durant tots aquests anys a la facultat, i a la Júlia, pel seu recolzament i ajuda inestimables.

Sumari

1 Introducció

El projecte

El 1827, el botànic Robert Brown va descriure el moviment de les partícules de pol·len immerses en aigua a través d'un microscopi. El procés estocàstic que modelitzava aquest fenomen, el qual va rebre el nom de moviment Brownià, es va convertir, al llarg del segle XX, en objecte d'estudi de nombrosos matemàtics i físics. Va ser Norbert Wiener qui, el 1918, en va donar la primera formulació matemàtica concisa, i el 1923, la primera construcció. Actualment, ha esdevingut una eina fonamental per a l'estudi de processos estocàstics i sovint, és presentat com l'exemple canònic de procés de Markov i de martingala, dos dels conceptes més fonamentals de la teoria de processos estocàstics. No en va, aquest punt de vista es veu recolzat pel fet que, per mitjà de la integració estocàstica, totes les trajectòries de les martingales contínues, i gran part de les trajectòries dels processos de Markov continus, es poden representar en termes del moviment Brownià. Conseqüència d'això, és que cèlebres resultats de les trajectòries d'aquest procés com la llei del logaritme iterat o el mòdul de continuïtat de Lévy, tinguin molt a dir pel que fa a les propietats de les trajectòries de processos molt més generals. Altrament, degut al seu comportament erràtic, el moviment Brownià és utilitzat també per a modelitzar fenòmens dins d'altres àmbits com la física, la biologia o l'economia.

El nostre objectiu serà analitzar detalladament el procés, proveint una construcció rigorosa del moviment Brownià i mostrant-ne els seus resultats principals.

Estructura de la memòria

La secció 2 presenta un seguit de conceptes de la teoria de probabilitats i processos estocàstics necessaris per a poder treballar el moviment Brownià. A la secció 3 es defineix el procés en qüestió amb dues definicions equivalents i s'exposa la construcció de Lévy-Ciesielski per a demostrar-ne l'existència. També se'n fa una simulació seguint el procediment de la construcció donada. Finalment a la secció 4 es duu a terme un estudi de les propietats del moviment Brownià, on es mostra el seu caràcter com a procés de Markov, la seva propietat de martingala i es posa especial èmfasi en les propietats de les seves trajectòries, dedicant gran part del treball a la demostració d'aquestes.

2 Conceptes previs

Donem primer un conjunt de definicions, així com alguns resultats importants, de la teoria de probabilitats i en particular dels processos estocàstics, que ens serviran al llarg de tot el treball.

2.1 Probabilitats

Donada una experiència aleatòria, associem a aquesta el model matemàtic precisat a partir de la següent definició.

Definició 2.1. *Un espai de probabilitat és una terna* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, tal que:*

1. Ω *és un conjunt format per totes les possibles realitzacions o resultats del fenomen aleatori que estudiem.*
2. $\mathcal{F}$ *és una família de parts de* Ω *que té estructura de* σ*-àlgebra, és a dir, que compleix les següents propietats:*
   $\Omega \in \mathcal{F}$*, i* $\mathcal{F}$ *és estable per complementació i per unions numerables.*
3. P *és una aplicació,* $P : \mathcal{F} \to [0,1]$*, tal que* $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$ *i* P *és* σ*-additiva, és a dir,* $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(F_n)$*, si els conjunts* $F_n \in \mathcal{F}$ *són disjunts dos a dos.*

En el llenguatge de la teoria de la mesura, $(\Omega, \mathcal{F})$ és un espai mesurable i P és una mesura tal que $P(\Omega) = 1$.

Definició 2.2. *Donats dos espais mesurables* $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$*,* $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$*, direm que una aplicació* $X : \Omega_1 \to \Omega_2$ *és mesurable si* $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}_1$ *per a tot* $A \in \mathcal{F}_2$*.*

Definició 2.3. *Considerem un espai de probabilitat* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*. Una aplicació mesurable* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *s'anomena variable aleatòria. Anàlogament, una aplicació mesurable* $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$*, s'anomena vector aleatori. Tota variable aleatòria* X *indueix una probabilitat sobre la recta,* $P_X = P \circ X^{-1}$*, que s'anomena llei o distribució de probabilitat de la variable* X*, i ve donada per*

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)), \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Una variable aleatòria X pot ser discreta, si el conjunt $X(\Omega)$ és un conjunt finit o infinit numerable sense punts d'acumulació, o contínua, si la seva funció de distribució (que definirem a continuació) és una funció contínua.

Definició 2.4. *Anomenarem funció de distribució de la variable* X *a la funció de distribució de la seva llei definida per*

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x]) = P\{X \leq x\}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Anàlogament, donades n *variables aleatòries* $X_1, \dots, X_n$*, definim la seva funció de distribució conjunta com la funció de distribució* n*-dimensional de la llei del vector aleatori* $X = (X_1, \dots, X_n)$*. És a dir,*

$$F_X(x) = P(X^{-1}((-\infty, x])) = P\{X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n\},$$

si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$*.*

Definició 2.5. *Considerem un espai de mesura* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. *Sigui* $X = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}$ *una funció elemental no negativa, és a dir, amb els* A_i *disjunts dos a dos. Es defineix la integral de* X *respecte* μ *per*

$$\int_\Omega X d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i).$$

Donada una funció mesurable $X : \Omega \to [0, +\infty]$,

$$\int_\Omega X d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega X_n d\mu,$$

on X_n *és una successió de funcions elementals no negatives que creix cap a* X*.Direm que una funció mesurable* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *és integrable respecte* μ *si* $\int_\Omega |X| d\mu < \infty$*. En aquest cas, definim la integral de* X *per*

$$\int_\Omega X d\mu = \int_\Omega X^+ d\mu - \int_\Omega X^- d\mu.$$

(En [1] p.33-40 es dóna una construcció rigorosa de la integral, veient així que la definició és consistent)

Definició 2.6. *Sigui* X *és una variable aleatòria en un cert espai de probabilitat* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*. Si* X *és integrable respecte* P *(o bé* X *pren valors en* $[0, +\infty]$*) es defineix l'esperança matemàtica de* X *com la integral de* X *respecte de la mesura* P*, és a dir,*

$$E(X) = \int_\Omega X dP = \int_\mathbb{R} x(P \circ X^{-1})(dx).$$

Per a cada natural $n \geq 1$*, l'esperança* $E(X^n)$ *(si existeix) s'anomena moment d'ordre* n *de la variable aleatòria* X*. Si* $E(X^2) < \infty$*, es defineix la variància de la variable* X *com*

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - (E(X))^2.$$

L'esperança d'una variable aleatòria es pot interpretar com el seu valor mig, mentre que la variància mesura el grau de dispersió de la variable aleatòria respecte aquest valor. Si $X_1, \ldots, X_n$ són variables aleatòries independents i integrables,

$$E(X_1 \ldots X_n) = E(X_1) \ldots E(X_n). \tag{2.1}$$

Definició 2.7. *Siguin* X *i* Y *dues variables aleatòries de quadrat integrable. Es defineix la seva covariància per*

$$Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Si X i Y són independents i de quadrat integrable, per (2.1) la seva covariància és nul·la, i es diu que estan incorrelacionades. El següent concepte, l'esperança condicionada, determina el valor esperat d'una variable aleatòria condicionada a un esdeveniment, una variable aleatòria discreta o una σ-àlgebra. Definirem aquest darrer cas, ja que és el més general i el que ens serà més útil.

Definició 2.8. *Sigui* $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ *una* σ*-àlgebra i* X *una variable aleatòria integrable. Anomenem esperança condicionada de* X *respecte la* σ*-àlgebra* $\mathcal{G}$*, i denotem per* $E(X|\mathcal{G})$*, a l'única variable aleatòria que existeix tal que*

1. És mesurable respecte $\mathcal{G}$.

2. Compleix que per a qualsevol conjunt $G \in \mathcal{G}$,

$$E(E(X|\mathcal{G})\mathbf{1}_G) = E(X\mathbf{1}_G).$$

Veiem algunes propietats bàsiques de l'esperança condicionada.

Proposició 2.9. *Siguin $\mathcal{G}, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$, X, Y dues variables aleatòries integrables i $a, b \in \mathbb{R}$. L'esperança condicionada compleix les següents propietats:*

1. $E(aX + bY|\mathcal{G}) = aE(X|\mathcal{G}) + bE(Y|\mathcal{G})$.
2. *Si X és $\mathcal{G}$-mesurable, aleshores $E(X|\mathcal{G}) = X$.*
3. *Si Y és acotada i $\mathcal{G}$-mesurable, aleshores $E(YX|\mathcal{G}) = YE(X|\mathcal{G})$.*
4. *Si X és independent de $\mathcal{G}$, aleshores $E(X|\mathcal{G}) = E(X)$.*
5. *Si $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$, aleshores $E(E(X|\mathcal{G}_1)|\mathcal{G}_2) = E(E(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1) = E(X|\mathcal{G}_1)$.*
6. *Si $X \leq Y$, aleshores $E(X|\mathcal{G}) \leq E(Y|\mathcal{G})$.*
7. $E(E(X|\mathcal{G})) = E(X)$.

Definició 2.10. *Sigui P una probabilitat en $\mathbb{R}$. La funció característica de P es defineix com l'aplicació $\varphi_P : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ donada per*

$$\varphi_P(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} P(dx) = \int_{\mathbb{R}} cos(tx)P(dx) + i\int_{\mathbb{R}} sin(tx)P(dx).$$

Si X és una variable aleatòria en un cert espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, La funció característica de X és, per definició, la funció característica de la seva llei, és a dir,

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} P_X(dx) = E(e^{itX}).$$

Anàlogament, si P és una probabilitat a $\mathbb{R}^n$, la funció característica de P es defineix com $\varphi_P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $\varphi_P(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<t,x>} P(dx)$ i la funció característica d'un vector aleatori $X = (X_1, \ldots, X_n)$ serà la funció característica de la seva llei.

La funció característica d'una variable aleatòria o un vector aleatori proporciona informació completa sobre la seva distribució de probabilitat.

A continuació donem dos resultats sobre successions d'esdeveniments, el lema de Borel-Cantelli i el segon lema de Borel-Cantelli, que afirmen que, en determinades condicions, un esdeveniment tindrà probabilitat zero o u. El segon es tracta d'una conversió parcial del primer, i ambdós els utilitzarem en nombroses demostracions.

Lema 2.11. *(Lema de Borel-Cantelli). Sigui $\{A_n, n \geq 1\}$ una successió d'esdeveniments de $\mathcal{F}$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, es compleix*

$$P\{\limsup_n A_n\} = 0.$$

Lema 2.12. *(Segon lema de Borel-Cantelli). Sigui $\{A_n, n \geq 1\}$ una successió d'esdeveniments independents. Si $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, es compleix*

$$P\{\limsup_n A_n\} = 1.$$

2.2 Variables aleatòries gaussianes

Degut al comportament del moviment Brownià, objecte d'estudi principal d'aquest treball, prenen molta importància les variables aleatòries gaussianes. És per això que en donarem algunes propietats que ens resultaran útils més endavant.

Definició 2.13. *Donada una variable aleatòria contínua X, es diu que és gaussiana si segueix una distribució normal $N(\mu, \sigma^2)$ per a qualssevol $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, és a dir, si la seva funció de densitat és*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

El següent lema determina una cota superior i una cota inferior de la distribució normal.

Lema 2.14. *Sigui X una variable amb distribució normal estàndard. Aleshores, per a tot $x > 0$,*

$$\frac{x}{1+x^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \leq P\{X > x\} \leq \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Demostració. Demostrem primer la desigualtat de la dreta.

$$P\{X > x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \frac{u}{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Ara, per a veure la desigualtat de l'esquerra, donat que

$$\frac{x}{1+x^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du \Longleftrightarrow xe^{-\frac{x^2}{2}} \leq (1+x^2) \int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du$$
$$\Longleftrightarrow xe^{-\frac{x^2}{2}} - (1+x^2) \int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du \leq 0,$$

només cal veure que la funció $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, definida per

$$f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} - (1+x^2) \int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du,$$

és menor que 0 per a tot $x > 0$. Notem que f és contínua i derivable a tot l'interval $[0, \infty)$. D'una banda, $e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$ per a tot $x \in [0, \infty)$, implica que $f(0) = -\int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du < 0$. D'altra banda $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$. Finalment,

$$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} + (x^2+1)e^{-\frac{x^2}{2}} - 2x \int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du = 2e^{-\frac{x^2}{2}} - 2x \int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du$$
$$\geq 2e^{-\frac{x^2}{2}} - 2x \int_x^\infty \frac{u}{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 2e^{-\frac{x^2}{2}} - 2e^{-\frac{x^2}{2}} = 0.$$

Això ens indica que $f'(x) \geq 0$ per a tota $x > 0$, d'on concloem que $f(x) \leq 0$, provant així el lema. $\square$

Veiem ara la funció característica de la distribució normal. Per a calcular-la, utilitzarem el següent lema que no demostrarem.

Lema 2.15. *Sigui $f(t,x):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una funció contínua amb derivada parcial contínua $\frac{\partial f}{\partial t}$. Suposem que $|f(t,x)|+|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)|\le g(x)$ on g és una funció integrable respecte una probabilitat μ en $\mathbb{R}$. Aleshores, la funció $F(t)=\int_{\mathbb{R}} f(t,x)\mu(dx)$ és derivable i*

$$F'(t)=\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\mu(dx).$$

Ara per a calcular la funció característica d'una variable aleatòria amb distribució normal $N(\mu,\sigma^2)$, calculem primer la d'una variable aleatòria que segueixi una distribució normal estàndard. Sigui X una variable aleatòria amb distribució normal estàndard. Donat que $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$,

$$\varphi_X(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{itx}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\bigg(\int_{\mathbb{R}}cos(tx)e^{-\frac{x^2}{2}}dx+i\int_{\mathbb{R}}sin(tx)e^{-\frac{x^2}{2}}dx\bigg).$$

Com $\sin(tx)e^{-\frac{x^2}{2}}=-\sin(-tx)e^{-\frac{(-x)^2}{2}}$ per a tota $x\in\mathbb{R}$, la segona integral de la darrera expressió és zero. Considerem ara la funció $f(t,x)=\cos(tx)e^{-\frac{x^2}{2}}$. Observem que $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right|=\left|-x\sin(tx)e^{-\frac{x^2}{2}}\right|$, per tant,

$$|f(t,x)|+\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right|=e^{-\frac{x^2}{2}}(|\cos(tx)|+|x\sin(tx)|)\le e^{-\frac{x^2}{2}}(1+|x|).$$

I donat que $\int_{\mathbb{R}}(1+|x|)e^{-\frac{x^2}{2}}dx<\infty$, aplicant el lema anterior obtenim que $F(t)=\int_{\mathbb{R}}\cos(tx)e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ és derivable i $F'(t)=\int_{\mathbb{R}}-x\sin(tx)e^{-\frac{x^2}{2}}dx$. Integrant per parts,

$$F'(t)=\int_{\mathbb{R}}-x\sin(tx)e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\Bigg[\sin(tx)e^{-\frac{x^2}{2}}\Bigg]_{-\infty}^{+\infty}-\int_{\mathbb{R}}t\cos(tx)e^{-\frac{x^2}{2}}dx=-tF(t).$$

Ara per ser $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ una funció de densitat,

$$F(0)=\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi},$$

i obtenim el problema de Cauchy $F'(t)=-tF(t)$, $F(0)=\sqrt{2\pi}$. Resolent-lo,

$$\int_{\sqrt{2\pi}}^{F(t)}\frac{dF}{F}=-\int_0^t sds\Rightarrow\log\left(\frac{F(t)}{\sqrt{2\pi}}\right)=-\frac{t^2}{2}\Rightarrow F(t)=\sqrt{2\pi}e^{-\frac{t^2}{2}}\Rightarrow\varphi_X(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Considerem ara la variable aleatòria $Y=\mu+\sigma X$, amb $\mu\in\mathbb{R}$ i $\sigma>0$. Y segueix una distribució $N(\mu,\sigma^2)$, així que té densitat $f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$. Notant que

$$\varphi_Y(t)=\varphi_{\sigma X+\mu}(t)=E(e^{it(\sigma X+\mu)})=E(e^{it\mu}e^{it\sigma X})=e^{it\mu}E(e^{i\sigma tX})=e^{it\mu}\varphi_X(\sigma t)=e^{it\mu-\frac{\sigma^2t^2}{2}},$$

arribem a que la funció característica d'una variable aleatòria $Y\sim N(\mu,\sigma^2)$ és

$$\varphi_Y(t)=e^{it\mu-\frac{\sigma^2t^2}{2}}.$$

Generalitzem ara la llei normal a dimensions superiors.

Definició 2.16. *Sigui $n \geq 0$, $m \in \mathbb{R}^n$ i Σ una matriu simètrica d'ordre n definida no negativa. Es diu que el vector aleatori $X = (X_1, \dots, X_n)$ té una llei normal n-dimensional amb vector de mitjanes m i matriu de variàncies i covariàncies Σ, si la seva densitat és*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma)}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}(x-m)^t \Sigma (x-m) \right\}.$$

Escrivim $X \sim N(m, \Sigma)$. Es pot veure que aquesta probabilitat té per funció característica

$$\varphi(t) = \exp\left\{ it^t m - \frac{1}{2} t^t \Sigma t \right\}, \tag{2.2}$$

per a tot $t \in \mathbb{R}^n$.

Proposició 2.17. *Sigui $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vector aleatori. X té una llei normal multidimensional si i només si tota combinació lineal $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i X_i$, és normal.*

Demostració. Veiem primer la implicació directa. Volem veure que si $X \sim N(m, \Sigma)$, llavors, si A és una matriu d'ordre $r \times n$, el vector AX té llei $N(Am, A\Sigma A^t)$. Això vol dir que la seva funció característica és $\varphi_{AX} = \exp\{it^t(Am) - (1/2)t^t(A\Sigma A^t)t\}$, per a tot $t \in \mathbb{R}^r$. Tenim

$$\varphi_{AX}(t) = E(e^{i<t,AX>}) = E(e^{i(A^t t)^t X}) = \varphi_X(A^t t),$$

i per (2.2),

$$\varphi_X(A^t t) = \exp\left\{ i(A^t t)^t m - \frac{1}{2}(A^t t)^t \Sigma A^t t \right\} = \exp\left\{ it^t(Am) - \frac{1}{2} t^t (A\Sigma A^t) t \right\}$$

Veiem ara el recíproc. Sigui $t \in \mathbb{R}^r$. Si $X = (X_1, \dots, X_n)$ és un vector aleatori tal que tota combinació lineal $\sum_{i=1}^n a_i X_i$ és normal, tenim, en particular, que $t^t X \sim N(\mu, \sigma^2)$ per a alguns $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, i llavors

$$\varphi_X(t) = E\big(e^{it^t X}\big) = \varphi_{t^t X}(1) = \exp\left\{ i\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right\}.$$

Prenent $t^t m = t^t E(X) = \mu = E(t^t X)$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E\big[(t^t X - E(t^t X))^2\big] = E\big[(t^t X - t^t E(X))^2\big] = E\big[(t^t(X - E(X))^2\big] \\ &= E\big[t^t(X - E(X))(X - E(X))^t t\big] = t^t E\big[(X - E(X)^2\big] t = t^t \Sigma t, \end{aligned}$$

on Σ és la matriu de variàncies i covariàncies de X. Obtenim, doncs, que X té una llei normal multidimensional amb paràmetres $m = E(X)$ i Σ. □

2.3 Processos estocàstics

Els processos estocàstics fan referència a seqüències d'esdeveniments regits per espais de probabilitat. En trobem aplicacions dins de la física, enginyeria, biologia, medicina, economia, i altres disciplines, així com també altres branques de les matemàtiques. Comencem donant la definició de procés estocàstic.

Definició 2.18. *Un procés estocàstic és una col·lecció de variables aleatòries $\{X_t, t \in T\}$, en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, indexades per un espai de paràmetres T, que prenen valors en un segon espai mesurable $(S, \mathcal{S})$ anomenat espai d'estats.*

El conjunt T es pot interpretar com el temps, és a dir, els diferents instants ens els quals pren valors el procés estocàstic. Si T és numerable, per exemple $T = \mathbb{N}$, diem que X_t és un procés estocàstic a temps discret. Si per contra T és no numerable, com ara $T = [0, \infty)$, diem que X_t és un procés a temps continu. Per altra banda, S és l'espai que conté els possibles valors de X_t. Anàlogament al conjunt T, si S és numerable, per exemple, $S = (0, 1, 2, \dots)$, ens referim al procés en qüestió com a procés d'estats discrets. Si en canvi S és no numerable, com ara $S = (-\infty, \infty)$, anomenem X_t procés estocàstic a valors reals.

Sovint, per a estudiar un procés estocàstic, ens interessarà fixar un $\omega \in \Omega$ i així veure'n la seva evolució a través del temps.

Definició 2.19. *Donat un procés estocàstic $\{X_t, t \in T\}$ per a cada $\omega \in \Omega$ l'aplicació*

$$\begin{aligned} X(\cdot, \omega) : T &\longrightarrow S \\ t &\longmapsto X_t(\omega) \end{aligned}$$

S'anomena trajectòria del procés.

L'evolució temporal d'un procés estocàstic dóna pas a que, a cada instant $t \geq 0$, es pugui parlar de passat, present i futur. Això permet comparar la informació que es té en un moment donat amb la que es tenia en un punt anterior o la que es tindrà en el futur. Per treballar millor sobre aquest concepte equipem l'espai $(\Omega, \mathcal{F})$ amb una filtració.

Definició 2.20. *Una filtració de $(\Omega, \mathcal{F})$ és una col·lecció de sub-σ-àlgebres $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ de $\mathcal{F}$ tal que per a tot s, t amb $s < t$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$.*

Podem interpretar que $\mathcal{F}_t$ conté tota la informació disponible al temps t. Donat un procés estocàstic $\{X_t, t \in [0, a)\}$, la manera més simple d'escollir una filtració és la que genera el propi procés, és a dir, $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s, 0 \leq s \leq t\}$. L'ús d'una filtració permet introduir nous conceptes molt útils.

Definició 2.21. *Un procés estocàstic $\{X_t, t \geq 0\}$ està adaptat a una filtració $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ si, per a cada $t \geq 0$, X_t és una variable aleatòria $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

Clarament, tot procés X_t és adaptat a la filtració $\mathcal{F}_t^X$. Sovint, ens pot interessar que es produeixi un cert esdeveniment dins d'un procés estocàstic, de manera que vulguem conèixer l'instant $T(\omega)$, en el qual el fenomen és dóna per primer cop. És força intuïtiu, que l'esdeveniment $\{\omega, T(\omega) \leq t\}$ formi part de la informació acumulada. Donem, doncs, la següent definició.

Definició 2.22. *Considerem un espai mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ equipat amb una filtració $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$. Una variable aleatòria T és un temps d'aturada de la filtració, si l'esdeveniment $\{T \leq t\}$ pertany a la σ-àlgebra $\mathcal{F}_t$, per a tot $t \geq 0$.*

Introduïm ara dos tipus de processos definits a partir de dos dels conceptes més fonamentals de la teoria de processos estocàstics, la propietat de martingala i la propietat de Markov.

Definició 2.23. *Un procés estocàstic $\{X_t, t \geq 0\}$ adaptat a una filtració $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ és una martingala si per a tot t, $E(|X_t|) < \infty$, i per a tot $s < t$,*

$$E(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$$

Si en canvi, el procés satisfà $E(X_t|\mathcal{F}_s) \geq X_s$, es diu que és una submartingala. Si per contra compleix que $E(X_t|\mathcal{F}_s) \leq X_s$, s'anomena supermartingala.

La propietat de martingala ha esdevingut una eina bàsica tant en la probabilitat teòrica com aplicada. El terme martingala es deu a J. Ville (1939). Tot i això, va ser P. Lévy qui va crear-ne el concepte, en un intent d'estendre la desigualtat de Kolmogorov i la llei dels grans nombres més enllà del cas d'independència. Posteriorment, J. L. Doob va explorar en profunditat aquest camp, donant per primer cop, una teoria completa de les martingales, i mostrant tota la seva potencialitat. Dos dels seus resultats, dels qual en farem ús més endavant, són els següents:

Teorema 2.24 (Primera desigualtat de Doob)**.** *Sigui $\{X_t, t \geq 0\}$ una martingala o una submartingala no negativa, contínua per la dreta. Sigui $[a, b]$ un subinterval de $[0, \infty]$ i sigui $\lambda > 0$ un nombre real. Llavors*

$$\lambda P\big[\sup_{a \leq t \leq b} |X_t| \geq \lambda\big] \leq E(|X_b|).$$

La desigualtat dóna una cota a la probabilitat que un procés estocàstic amb la propietat esmentada excedeixi qualsevol valor donat en un interval de temps concret.

Teorema 2.25 (Teorema de parada opcional)**.** *Sigui $\{X_t, t \geq 0\}$ una martingala contínua, i $0 \leq S \leq T$ dos temps d'aturada. Si el procés $\{X_t, t \geq 0\}$ està dominat per una variable aleatòria integrable X, és a dir, per a tot $t \geq 0$, $|X_{t \wedge T}| \leq X_S$ quasi segurament, aleshores*

$$E[X_T|\mathcal{F}_S] = X_S, \ q.s.$$

El teorema de parada opcional dóna una condició sota la qual, l'equació definida per a martingales es pot estendre de temps fixos a temps d'aturada.

Definició 2.26. *Sigui $\{X_t, t \in T\}$ un procés estocàstic. Es diu que X_t és un procés de Markov si donats $B_1, B_2, \ldots, B_n, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,*

$$P(X_t \in B|X_{t_1} \in B_1, X(t_2) \in B_2, \ldots, X(t_n) \in B_n) = P(X_t \in B|X(t_n) \in B_n) \ q.s.$$

per a tot $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$.

És a dir, en un procés de Markov, quan es coneix el seu estat present, la probabilitat d'un comportament futur concret del procés no es veu alterada pel coneixement addicional sobre el seu comportament anterior. El procés rep el nom del matemàtic A. Markov, qui va convertir aquest tipus de processos en un dels àmbits principals de la seva recerca.

Definim ara un nou tipus de procés determinat per la distribució conjunta de les seves variables.

Definició 2.27. *Un procés estocàstic $\{X_t, t \in T\}$ és Gaussià si per a tot $n \geq 1$ i tota col·lecció finita $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ de T, les variables aleatòries $X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}$ tenen una distribució conjunta normal.*

El següent resultat, directe a partir de la proposició 2.17, ens dóna una definició equivalent de procés Gaussià.

Proposició 2.28. *Un procés estocàstic $\{X_t, t \in T\}$ és Gaussià si i només si tota combinació lineal de variables aleatòries X_t, $t \in T$, té una distribució normal.*

Acabem donant dues definicions sobre els increments d'un procés.

Definició 2.29. *Un procés estocàstic $\{X_t, t \in T\}$ té increments independents si per a tot $t_0, t_1, ..., t_n \in T$ tal que $t_0 < t_1 < ... < t_n$, les variables aleatòries*

$$X_{t_1} - X_{t_0},\ X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots,\ X_{t_n} - X_{t_{n-1}},$$

són independents.

Definició 2.30. *Un procés estocàstic $\{X_t, t \in T\}$ amb $t_0 \in T$ té increments estacionaris si per a tot $s, t \in T$ tal que $s \leq t$, l'increment $X_t - X_s$ té la mateixa distribució que $X_{t_0+(t-s)} - X_{t_0}$.*

3 Moviment Brownià. Definició i construcció

L'estudi del moviment Brownià es va originar com un intent d'explicar el fenomen físic que hi ha darrera el moviment ràpid i incessant d'una partícula suspesa en un fluid. El 1827, el botànic Robert Brown, va descriure el moviment en observar una partícula de pol·len immersa en aigua a través d'un microscopi. Algunes de les primeres explicacions que es van donar al moviment van ser, per exemple, que les partícules de pol·len estaven vives, les forces d'atracció i repulsió entre les partícules o l'existència d'un equilibri inestable en el fluid en el que es trobaven immerses. Brown va repetir l'experiment amb partícules de pols, i va comprovar que aquest moviment no es restringia al pol·len, sinó a qualsevol substància suficientment petita, però no va ser capaç d'explicar l'origen del moviment. Tot i que el botànic escocès no va ser el primer en observar aquest fenomen, el moviment va rebre el seu nom.

Malgrat la important recerca que es va dur a terme per entendre el moviment Brownià, no va ser fins el 1905 que Einstein, va donar una descripció matemàtica del fenomen basada en la teoria cinètica dels gasos. Posteriorment, físics com Smoluchowski, Fokker, Planck o Ornstein, entre altres, van perfeccionar-ne la teoria física, però la branca matemàtica es desenvolupava lentament degut a la dificultat de descriure el moviment de manera exacte matemàticament. El 1900, Louis Bachelier, que estava interessant en la fluctuació del preu de les accions, va respondre de manera heurística a gran part de les qüestions plantejades pel fenomen, i no va ser fins el 1918 que Norbert Wiener va donar la primera formulació matemàtica concisa del moviment Brownià. Conseqüentment el moviment Brownià també rep el nom de procés de Wiener. A més, el matemàtic nord-americà va donar, el 1923, la primera prova de l'existència del procés.

En els següents anys i encara dins del període inicial de l'estudi del moviment Brownià, es van dur a terme una gran quantitat d'estudis sobre el moviment. El treball més profund durant aquesta època s'atribueix a P.Lévy, concretament entre els anys 1939 i 1948. Lévy va donar una nova construcció del procés, va estudiar amb detall els temps de pas i va descobrir la noció i propietats dels temps locals. Tot això, a més, ho va dur a terme sense els conceptes de filtració, temps d'aturada o la propietat forta de Markov. Altres matemàtics que també van contribuir a l'estudi del moviment Brownià durant aquells anys van ser Kolmogorov, Čentsov o Hunt. Aquest últim va demostrar rigorosament, el 1956, el caràcter fortament Markovià del moviment Brownià.

Actualment el moviment Brownià té un paper molt important tant en la matemàtica teòrica com aplicada. Va donar un impuls a l'estudi de martingales a temps continu i és un procés estocàstic clau per a descriure'n de més complexes. També pren una importància vital en el càlcul estocàstic, ja que es requereix del moviment Brownià com a eina per a desenvolupar integrals estocàstiques.

En aquest primer capítol sobre el moviment Brownià donarem dues definicions equivalents del procés, així com una construcció per a demostrar-ne la seva existència.

3.1 Definició del moviment

Definició 3.1. *Siguin $x_0, \sigma \in \mathbb{R}$. Un procés estocàstic $\{B_t, t \geq 0\}$ a temps continu és un moviment Brownià unidimensional, amb punt inicial x_0 i coeficient de difusió σ^2, si*

1. *$B_0 = x_0$ q.s.*
2. *Per a tot s, t tal que $0 \leq s < t < \infty$, l'increment $B_t - B_s$ té una distribució normal amb mitjana 0 i variància $\sigma^2(t-s)$.*
3. *$\{B_t, t \geq 0\}$ és un procés amb increments independents.*
4. *Les trajectòries del procés $t \longmapsto B_t$ són contínues quasi segurament.*

Notem que dels primers dos punts de la definició, es dedueix que $B_t \sim N(x_0, \sigma^2 t)$. Si prenem $x_0 = 0$ i $\sigma^2 = 1$ obtenim un moviment Brownià estàndard unidimensional, on $B_t \sim N(0, t)$ i donats s, t tal que $0 \leq s < t < \infty$, $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$.

Definició 3.2. *Un procés estocàstic $\{B_t, t \geq 0\}$ a temps continu és un moviment Brownià unidimensional estàndard si*

1. *$B_0 = 0$ q.s.*
2. *Per a tot s, t tal que $0 \leq s < t < \infty$, l'increment $B_t - B_s$ té una distribució normal amb mitjana 0 i variància $(t-s)$.*
3. *$\{B_t, t \geq 0\}$ és un procés amb increments independents.*
4. *Les trajectòries del procés $t \longmapsto B_t$ són contínues quasi segurament.*

Degut al seu interès i a la simplificació de càlculs, ens centrarem en el moviment Brownià estàndard unidimensional, de manera que serà al que ens referim cada cop que parlem de moviment Brownià.

Observació 3.3. En alguns llibres, es dóna la definició de moviment Brownià amb un quart punt, que les trajectòries del procés són contínues quasi segurament. De fet, la construcció que farem més endavant implica la continuïtat. Tot i així, es pot demostrar que aquest punt és conseqüència dels altres tres, i nosaltres el presentarem més endavant com una propietat.

Sovint podem trobar el procés definit utilitzant una definició equivalent a l'anterior, en termes de la distribució conjunta, l'esperança i la variància.

Proposició 3.4. *Un procés estocàstic $\{B_t, t \geq 0\}$ és un moviment Brownià si i només si el procés és Gaussià, amb les trajectòries contínues, centrat i amb funció de covariància $\Gamma(s, t) = \min(s, t)$.*

Demostració. Veiem primer la implicació directa. Siguin $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \infty$ i $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k B_{t_k} &= \lambda_n (B_{t_n} - B_{t_{n-1}}) + (\lambda_n + \lambda_{n-1}) B_{t_{n-1}} + \sum_{k=1}^{n-2} \lambda_k B_{t_k} \\ &= B_{t_0} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k}^{n} \lambda_j (B_{t_k} - B_{t_{k-1}}) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k}^{n} \lambda_j (B_{t_k} - B_{t_{k-1}}),\end{aligned} \tag{3.1}$$

on en la darrera igualtat hem usat que $B_0 = 0$. Donat que els increments $B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$ són Gaussians i independents, qualsevol transformació lineal també ho és, obtenint així per (3.1) que $(B(t_1, \ldots, t_n)$ és un vector Gaussià i per tant B_t un procés Gaussià. Donat que $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$ per a qualsevol $0 \leq s < t < \infty$, tenim que $B_t \sim N(0,t)$. Això implica que $m(t) = E[B_t] = 0$. Queda veure que $\Gamma(s,t) = \min(s,t)$. Suposem, sense pèrdua de generalitat, que $s < t$.

$$\begin{aligned}\Gamma(s,t) &= Cov(B_t, B_s) = Cov(B_t - B_s + B_s, B_s) \\ &= Cov(B_t - B_s, B_s - B_0) + Cov(B_s, B_s) = Var(B_s) = s.\end{aligned}$$

Veiem ara el recíproc.

1. Considerem la variable aleatòria B_0. Tenim que $E[B_0] = m(0) = 0$ i d'altra banda $Var(B_0) = \Gamma(0,0) = 0$, obtenint així que $B_0 = 0$ q.s.

2. Siguin $0 < s < t < \infty$. Donat que B_t i B_s són Gaussians, també ho és $B_t - B_s$ per ser-ne combinació lineal. Veiem-ne ara l'esperança i la variància.

$$E[B_t - B_s] = E[B_t] - E[B_s] = m(t) - m(s) = 0.$$

$$\begin{aligned}Var(B_t - B_s) &= Cov(B_t - B_s, B_t - B_s) \\ &= Cov(B_t, B_t) - 2Cov(B_t, B_s) + Cov(B_s, B_s) = t - 2s + s = t - s.\end{aligned}$$

   I hem obtingut $B_t - B_s \sim N(0, t-s)$.

3. Siguin $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < \infty$ i $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

$$\lambda_1(B_{t_2} - B_{t_1}) + \lambda_2(B_{t_4} - B_{t_3}) = \lambda_1 B_{t_2} - \lambda_1 B_{t_1} + \lambda_2 B_{t_4} - \lambda_2 B_{t_3},$$

   i com B_t és Gaussià, tota combinació lineal és també Gaussiana i per tant $(B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_4} - B_{t_3})$ és un vector aleatori Gaussià. Sabem que donat un vector aleatori Gaussià $X = (X_1, \ldots, X_n)$, $X_1, \ldots, X_n$ són independents si i només si per a tot $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ amb $i \neq j$, $Cov(X_i, X_j) = 0$.

$$\begin{aligned}Cov(B_{t_2} - B_{t_1}, &B_{t_4} - B_{t_3}) \\ &= Cov(B_{t_2}, B_{t_4}) - Cov(B_{t_2}, B_{t_3}) - Cov(B_{t_1}, B_{t_4}) + Cov(B_{t_1}, B_{t_3}) \\ &= t_2 - t_2 - t_1 + t_1 = 0.\end{aligned}$$

□

3.2 Construcció del moviment Brownià de Lévy-Ciesielski

La primera construcció rigorosa del procés va ser donada per Wiener el 1923. Posteriorment, Kolmogorov va desenvolupar, el 1933, una altra prova de l'existència del procés basada en la construcció d'una mesura de probabilitat a partir d'una família consistent de distribucions finito dimensionals (amb les propietats d'estacionarietat, independència i normalitat dels seus increments). Aquesta aproximació més directa és la més usada per a construir processos de Markov, però també és més tècnica. El 1951, Donsker va introduir un nou teorema que demostrava l'existència del moviment Brownià a través de la idea de convergència feble d'una seqüència de passeigs aleatoris simples.

La construcció que mostrarem en aquest treball es basa en la teoria d'espais de Hilbert i les propietats de les funcions de Haar i de Schauder, on les primeres formen una base ortonormal de $L^2([0,1])$. Va ser originalment duta a terme per P. Lévy (1948) i posteriorment simplificada per Ciesielski (1961).

Sigui $I(n)$ el conjunt d'enters senars entre 0 i 2^n.

Definició 3.5. *Es defineixen les funcions de Haar en [0,1] per* $H_1^{(0)}(t) = 1$, $0 \leq t \leq 1$, *i per a* $n \geq 1, k \in I(n)$,

$$H_k^{(n)}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{n-1}{2}}, & \dfrac{k-1}{2^n} \leq t < \dfrac{k}{2^n}, \\ -2^{\frac{n-1}{2}}, & \dfrac{k}{2^n} \leq t < \dfrac{k+1}{2^n}, \\ 0, & \textit{altrament.} \end{cases}$$

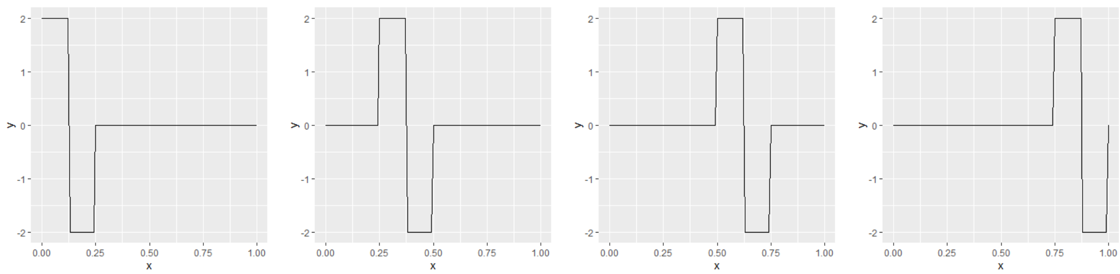

Figura 1: Funcions de Haar per a k = 1, 3, 5, 7 i n = 3 (Simulades amb R).

Aquestes funcions van ser proposades per Alfréd Haar el 1909, amb l'objectiu de donar un sistema ortonormal de l'espai $L^2([0,1])$.

Proposició 3.6. *Les funcions de Haar* $\{H_k^{(n)}; k \in I(n), n \geq 0\}$ *formen una base ortonormal completa de* $L^2([0,1])$.

Demostració. Veiem primer que les funcions $H_k^{(n)}$ són ortonormals dues a dues. Siguin $n \geq 0$ i $k \in I(n)$. Tenim

$$\left\langle H_k^{(n)}, H_k^{(n)} \right\rangle = \int_0^1 H_k^{(n)}(t) H_k^{(n)}(t) dt = \int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} 2^{n-1} dt = 2^{n-1}\left(\frac{k+1}{2^n} - \frac{k-1}{2^n}\right) = 1.$$

D'altra banda, per a cada n i cada k, la funció $H_k^{(n)}$ és només diferent de 0 a l'interval $I_k^n = \left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)$. Prenem $n_1, n_2 \geq 0$ i $k_1, k_2 \in I(n)$ amb $n_1 \neq n_2$ o $k_1 \neq k_2$, i suposem, sense pèrdua de generalitat, que $n_1 \leq n_2$. Llavors tindrem, o bé $I_{k_2}^{n_2} \cap I_{k_1}^{n_1} = \emptyset$, o bé $I_{k_2}^{n_2} \cap I_{k_1}^{n_1} = I_{k_2}^{n_2}$. En el primer cas, clarament $\left\langle H_{k_1}^{(n_1)}, H_{k_2}^{(n_2)} \right\rangle = 0$, i en el segon cas, a l'interval $I_{k_2}^{n_2}$, $H_{k_1}^{(n_1)}$ pren un valor constant, mentre que $\int_{I_{k_2}^{n_2}} H_{k_2}^{(n_2)} = 0$. Per tant també $\left\langle H_{k_1}^{(n_1)}, H_{k_2}^{(n_2)} \right\rangle = 0$.

Demostrem ara que per a tot $f \in L^2([0,1])$, si $\left\langle f, H_k^{(n)} \right\rangle = 0$ per a tot $n \geq 0$ i $k \in I(n)$, aleshores $f = 0$. Per a fer-ho, veiem que per a qualsevol parella de nombres diàdics

$a, b \in \mathcal{D} = \{\frac{i}{2^n}, i \in \{0, 1, \ldots, 2^n\}, n \in \mathbb{N}\}$, la integral $\int_a^b f(t)dt$ és nul·la, i com aquest conjunt és dens a l'interval $[0,1]$, f també ho serà. Sigui $f \in L^2([0,1])$. Definim, per a $n \geq 1$ i $i \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$, $F_i^n = \int_{\frac{i}{2^n}}^{\frac{i+1}{2^n}} f(t)dt$. Per a cada n i $k \in I(n)$, tenim

$$\left\langle f, H_k^{(n)} \right\rangle = \int_0^1 f(t)H_k^{(n)}(t)dt = \int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} f(t)2^{\frac{n-1}{2}}dt + \int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} f(t)(-2)^{\frac{n-1}{2}}dt = 2^{\frac{n-1}{2}}(F_{k-1}^n - F_k^n), \tag{3.2}$$

i també

$$\begin{aligned} \left\langle f, H_k^{(n-1)} \right\rangle &= \int_0^1 f(t)H_k^{(n-1)}(t)dt = \int_{\frac{k-1}{2^{n-1}}}^{\frac{k}{2^{n-1}}} f(t)2^{\frac{n-2}{2}}dt + \int_{\frac{k}{2^{n-1}}}^{\frac{k+1}{2^{n-1}}} f(t)(-2)^{\frac{n-2}{2}}dt \\ &= 2^{\frac{n-2}{2}}\left(\int_{\frac{2k-2}{2^n}}^{\frac{2k-1}{2^n}} f(t)dt + \int_{\frac{2k-1}{2^n}}^{\frac{2k}{2^n}} f(t)dt - \int_{\frac{2k}{2^n}}^{\frac{2k+1}{2^n}} f(t)dt - \int_{\frac{2k+1}{2^n}}^{\frac{2k+2}{2^n}} f(t)dt \right) \\ &= 2^{\frac{n-2}{2}}(F_{2k-2}^n + F_{2k-1}^n - F_{2k}^n - F_{2k+1}^n). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Com per hipòtesi, $\left\langle f, H_k^{(n)} \right\rangle = 0$, a (3.2) obtenim que $F_{k-1}^n = F_k^n$, $\forall k \in I(n)$. I aplicant aquest darrer resultat a (3.3), tenim

$$\left\langle f, H_k^{(n-1)} \right\rangle = 2^{\frac{n-2}{2}}(F_{2k-2}^n + F_{2k-1}^n - F_{2k}^n - F_{2k+1}^n) = 2^{\frac{n}{2}}(F_{2k-1}^n - F_{2k+1}^n) = 0,$$

on també hem aplicat la hipòtesi $\left\langle f, H_k^{(n-1)} \right\rangle = 0$. Hem vist, doncs, que per a tot $k \in I(n)$, $F_{k-1}^n = F_k^n$ i $F_{2k-1}^n = F_{2k+1}^n$, fet que implica que, per a tot $i \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$, $F_i^n = F_0^n$. Finalment, donat que $\left\langle f, H_k^{(0)} \right\rangle = 0$,

$$\left\langle f, H_k^{(0)} \right\rangle = \int_0^1 f(t)dt = \sum_{i=0}^{2^n-1} F_i^n = 2^n F_0^n = 0,$$

i per tant $\int_a^b f(t)dt = 0$ per a tot $a, b \in \mathcal{D}$. $\square$

Ara com les funcions de Haar formen una base ortonormal completa de $L^2([0,1])$, tenim que per a tot $f, g \in L^2([0,1])$, es compleix la igualtat de Parseval

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in I(n)} \langle f, H_k^{(n)} \rangle \langle g, H_k^{(n)} \rangle. \tag{3.4}$$

Definició 3.7. *Es defineixen les funcions de Schauder per*

$$S_k^{(n)}(t) = \int_0^t H_k^{(n)}(u)du, \quad 0 \leq t \leq 1,\ n \geq 0,\ k \in I(n).$$

Es pot observar que $S_1^{(0)}(t) = t$, i per a $n \geq 1$ les gràfiques de $S_k^{(n)}$ són petites tendes no superposades per a cada valor de $k \in I(n)$, centrades a $k/2^n$ i amb $\max\limits_{0 \leq t \leq 1} S_k^{(n)}(t) = 2^{-(n+1)/2}$.

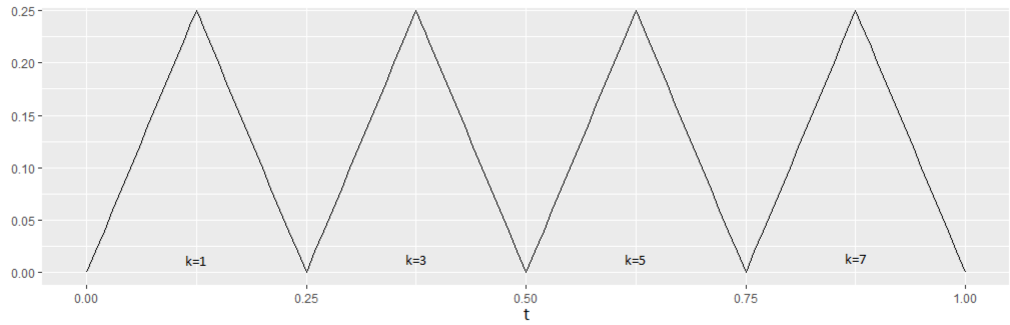

Figura 2: $\sum_{k \in I(3)} S_k^{(3)}(t)$ on cada triangle correspon a un $S_k^{(3)}$ diferent amb $k \in I(3)$ (Simulat amb R).

Notem també que

$$\langle 1_{[0,t]}, H_k^{(n)} \rangle = \int_0^1 H_k^{(n)}(u) 1_{[0,t]} du = \int_0^t H_k^{(n)}(u) du = S_k^{(n)}(t)$$

i

$$\langle 1_{[0,t]}, 1_{[0,s]} \rangle = \int_0^1 1_{[0,t]} 1_{[0,s]} du = \int_0^{t \wedge s} du = t \wedge s.$$

Aplicant, doncs, l'equació (3.4) per a $f = 1_{[0,t]}$ i $g = 1_{[0,s]}$, obtenim

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in I(n)} S_k^{(n)}(t) S_k^{(n)}(s) = t \wedge s. \tag{3.5}$$

A continuació definirem, per recursivitat i interpol·lació lineal, una successió de funcions mitjançant variables aleatòries normals estàndard i funcions de Schauder, de manera que convergeixi uniformement a un moviment Brownià definit a l'interval $[0, 1]$. Intuïtivament, a cada pas n determinarem els punts del procés a l'instant $t = \frac{k}{2^n} \in [0, 1]$, per a cada $k \in I(n)$. Per a fer-ho, utilitzarem variables aleatòries normals estàndard, de manera que al multiplicar-les per les funcions de Schauder, corresponents es mantingui una distribució normal estàndard entre cada parella de punts definits i s'interpolin linealment.

Sigui $\{\xi_k^{(n)}; k \in I(n), n = 0, 1, ...\}$ una col·lecció numerable de variables aleatòries independents normals estàndard. Considerem la seqüència de funcions $\{B^{(n)}(t); 0 \leq t \leq 1\}$ definida per

$$B_t^{(n)}(\omega) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{k \in I(m)} \xi_k^{(m)}(\omega) S_k^{(m)}(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \ n \geq 0. \tag{3.6}$$

Lema 3.8. *Quan $n \to \infty$, la seqüència de funcions $\{B_t^{(n)}((\omega)); 0 \leq t \leq 1\}$, $n \geq 0$, donada per l'equació (3.6), convergeix uniformement en t a una funció contínua $\{B_t(\omega); 0 \leq t \leq 1\}$ per a quasi tot $\omega \in \Omega$.*

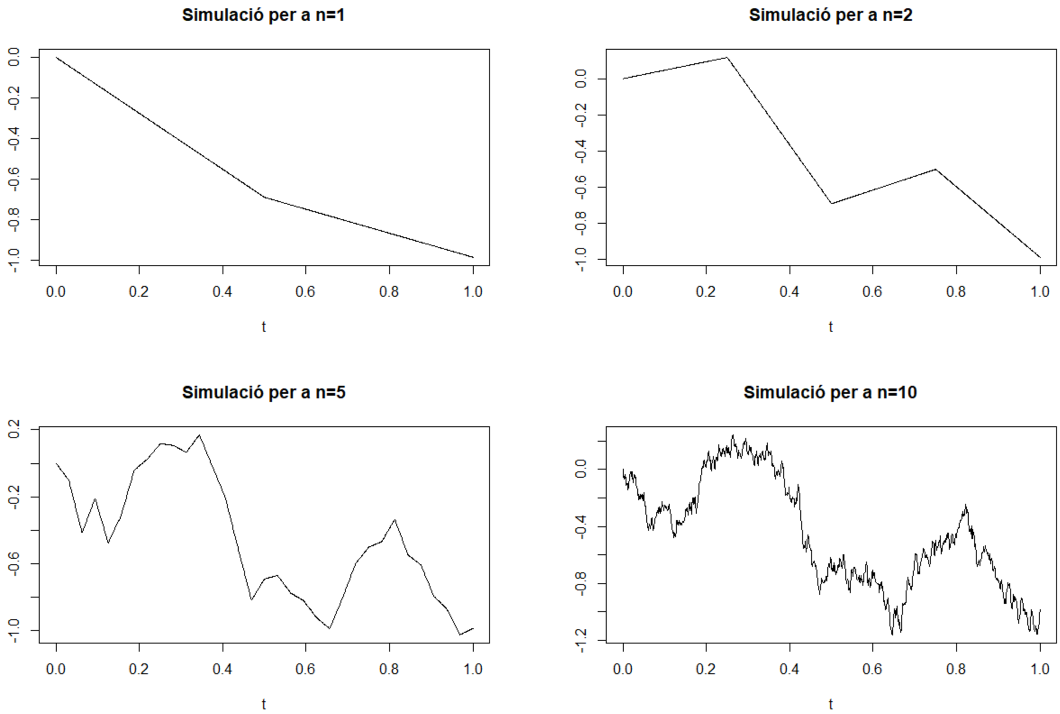

Figura 3: Pas n de la construcció: $B_t^{(n)}(\omega)$ per a $n = 1, 2, 5, 10$ i un ω fixat (Simulats amb R).

Demostració. Donat que les variables $\xi_k^{(n)}$ segueixen una distribució normal estàndard, aplicant el lema 2.14,

$$P[|\xi_k^{(n)}| > x] = 2P[\xi_k^{(n)} > x] \leq 2\frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \tag{3.7}$$

on la desigualtat es compleix perquè $u \in [x, \infty)$ i llavors $\frac{u}{x} \geq 1$. Sigui ara $c > 0$ i definim $a_n = \max_{k \in I(n)} |\xi_k^{(n)}|$. Per a $n \geq 1$,

$$P[a_n > c\sqrt{n}] = P\left[\bigcup_{k \in I(n)} \{|\xi_k^{(n)}| > c\sqrt{n}\}\right] \leq 2^n P[|\xi_1^{(n)}| > c\sqrt{n}],$$

i utilitzant l'equació (3.7) obtenim

$$P[a_n > c\sqrt{n}] \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2^n e^{-\frac{c^2 n}{2}}}{c\sqrt{n}}. \tag{3.8}$$

Veiem ara que

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{2^n e^{-\frac{c^2 n}{2}}}{c\sqrt{n}}\right|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{|c\sqrt{n}|}\left(\frac{2}{e^{\frac{c^2}{2}}}\right)^n} < 1 \Leftrightarrow \frac{2}{e^{\frac{c^2}{2}}} < 1 \Leftrightarrow c > \sqrt{2\log 2},$$

i pel criteri de l'arrel com a criteri de convergència de sèries infinites tenim que, si fixem c tal que $c > \sqrt{2\log 2}$, es compleix el següent:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[a_n > c\sqrt{n}] \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n e^{-\frac{c^2 n}{2}}}{c\sqrt{n}} < \infty.$$

Per tant podem aplicar el lema de Borel-Cantelli de manera que, existeix un esdeveniment $\Omega^* \in \mathcal{F}$ amb $P(\Omega^*) = 1$ i una variable aleatòria a valors enters n_0, tal que per a tot $\omega \in \Omega^*$,

$$a_n(\omega) \leq c\sqrt{n}, \qquad n \geq n_0(\omega).$$

Però d'altra banda, hem vist anteriorment que $\max\limits_{0\leq t\leq 1} S_k^{(n)}(t) = 2^{-\frac{n+1}{2}}$, obtenint així la següent desigualtat:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \sum_{k\in I(n)} |\xi_k^{(n)} S_k^{(n)}(t)| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} c\sqrt{n}2^{-\frac{n+1}{2}}.$$

De nou pel criteri de l'arrel,

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|c\sqrt{n}2^{-\frac{n+1}{2}}\right|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c\sqrt{n}|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

i per tant $B_t^{(n)}$ convergeix uniformement en t a un B_t. Finalment sabem que si una successió de funcions contínues $(f_n)_n$ convergeix uniformement a una funció f, aquesta també és contínua, i això implica la continuïtat de $\{B_t; 0 \leq t \leq 1\}$ $\square$

Ara que hem vist que $B_t^{(n)}$ convergeix uniformement a una funció contínua B_t, veiem que en efecte B_t defineix un moviment Brownià a $[0, 1]$.

Teorema 3.9. *El procés $\{B_t; 0 \leq t \leq 1\}$, on $B_t = \lim\limits_{n\to\infty} B_t^{(n)}$ i $\{B_t^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ està definit per l'equació (3.6), és un moviment Brownià a [0,1].*

Demostració. Ja hem vist que $\{B_t; 0 \leq t \leq 1\}$ és continu i clarament $B_0 = 0$, ja que $S_k^{(n)} = 0$ per a tot $n \geq 0$ i tot $k \in I(m)$. És suficient, doncs, provar que, per $0 < t_0 < t_1 < \cdots < t_n \leq 1$, els increments $\{B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\}_{j=1}^{n}$ són independents, amb distribució normal, mitjana zero i variància $t_j - t_{j-1}$. Això és equivalent a que, donats $\lambda_j \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, n$ i $i = \sqrt{-1}$,

$$E\left[exp\left\{i\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right\}\right] = \prod_{j=1}^{n} exp\left\{-\frac{1}{2}\lambda_j^2(t_j - t_{j-1})\right\}, \tag{3.9}$$

degut a que si una variable aleatòria X segueix una distribució normal, amb mitjana zero i variància $t_j - t_{j-1}$ la seva funció característica és

$$\varphi(t) = exp\left\{-\frac{1}{2}t^2(t_j - t_{j-1})\right\},$$

i donat un vector aleatori $X = (X_1, \ldots, X_n)$, les variables aleatòries $X_1, \ldots, X_n$ són independents si i només si, $\varphi_X(t_1, \ldots, t_n) = \varphi_{X_1}(t_1) \ldots \varphi_{X_n}(t_n)$. Sigui $\lambda_{n+1} = 0$ i $M \in \mathbb{N}$ tal que $M < n$. Veiem primer que

$$E\left[exp\left\{-i\sum_{j=1}^{n}(\lambda_{j+1} - \lambda_j)B_{t_j}^{(M)}\right\}\right]$$
$$= exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(\lambda_{j+1} - \lambda_j)(\lambda_{i+1} - \lambda_i)\sum_{m=0}^{M}\sum_{k\in I(m)} S_k^{(m)}(t_i)S_k^{(m)}(t_j)\right]. \tag{3.10}$$

Utilitzant l'equació (3.6) tenim que

$$E\Big[exp\Big\{-i\sum_{j=1}^{n}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)B_{t_j}^{(M)}\Big\}\Big]$$

$$=E\Big[exp\Big\{-i\sum_{j=1}^{n}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)\sum_{m=0}^{M}\sum_{k\in I(m)}\xi_k^{(m)}S_k^{(m)}(t_j)\Big\}\Big]$$

$$=E\Big[exp\Big\{\sum_{m=0}^{M}\sum_{k\in I(m)}-i\xi_k^{(m)}\sum_{j=1}^{n}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)S_k^{(m)}(t_j)\Big\}\Big].$$

Ara utilitzant primer que l'exponencial de la suma és igual al producte d'exponencials, i després que les variables $\xi_k^{(m)}$ són independents, obtenim

$$E\Big[\exp\Big\{\sum_{m=0}^{M}\sum_{k\in I(m)}-i\xi_k^{(m)}\sum_{j=1}^{n}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)S_k^{(m)}(t_j)\Big\}\Big]$$

$$=E\Big[\prod_{m=0}^{M}\prod_{k\in I(m)}exp\Big\{-i\xi_k^{(m)}\sum_{j=1}^{n}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)S_k^{(m)}(t_j)\Big\}\Big]$$

$$=\prod_{m=0}^{M}\prod_{k\in I(m)}E\Big[exp\Big\{-i\xi_k^{(m)}\sum_{j=1}^{n}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)S_k^{(m)}(t_j)\Big\}\Big].$$

Donat que les variables aleatòries $\xi_k^{(m)}$ són independents i segueixen una distribució normal estàndard, motiu pel qual la seva funció característica és $\varphi(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}=E(e^{it\xi_k^{(m)}})$, tenim

$$\prod_{m=0}^{M}\prod_{k\in I(m)}E\Big[exp\Big\{-i\xi_k^{(m)}\sum_{j=1}^{n}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)S_k^{(m)}(t_j)\Big\}\Big]$$

$$=\prod_{m=0}^{M}\prod_{k\in I(m)}exp\Big[-\frac{1}{2}\Big\{\sum_{j=1}^{n}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)S_k^{(m)}(t_j)\Big\}^2\Big].$$

Finalment desenvolupant el quadrat del sumatori en forma de dos sumatoris i usant de nou que l'exponencial de la suma és igual al producte d'exponencials,

$$\prod_{m=0}^{M}\prod_{k\in I(m)}exp\Big[-\frac{1}{2}\Big\{\sum_{j=1}^{n}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)S_k^{(m)}(t_j)\Big\}^2\Big]$$

$$=\prod_{m=0}^{M}\prod_{k\in I(m)}exp\Big[-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)(\lambda_{i+1}-\lambda_i)S_k^{(m)}(t_j)S_k^{(m)}(t_i)\Big]$$

$$=exp\Big[-\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{M}\sum_{k\in I(m)}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)(\lambda_{i+1}-\lambda_i)S_k^{(m)}(t_j)S_k^{(m)}(t_i)\Big]$$

$$=exp\Big[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)(\lambda_{i+1}-\lambda_i)\sum_{m=0}^{M}\sum_{k\in I(m)}S_k^{(m)}(t_j)S_k^{(m)}(t_i)\Big],$$

i obtenim la igualtat desitjada. Veiem ara que es compleix l'equació (3.9).

$$E\left[exp\left\{i\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(B_{t_j}-B_{t_{j-1}}\right\}\right] = E\left[exp\left\{i\sum_{j=1}^{n}\lambda_j B_{t_j} - i\sum_{j=0}^{n}\lambda_{j+1}B_{t_j}\right\}\right]$$
$$= E\left[exp\left\{-i\sum_{j=1}^{n}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)B_{t_j}\right\}\right],$$

ja que $B_0 = 0$. Ara fent $M \to \infty$ a l'equació (3.10) i utilitzant l'equació (3.4),

$$E\left[exp\left\{-i\sum_{j=1}^{n}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)B_{t_j}\right\}\right] = exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)(\lambda_{i+1}-\lambda_i)(t_i\wedge t_j)\right\}.$$

Separant i agrupant termes dels sumatoris,

$$exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)(\lambda_{i+1}-\lambda_i)(t_i\wedge t_j)\right\}$$
$$= exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)(\lambda_{i+1}-\lambda_i)t_j - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)(\lambda_{i+1}-\lambda_i)t_j\right\}$$
$$= exp\left\{-\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)(\lambda_{i+1}-\lambda_i)t_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)^2 t_j\right\},$$

i finalment usant que $\lambda_{n+1} = 0$ i que l'exponencial de la suma és igual al producte d'exponencials,

$$exp\left\{-\sum_{j=1}^{n-1}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)\sum_{i=j+1}^{n}(\lambda_{i+1}-\lambda_i)t_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)^2 t_j\right\}$$
$$= exp\left\{-\sum_{j=1}^{n-1}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)(-\lambda_{j+1})t_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(\lambda_{j+1}-\lambda_j)^2 t_j\right\}$$
$$= exp\left\{\sum_{j=1}^{n-1}(\lambda_{j+1}^2-\lambda_j\lambda_{j+1})t_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(\lambda_{j+1}^2+\lambda_j^2-2\lambda_{j+1}\lambda_j)t_j\right\}$$
$$= exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}(\lambda_{j+1}^2-\lambda_j^2)t_j - \frac{1}{2}\lambda_n^2 t_n\right\} = \prod_{j=1}^{n}\left\{-\frac{1}{2}\lambda_j^2(t_j-t_{j-1})\right\}.$$

□

Per acabar la construcció del moviment Brownià, només queda estendre el procés anterior, construït a $[0,1]$, a $\mathbb{R}^+$.

Corol·lari 3.10. *Hi ha un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i un procés estocàstic $\{B_t; 0 \leq t < \infty\}$ en aquest espai tal que el procés és un moviment Brownià estàndard unidimensional.*

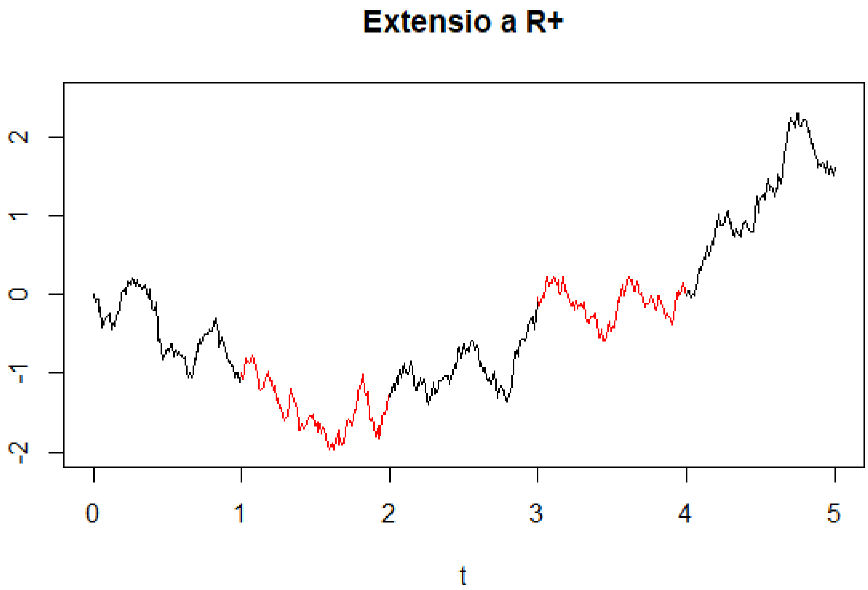

Figura 4: Concatenació de 5 moviments Brownians definits a $t \in [0, 1]$ (Simulats amb R).

Demostració. Utilitzant el teorema 3.9, existeix una seqüència de moviments Brownians $\{X_t^{(n)}; 0 \le t \le 1\}$, independents i amb les trajectòries contínues. Construïm ara una nova seqüència de moviments Brownians $\{B_t^{(n)}; 0 \le t \le n+1\}$ de la següent manera:

Inicialment per a $n = 0$, $\quad B_t^{(0)} = X_t^{(0)}, \quad$ si $0 \le t \le 1$,

i per a $n \ge 1$,
$$B_t^{(n)} = \begin{cases} B_t^{(n-1)}, & \text{si } 0 \le t \le n, \\ B_n^{(n-1)} + X_{t-n}^{(n)}, & \text{si } n \le t \le n+1. \end{cases}$$

Finalment considerem el procés $\{B_t; 0 \le t < \infty\}$ definit per $B_t = \lim_n B_t^{(n)}$. Clarament el procés està definit per a tota $0 \le t < \infty$ i és continu, ja que els $X^{(n)}$ són continus, i per a cada $n \in \mathbb{N}$, $B_n^{(n-1)} = B_n^{(n-1)} + X_0^{(n)}$, ja que $X_0^{(n)} = 0$ q.s. Ara, per la proposició 3.4, veure que B_t és un moviment Brownià és equivalent a veure que és Gaussià, centrat i amb funció de covariància $\Gamma(s, t) = \min(s, t)$. Les dues primeres propietats són directes a partir de la definició del procés, ja que B_t és combinació lineal de processos Gaussians centrats. Calculem, doncs, la funció de covariància. Siguin $0 < s, t < \infty$, $n_s = [s]$ i $n_t = [t]$.

$$
\begin{aligned}
\Gamma(s,t) &= Cov(B_t, B_s) = E(B_t B_s) - E(B_t)E(B_s) = E(B_t B_s) \\
&= E\big[(X_1^{(0)} + \ldots + X_1^{(n_t-1)} + X_{t-n_t}^{(n_t)})(X_1^{(0)} + \ldots + X_1^{(n_s-1)} + X_{s-n_s}^{(n_s)})\big] \\
&= E\Bigg[\sum_{i=0}^{n_t-1}\sum_{j=0}^{n_s-1} X_1^{(i)}X_1^{(j)} + \sum_{i=0}^{n_s-1} X_{t-n_t}^{(n_t)}X_1^{(i)} + \sum_{i=0}^{n_t-1} X_{s-n_s}^{(n_s)}X_1^{(i)} + X_{t-n_t}^{(n_t)}X_{s-n_s}^{(n_s)}\Bigg] \\
&= \sum_{i=0}^{n_t-1}\sum_{j=0}^{n_s-1} E\Big[X_1^{(i)}X_1^{(j)}\Big] + \sum_{i=0}^{n_s-1} E\Big[X_{t-n_t}^{(n_t)}X_1^{(i)}\Big] + \sum_{i=0}^{n_t-1} E\Big[X_{s-n_s}^{(n_s)}X_1^{(i)}\Big] \\
&+ E\Big[X_{t-n_t}^{(n_t)}X_{s-n_s}^{(n_s)}\Big].
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Donat que els $X^{(n)}$ són Brownians independents, $E[X_s^{(i)}X_t^{(j)}] = E[X_s^{(i)}]E[X_t^{(j)}] = 0$ per a tot $i \neq j$, i $E[X_s^{(i)}X_t^{(j)}] = \min(t,s)$ per a tot $i = j$. Considerem dos casos, si $n_t = n_s$, aleshores a la darrera expressió de l'equació (3.11), el segon i el tercer sumand són nuls, i tenim

$$
\Gamma(s,t) = \sum_{i=0}^{n_t-1}\sum_{j=0}^{n_s-1} E\Big[X_1^{(i)}X_1^{(j)}\Big] + E\Big[X_{t-n_t}^{(n_t)}X_{s-n_s}^{(n_s)}\Big] = n_t + \min(t-n_t, s-n_t) = min(t,s),
$$

Altrament, si $n_t \neq n_s$, llavors el quart sumand és nul i o bé el segon o bé el tercer també, i tenim

$$
\begin{aligned}
\Gamma(s,t) &= \sum_{i=0}^{n_t-1}\sum_{j=0}^{n_s-1} E\Big[X_1^{(i)}X_1^{(j)}\Big] + \sum_{i=0}^{n_t-1} E\Big[X_{s-n_s}^{(n_s)}X_1^{(i)}\Big] + E\Big[X_{t-n_t}^{(n_t)}X_{s-n_s}^{(n_s)}\Big] \\
&= \min(n_s + (s-n_s), n_t - (t-n_t)) = \min(s,t).
\end{aligned}
$$

□

4 Propietats del moviment Brownià

Un cop hem definit el procés i n'hem donat una construcció, treballarem algunes de les propietats més importants que posseeix. Presentarem primer un seguit de transformacions, sota les quals els processos definits són també un moviment Brownià. A continuació veurem el moviment com a procés de Markov i com a martingala, i finalment estudiarem detalladament algunes de les propietats de les seves trajectòries.

4.1 Invariància

Comencem donant les transformacions fonamentals d'equivalència del moviment Brownià, on a partir d'un moviment Brownià, n'obtenim un altre a través d'una transformació. Algunes d'aquestes propietats d'invariància les utilitzarem freqüentment per a demostrar altres propietats del procés.

Proposició 4.1 (Propietat simple de Markov)**.** *Sigui $\{B_t : t \geq 0\}$ un moviment Brownià i sigui $s \geq 0$. Llavors el procés $\{X_t : t \geq 0\}$ definit per $X_t = B_{t+s} - B_s$ és també un moviment Brownià.*

Demostració. Comprovem que el procés definit compleix els diferents punts de la definició de moviment Brownià donada anteriorment:

1. $X_0 = B_s - B_s = 0$ q.s.
2. Siguin r, t tal que $0 \leq r < t < \infty$. $X_t - X_r = B_{t+s} - B_{r+s} \sim N(0, t-r)$.
3. Siguin t_1, t_2, t_3, t_4 tal que $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < \infty$. $X_{t_2} - X_{t_1} = B_{t_2+s} - B_{t_1+s}$ i $X_{t_4} - X_{t_3} = B_{t_4+s} - B_{t_3+s}$, i donat que $0 \leq t_1 + s < t_2 + s < t_3 + s < t_4 + s < \infty$ i els increments de B_t són independents, també ho són els de X_t.
4. Donat que les trajectòries de B_t són contínues q.s. i X_t és una transformació lineal de B_t, també ho són les de X_t.

□

Proposició 4.2 (Invariància d'escala)**.** *Sigui $\{B_t : t \geq 0\}$ un moviment Brownià i sigui $a < 0$. Llavors el procés $\{X_t : t \geq 0\}$ definit per $X_t = \frac{1}{a}B_{a^2t}$ és també un moviment Brownià.*

Demostració. Comprovem que el procés definit compleix els diferents punts de la definició de moviment Brownià donada anteriorment:

1. $X(0) = \frac{1}{a}B_0 = 0$ q.s.
2. Siguin s, t tal que $0 \leq s < t < \infty$. $X_t - X_s = \frac{1}{a}(B_{a^2t} - B_{a^2s}) \sim N(0, t-s)$.
3. Siguin t_1, t_2, t_3, t_4 tal que $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < \infty$. $X_{t_2} - X_{t_1} = \frac{1}{a}(B_{a^2t_2} - B_{a^2t_1})$ i $X_{t_4} - X_{t_3} = \frac{1}{a}(B_{a^2t_4} - B_{a^2t_3})$, i com $0 \leq a^2t_1 < a^2t_2 < a^2t_3 < a^2t_4 < \infty$ i els increments de B_t són independents, també ho són els de X_t.
4. Donat que les trajectòries de B_t són contínues q.s. i X_t és una transformació lineal de B_t, també ho són les de X_t.

□

Proposició 4.3 (Inversió temporal). *Sigui* $\{B_t : t \geq 0\}$ *un moviment Brownià. El procés* $\{X_t : t \geq 0\}$*, definit per*

$$X_t = \begin{cases} 0, & si\ t = 0, \\ tB_{1/t} & si\ t > 0, \end{cases}$$

és també un moviment Brownià.

Demostració. Per la proposició 3.4 és suficient veure que el procés definit és Gaussià, amb les trajectòries contínues q.s., centrat i amb funció de covariància $\Gamma(s,t) = min(s,t)$. En efecte és Gaussià i les seves trajectòries són contínues q.s. per ser combinació lineal d'un procés Gaussià, i és centrat ja que $E[tB_{1/t}] = tE[B_{1/t}] = 0$ per ser B_t un moviment Brownià. Ara

$$\Gamma(s,t) = E\big[sB_{1/s}tB_{1/t}\big] = stE\big[B_{1/s}B_{1/t}\big] = st\min\left(\frac{1}{s},\frac{1}{t}\right) = \min(s,t).$$

□

Proposició 4.4 (Simetria). *Sigui* $\{B_t : t \geq 0\}$ *un moviment Brownià. El procés* $\{X_t : t \geq 0\}$*, definit per* $X_t = -B_t$ *és també un moviment Brownià.*

Demostració. Donat que X_t és transformació lineal de B_t, és un procés Gaussià amb les trajectòries contínues q.s. Tenim també que $E[-B_t] = -E[B_t] = 0$. Finalment

$$\Gamma(s,t) = E\big[(-B_s)(-B_t)\big] = E\big[B_sB_t\big] = \min(s,t),$$

i utilitzant la proposició 3.4, X_t és un moviment Brownià. □

4.2 El moviment Brownià com a procés de Markov

La propietat de Markov ha esdevingut central en l'estudi del moviment Brownià. Exemples importants de processos de Markov, com el procés de Cauchy, els processos de Bessel o els processos de difussió, poden ser derivats del moviment Brownià. Hem vist, a la proposició 4.1, que el moviment Brownià posseeix la propietat simple de Markov. El següent resultat, el qual no demostrarem, ens indica que també ostenta la propietat forta de Markov.

Teorema 4.5 (Propietat forta de Markov). *Sigui* $\{B_t, t \geq 0\}$ *un moviment Brownià. Per a tot quasi segurament finit temps d'aturada* T*, el procés* $\{B_{T+t} - B_T, t \geq 0\}$ *és un moviment Brownià independent de* $\mathcal{F}_T$

La propietat forta de Markov és una eina molt utilitzada per a estudiar temps d'aturada. No va ser formalitzada fins el 1956, quan Hunt i Dynkin, de manera independent, en van donar demostracions rigoroses. Un resultat interessant que deriva de la propietat forta de Markov, és el principi de reflexió, que afirma que un moviment Brownià reflectit en algun temps d'aturada, és també un moviment Brownià.

Teorema 4.6 (Principi de reflexió). *Sigui* $\{B_t, t \geq 0\}$ *un moviment Brownià i* T *un temps d'aturada finit. El procés* $\{B^*_t, t \geq 0\}$ *definit per* $B^*_t = B_t\mathbf{1}_{\{t\leq T\}} + (2B_T - B_t)\mathbf{1}_{\{t>T\}}$ *és també un moviment Brownià.*

Demostració. Per la propietat forta de Markov, els processos $\{X_1, t \geq 0\}$ i $\{X_2, t \geq 0\}$ definits per $X_1 = B_{t+T} - B_T$ i $X_2 = -(B_{t+T} - B_T)$, són moviments Brownians independents de $\{B_t, t \in [0, T]\}$. Per tant, les concatenacions $B_t \mathbf{1}_{\{t \leq T\}} + X_1 \mathbf{1}_{\{t > T\}}$ i $B_t \mathbf{1}_{\{t \leq T\}} + X_2 \mathbf{1}_{\{t > T\}}$ tenen la mateixa distribució, i observem que

$$B_t \mathbf{1}_{\{t \leq T\}} + X_1 \mathbf{1}_{\{t > T\}} = B_t \mathbf{1}_{\{t \leq T\}} + (B_{t+T} - B_T) \mathbf{1}_{\{t > T\}} = B_t^* \mathbf{1}_{\{t > 0\}},$$

i

$$\begin{aligned} B_t \mathbf{1}_{\{t \leq T\}} + X_2 \mathbf{1}_{\{t > T\}} &= B_t \mathbf{1}_{\{t \leq T\}} - (B_{t+T} - B_T) \mathbf{1}_{\{t > T\}} \\ &= B_t \mathbf{1}_{\{t \leq T\}} - (B_t - B_T - B_T) \mathbf{1}_{\{t > T\}} \\ &= B_t \mathbf{1}_{\{t \leq T\}} + (2B_T - B_t) \mathbf{1}_{\{t > T\}} = B_t^* \mathbf{1}_{\{t > 0\}}. \end{aligned}$$

□

El principi de reflexió s'atribueix a D. André, qui el va establir com a variant del passeig aleatori durant el seu estudi del problema de votacions ("ballot problem"). Posteriorment, Lévy en va donar una formulació per al moviment Brownià.

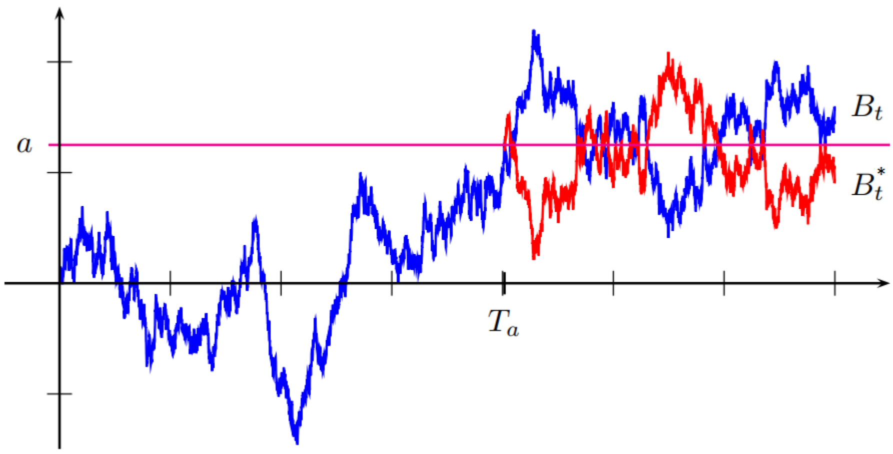

Figura 5: Principi de reflecció. Font: [9] p.53

4.3 El moviment Brownià com a martingala

El moviment Brownià es considera l'exemple estàndard de martingala a temps continu. Veiem que, en efecte, aquest i també altres processos definits a partir d'un moviment Brownià, són martingales.

Teorema 4.7. *Sigui $\{B_t, t \geq 0\}$ un moviment Brownià. Els següents processos són martingales respecte la filtració $\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s, 0 \leq s \leq t\}$:*

1. $\{B_t, t \geq 0\}$.
2. $\{B_t^2 - t, t \geq 0\}$.
3. *(Martingala exponencial)* $\left\{ \exp\left(\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\right), t \geq 0, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

Demostració. Veiem que cadascun d'ells compleix la definició de martingala.

1. B_t és $\mathcal{F}_t$-mesurable i també integrable, ja que $E(|B_t|) = 0$. Sigui $s < t$ i considerem la filtració $\mathcal{F}_s = \sigma\{B_r, 0 \leq r \leq s\}$. Tenim que B_s és $\mathcal{F}_s$-mesurable i que $B_t - B_s$ és independent de $\mathcal{F}_s$, ja que $B_t - B_s$ i B_r són independents i $\mathcal{F}_s$ està generat per B_r. Llavors, utilitzant propietats de l'esperança condicionada,

$$E[B_t|\mathcal{F}_s] = E[B_t - B_s + B_s|\mathcal{F}_s] = E[B_t - B_s|\mathcal{F}_s] + B_s = E[B_t - B_s] + B_s = B_s.$$

2. $B_t^2 - t$ és $\mathcal{F}_t$-mesurable per ser B_t $\mathcal{F}_t$-mesurable, i és també integrable, ja que $B_t \sim N(0,t)$. Sigui $s < t$ i considerem la filtració $\mathcal{F}_s = \sigma\{B_r, 0 \leq r \leq s\}$. Observem primer que

$$B_t^2 = ((B_t - B_s) + B_s)^2 = (B_t - B_s)^2 + 2B_s(B_t - B_s) + B_s^2.$$

   Llavors, utilitzant que B_s és $\mathcal{F}_s$-mesurable i que $B_t - B_s$ és independent de $\mathcal{F}_s$, aplicant propietats de l'esperança condicionada, obtenim

$$\begin{aligned}
E[B_t^2 - t|\mathcal{F}_s] &= E[(B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s] + 2E[B_s(B_t - B_s)|\mathcal{F}_s] + E[B_s^2|\mathcal{F}_s] - t \\
&= E((B_t - B_s)^2) + 2B_sE[B_t - B_s] + B_s^2 - t = (t-s) + B_s^2 - t \\
&= B_s^2 - t.
\end{aligned}$$

3. $\exp\left(\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\right)$ és $\mathcal{F}_t$-mesurable per ser B_t $\mathcal{F}_t$-mesurable. Veiem ara que és integrable.

$$\begin{aligned}
E\left[\left|\exp\left(\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\right)\right|\right] &= E\left[\exp\left(\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\right)\right] = \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda^2 t\right)E\left[\exp\left(\lambda B_t\right)\right] \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda^2 t\right)\exp\left(\frac{1}{2}\lambda^2 t\right) = 1,
\end{aligned}$$

   on hem usat que $E\left[\exp\left(\lambda B_t\right)\right] = \exp\left(\frac{1}{2}\lambda^2 t\right)$, ja que $B_t \sim N(0,t)$, i aleshores,

$$\begin{aligned}
E\left[\exp\left(\lambda B_t\right)\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\lambda x\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{(x-\lambda t)^2 - (\lambda t)^2}{2t}\right)dx \\
&= \exp\left(\frac{(\lambda t)^2}{2t}\right)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{(x-\lambda t)^2}{2t}\right)dx = \exp\left(\frac{1}{2}\lambda^2 t\right).
\end{aligned}$$

   Sigui $s < t$ i considerem la filtració $\mathcal{F}_s = \sigma\{B_r, 0 \leq r \leq s\}$. De manera similar a les anteriors martingales, utilitzant les propietats de l'esperança condicionada,

$$
\begin{aligned}
E\left[\exp\left(\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\right)\middle|\mathcal{F}_s\right] &= E\left[\exp\left(\lambda B_s - \lambda B_s + \lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2(s+(t-s))\right)\middle|\mathcal{F}_s\right] \\
&= E\left[\exp\left(\lambda B_s - \frac{\lambda^2 s}{2}\right)\exp\left(\lambda(B_t - B_s) - \frac{\lambda^2(t-s)}{2}\right)\middle|\mathcal{F}_s\right] \\
&= E\left[\exp\left(\lambda B_s - \frac{\lambda^2 s}{2}\right)\middle|\mathcal{F}_s\right]E\left[\exp\left(\lambda(B_t - B_s) - \frac{\lambda^2(t-s)}{2}\right)\middle|\mathcal{F}_s\right] \\
&= \exp\left(\lambda B_s - \frac{\lambda^2 s}{2}\right)E\left[\exp\left(\lambda(B_t - B_s) - \frac{\lambda^2(t-s)}{2}\right)\right] \\
&= \exp\left(\lambda B_s - \frac{\lambda^2 s}{2}\right)\exp\left(\frac{-\lambda^2(t-s)}{2}\right)E\left[\exp(\lambda(B_t - B_s))\right] \\
&= \exp\left(\lambda B_s - \frac{\lambda^2 s}{2}\right)\exp\left(\frac{-\lambda^2(t-s)}{2}\right)\exp\left(\frac{\lambda^2(t-s)}{2}\right) \\
&= \exp\left(\lambda B_s - \frac{\lambda^2 s}{2}\right).
\end{aligned}
$$

□

La propietat de martingala del moviment Brownià, juntament amb el teorema d'aturada opcional, ens permet demostrar el lema de Wald, el qual identifica el primer moment del moviment Brownià en un temps d'aturada favorable.

Teorema 4.8 (Lemma de Wald)**.** *Sigui $\{B_t : t \geq 0\}$ un moviment Brownià i sigui T un temps d'aturada tal que es compleixi una de les següents condicions:*

1. $E[T] < \infty$,
2. $\{B(t \wedge T), t \geq 0\}$ *és L^1-acotat.*

Aleshores $E[B(T)] = 0$.

Demostració. Per a demostrar el teorema veiem que si T és un temps d'aturada, tal que compleix la primera condició, llavors es compleix la segona, i pel teorema d'aturada opcional amb $S = 0$ haurem acabat, ja que aquest implica que si es compleix la segona condició, aleshores $E[B(T)] = 0$. Suposem, doncs, que $E[T] < \infty$, i definim

$$M_k = \max_{0 \leq t \leq 1} |B_{t+k} - B_k| \ \text{ i } \ M = \sum_{k=1}^{[T]} M_k.$$

Aleshores

$$E[M] = E\left[\sum_{k=1}^{[T]+1} M_k\right] = \sum_{k=1}^{\infty} E[\mathbf{1}_{\{T \geq k\}} M_k] = \sum_{k=1}^{\infty} P\{T \geq k\}E[M_k] = E[M_0]E[T].$$

Com per hipòtesi $E[T] < \infty$, ens queda veure que $E[M_0] < \infty$. Sigui $a > 0$ i $T_a = \inf\{t \geq 0, B_t = a\}$ un temps d'aturada. Considerem el moviment Brownià reflectit respecte T,

$\{B^*_t, t \geq 0\}$, i el procés $\{X_t = \max_{0\leq s\leq t} B_s, t \geq 0\}$. Llavors $\{X_t > a, B_t \leq a\} = \{B^*_t \geq a\}$, i donat que $\{B^*_t \geq a\}$ i $\{B_t \geq a\}$ són disjunts i tenen la mateixa probabilitat,

$$P\{X_t > a\} = P\big(\{B_t > a\} \cup \{X_t > a, B_t \leq a\}\big) = 2P\{B_t > a\}.$$

Utilitzant el lema 2.14,

$$P\{X_t > a\} = 2P\{B_t > a\} = 2P\bigg\{\frac{B_t}{\sqrt{t}} > \frac{a}{\sqrt{t}}\bigg\} \leq \frac{\sqrt{2t}}{a\sqrt{\pi}} \exp\bigg\{-\frac{a^2}{2t}\bigg\}. \tag{4.1}$$

Finalment, per 4.1,

$$E[M_0] = \int_0^\infty P\{\max_{0\leq t\leq 1} |B_t| > x\}dx = \int_0^\infty 2P\{X_1 > x\}dx \leq \int_0^\infty \frac{2\sqrt{2}}{x\sqrt{\pi}} \exp\bigg\{-\frac{x^2}{2t}\bigg\} < \infty.$$

□

4.4 Propietats de les trajectòries

En aquesta secció estudiarem les propietats de les trajectòries del moviment Brownià. Algunes mostraran un bon comportament del moviment, com ara el mòdul de continuïtat de Lévy, i altres, com la no diferenciabilitat, caracteritzaran el procés amb un mal comportament. Es dóna el cas que, utilitzant integrals estocàstiques, es poden representar les martingales a temps continu a partir del moviment Brownià. Això fa que les trajectòries de qualsevol martingala a temps continu es puguin obtenir a través de les d'un moviment Brownià. Aquesta caracterització fa que l'estudi de les trajectòries d'aquest procés tinguin molta importància de cara a classes de processos molt més generals.

4.4.1 Continuïtat

En aquest apartat donarem un conjunt de resultats que caracteritzen la continuïtat del moviment Brownià. Resulta ser que, per la definició del procés, les seves trajectòries ja són contínues q.s. Conseqüentment també són uniformement contínues sobre qualsevol interval compacte. Definim ara el concepte de mòdul de continuïtat, que ens indica quantitativament la continuïtat uniforme d'una funció.

Definició 4.9. *Siguin $T > 0$ i $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$. El mòdul de continuïtat de f , a l'interval [0,T] és la funció $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ definida per*

$$\varphi(h) := \sup_{t,s\in[0,T],\ |t-s|\leq h} |f(t) - f(s)|$$

Observem, a partir de la definició 4.9, que f és uniformement contínua a $[0, T]$ si i només si $\varphi(h)$ tendeix a zero quan h tendeix a 0. Tenim, doncs, que a l'interval $[0, 1]$ en particular (de fet en qualsevol altre subinterval tancat de $[0,\infty)$), existeix una funció φ amb $\lim_{h\to 0^+} \varphi(h) = 0$ tal que

$$\limsup_{h\to 0^+} \sup_{0\leq t\leq 1-h} \frac{|B_{t+h} - B_t|}{\varphi(h)} \leq 1. \tag{4.2}$$

Resulta ser que, en el cas del moviment Brownià, es pot trobar el valor del seu mòdul de continuïtat. El següent resultat, presentat per Lévy el 1937, aconsegueix determinar, no només el valor de la funció $\varphi(t)$ per a que es compleixi (4.2), si no també per a que sigui una igualtat.

Teorema 4.10 (Mòdul de continuïtat de Lévy)**.** *Sigui $\{B_t : t \geq 0\}$ un moviment Brownià. Quasi segurament,*

$$\limsup_{h\to 0^+} \sup_{0\leq t\leq 1-h} \frac{|B_{t+h}-B_t|}{\sqrt{2h\log(1/h)}} = 1.$$

Per arribar al mòdul de continuïtat de Lévy, donarem l'expressió de l'esquerra en funció d'una constant c, concretament,

$$\limsup_{h\to 0^+} \sup_{0\leq t\leq 1-h} \frac{|B_{t+h}-B_t|}{c\sqrt{h\log(1/h)}}.$$

Veurem primer que existeix algun valor de $c > 0$, tal que aquest límit està acotat superiorment per 1, quasi segurament. A continuació demostrarem que, per a $c < \sqrt{2}$, el límit està acotat inferiorment per 1, quasi segurament. Finalment veurem, a través del primer resultat, que per a $c > \sqrt{2}$, el límit està acotat superiorment per 1, quasi segurament, i combinant el segon i el tercer resultat haurem demostrat el mòdul de continuïtat de Lévy.

Teorema 4.11. *Sigui $\{B_t : t \geq 0\}$ un moviment Brownià. Existeix una constant $C > 0$ tal que*

$$\limsup_{h\to 0^+} \sup_{0\leq t\leq 1-h} \frac{|B_{t+h}-B_t|}{C\sqrt{h\log(1/h)}} \leq 1 \ q.s.$$

Demostració. Recordem que a la secció 3.1 hem construït una successió de funcions $\{B_t^{(n)}, 0 \leq t \leq 1\}$ definides per $B_t^{(n)} = \sum\limits_{m=0}^{n} \sum\limits_{k\in I(m)} \xi_k^{(m)} S_k^{(m)}(t)$, que convergeixen a un moviment Brownià definit a l'interval $[0,1]$. Per tant, podem expressar B_t com

$$B_t = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t), \quad \text{on} \quad F_n(t) = \sum_{k\in I(n)} \xi_k^{(n)} S_k^{(n)}(t).$$

Recordem també que les funcions $S_k^{(n)}(t) = \int_0^t H_k^{(n)}(u)du$ definides per a $t \in [0,1]$, són, per a cada $k \in I(n)$, tendes consecutives no superposades amb $\max\limits_{0\leq t\leq 1} S_k^{(n)}(t) = 2^{-\frac{n+1}{2}}$. Per tant, F_n és derivable per a quasi tot $t \in [0,1]$, amb

$$F_n'(t) = \sum_{k\in I(n)} \xi_k^{(n)} H_k^{(n)}(t), \quad ||F_n||_\infty = \max_{k\in I(n)} \xi_k^{(n)} 2^{-\frac{n+1}{2}} \quad i \quad ||F_n'||_\infty = \max_{k\in I(n)} \xi_k^{(n)} 2^{\frac{n-1}{2}}.$$

A més, hem vist a la demostració del lema 3.8 que, per a tota constant $c > \sqrt{2\log 2}$, existeix un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que per a tota $n \geq n_0$, $\max\limits_{k\in I(n)} |\xi_k^{(n)}| \leq c\sqrt{n}$ q.s., i es compleix

$$||F_n'||_\infty = 2^n ||F_n||_\infty \leq 2^{\frac{n-1}{2}} c\sqrt{n}. \tag{4.3}$$

Ara utilitzant primer la desigualtat triangular i després el teorema del valor mig i que per a tot $t_1, t_2 \in [0,1]$, $|F_n(t_1) - F_n(t_2)| \leq 2||F_n||_\infty$, tenim que per a tot t, h tal que $t, t+h \in [0,1]$, existeix $a \in (t, t+h)$ tal que

$$\begin{aligned}
|B_{t+h} - B_t| &\leq \sum_{n=0}^{l} |F_n(t+h) - F_n(t)| + \sum_{n=l+1}^{\infty} |F_n(t+h) - F_n(t)| \\
&\leq \sum_{n=0}^{l} h|F_n'(a)| + \sum_{n=l+1}^{\infty} 2||F_n||_\infty \leq \sum_{n=0}^{l} h||F_n'||_\infty + \sum_{n=l+1}^{\infty} 2||F_n||_\infty,
\end{aligned}$$

i per (4.3), per a tota $l > n_0$ obtenim la següent acotació.

$$|B_{t+h} - B_t| \leq h \sum_{n=0}^{n_0} ||F_n'||_\infty + \frac{ch}{\sqrt{2}} \sum_{n=n_0+1}^{l} 2^{\frac{n}{2}} \sqrt{n} + c\sqrt{2} \sum_{n=l+1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sqrt{n}.$$

Prenem h i l tal que el primer sumand sigui més petit que $\sqrt{h \log(1/h)}$, es compleixi $\frac{1}{2^l} < h \leq \frac{2}{2^l}$ i l sigui més gran que n_0. Notem que el segon sumand és una sèrie finita creixent, i donat que per a aquesta elecció de h i l tenim

$$\begin{aligned} h 2^{\frac{l}{2}} \sqrt{l} &\leq \frac{2}{2^l} 2^{\frac{l}{2}} \sqrt{l} = 2\sqrt{\frac{1}{2^l}} \sqrt{l} = 2\sqrt{\frac{l}{2^l}} < \sqrt{\log 2} \sqrt{\frac{l-1}{2^l}} \\ &= \sqrt{\frac{l \log 2 - \log 2}{2^l}} = \sqrt{\frac{1}{2^l} \log\left(\frac{2^l}{2}\right)} < \sqrt{h \log\left(\frac{1}{h}\right)}, \end{aligned}$$

l'element més gran de la suma corresponent a $n = l$, està acotat per $\sqrt{h \log(1/h)}$, i podem afirmar que la sèrie està acotada per una constant múltiple de $\sqrt{h \log(1/h)}$. Finalment, el darrer sumand és una sèrie convergent, i per tant, està també acotada per una constant múltiple de $\sqrt{h \log(1/h)}$. $\square$

Veiem ara que, prenent $c < \sqrt{2}$, el límit és més gran o igual que 1, quasi segurament.

Teorema 4.12. *Sigui $\{B_t : t \geq 0\}$ un moviment Brownià. Per a tota constant $c < \sqrt{2}$,*

$$\limsup_{h \to 0^+} \sup_{0 \leq t \leq 1-h} \frac{|B_{t+h} - B_t|}{c\sqrt{h \log(1/h)}} \geq 1 \ q.s.$$

Demostració. Sigui $c < \sqrt{2}$. Volem veure que per a tot $\varepsilon > 0$, $P(\Omega_\varepsilon) = 0$, on

$$\Omega_\varepsilon = \left\{\forall h \in (0, \varepsilon) \text{ i } \forall t \in [0, 1-h], |B(t+h) - B(t)| \geq c\sqrt{h \log(1/h)}\right\}. \tag{4.4}$$

Definim primer, per als enters $k, n \geq 0$, els esdeveniments

$$A_{k,n} = \{B((k+1)e^{-n}) - B(ke^{-n}) > c\sqrt{n} e^{-\frac{n}{2}}\}.$$

Per a tot $k \geq 0$, $B((k+1)e^{-n}) - B(ke^{-n}) \sim N(0, e^{-n})$, i aplicant el lema 2.14

$$P(A_{k,n}) = P\{B(e^{-n}) > c\sqrt{n} e^{-\frac{n}{2}}\} = P\{B(1) > c\sqrt{n}\} \geq \frac{c\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}(c^2 n + 1)} e^{-\frac{c^2 n}{2}}, \quad \forall k, n \geq 0.$$

Ara, donat que $c < \sqrt{2}$, tenim que $1 - \frac{c^2}{2} > 0$ i $\lim\limits_{n \to \infty} e^n P(A_{k,n}) = \lim\limits_{n \to \infty} e^{n(1 - \frac{c^2}{2})} = \infty$, i utilitzant, a més, que $1 - x \leq e^{-x}$ per a tota x, obtenim

$$P\left(\bigcap_{k=0}^{[e^n - 1]} A_{k,n}^c\right) = \left(1 - P(A_{0,n})\right)^{e^n} \leq \left(e^{-P(A_{0,n})}\right)^{e^n} = e^{-e^n P(A_{0,n})} \to 0. \tag{4.5}$$

Si considerem $h = e^{-n}$ a (4.4), llavors $c\sqrt{h \log(1/h)} = c\sqrt{n} e^{-\frac{n}{2}}$, i com per a cada $\varepsilon > 0$ si prenem un n prou gran tenim $\Omega_\varepsilon \subset \bigcap\limits_{k=0}^{[e^n - 1]} A_{k,n}^c$, arribem al resultat desitjat. $\square$

Veiem ara que prenent $c > \sqrt{2}$, el límit està acotat superiorment per 1. Per fer-ho donem primer dos lemes previs a partir del següent conjunt d'intervals.

Definició 4.13. *Donats $n, m \in \mathbb{N}$, denotem per $\Lambda_n(m)$ a la col·lecció de tots els intervals de la forma*

$$[(k-1+b)2^{-n+a}, (k+b)2^{-n+a}],$$

per a $k \in \{1, \dots, 2^n\}$ i $a, b \in \{0, \frac{1}{m}, \dots, \frac{m-1}{m}\}$. Definim $\Lambda(m) := \bigcup_n \Lambda_n(m)$.

Notem que per a cada $n, m \in \mathbb{N}$, $\Lambda_n(m)$ conté $2^n m^2$ intervals, i fixats $a, b \in \{0, \frac{1}{m}, \dots, \frac{m-1}{m}\}$, per a cada $k \in \{1, \dots, 2^n\}$ els intervals $[(k-1+b)2^{-n+a}, (k+b)2^{-n+a}]$ són contigus, no superposats, centrats a $(k+b-\frac{1}{2})2^{-n+a}$ i amb longitud 2^{-n+a}. A la figura 4.4.1 en veiem un exemple per a $n = 2$ i $m = 3$.

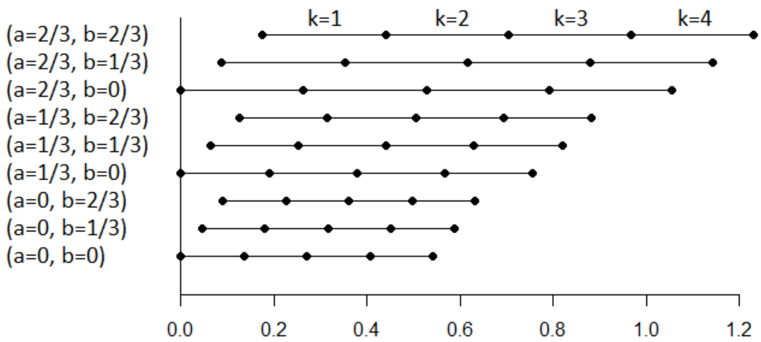

Figura 6: Col·lecció d'intervals $\Lambda_2(3)$ (Simulada amb R).

Lema 4.14. *Sigui $\{B(t) : t \geq 0\}$ un moviment Brownià. Per a tot m i $c > \sqrt{2}$, quasi segurament, existeix un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, per a tot $n \geq n_0$,*

$$|B(t) - B(s)| \leq c\sqrt{(t-s)\log\frac{1}{t-s}} \quad \textit{per a tot } [s,t] \in \Lambda_n(m).$$

Demostració. Donat que els intervals $[s,t]$ pertanyen a $\Lambda_n(m)$, són de la forma

$$[(k-1+b)2^{-n+a}, (k+b)2^{-n+a}], \qquad \text{amb} \quad t-s = 2^{a-n} \quad \text{i} \quad \frac{1}{t-s} = 2^{n-a},$$

on $k \in \{1, \dots, 2^n\}$ i $a, b \in \{0, \frac{1}{m}, \dots, \frac{m-1}{m}\}$. Sigui X una variable aleatòria normal estàndard. Per ser $B(t)$ un moviment Brownià, per a tot $t, s \geq 0$, $B(t) - B(s) \sim N(0, t-s)$, i per simetria de la distribució normal i el lema 2.14,

$$\begin{aligned}
P\Big\{ \sup_{k\in\{1,\dots,2^n\}} \sup_{a,b\in\{0,\dots,\frac{m-1}{m}\}} &\left|B((k-1+b)2^{a-n}) - B((k+b)2^{a-n})\right| > c\sqrt{2^{a-n}\log(2^{n-a})}\Big\} \\
&\leq 2^n(2m)P\big\{B((k-1+b)2^{-n}) - B((k+b)2^{-n}) > c\sqrt{2^{-n}\log(2^n)}\big\} \\
&= 2^n(2m)P\big\{X > c\sqrt{\log(2^n)}\big\} \\
&\leq 2^n(2m)\frac{1}{c\sqrt{\log(2^n)}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\frac{-c^2\log(2^n)}{2}\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2m}{c\sqrt{\log(2^n)}}2^{n(1-c^2/2)}.
\end{aligned}$$

Ara com $c > \sqrt{2}$, tenim $(1 - c^2/2) < 0$, i per tant la darrera expressió és el terme general d'una sèrie convergent respecte n. Aplicant, doncs, el lema de Borel-Cantelli, obtenim el resultat desitjat. $\square$

Lema 4.15. *Per a tot $\varepsilon > 0$ existeix $m \in \mathbb{N}$ tal que per a cada interval $[s,t] \subset [0,1]$, existeix un interval $[s',t'] \in \Lambda(m)$ amb $|t-t'| < \varepsilon(t-s)$ i $|s-s'| < \varepsilon(t-s)$.*

Demostració. Sigui $\varepsilon > 0$. Volem escollir un m en funció de ε adequat i els n, k, a, b, s' i t' en funció de l'interval $[s,t]$ adequats per a que es compleixi el lema. En primer lloc prenem $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{i} \qquad 2^{\frac{1}{m}} < 1 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ara donat un interval $[s,t] \subset [0,1]$, prenem de manera recursiva els següents valors: $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$2^{-n} \leq t - s < 2^{-n+1},$$

$a \in \{0, \frac{1}{m}, \dots, \frac{m-1}{m}\}$ tal que

$$2^{-n+a} \leq t - s < 2^{-n+a+\frac{1}{m}},$$

$k \in \{1, \dots, 2^n\}$ tal que

$$(k-1)2^{-n+a} < s \leq k2^{-n+a}$$

i $b \in \{0, \frac{1}{m}, \dots, \frac{m-1}{m}\}$ tal que

$$(k-1+b)2^{-n+a} \leq s \leq \left(k - 1 + b + \frac{1}{m}\right)2^{-n+a}.$$

Finalment escollim $s' = (k-1+b)2^{-n+a}$ i $t' = (k+b)2^{-n+a}$. Notem que amb aquesta elecció de s' i t', $[s',t'] \in \Lambda_n(m)$. Veiem que es compleixen les desigualtats indicades. D'una banda

$$|s - s'| = \left|s - (k-1+b)2^{-n+a}\right| \leq \frac{1}{m}2^{-n+a} < \frac{\varepsilon}{4}(t-s) < \varepsilon(t-s),$$

i d'altra banda,

$$\begin{aligned}|t-t'| &\leq |(t-t') + (s'-s)| + |s'-s| = |(t-s) - (t'-s')| + |s'-s| \\ &< |2^{-n+a+\frac{1}{m}} - 2^{-n+a}| + \frac{\varepsilon}{4}(t-s) = |2^{-n+a}(2^{\frac{1}{m}} - 1)| + \frac{\varepsilon}{4}(t-s) \\ &< \frac{\varepsilon}{2}(t-s) + \frac{\varepsilon}{4}(t-s) < \varepsilon(t-s).\end{aligned}$$

$\square$

Ara ja podem donar la demostració del tercer resultat necessari per a concloure la prova donada del mòdul de continuïtat de Lévy.

Teorema 4.16. *Sigui $\{B_t : t \geq 0\}$ un moviment Brownià. Per a tota constant $c > \sqrt{2}$,*

$$\limsup_{h \to 0^+} \sup_{0 \leq t \leq 1-h} \frac{|B_{t+h} - B_t|}{c\sqrt{h \log(1/h)}} \leq 1 \ q.s.$$

Demostració. Sigui $\varepsilon \in (0,1)$ tal que $c - \varepsilon > \sqrt{2}$. Pel lema 4.15, existeix $m \in \mathbb{N}$ tal que, per a cada interval $[s,t] \subset [0,1]$, existeix un interval $[s',t'] \in \Lambda(m)$ amb $|t-t'| < \varepsilon(t-s)$ i $|s-s'| < \varepsilon(t-s)$. Ara pel lema 4.14, quasi segurament, existeix un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, per a tot $n \geq n_0$, i tot $[s',t'] \in \Lambda_n(m)$,

$$|B(t') - B(s')| \leq (c-\varepsilon)\sqrt{(t'-s')\log\frac{1}{t'-s'}}. \tag{4.6}$$

Sigui $[s,t] \subset [0,1]$ un interval tal que $t - s < 2^{-n_0} \wedge \varepsilon$ i considerem l'interval $[s',t']$ complint les condicions del lema 4.15. Utilitzant primer la desigualtat triangular i després el teorema 4.11 i 4.6,

$$\begin{aligned}|B(t) - B(s)| &\leq |B(t) - B(t')| + |B(t') - B(s')| + |B(s') - B(s)| \\ &\leq C\sqrt{|t-t'|\log\frac{1}{|t-t'|}} + (c-\varepsilon)\sqrt{(t'-s')\log\frac{1}{t'-s'}} + C\sqrt{|s-s'|\log\frac{1}{|s-s'|}}.\end{aligned}$$

Volem ara acotar els tres sumands adequadament. Notem primer que la funció $f = \sqrt{t\log(1/t)}$ és creixent per a tot $t \in (0, \frac{1}{e})$, ja que

$$f'(x) = \frac{\log\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{2\sqrt{x\log\left(\frac{1}{x}\right)}} > 0 \qquad \text{per a tot } x \in \left(0, \frac{1}{e}\right).$$

Observem també que

$$(t'-s') \leq |t'-t| + (t-s) + |s-s'| \leq 2\varepsilon(t-s) + (t-s) = (1+2\varepsilon)(t-s).$$

Per tant tenim que, si prenem un ε prou petit (concretament més petit que $\frac{e+2}{e^2}$), pel que fa al segon sumand,

$$\begin{aligned}(c-\varepsilon)\sqrt{(t'-s')\log\frac{1}{t'-s'}} &\leq (c-\varepsilon)\sqrt{(1+2\varepsilon)(t-s)\log\frac{1}{(1+2\varepsilon)(t-s)}} \\ &= (c-\varepsilon)\sqrt{(1+2\varepsilon)(t-s)\left(\log\left(\frac{1}{t-s}\right) - \log(1+2\varepsilon)\right)} \\ &\leq (c-\varepsilon)\sqrt{(1+2\varepsilon)(t-s)\left(\log\left(\frac{1}{t-s}\right) + \log(1+2\varepsilon)\log\left(\frac{1}{t-s}\right)\right)} \\ &= (c-\varepsilon)\sqrt{(1+2\varepsilon)(1+\log(1+2\varepsilon))}\sqrt{(t-s)\log\left(\frac{1}{t-s}\right)}.\end{aligned}$$

Ara pels altres dos sumands,

$$\begin{aligned}C\sqrt{|t-t'|\log\left(\frac{1}{|t-t'|}\right)} + C\sqrt{|s-s'|\log\left(\frac{1}{|s-s'|}\right)} &\leq 2C\sqrt{\varepsilon(t-s)\log\left(\frac{1}{\varepsilon(t-s)}\right)} \\ < 2C\sqrt{\varepsilon(t-s)\log\left(\frac{1}{(t-s)}\right)} &< 4C\sqrt{\varepsilon}\sqrt{(t-s)\log\left(\frac{1}{t-s}\right)}.\end{aligned}$$

Amb les dues acotacions, hem obtingut que

$$|B(t) - B(s)| \leq \left(4C\sqrt{\varepsilon} + (c-\varepsilon)\sqrt{(1+2\varepsilon)(1+\log(1+2\varepsilon))}\right)\sqrt{(t-s)\log\left(\frac{1}{t-s}\right)},$$

i utilitzant que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(4C\sqrt{\varepsilon}+(c-\varepsilon)\sqrt{(1+2\varepsilon)(1+\log(1+2\varepsilon))}\right)=c,$$

obtenim el resultat buscat. □

Hem vist doncs, que donat un moviment Brownià $\{B_t : t \geq 0\}$, es compleix

$$\limsup_{h\to 0^+}\sup_{0\leq t\leq 1-h}\frac{|B_{t+h}-B_t|}{c\sqrt{h\log(1/h)}}\leq 1\ q.s.,\qquad \forall c>\sqrt{2},$$

i també

$$\limsup_{h\to 0^+}\sup_{0\leq t\leq 1-h}\frac{|B_{t+h}-B_t|}{c\sqrt{h\log(1/h)}}\geq 1\ q.s.,\qquad \forall c<\sqrt{2}.$$

Com que quan c creix, l'expressió decreix, combinant ambdós resultats obtenim

$$\limsup_{h\to 0^+}\sup_{0\leq t\leq 1-h}\frac{|B_{t+h}-B_t|}{\sqrt{2h\log(1/h)}}=1\ q.s.$$

El mòdul de continuïtat de Lévy ens dona informació sobre el comportament del moviment Brownià en qualsevol subinterval compacte de $[0,\infty)$. Veiem ara un altre resultat que descriu les oscil·lacions del moviment quan $t\to\infty$ així com també quan $t\to 0$, la llei del logaritme iterat. La seva demostració s'atribueix a Khinchin, qui també va ser el primer en demostrar-la per al passeig aleatori simple.

Teorema 4.17 (Llei del logaritme iterat)**.** *Sigui $\{B_t : t\geq 0\}$ un moviment Brownià. Llavors, quasi segurament,*

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log(t)}}=1. \tag{4.7}$$

Observació 4.18. Notem que, per simetria, de l'equació (4.7) obtenim la propietat

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log(t)}}=-1, \tag{4.8}$$

i aplicant la propietat d'inversió temporal a les equacions (4.7) i (4.8), obtenim respectivament

$$\limsup_{t\to 0^+}\frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log\left(\frac{1}{t}\right)}}=1, \tag{4.9}$$

i

$$\liminf_{t\to 0^+}\frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log\left(\frac{1}{t}\right)}}=-1. \tag{4.10}$$

Demostració. Demostrem només (4.9) i equivalentment tindrem els tres límits restants. Denotem $h(t)=\sqrt{2t\log\log\left(\frac{1}{t}\right)}$. Volem veure que es compleixen les desigualtats

$$\limsup_{t\to 0^+}\frac{B_t}{h(t)}\leq 1\ q.s.\quad \text{i}\quad \limsup_{t\to 0^+}\frac{B_t}{h(t)}\geq 1\ q.s.$$

Per a demostrar la primera desigualtat, considerem la martingala exponencial $\{X_t : t \geq 0\}$ definida per $X_t = \exp\{aB_t - \frac{1}{2}a^2 t\}$ amb $a > 0$. Aplicant el teorema 2.24, obtenim per a $\lambda > 0$ i $\beta > 0$,

$$\begin{aligned} P\left[\max_{0\leq s\leq t}\left(B_s - \frac{\lambda}{2}s\right) \geq \beta\right] &= P\left[\max_{0\leq s\leq t}\left(\lambda B_s - \frac{\lambda^2}{2}s\right) \geq \lambda\beta\right] \\ &= P\left[\max_{0\leq s\leq t}\exp\{\lambda B_s - \frac{\lambda^2}{2}s\} \geq e^{\lambda\beta}\right] \qquad (4.11) \\ &= P\left[\max_{0\leq s\leq t} X_s \geq e^{\lambda\beta}\right] \leq e^{-\lambda\beta}. \end{aligned}$$

Sigui $\theta, \delta \in (0,1)$ i prenem $\lambda = (1+\delta)\theta^{-n}h(\theta^n)$, $\beta = \frac{1}{2}h(\theta^n)$, i $t = \theta^n$ en (4.11). Si denotem $A_n = \max\limits_{0\leq s\leq t}\left(B_s - \frac{\lambda}{2}s\right) \geq \beta$, per a $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} P\left[\max_{0\leq s\leq t}\left(B_s - \frac{\lambda}{2}s\right) \geq \beta\right] &\leq \exp\left\{-\frac{(1+\delta)}{2}\theta^{-n}h^2(\theta^n)\right\} = e^{-(1+\delta)\log\log(1/\theta^n)} \\ &= \left(\frac{1}{\log\left(\frac{1}{\theta^n}\right)}\right)^{1+\delta} = \frac{1}{\left(n\log\left(\frac{1}{\theta}\right)\right)^{1+\delta}}. \end{aligned}$$

Sabem que la sèrie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\gamma}$ convergeix si $\gamma > 1$, i com $1+\delta > 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n\log\left(\frac{1}{\theta}\right)\right)^{1+\delta}} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\delta}} < \infty.$$

Aplicant el lema de Borel-Cantelli, $P(\limsup\limits_n A_n) = 0$, i existeix, doncs, un esdeveniment $\Omega_{\theta\delta} \in \mathcal{F}$ amb probabilitat 1 i una variable aleatòria $N_{\theta\delta}$ a valors enters, tal que per a tot $\omega \in \Omega_{\theta\delta}$ i $n \geq N_{\theta\delta}(\omega)$,

$$\max_{0\leq s\leq\theta^n}[B_s] - \frac{1+\delta}{2}h(\theta^n) \leq \max_{0\leq s\leq\theta^n}\left[B_s - \frac{1+\delta}{2}s\theta^{-n}h(\theta^n)\right] < \frac{1}{2}h(\theta^n).$$

Llavors, per a tota $t \in (\theta^{n+1}, \theta^n]$, com $\theta \in (0,1)$,

$$h(\theta^n) = \sqrt{2\theta^n\log\log\left(\frac{1}{\theta^n}\right)} \leq \sqrt{2\frac{t}{\theta}\log\log\left(\frac{1}{\theta^n}\right)} = \theta^{-\frac{1}{2}}h(t),$$

i per tant,

$$B_t(\omega) \leq \max_{0\leq s\leq\theta^n}B_s(\omega) < \frac{1}{2}h(\theta^n) + \frac{1+\delta}{2}h(\theta^n) \leq \left(1+\frac{\delta}{2}\right)\theta^{-\frac{1}{2}}h(t), \qquad t \in (\theta^{n+1}, \theta^n].$$

Tenim, doncs, que per a tota $\omega \in \Omega_{\theta\delta}$, es compleix

$$\sup_{\theta^{n+1}<t\leq\theta^n}\frac{B_t(\omega)}{h(t)} \leq \left(1+\frac{\delta}{2}\right)\theta^{-\frac{1}{2}}, \qquad n \geq N_{\theta\delta}(\omega),$$

i prenent $n \to \infty$, obtenim

$$\limsup_{t\to 0^-}\frac{B_t(\omega)}{h(t)} \leq \left(1+\frac{\delta}{2}\right)\theta^{-\frac{1}{2}}, \qquad q.s.$$

Finalment, prenent $\delta \to 0^+$ i $\theta \to 1^-$,

$$\limsup_{t\to 0^-} \frac{B_t(\omega)}{h(t)} \leq 1, \qquad q.s. \tag{4.12}$$

Veiem ara la desigualtat cap a la direcció contrària. Sigui $\theta \in (0,1)$. Definim els esdeveniments

$$A_n = \{B_{\theta^n} - B_{\theta^{n+1}} \geq \sqrt{1-\theta}\, h(\theta^n)\}, \qquad n \geq 1.$$

Donat que

$$\sqrt{1-\theta}\, h(\theta^n) = \sqrt{(1-\theta)2\theta^n \log\log\left(\frac{1}{\theta^n}\right)} = \sqrt{\theta^n - \theta^{n+1}}\sqrt{2\log n + 2\log\log\left(\frac{1}{\theta}\right)},$$

i que $\dfrac{B_{\theta^n} - B_{\theta^{n+1}}}{\sqrt{\theta^n - \theta^{n+1}}} \sim N(0,1)$, utilitzant el lema 2.14 podem obtenir una cota superior per a la probabilitat dels esdeveniments A_n:

$$\begin{aligned} P(A_n) &= P\left[\frac{B_{\theta^n} - B_{\theta^{n+1}}}{\sqrt{\theta^n - \theta^{n+1}}} \geq \sqrt{2\log n + 2\log\log\left(\frac{1}{\theta}\right)}\right] \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{2\log n + 2\log\log(\frac{1}{\theta})}}{1 + 2\log n + 2\log\log(\frac{1}{\theta})} \frac{1}{n} \frac{1}{\log(\frac{1}{\theta})} \geq \frac{a}{n\sqrt{2\log n + b}}, \qquad n \geq 1, \end{aligned} \tag{4.13}$$

on a i b són les constants $a = \frac{1}{\log(\frac{1}{\theta})\sqrt{2\pi}}$ i $b = 2\log\log(\frac{1}{\theta})$. Observem que la darrera expressió de (4.13) és el terme general d'una sèrie divergent, i com els esdeveniments A_n són independents per independència dels increments del moviment Brownià, podem aplicar la segona part del lema de Borel-Canteli, obtenint així un esdeveniment $\Omega_\theta \in \mathcal{F}$ amb $P(\Omega_\theta)$, tal que per a tota $\omega \in \Omega_\theta$ i $k \geq 1$, existeix un enter $m = m(k,\omega) \geq k$ tal que

$$B_{\theta^m}(\omega) - B_{\theta^{m+1}}(\omega) \geq \sqrt{1-\theta}\, h(\theta^m). \tag{4.14}$$

D'altra banda, donat que B_t és un moviment Brownià, també ho és $-B_t$, i aplicant (4.12) al procés $-B_t$, tenim que existeix un esdeveniment $\Omega^* \in \mathcal{F}$ amb $P(\Omega^*) = 1$ i una variable aleatòria a valors enters N^*, tal que per a tota $\omega \in \Omega^*$,

$$-B_{\theta^{n+1}}(\omega) \leq 2h(\theta^{n+1}) \leq 4\theta^{\frac{1}{2}} h(\theta^n), \qquad n \geq N^*(\omega), \tag{4.15}$$

on la darrera igualtat es compleix ja que, per a tot $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} h(\theta^{n+1}) &= \sqrt{2\theta^{n+1}\log\log\left(\frac{1}{\theta^{n+1}}\right)} = \theta^{\frac{1}{2}}\sqrt{2\theta^n\left(\log(n+1) + \log\log\left(\frac{1}{\theta}\right)\right)} \\ &\leq \theta^{\frac{1}{2}}\sqrt{2\theta^n\left(4\log(n) + 4\log\log\left(\frac{1}{\theta}\right)\right)} = \theta^{\frac{1}{2}}2\sqrt{2\theta^n\left(\log(n) + \log\log\left(\frac{1}{\theta}\right)\right)} \\ &= 2\theta^{\frac{1}{2}} h(\theta^n). \end{aligned}$$

Ara de les equacions (4.14) i (4.15), podem afirmar que, per a tot $\omega \in \Omega_\theta \cap \Omega^*$ i tot enter $k \geq 1$, existeix un enter $m = m(k,\omega) \geq k \vee N^*(\omega)$ tal que

$$\frac{B_{\theta^m}(\omega)}{h(\theta^m)} \geq \sqrt{1-\theta} - 4\sqrt{\theta}.$$

Fent $m \to \infty$, obtenim

$$\limsup_{t \to 0^+} \frac{B_t}{h(t)} \geq \sqrt{1-\theta} - 4\sqrt{\theta}, \qquad q.s.,$$

i finalment, prenent $\theta \to 0^+$, obtenim

$$\limsup_{t \to 0^+} \frac{B_t}{h(t)} \geq 1, \qquad q.s.$$

□

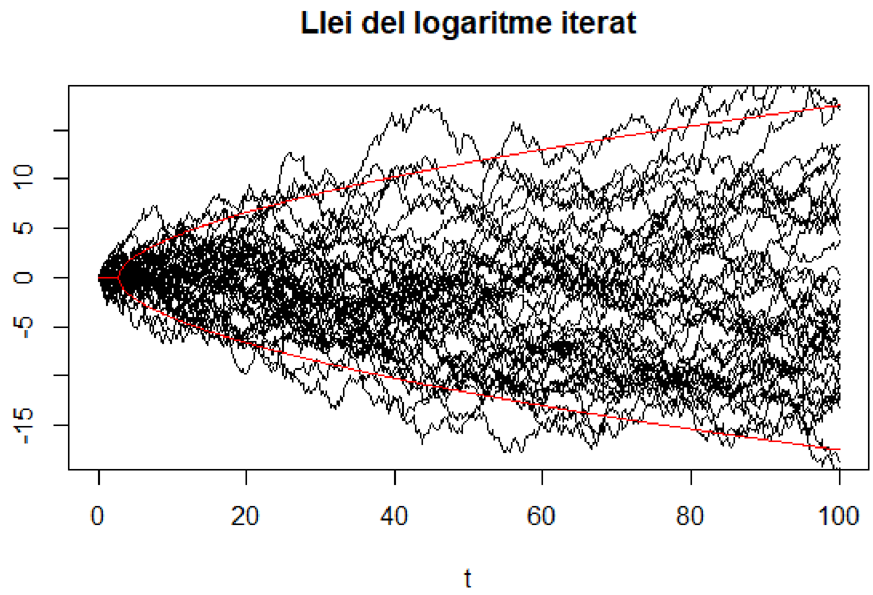

Figura 7: 40 simulacions del moviment Brownià i $\varphi(t) = \pm\sqrt{2t \log\log(t)}$ (Simulades amb R).

Observació 4.19. El mòdul de continuïtat de Lévy descriu la continuïtat del moviment Brownià en les seves pitjors condicions. Per contra, la llei del logaritme iterat mostra com en un temps més favorable, les propietats de continuïtat són millors.

A continuació donem una tercera i última caracterització de la continuïtat de les trajectòries del moviment Brownià.

Definició 4.20. *Sigui $\alpha > 0$. Es diu que una funció $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ és localment α-Hölder contínua en $x \geq 0$, si existeixen $\varepsilon > 0$ i $c > 0$ tal que, per a tot $y \geq 0$ amb $|y - x| < \varepsilon$,*

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha.$$

Anomenen exponent de Hölder a l'exponent $\alpha > 0$ i constant de Hölder a la constant $c > 0$. Clarament, com més gran és l'exponent de Hölder, més forta és la condició de continuïtat de Hölder. Notem també que, per a qualsevol $\alpha > 0$, la continuïtat de Hölder és més forta que la continuïtat uniforme, i que per a $\alpha = 1$, és equivalent a la condició de Lipschitz, i per tant a funció és diferenciable a quasi tot arreu. A partir de resultats vistos anteriorment, arribem al següent corol·lari.

Corol·lari 4.21. *Si $\alpha < \frac{1}{2}$, llavors quasi segurament, el moviment Brownià és localment α-Hölder continu a tot arreu.*

Demostració. Sigui $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ i $C > 0$ una constant. Considerem, per a cada $k \geq 0$, el moviment Brownià $\{B_t - B_k, t \in [k, k+1]\}$. Aplicant el teorema 4.11, tenim que per a tota k, existeix $h(k) > 0$ tal que, per a tot $t \in [k, k+1)$ i $0 < h < (k+1-t) \wedge h(k)$,

$$|B_{t+h} - B_t| \leq C\sqrt{h \log\left(\frac{1}{h}\right)} \leq Ch^{\alpha},$$

on la darrera desigualtat es compleix perquè per a tot $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, existeix un $h_0 > 0$ tal que per a tot $0 < h \leq h_0$, $\sqrt{h \log(1/h)} \leq h^{\alpha}$, i podem prendre $h(k) < h_0$. $\square$

Donat un $t \geq 0$, aplicant la llei del logaritme iterat al moviment Brownià $\{B_{t+h} - B_t : h \geq 0\}$ obtenim que, quasi segurament,

$$\limsup_{h \to 0+} \frac{B_{t+h} - B_t}{\sqrt{2h \log\log(1/h)}} = \limsup_{h \to 0+} \frac{B_{t+h} - B_t}{\sqrt{h}\sqrt{2 \log\log(1/h)}} = 1, \tag{4.16}$$

i com $\limsup_{h \to 0+} \sqrt{2 \log\log(1/h)} = \infty$,

$$\limsup_{h \to 0+} \frac{|B_{t+h} - B_t|}{\sqrt{h}} = \infty \qquad q.s.$$

Això implica que les trajectòries del moviment Brownià no poden ser localment Hölder contínues amb exponent $\alpha = \frac{1}{2}$ a tot arreu en $[0, \infty)$. Tot i així no podem afirmar que no tinguin aquesta propietat enlloc a $[0, \infty)$. De fet, un resultat que no demostrarem, es que quasi segurament, existeixen punts de $[0, \infty)$ on el moviment Brownià és localment $\frac{1}{2}$-Hölder continu.

Altrament, les trajectòries del moviment Brownià no són α-Hölder contínues enlloc amb exponent $\alpha > \frac{1}{2}$ quasi segurament. Tot i que tampoc demostrarem aquesta propietat, si que ho farem amb una de més feble que és implicació directa d'aquesta última, que quasi segurament, el moviment Brownià no és diferenciable a cap punt.

4.4.2 No diferenciabilitat

Tot i que pot resultar difícil construir un procés continu que sigui no diferenciable a tot arreu, resulta que el moviment Brownià ho és quasi segurament. Aquest resultat va ser demostrat per Paley, Wiener i Zygmund. Veiem primer la definició de funció diferenciable.

Definició 4.22. *Donada una funció $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, denotem la seva derivada superior (per l'esquerra i per la dreta) respecte a t per*

$$D^{\pm} f(t) = \limsup_{h \to 0\pm} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

i la seva derivada inferior (per l'esquerra i per la dreta) respecte a t per

$$D_{\pm} f(t) = \liminf_{h \to 0\pm} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

Definició 4.23. *Es diu que la funció f és diferenciable en t per la dreta (respectivament per l'esquerra), si $D^+f(t)$ i $D_+f(t)$ (respectivament $D^-f(t)$ i $D_-f(t)$) són finites i coincideixen. Es diu que la funció f és diferenciable en t si és diferenciable per l'esquerra i per la dreta i les derivades coincideixen.*

Teorema 4.24. *Quasi segurament, el moviment Brownià és no diferenciable a tot arreu. Més precisament, quasi segurament, per a tot t,*

$$D^+B_t = +\infty \quad o \quad D_+B_t = -\infty$$

Demostració. És suficient considerar l'interval [0,1]. Suposem que existeix $t_0 \in [0,1]$ tal que $-\infty < D_+B_t \leq D^+B_t < \infty$. Llavors

$$\limsup_{h\to 0+} \frac{|B_{t_0+h} - B_{t_0}|}{h} < \infty,$$

i per tant existeix una constant finita M tal que

$$\sup_{h\in[0,1]} \frac{|B_{t_0+h} - B_{t_0}|}{h} \leq M. \tag{4.17}$$

Volem veure que aquest esdeveniment té probabilitat 0. Per a $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > 2$, prenem $k \in \mathbb{Z}$ amb $1 \leq k \leq 2^n$, tal que l'interval $\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]$ conté t_0. Aleshores, per a tot $1 \leq j \leq 2^n - k$,

$$\begin{aligned}
\left|B_{\frac{k+j}{2^n}} - B_{\frac{k+j-1}{2^n}}\right| &\leq \left|B_{\frac{k+j}{2^n}} - B_{t_0}\right| + \left|B_{t_0} - B_{\frac{k+j-1}{2^n}}\right| \\
&\leq M\left(\frac{k+j}{2^n} - t_0\right) + M\left(\frac{k+j-1}{2^n} - t_0\right) \\
&\leq M\left(\frac{2j+1}{2^n} + 2\left(\frac{k-1}{2^n} - t_0\right)\right) \\
&\leq M\frac{2j+1}{2^n},
\end{aligned} \tag{4.18}$$

on la primera desigualtat es compleix per la desigualtat triangular, la segona prenent $h = \dfrac{k+j}{2^n} - t_0$ i $h = \dfrac{k+j-1}{2^n} - t_0$ a l'equació (4.17) i la quarta considerant que $\dfrac{k-1}{2^n} < t_0$.

Ara per la invariància d'escala del moviment Brownià, $X_t = \dfrac{1}{\sqrt{2^n}}B_{2^n t}$ és també un moviment Brownià, i aplicant l'equació (4.18) al procés X_t, obtenim

$$|B_{k+j} - B_{k+j-1}| \leq M'\frac{2j+1}{\sqrt{2^n}},$$

on M' és una constant finita. Definim, per a $1 \leq k \leq 2^n - 3$, els esdeveniments

$$\Omega_{n,k} := \left\{|B_{k+j} - B_{k+j-1}| \leq M'\frac{2j+1}{\sqrt{2^n}} \text{ per a } j = 1,2,3\right\}.$$

Com els increments del moviment Brownià són independents i estacionaris,

$$\begin{aligned}
P(\Omega_{n,k}) &= \prod_{j=1}^{3} P\left\{|B_{k+j} - B_{k+j-1}| \leq M'\frac{2j+1}{\sqrt{2^n}}\right\} \leq \prod_{j=1}^{3} P\left\{|B_1| \leq M'\frac{2j+1}{\sqrt{2^n}}\right\} \\
&< P\left\{|B_1| \leq M'\frac{7}{\sqrt{2^n}}\right\}^3 \leq \left(M'\frac{7}{\sqrt{2^n}}\right)^3.
\end{aligned}$$

Finalment

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{2^n-3}\Omega_{n,k}\right) \le (2^n-3)\left(M'\frac{7}{\sqrt{2^n}}\right)^3 \le 2^n\left(M'\frac{7}{\sqrt{2^n}}\right)^3 = \frac{(7M')^3}{\sqrt{2^n}}.$$

Donat que la darrera expressió és el terme general d'una sèrie convergent, pel lema de Borel-Cantelli,

$$P\left\{\text{hi ha un } t_0 \in [0,1) \text{ tal que } \sup_{h\in[0,1]}\frac{|B_{t_0+h}-B_{t_0}|}{h} \le M\right\} \le P\left(\limsup_n \bigcup_{k=1}^{2^n-3}\Omega_{n,k}\right) = 0.$$

□

Ens podríem plantejar si, quasi segurament, $D^+B_t \in \{-\infty,\infty\}$ per a tot $t \in [0,1)$. La resposta es que no, ja que, quasi segurament, existeix un temps t en el qual $D^+B_t = 0$. Es tracta però d'un temps excepcional, on el moviment Brownià es comporta de manera diferent a quasi qualsevol altre punt.

5 Conclusions

Al llarg del treball, hem pogut estudiar amb profunditat el moviment Brownià. Hem donat primer una motivació, emfatitzant la seva importància dins la teoria de processos estocàstics. Posteriorment hem presentat una construcció del moviment, procurant que fos el màxim d'entenedora possible, i fent-ne una simulació amb R seguint el mateix procediment. Finalment hem desenvolupat una bona part de les propietats del procés, algunes d'elles a través de demostracions força denses i feixugues.

El fet d'estudiar el moviment d'una manera tant àmplia, ha comportat que no arribéssim a donar cap resultat aplicat de l'estudi realitzat, que tot i que l'objectiu principal era romandre en el moviment Brownià, considero que hagués estat interessant mostrar alguna pinzellada de les aplicacions de l'estudi realitzat.

Seguint aquesta línia cara al futur, amb una base sòlida sobre el moviment Brownià, es podria encarar el treball cap a un estudi, per exemple, del càlcul estocàstic.

6 A Apèndix: Scripts de R

Script de R per a simular el conjunt d'intervals $\Lambda_2(3)$.

```
Delta <- function(n,m) {
  num <- c()
  for (j in 0:(m-1)){
    a=j/m
    for (t in 0:(m-1)){
      b=t/m
      for (k in 1:(2^n)) {
        num<-c(num,(k+b-1)*exp(-n+a), (k+b)*exp(-n+a))
      }
    }
  }
  return(num)
}
yval <- function(n,m){
  y <- c()
  for(i in 1:(m^2)){
    y<-c(y,rep(i,2^n))
  }
  return(y)
}
n<-2
m<-3
num<-Delta(n,m)
I <- Intervals(matrix(num,ncol=2,byrow=TRUE),
        closed = c(T,T),type ="R")
plot (I,yval(n,m), use_points = T)
```

Funcions de Schauder, S_k^n:

```
schauder <- function(t,n,k){
  ifelse(t<(k-1)/(2^n),0,
    ifelse(t<k/(2^n),2^(-(n+1)/2)*(t-(k-1)/(2^n))/(1/(2^n)),
        ifelse(t<(k+1)/(2^n),-2^(-(n+1)/2)*(t-(k+1)/(2^n))/(1/(2^n)),
            ifelse(t>=(k+1)/2^n, 0, NA))))
}
```

Les següents funcions són també necessàries per construir el Brownià:

```
set.seed(52)
xi<-rnorm(2^j)
#fun multiplica Snk pel valor de la variable aleatoria XInk
fun <- function(t,n,k){
  xi[2^(n-1)+(k-1)/2+1]*schauder(t,n,k)
}

#Cal crear també Schauder0, ja que és un cas especial
schauder0<-function(t){a+t*xi[1]}
```

```
#SumN és el sumatori interior de la construcció.
SumN<-function(t,n){sum(sapply(seq(1,2^n-1,2),FUN = fun, t=t, n=n))}

#Brownian és el sumatori exterior.
j<-10 #j es el limit del sumatori exterior.
Brownian<-function(t){schauder0(t)+sum(sapply(1,j,FUN=SumN,t=t))}
```

Finalment la implementació de la construcció de Lévy-Ciesielski, per recrear 100 trajectòries amb N=10 i concatenant les construccions per extendre la construcció a [0,100]:

```
set.seed(52)
for(traj in 1:40){
  a<-0
  x<-c()
  y<-c()
  for (iter in 1:100){
    j<-10
    dt<-0.2 #Usat en el plot.
    xi<-rnorm(2^j)
    x<-c(x,seq(iter-1,iter,dt))
    y<-c(y,sapply(seq(0,1,dt),FUN = Brownian))
    a<-y[length(y)]#Necessari per a poder concatenar.
  }
  if(traj==1){
      plot(x,y,type = "l",xlab="t",ylab="",ylim=range(-18,18))
  }
  else{
    lines(x,y,type="l")
  }
  print(traj)
}
```

Finalment, la funció de la llei del logaritme iterat és:

```
logit <- function(t){
  ifelse(t<=exp(1), 0, ifelse(t>exp(1), sqrt(2*t*log(log(t))), NA))
}
```

Referències

[1] Nualart, D.; Sanz-Solé, M.: *Curs de probabilitats*, PPU, Barcelona, 1990. ISBN: 84-7665-718-8.

[2] Mörters, P.; Peres, Y.: *Brownian motion*, (Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics), Cambridge University, 2010. ISBN: 978-0521760188.

[3] Karatzas, I.; Shreve, S.: *Brownian motion and stochastic calculus*, Springer-Verlag, New York, 1998. ISBN: 9780-0-387-97655-6.

[4] Karlin, S; Taylor, H. M.: *A first course in stochastic processes*, Academic Press, New York, 1975. ISBN: 0-12-398552-8.

[5] Kannan, D.: *An introduction to Stochastic Processes*, North Holland, New York, 1979. ISBN: 0-444-00301-0.

[6] Revuz, D.; Yor, M.: *Continuous martingales and Brownian Motion*, Springer, Germany, 1999, tercera edició. ISBN:3-540-64325-7.

[7] Jacod, J.; Protter, P.: *Probability Essentials*, Springer, Berlin, 2004. ISBN: 3-540-43871-8.

[8] Matsuda, K.: *Introduction to Brownian Motion*, The Graduate Center, The City University of New York, 2005, [http://maxmatsuda.com/Papers/Intro/Intro%20to%20Brownian%20Matsuda.pdf].

[9] Eberle, A.: *Stochastic Analysis. An Introduction*, Lecture notes in the University of Bonn, 2015, [https://wt.iam.uni-bonn.de/fileadmin/WT/Inhalt/people/Andreas_Eberle/StoAn1011/StoAnSkriptneu.pdf].