

El polinomio de Poincaré-Hodge  
de un producto simétrico de variedades kählerianas compactas

JOSEP BURILLO

*Departament d'Àlgebra i Geometria,*

*Facultat de Matemàtiques, Universitat de Barcelona, Gran Via 585, 08007 Barcelona, Spain*

Received 20/JUL/90

ABSTRACT

In this paper we compute the Poincaré-Hodge polynomial of a symmetric product of a compact kähler manifold, following the method used by Macdonald, in the topological case, to compute the Poincaré polynomial of a compact polyhedron, and we give some applications, in particular to the case of curves.

Introducción

El objetivo de este artículo es el cálculo del polinomio de Poincaré-Hodge de un producto simétrico de una variedad kähleriana compacta, basándonos en el artículo de Macdonald [5], donde se calcula el polinomio de Poincaré de un producto simétrico de un poliedro compacto. Dado que la cohomología de un producto simétrico es isomorfa a la parte fija de la cohomología del producto cartesiano bajo la acción del grupo simétrico  $\mathcal{S}_n$ , el cálculo se obtiene aplicando la teoría de representaciones de dicho grupo. En general  $X^{(n)}$  no es una variedad lisa, pero no obstante, la estructura de Hodge-Deligne canónica de  $H^r(X^{(n)}, \mathbb{C})$  es pura de peso  $r$  (Deligne [1]), luego es posible hablar de descomposición de Hodge en el producto simétrico y por tanto extender los cálculos de Macdonald a las representaciones obtenidas en la pieza de tipo  $(p, q)$  de la descomposición. En la sección 1 se siguen los razonamientos de

Macdonald extendiéndolos al caso bigraduado, y en la sección 2 se da el resultado principal para el polinomio de Poincaré-Hodge en el Teorema 2.4. Por último, en la sección 3 se dan algunas aplicaciones, en particular al caso de curvas, donde se da una expresión para los números de Hodge de los productos simétricos de una curva de género  $g$ .

## 1. Preliminares

(1.1) Sea  $\mathbb{K}$  un cuerpo de característica cero, y sea

$$M = \bigoplus_{r,s \geq 0} M^{r,s}$$

un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial bigraduado tal que la dimensión de cada  $M^{r,s}$  es finita, y sea  $h^{r,s}$  esta dimensión. Definimos el polinomio de Poincaré-Hodge del espacio bigraduado  $M$  por

$$P(M, x, y) = \sum_{r,s \geq 0} (-1)^{r+s} h^{r,s} x^r y^s.$$

Con estas notaciones es inmediato comprobar que, si  $M$  y  $N$  son dos  $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales bigraduados, y  $M \otimes_{\mathbb{K}} N$  se dota de la bigraduación natural, se verifica

$$P(M \otimes_{\mathbb{K}} N, x, y) = P(M, x, y)P(N, x, y).$$

(1.2) Sea  $n$  un entero positivo, y sea  $V = M^{\otimes n}$  la  $n$ -ésima potencia tensorial de  $M$ . Consideraremos en lo que sigue la representación  $\omega$  de  $\mathcal{S}_n$  sobre  $V$  definida por: dados  $\alpha \in \mathcal{S}_n$  y  $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \in M^{\otimes n}$ , con  $x_i \in M^{r_i, s_i}$ ,

$$\omega(\alpha)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = (-1)^\varepsilon x_{\alpha^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\alpha^{-1}(n)},$$

donde

$$\varepsilon = Q_\alpha(r_1 + s_1, \dots, r_n + s_n),$$

y  $Q_\alpha$  es la forma cuadrática definida por

$$Q_\alpha(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i < j} a_{ij} t_i t_j,$$

y

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i-j)(\alpha(i) - \alpha(j)) < 0 \\ 0 & \text{si } (i-j)(\alpha(i) - \alpha(j)) > 0. \end{cases}$$

Como la acción de  $\mathcal{S}_n$  es bihomogénea obtenemos, para cada par  $(r, s)$ , una representación  $\omega^{rs}$  del grupo simétrico  $\mathcal{S}_n$ .

Si  $H$  es un subgrupo de  $\mathcal{S}_n$ , notaremos

$$V^H = \bigoplus_{r,s \geq 0} V^{rs,H}$$

el subespacio de  $V$  de los elementos fijos por la acción de  $H$ .

### (1.3) Proposición

Con las notaciones anteriores, se tiene

$$P(V^H, x, y) = \frac{1}{n!} \sum_{\alpha \in \mathcal{S}_n} \chi^H(\alpha) P(M, x^{\lambda_1}, y^{\lambda_1}) \cdots P(M, x^{\lambda_k}, y^{\lambda_k}),$$

donde  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  es el tipo de ciclo de la permutación  $\alpha$ , y  $\chi^H$  es el carácter de  $\mathcal{S}_n$  inducido por el carácter trivial de  $H$ .

*Demostración.* Sea  $\omega_H^{rs}$  la representación de  $H$  inducida por  $\omega^{rs}$ , y sea

$$\omega_H^{rs} = \sum_i a_i \rho_i, \quad a_i \in \mathbb{N},$$

la descomposición de  $\omega_H^{rs}$  en representaciones irreducibles. Si  $\chi_H^{rs}$  es el carácter asociado a la representación  $\omega_H^{rs}$ , y  $\chi_i$  es el carácter asociado a  $\rho_i$ , tomando caracteres resulta

$$\chi_H^{rs} = \sum_i a_i \chi_i.$$

Si  $\chi_1$  es el carácter trivial de  $\mathcal{S}_n$ , se tiene

$$a_1 = \dim_{\mathbb{K}} V^{rs,H}$$

y por tanto, de las relaciones de ortogonalidad de los caracteres irreducibles, se obtiene

$$\dim_{\mathbb{K}} V^{rs,H} = \frac{1}{|H|} \sum_{\alpha \in H} \chi_H^{rs}(\alpha).$$

Como, por la fórmula de reciprocidad de Frobenius,

$$\frac{1}{|H|} \sum_{\alpha \in H} \chi_H^{rs}(\alpha) = \frac{1}{n!} \sum_{\alpha \in \mathcal{S}_n} \chi^{rs}(\alpha) \chi^H(\alpha),$$

si ponemos

$$\Phi(\alpha) = \sum_{r,s \geq 0} (-1)^{r+s} \chi^{rs}(\alpha) x^r y^s,$$

entonces

$$P(V^H, x, y) = \frac{1}{n!} \sum_{\alpha \in \mathcal{S}_n} \chi^H(\alpha) \Phi(\alpha),$$

y así la demostración de la proposición estará completa con el siguiente

(1.4) **Lema**

$$\Phi(\alpha) = P(M, x^{\lambda_1}, y^{\lambda_1}) \cdots P(M, x^{\lambda_k}, y^{\lambda_k}).$$

*Demostración.* Como, por definición,  $\chi^{rs}(\alpha)$  es igual a la traza del endomorfismo  $\omega^{rs}(\alpha)$ , tenemos que probar que esta traza es igual a  $(-1)^{r+s}$  veces el coeficiente de  $x^r y^s$  en el producto de series formales, el cual es

$$\sum_{\substack{\lambda_1 r_1 + \cdots + \lambda_k r_k = r \\ \lambda_1 s_1 + \cdots + \lambda_k s_k = s}} (-1)^{r_1 + \cdots + r_k + s_1 + \cdots + s_k} h^{r_1 s_1} \cdots h^{r_k s_k}.$$

Si  $\alpha$  tiene tipo de ciclo  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ , entonces  $\alpha$  es conjugada a la permutación

$$(1, 2, 3, \dots, \lambda_1)(\lambda_1 + 1, \lambda_1 + 2, \dots, \lambda_1 + \lambda_2) \cdots \\ \cdots (\lambda_1 + \cdots + \lambda_{k-1} + 1, \dots, \lambda_1 + \cdots + \lambda_k).$$

Por tanto, podemos suponer que  $\alpha$  es esta permutación.

Para calcular la traza de  $\omega^{rs}(\alpha)$ , tenemos que encontrar la dimensión de los subespacios de los vectores  $\xi = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$  tales que  $\omega^{rs}(\alpha)\xi = \pm\xi$ . Para que esto se verifique es necesario que

$$x_1 = \cdots = x_{\lambda_1} \in M^{r_1 s_1}, \\ \vdots \\ x_{\lambda_1 + \cdots + \lambda_{k-1} + 1} = \cdots = x_{\lambda_1 + \cdots + \lambda_k} \in M^{r_k s_k},$$

donde

$$\begin{aligned}\lambda_1 r_1 + \cdots + \lambda_k r_k &= r, \\ \lambda_1 s_1 + \cdots + \lambda_k s_k &= s.\end{aligned}$$

Un elemento de este tipo verifica  $\omega^{rs}(\alpha)\xi = (-1)^\varepsilon \xi$ , donde  $\varepsilon$  se determina por

$$\varepsilon = Q_\alpha \left( r_1 + s_1, \overbrace{\dots}^{\lambda_1}, r_1 + s_1, \dots, r_k + s_k, \overbrace{\dots}^{\lambda_k}, r_k + s_k \right),$$

siendo ahora

$$\begin{aligned}Q_\alpha(t_1, \dots, t_n) &= t_{\lambda_1}(t_1 + \cdots + t_{\lambda_1-1}) \\ &\quad + \cdots + t_{\lambda_1+\cdots+\lambda_k}(t_{\lambda_1+\cdots+\lambda_{k-1}+1} + \cdots + t_{\lambda_1+\cdots+\lambda_k-1})\end{aligned}$$

y entonces se tiene

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \sum_{i=1}^k (\lambda_i - 1)(r_i + s_i)^2 \\ &\equiv \sum_{i=1}^k (\lambda_i + 1)(r_i + s_i) \pmod{2} \\ &= \sum_{i=1}^k \lambda_i r_i + \sum_{i=1}^k \lambda_i s_i + \sum_{i=1}^k r_i + \sum_{i=1}^k s_i \\ &= r + s + \sum_{i=1}^k r_i + \sum_{i=1}^k s_i.\end{aligned}$$

Por tanto, los elementos de tipo  $(r_1, s_1), \dots, (r_k, s_k)$  aportan a la traza un término igual a

$$(-1)^{r+s+r_1+\cdots+r_k+s_1+\cdots+s_k} h^{r_1 s_1} \dots h^{r_k s_k},$$

con lo que finaliza la demostración.  $\square$

## 2. El polinomio de Poincaré-Hodge de $X^{(n)}$

(2.1) Sea  $X$  una variedad kähleriana compacta. Se define el polinomio de Poincaré-Hodge de  $X$  por

$$h(X, x, y) = \sum_{r,s \geq 0} h^{rs} x^r y^s,$$

siendo  $h^{rs} = \dim_{\mathbb{C}} H^{rs}(X, \mathbb{C})$ , es decir, si se considera la bigraduación de  $H^*(X, \mathbb{C})$  dada por la descomposición de Hodge

$$H^r(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=r} H^{pq}(X),$$

entonces

$$h(X, x, y) = P(H^*(X, \mathbb{C}), -x, -y).$$

(2.2) Sea  $n$  un entero positivo. Si consideramos el producto cartesiano  $X^n$ , por la fórmula de Künneth, tenemos un isomorfismo bigraduado

$$H^*(X^n, \mathbb{C}) = H^*(X, \mathbb{C})^{\otimes n}.$$

El grupo simétrico  $\mathcal{S}_n$  actúa sobre  $X^n$  por permutación de las componentes, y la acción inducida en la cohomología coincide con la descrita en la sección 1. Si entonces tenemos un subgrupo  $G$  de  $\mathcal{S}_n$ , según Grothendieck [4, Teorema 5.3.1, corolario a la Proposición 5.2.3] se tiene que la proyección canónica

$$f : X^n \longrightarrow X^n/G$$

induce un isomorfismo

$$f^* : H^*(X^n/G, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^*(X^n, \mathbb{C})^G \subset H^*(X^n, \mathbb{C}).$$

Dado que  $X^n/G$  es una variedad en cohomología racional (Steenbrink [6, Proposición 1.4]), la estructura de Hodge-Deligne canónica de  $H^r(X^n/G, \mathbb{C})$  es pura de peso  $r$  (Deligne [1, Teorema 8.2.4]). Así se tiene,

$$H^r(X^n/G, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=r} H^{pq}(X^n/G).$$

Y como  $G$  actúa con automorfismos analíticos,  $f^*$  induce un isomorfismo

$$f^* : H^{pq}(X^n/G) \xrightarrow{\sim} H^{pq}(X)^G.$$

Análogamente al caso de variedades kählerianas compactas, se define el polinomio de Poincaré-Hodge de  $X^n/G$  por

$$h(X^n/G, x, y) = \sum_{p, q \geq 0} (-1)^{p+q} h^{pq} x^p y^q,$$

donde  $h^{pq} = \dim_{\mathbb{C}} H^{pq}(X^n/G, \mathbb{C})$ .

(2.3) **Proposición**

Con las notaciones anteriores,

$$h(X^n/G, x, y) = \frac{1}{n!} \sum_{\alpha \in \mathcal{S}_n} \chi^G(\alpha) h(X, (-1)^{\lambda_1-1} x^{\lambda_1}, (-1)^{\lambda_1-1} y^{\lambda_1}) \dots h(X, (-1)^{\lambda_k-1} x^{\lambda_k}, (-1)^{\lambda_k-1} y^{\lambda_k}).$$

*Demostración.* Resulta inmediatamente de la proposición 1.3.  $\square$

(2.4) **Teorema**

Sea  $X$  una variedad kähleriana compacta de números de Hodge  $h^{p,q}$ . Entonces

$$\sum_{n \geq 0} h(X^{(n)}, x, y) t^n = \prod_{p, q \geq 0} (1 - (-1)^{p+q} x^p y^q t)^{(-1)^{p+q+1} h^{p,q}}.$$

*Demostración.* Llamemos  $F(x, y, t)$  al desarrollo en serie de potencias de

$$\prod_{p, q \geq 0} (1 - x^p y^q t)^{(-1)^{p+q+1} h^{p,q}} = \frac{(1 - xt)^{h^{1,0}} (1 - yt)^{h^{0,1}} (1 - x^3 t)^{h^{3,0}} (1 - x^2 y t)^{h^{2,1}} \dots}{(1 - t)^{h^{0,0}} (1 - x^2 t)^{h^{2,0}} (1 - xyt)^{h^{1,1}} (1 - y^2 t)^{h^{0,2}} \dots}.$$

Sea  $M = H^*(X, \mathbb{C})$ . Con las notaciones de la sección 1, tenemos que probar que el coeficiente de  $t^n$  en el desarrollo de  $F(x, y, t)$  es  $P(V^{\mathcal{S}_n}, x, y)$ .

Añadamos  $n$  elementos  $z_1, \dots, z_n$  a  $\mathbb{Z}[[x, y]]$  tales que

$$s_r = z_1^r + \dots + z_n^r = P(M, x^r, y^r), \quad r = 1, \dots, n.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \log F(x, y, t) &= \sum_{p, q \geq 0} \frac{(-1)^{p+q} h^{p,q} x^p y^q}{1 - x^p y^q t} \\ &= \sum_{p, q \geq 0} (-1)^{p+q} h^{p,q} x^p y^q \sum_{r \geq 0} (x^p y^q t)^r \\ &= \sum_{r \geq 1} P(M, x^r, y^r) t^{r-1} \\ &\equiv s_1 + s_2 t + \dots + s_n t^{n-1} \pmod{t^n} \\ &= z_1 + \dots + z_n + (z_1^2 + \dots + z_n^2) t + \dots + (z_1^n + \dots + z_n^n) t^{n-1} \\ &\equiv \frac{z_1}{1 - z_1 t} + \dots + \frac{z_n}{1 - z_n t} \pmod{t^n} \\ &= \frac{d}{dt} \log \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - z_i t}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} F(x, y, t) &\equiv \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - z_i t} \pmod{t^{n+1}} \\ &\equiv 1 + h_1 t + \cdots + h_n t^n \pmod{t^{n+1}} \end{aligned}$$

donde

$$h_i = \sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = i} z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}.$$

Como

$$h_n = \frac{1}{n!} \sum_{\alpha \in \mathcal{S}_n} s_{\lambda_1} \cdots s_{\lambda_k},$$

se obtiene

$$h_n = \frac{1}{n!} \sum_{\alpha \in \mathcal{S}_n} P(V^{\mathcal{S}_n}, x^{\lambda_1}, y^{\lambda_1}) \cdots P(V^{\mathcal{S}_n}, x^{\lambda_k}, y^{\lambda_k}),$$

y por tanto, se deduce de la Proposición 2.3 que el coeficiente de  $t^n$  en el desarrollo de  $F(x, y, t)$  es  $P(V^{\mathcal{S}_n}, x, y)$ .  $\square$

(2.5) Recordemos que si  $X$  es una variedad topológica, o más generalmente, una variedad en cohomología racional, orientada, y de dimensión  $d = 4k$ , se define el índice de  $X$ ,  $i(X)$ , como la signatura de la forma cuadrática  $P$  definida en  $H^{2k}(X, \mathbb{R})$  por

$$P(\xi, \eta) = \int_X \xi \wedge \eta.$$

Por convenio, si  $d \neq 4k$ , se toma  $i(X) = 0$ .

Si  $X$  es una variedad kähleriana compacta, el teorema del índice de Hodge asegura que

$$i(X) = \sum_{p, q \geq 0} (-1)^p h^{pq}.$$

Consideremos ahora el producto simétrico  $X^{(n)}$  de una variedad kähleriana compacta  $X$ . Sea  $\omega_X$  la 2-forma fundamental de  $X$ . Si llamamos  $\pi_i$  a la  $i$ -ésima proyección de  $X^n$  en  $X$ , resulta que

$$\omega_{X^n} = \omega_1 + \cdots + \omega_n, \quad \omega_i = \pi_i^* \omega,$$

es la 2-forma fundamental de  $X^n$ . Notemos que  $\omega_{X^n}$  es invariante por  $\mathcal{S}_n$ , luego el operador  $L$  de Lefschetz, definido sobre  $H^*(X^n, \mathbb{R})$  por  $L = \omega_{X^n} \wedge$ , deja estable



$H^*(X^{(n)}, \mathbb{R})$ , y por tanto el teorema de descomposición y el teorema difícil de Lefschetz son válidos para  $X^{(n)}$ . Finalmente, si introducimos la forma cuadrática

$$Q(\xi, \eta) = (-1)^{r(r+1)/2} \int_{X^{(n)}} L^{dn-r} \xi \wedge \eta, \quad \xi, \eta \in P^r(X^{(n)}, \mathbb{R}),$$

como

$$\int_{X^{(n)}} L^{dn-r} \xi \wedge \eta = \frac{1}{n!} \int_{X^n} L^{dn-r} \xi \wedge \eta,$$

y

$$i^{-r} (-1)^q (-1)^{r(r+1)/2} \int_{X^n} L^{dn-r} \xi \wedge \bar{\xi} > 0, \quad \xi \in P^{r-q, q}(X^n, \mathbb{R}),$$

es inmediato deducir que el teorema del índice de Hodge sigue siendo válido para  $X^{(n)}$ . Se deduce entonces el siguiente

**Corolario**

$$\sum_{n \geq 0} i(X^{(n)}) t^n = \frac{(1-t)^{(i(X)-e(X))/2}}{(1+t)^{(i(X)+e(X))/2}}.$$

### 3. Aplicaciones

(3.1) Observemos en primer lugar que el Teorema 2.4 extiende de forma natural el resultado obtenido por Macdonald [5]. En efecto, dado que el polinomio de Poincaré se obtiene a partir del polinomio de Poincaré-Hodge igualando  $x$  con  $y$ , se tiene, con las notaciones de [5],

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} P(X, -x) t^n &= \sum_{n \geq 0} h(X, x, x) t^n \\ &= \prod_{p, q \geq 0} (1 - (-1)^{p+q} x^{p+q} t)^{(-1)^{p+q+1} h^{pq}} \\ &= \prod_{n \geq 0} (1 - (-1)^n x^n t)^{(-1)^{n+1} B_n}. \end{aligned}$$

(3.2) Sea  $S$  una superficie algebraica proyectiva y lisa, y sea  $S^{[n]}$  el esquema de Hilbert de  $n$ -pletas en  $S$ . Puesto que el morfismo natural

$$S^{[n]} \longrightarrow S^{(n)}$$

es birracional (Fogarty [2, Corolario 2.6]), se sigue de [6, Teoremas 1.11 y 1.12] que

$$h^{p0}(S^{[n]}) = h^{p0}(S^{(n)})$$

y esto nos permite comprobar la Proposición 3.3 de Göttsche [3]:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \sum_{p \geq 0} h^{p0}(S^{[n]}) z^p t^n &= \sum_{n \geq 0} h(S^{[n]}, z, 0) t^n \\ &= \prod_{p \geq 0} (1 - (-1)^p z^p t)^{(-1)^{p+1} h^{p0}(S)}. \end{aligned}$$

(3.3) En el caso particular de que  $X$  sea una curva algebraica proyectiva y lisa, entonces podemos obtener una expresión explícita de los números de Hodge:

#### Corolario

Si  $C$  es una curva proyectiva y lisa de género  $g$ , entonces los números de Hodge del producto simétrico  $C^{(n)}$  son

$$h^{pq}(C^{(n)}) = \sum_{0 \leq k \leq p} \binom{g}{p-k} \binom{g}{q-k}, \quad 0 \leq p \leq q, p+q \leq n.$$

*Demostración.* Según el Teorema 2.4, el número de Hodge  $h^{pq}(C^{(n)})$  es el coeficiente de  $x^p y^q t^n$  en el desarrollo en serie de potencias de

$$\frac{(1+xt)^g (1+yt)^g}{(1-t)(1-xyt)}.$$

Considerando los desarrollos en serie de los términos que aparecen en la fracción anterior, el término en  $x^p y^q t^n$  es

$$\sum_{\substack{a+b+c+d=n \\ a+d=p \\ b+d=q}} \binom{g}{a} \binom{g}{b} x^{a+d} y^{b+d} t^{a+b+c+d}, \quad a, b, c, d \geq 0.$$

Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned} h^{pq}(C^{(n)}) &= \sum_{\substack{a+b+c+d \leq n \\ a+d=p \\ b+d=q}} \binom{g}{a} \binom{g}{b} \\ &= \sum_{0 \leq k \leq p} \binom{g}{p-k} \binom{g}{q-k}. \quad \square \end{aligned}$$

Notemos finalmente que, en este caso, la fórmula del índice es

$$\sum_{n \geq 0} i(C^{(n)})t^n = (1 - t^2)^{g-1}.$$

### References

1. P. Deligne, Théorie de Hodge III, *Publ. Math. IHES* **44** (1972), 5–77.
2. J. Fogarty, Algebraic families on an algebraic surface, *Amer. J. Math.* **90** (1968), 511–521.
3. L. Göttsche, The Betti numbers of the Hilbert scheme of points on a smooth projective surface, *Math. Ann.* **286** (1990), 193–207.
4. A. Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tôhoku Math. J.* **9** (1957), 119–221.
5. I. G. Macdonald, The Poincaré polynomial of a symmetric product, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **58** (1962), 563–568.
6. J. H. M. Steenbrink, Mixed Hodge structures on the vanishing cohomology, in *Real and Complex Singularities*, pp. 525–565, Sijthoff & Nordhoff, Oslo 1976.