ACERCA DEL GENERO VIRTUAL DE LAS SUPERFICIES ALGEBRAICAS

por

EDUARDO CASAS ALVERO

Segunda parte [1]

CAPITULO VI

REPRESENTACION DE CURVAS EN EL ESPACIO

Dedicamos el resto de la memoria al cálculo efectivo, en algunos casos particulares, de la función asociada, con vistas a obtener una expresión efectiva de algunas variaciones de género virtual. Se hacen necesarios en primer lugar algunos resultados relativos a representación de curvas del espacio proyectivo tridimensional que obtendremos en este capítulo.

1. — SOBRE LA DEFINICIÓN DE INTERSECCIÓN DE VARIEDADES ALGEBRAICAS

En conexión con el problema de la representación de curvas en el espacio como intersección de superficies, se han utilizado diversas definiciones de intersección de variedades algebraicas. La definición que podríamos llamar conjuntista toma como intersección de las variedades $V_1, \ldots, V_m$ la única variedad reducida que tiene como conjunto subyacente la intersección de los conjuntos subyacentes a $V_1, \ldots, V_m$ (PERRON [19], KNESER [9], DIEUDONNE [4]). Tal definición equivale a prescindir de toda la estructura de una variedad algebraica que no queda determinada por el conjunto subyacente

(1) La primera parte de esta memoria se publicó en Collectanea Mathemática, Vol XXVII - Fasc 1.º - Año 1976, en ella se hallan la introducción y la bibliografía que son comunes a las dos partes.

y que viene dada, en lenguaje de esquemas, por los elementos nilpotentes del haz estructural.

La definición conjuntista fue ya rehusada por los autores clásicos de la escuela italiana que atribuían, a veces en forma poco precisa, a las componentes o a algunas subvariedades de la intersección, ciertas multiplicidades que les permitían distinguir entre una componente y la reducida correspondiente (caso de una curva contada varias veces, por ejemplo) o apreciar la presencia de componentes sumergidas. Cabe citar la discusión de las lezioni de ENRIQUES-CHISINI ([6], libro V, cap. 5.º) sobre la imposibilidad de la representación de la quíntica de VAHLEN como intersección de tres superficies, donde se señala que no es admisible tal representación aun en el caso en que los puntos de ulterior intersección de las tres superficies vinieran a caer, para una posición particular de las mismas, sobre la curva: aparecerían en este caso los puntos como componentes sumergidas de la intersección. Publicada posteriormente la memoria de Perron [19] donde se establece una tal representación de la quíntica, SEVERI hizo diversas precisiones sobre el problema ([27]): distingue Severi entre intersección e interferencia de variedades algebraicas, dando el nombre de interferencia a la intersección en sentido conjuntista y señalando que en la representación de PERRON, la quíntica aparece como interferencia y no intersección de las tres superficies, ya que determinados puntos de la quíntica aparecen con multiplicidad mayor que uno en la intersección (1). Citemos finalmente la discusión de [7], pag. 18, sobre la necesidad de considerar variedades definidas por ideales no radicales para precisar conceptos como los de curva contada varias veces.

Con el lenguaje de esquemas no hay dificultad en dar una definición con mayor contenido geométrico que la meramente conjuntista, en concordancia con el espíritu clásico: Si V es una variedad algebraica y $V_1, \ldots, V_m$ son subvariedades de V dadas por haces de ideales $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$, la intersección de $V_1, \ldots, V_m$ será la subvariedad de V definida por el haz de ideales $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \ldots + \mathbf{a}_m$ (la intersección en sentido conjuntista vendría dada por el radical de $\mathbf{a}$). Esta misma definición es la utilizada, en el caso afín, por ABHYANKAR en [1] y, considerando la categoría de las subvariedades de V, la intersección definida es el producto, en dicha categoría, de $V_1, \ldots, V_m$. Nuestra

---

(1) No parece pues que sea aplicable a los autores italianos citados lo expresado en el prólogo (pág. 12) de [1].

definición es pues también la de una intersección en el sentido abstracto de la teoría de categorías.

2. — Curvas localmente intersección de dos superficies

Designemos por C una curva del espacio proyectivo $P_3(k)$. Sea Ω el haz estructural de $P_3(k)$ e I el haz de ideales de C. Diremos que la curva C es localmente intersección de dos superficies en uno de sus puntos x cuando el ideal I_x de Ω_x admita un sistema de dos generadores. Se comprueba fácilmente que la definición equivale a la existencia de un entorno afín U de x y dos superficies tales que la intersección de las dos superficies es una curva que coincide con C en el abierto U: las ecuaciones locales de las superficies en el punto x dan un sistema de dos generadores de I_x.

Un ejemplo sencillo de curva que no es localmente intersección de dos superficies en un punto se halla en [18], pag. 29, basta observar que no coinciden las potencias ordinarias y simbólicas para el ideal de la curva en el origen y aplicar I.2. Pueden verse también los ejemplos de Macaulay en [2]. Probaremos a continuación que cualquier curva irreducible del espacio dotada a lo más de singularidades planas (es decir, con dimensión del espacio tangente de Zariski menor que tres en cada punto), en particular toda curva irreducible no singular, es localmente intersección de dos superficies en cada uno de sus puntos. Tomaremos en primer lugar un resultado de Samuel ([20], teorema 1) en la forma:

Lema VI.1 (Samuel). *Sea C una curva irreducible del espacio proyectivo $P_3(k)$ y sea x un punto de C en el que el espacio tangente de Zariski tiene dimensión menor o igual que dos. Existe una proyección sobre un plano desde un punto del espacio que induce isomorfismo entre el anillo local de x en C y el de su imagen en la proyección de C.*

Adaptando al caso local un lema de Abhyankar ([1], pag. 65) se tiene

Lema VI.2. (Abhyankar). *Sea B_n el localizado de $k[X_1, ..., X_n]$ en el ideal correspondiente al origen, B_m el localizado de $k[X_1, ..., X_m]$ también en el ideal correspondiente al origen. Supongamos $m < n$, sea σ la inclusión $B_m \to B_n$ y sea a un ideal de B_n; si σ induce isomorfismo σ: $B_m / a \cap B_m \simeq B_n / a$, tomando $F_i \in B_m$ tales que $F_i \equiv X_i$ mod. a, $i = m+1, ..., n$, el ideal a está engendrado por los elementos de $a \cap B_m$ y los $F_i - X_i$, $i = m+1, ..., n$.*

La demostración se obtiene fácilmente a partir de la de Abhyankar con ligeras modificaciones.

En el caso particular en que $n = 3$, $m = 2$ y a es el ideal en el origen de una curva en el espacio, $a \cap B_2$ será un ideal principal, correspondiente a la proyección de la curva sobre el plano de los dos primeros ejes. Si G es la ecuación local en el origen de dicha proyección, $GB_2 = a \cap B_2$, y con las hipótesis del lema resulta a generado por G y una fracción racional, definida en el origen, de la forma $X_3 - F(X_1, X_2)$ lo que equivale a una representación monoidal, localmente en el origen, de la curva como intersección del cilindro $G(X_1, X_2) = 0$ y el monoide $X_3 = F(X_1, X_2)$.

PROPOSICIÓN VI.3. *Si C es una curva irreducible de $P_3(k)$* y *x es un punto de C en el que el espacio tangente de Zariski es de dimensión menor que tres, C es localmente intersección de dos superficies en x.*

Demostración. Por VI.1 existe una proyección en un plano que induce isomorfismo entre el anillo local de C en x y el de su proyección en el punto correspondiente; basta tomar un sistema de coordenadas afines apropiado para aplicar VI.2 y obtener la ya mencionada representación monoidal de C localmente en x.

3. — PRIMERA REPRESENTACIÓN DE UNA CURVA COMO INTERSECCIÓN DE SUPERFICIES.

Probaremos en el parágrafo siguiente que si una curva C es localmente intersección de dos superficies en cada uno de sus puntos, existe una superficie irreducible que pasa por C sobre la que C es localmente principal. A tal fin demostraremos en primer lugar la

PROPOSICIÓN VI.4. *Si C es una curva de $P_3(k)$ localmente intersección de dos superficies en cada uno de sus puntos, existe un recubrimiento de C por dos abiertos afines U_1, U_2 de $P_3(k)$ y cuatro superficies del mismo grado S_1, S_2, S_3, S_4 que pasan por C de manera que C es intersección de S_1 y S_2 en U_1 mientras lo es de S_3 y S_3 en U_2.*

Demostración. Sean $C_1, \ldots, C_s$ las componentes de C y sea U un abierto afín del espacio que corte a cada una de ellas: tomemos puntos cerrados $x_i \in C_i \cap U$, $i = 1, \ldots, s$. Llamaremos A al anillo correspondiente a U y a al ideal de C en A. Si designamos por Ω el haz estructural de $P_3(k)$, por hipótesis el ideal $a\Omega_{x_i}$ está engendrado por dos elementos para cada i; en virtud de I.4 existen $f, g \in A$ tales que $a\Omega_{x_i} = (f, g)\,\Omega_{x_i}$, $i = 1, \ldots, s$. Si consideramos el ideal (f, g) del anillo A, se trata de un ideal que define una curva en U entre cuyas componentes se hallan las de C. En efecto, las componentes de (f, g) contenidas en alguno de los ideales maximales m_i de A correspondientes a los puntos x_i coinciden con las de a, dado que al localizar en m_i resulta $aA_{m_i} = a\Omega_{x_i} = (f, g)\ \Omega_{x_i} = (f, g)\,A_{m_i}$. Teniendo en cuenta que cada componente primaria de a está contenida en alguno de los m_i, $(f, g) = a \cap q_1 \cap \ldots \cap q_r$ donde los q_j son primarios no contenidos en ningún m_i. Consideremos además un plano, de ecuación homogénea $H = 0$, que corte a U sin pasar por ninguno de los x_i y sea q el ideal correspondiente a dicho plano en A. El ideal $q_1 \cap \ldots \cap q_r \cap q$ no está contenido en ninguno de los m_i y podemos elegir un elemento $h \in q_1 \cap \ldots \cap q_r \cap q - m_1 \cup \ldots \cup m_s$. Sea U_1 el abierto afín $U_1 = D(h) \subset Spec\ A = U$ y sea A_1 el anillo correspondiente, localizado de A en el sistema multiplicativo de las potencias de h. Resulta inmediatamente que el ideal generado por f, g en A_1 coincide con el de C, aA_1. Escribiendo $f = F_1/G$, $g = F_2/G$, donde F_1, F_2 y G son polinomios homogéneos del mismo grado y G no se anula en ningún punto de U_1, las superficies de ecuaciones $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ pasan por C, ya que las ecuaciones se anulan en un abierto de cada componente de C, y su intersección en U_1 coincide con C al ser $aA_1 = fA_1 + gA_1$. Se observa además que los grados de las dos superficies pueden aumentarse indefinidamente sin más que multiplicar, en las fracciones anteriores, numerador y denominador por H, lo que equivale a añadir a las superficies nuevas componentes disjuntas con U_1.

El abierto U_1 corta a cada una de las componentes de C, por tanto $C - U_1$ se reducirá a un número finito de puntos; sean $y_1, \ldots, y_t$ puntos cerrados de C elegidos de forma que haya por lo menos uno en cada componente de C y entre ellos se cuenten todos los de $C - U_1$. Repitiendo el proceso anterior a partir de $y_1, \ldots, y_t$, se obtendrá un abierto U_2, entorno afín de los y_i donde C es intersección de dos nuevas superficies que pasan por C: $F_3 = 0$, $F_4 = 0$. La arbitrariedad en los grados permite tomar las cuatro superficies del mismo grado.

No se concluye de la proposición que las cuatro superficies obtenidas tengan por intersección la curva C, ello sólo es cierto en el entorno $U_1 \cup U_2$ de C; la intersección de las cuatro superficies puede constar de C y otras componentes fuera de $U_1 \cup U_2$.

4. — EXISTENCIA DE UNA SUPERFICIE SOBRE LA C ES LOCALMENTE PRINCIPAL

TEOREMA VI.5. *Si C es una curva de $P_3(k)$ localmente intersección de dos superficies en cada uno de sus puntos, existe una superficie irreducible S que pasa por C de manera que C es localmente principal sobre S.*

Demostración. Cualquiera que sea la superficie S por C, el haz de ideales de C es localmente principal, engendrado por 1, en los puntos de $S - C$; atenderemos pues a los puntos de C.

Designemos por θ el haz estructural de S y por Ω el de $P_3(k)$, Si x es un punto de C, θ_x es el cociente de Ω_x por una ecuación local f_x de S. El hecho de que el ideal de C en θ_x sea principal equivale a que el de C en Ω_x admita un sistema de dos generadores uno de los cuales sea f_x. Debemos probar pues la existencia de una superficie S que pase por C de modo que su ecuación local en cada uno de los puntos de C pueda formar parte de un sistema de dos generadores del ideal de C en el punto.

Observemos en primer lugar que si A es un anillo local, m su ideal maximal y $a = (f, g)$ un ideal de A engendrado por dos elementos, tomando $h \in a$, $h = \alpha f + \beta g$, basta que α o β sean inversibles en A para que a admita un sistema de dos generadores del que forme parte h: en efecto, si por ejemplo α es inversible, puede despejarse f de la relación anterior y resulta $(f, g) = (h, g)$.

Utilizando todas las notaciones de VI.4, probaremos que una superficie genérica $F = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 + \lambda_4 F_4 = 0$, del sistema lineal engendrado por las S_i, $i \pm 1, \dots, 4$, verifica las condiciones del enunciado. Sabemos que F_1/G, F_2/G generan el ideal de C en el abierto U_1, siendo S_3, S_4 superficies que pasan por C, se tendrán relaciones

$$F_3/G = N_1/M \cdot F_1/G + N_2/M \cdot F_2/G$$
$$F_4/G = N_1'/M \cdot F_1/G + N_2'/M \cdot F_2/G$$

con N_1, N_2, N_1', N_2', M polinomios homogéneos del mismo grado y M no nulo en ningún punto de U_1. Una ecuación en U_1 de la superficie $F = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 + \lambda_4 F_4 = 0$ será

$$F/G = (\lambda_1 + \lambda_3 N_1/M + \lambda_4 N_1'/M)\, F_1/G + \\ + (\lambda_2 + \lambda_3 N_2/M + \lambda_4 N_2'/M)\, F_2/G$$

Para que tal superficie cumpla la condición requerida en U_1 basta que los términos $(\lambda_1 + \lambda_3 N_1/M + \lambda_4 N'_1/M)$ y $(\lambda_2 + \lambda_3 N_2/M + \lambda_4 N'_2/M)$ no se anulen simultáneamente en ningún punto de $C \cap U_1$; de ocurrir esto en un punto x tendríamos

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= - \lambda_3 N_1(x)/M(x) - \lambda_4 N'_1(x)/M(x) \\ \lambda_2 &= - \lambda_3 N_2(x)/M(x) - \lambda_4 N'_2(x)/M(x) \end{aligned} \tag{1}$$

Interpretando $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ como coordenadas homogéneas de un punto, al variar x en $C \cap U_1$, el punto $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ sujeto a las relaciones (1) describe parte de una superficie y por lo tanto, para una elección genérica de los λ_i, no se verifican simultáneamente las (1) en ningún punto de $U_1 \cap C$. El mismo razonamiento puede hacerse respecto de U_2, con ello, para una elección genérica de los λ_i, sobre la superficie de ecuación homogénea $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 + \lambda_4 F_4 = 0$, C es localmente principal. Una adecuada elección de F_1, F_2, F_3, F_4 permite asegurar que el sistema lineal no está formado con las superficies de un haz y la superficie genérica es irreducible por el teorema de BERTINI. Puede procederse también ampliando el sistema con una nueva superficie irreducible que pase por C con lo que la superficie genérica de este nuevo sistema lineal estará en las condiciones requeridas.

5. — REPRESENTACIÓN DE UNA CURVA COMO INTERSECCIÓN DE CUATRO SUPERFICIES

El teorema anterior nos permite generalizar, a curvas localmente intersección de dos superficies en cada uno de sus puntos, el clásico teorema que afirma que toda curva no singular del espacio es intersección de cuatro superficies (1) ([6] libro 5.º, [27] pag. 238).

TEOREMA VI.6. *Si C es una curva de $P_3(k)$, localmente intersección de dos superficies en cada uno de sus puntos, C es intersección de cuatro superficies.*

---

(1) Como señala Severi en la memoria citada ([27] pág. 266), la teoría clásica de curvas en el espacio se refiere a curvas no singulares, ejemplos de Macaulay ([2]) muestran que el teorema es falso para curvas cualesquiera. Algunas demostraciones del teorema, por ejemplo la de [6] no son lo bastante precisas pero la de [27] no admite objeciones. Los teoremas de Perron y Kneser ([19], [9]) con solo tres superficies se fundan en la noción conjuntista de intersección, como ya hemos señalado al comienzo de este capítulo.

Demostración. Bastará probar que existe una superficie S que pasa por C de tal manera que el ideal de C en S viene generado, en cada punto, por las ecuaciones locales (reducidas módulo el ideal de S) de tres superficies que pasan por C. A tal fin consideremos una superficie irreducible S que pase por C de modo que C sea localmente principal sobre S. Seguiremos en S un proceso parecido al de la demostración de VI.4. Sean $x_1, ..., x_s$ puntos cerrados elegidos uno en cada componente de C y sea U un abierto afín de S que contenga a los x_i. Sea A el anillo afín de U y $\mathbf{a}$ el haz de ideales de C en S. Por hipótesis cada $\mathbf{a}_{x_i}$ es principal, aplicando I.5, existe $f \in A$ tal que $f\theta_{x_i} = \mathbf{a}_{x_i}$ para cada $i = 1, ..., s$ (se designa por θ el haz estructural de S). Al igual que en la demostración de VI.4, el ideal fA difiere del de C en componentes primarias no contenidas en ninguno de los ideales m_i correspondientes a los puntos x_i: puede por tanto reducirse el abierto U a un abierto afín U_1 con $x_i \in U_1$, $i = 1, ..., s$, de modo que el ideal de C en U_1 venga engendrado por f.

Dado que U_1 corta a todas las componentes de C, $C - U_1$ es un conjunto finito: sean $y_1, ..., y_h$ puntos cerrados de C elegidos de forma que haya por lo menos uno en cada componente de C y que entre ellos se cuenten todos los de $C - U_1$. Por otra parte, al ser $S - U_1$ un subconjunto propio y cerrado de S, se tratará de una subvariedad de S cuyas componentes tendrán dimensión menor que dos. Sean $z_1, ..., z_r$ puntos elegidos uno en cada componente de $S - U_1$. Como en el caso anterior es posible determinar un abierto U_2, afín y que contenga a los puntos y_i, z_j de modo que el ideal de C en el anillo correspondiente a U_2 sea principal, engendrado por un cierto g. Se observa que f, g provienen, por paso al cociente, de ciertas fracciones racionales F_1/G_1, F_2/G_2 donde F_1, F_2, G_1, G_2 son polinomios homogéneos en las coordenadas de $P_3(k)$, G_1 no nulo en ningún punto de U_1 y G_2 no nulo en ningún punto de U_2. Consideremos las superficies $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ y una tercera $F_3 = 0$ que pase por C sin pasar por ninguno de los puntos de $S - U_1 \cup U_2$. Ello es posible porque, al contener U_2 puntos de cada componente de $S - U_1$, $S - U_1 \cup U_2$ es un conjunto finito. Las tres superficies pasan por C, baste observar respecto de las dos primeras que cada una de ellas contiene un entorno de un punto en cada componente de C. En cualquier punto de U_1 la ecuación local de $F_1 = 0$ genera el ideal de C en S, lo mismo ocurre en el abierto U_2 con las ecuaciones locales de $F_2 = 0$ y finalmente, en los puntos de $S - U_1 \cup U_2$ la ecuación local de $F_3 = 0$ es inversible y genera el ideal de C en estos puntos (que están fuera de C) pues este es todo el anillo local. Resulta con ello que la intersección de las tres superficies y S es C.

CAPITULO VII

LA FUNCION ASOCIADA A UNA CURVA EN EL ESPACIO

Designemos por C una curva de $P_3(k)$ y sean Ω el haz estructural de $P_3(k)$ y $\mathbf{A}$ el haz de ideales de C en el espacio. Al igual que sobre una superficie puede considerarse la función asociada a C en el espacio, $F(n) = \chi(\Omega / \mathbf{A}^{(n)})$. Probaremos en este capítulo que tal función, para curvas localmente intersección de dos superficies en cada punto, es polinómica y la calcularemos explícitamente.

Supongamos a partir de ahora que C es localmente intersección de dos superficies en cada uno de sus puntos y sea S una superficie irreducible que pase por C de manera que C sea localmente principal sobre S (VI. 5). Designemos por θ el haz estructural de S, por $\mathbf{a}$ el haz de ideales de C en S y por $\mathbf{I}$ el haz de ideales de S en el espacio; $\mathbf{a}$ e $\mathbf{I}$ son localmente principales. En virtud de *I*.3, las potencias simbólicas de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{A}$ coinciden con las ordinarias.

En el capítulo IV hemos calculado la función asociada a C en S:

$$\chi(\theta / \mathbf{a}^n) = -\frac{1}{2}(C \cdot C)\, n^2 + (1 - p_c + \frac{1}{2}(C \cdot C))\, n$$

donde el número de autointersección se entiende calculado sobre S. De la sucesión exacta de haces

$$\theta \to \mathbf{I} + \mathbf{A}^n / \mathbf{A}^n \to \Omega / \mathbf{A}^n \to \theta / \mathbf{a}^n \to 0$$

resulta

$$\chi(\Omega / \mathbf{A}^n) = \chi(\theta / \mathbf{a}^n) + \chi(\mathbf{I} + \mathbf{A}^n / \mathbf{A}^n) \tag{1}$$

El primer término es ya conocido; por lo que respecta al segundo tenemos

$$\mathbf{I} + \mathbf{A}^n / \mathbf{A}^n \simeq \mathbf{I} / \mathbf{I} \cap \mathbf{A}^n$$

Probemos en primer lugar que $\mathbf{I} \cap \mathbf{A}^n = \mathbf{I}\mathbf{A}^{n-1}$: si x es un punto cualquiera de $P_3(k) - C$, la igualdad de las fibras en x es obvia. Si $x \in C$, $\mathbf{A}_x = (f_x, g_x)$ donde f_x genera $\mathbf{I}_x$ y g_x genera, al cociente por

$\mathbf{I}_x$, $\mathbf{a}_x$. La hipótesis de que $\mathbf{A}_x$ corresponde a una curva asegura que todos sus primos asociados son de altura dos, con ello g_x no puede ser divisor de cero módulo f_x. Si un múltiplo de f_x es de $\mathbf{A}_x^n$ se tendrá una expresión

$$f_x f' = \alpha_n g_x^n + \alpha_{n-1} g_x^{n-1} f_x + \ldots + \alpha_0 f_x^n$$

Reduciendo módulo f_x, $\bar{0} = \alpha_n g_x^n$ de donde $\alpha_n \in (f_x)$ y el coeficiente f' se expresa como elemento de $\mathbf{A}_x^{n-1}$. Resulta $\mathbf{A}^n \cap \mathbf{I} \subset \mathbf{A}^{n-1}\,\mathbf{I}$ y la inclusión contraria es obvia.

Tenemos pues

$$\mathbf{I}/\mathbf{I} \cap \mathbf{A}^n = \mathbf{I}/\mathbf{I}\,\mathbf{A}^{n-1} \simeq \Omega/\mathbf{A}^{n-1} \otimes_\Omega \mathbf{I}$$

Si designamos ahora por $\mathbf{I}'$ el haz de ideales de una superficie S', del mismo grado que S, $\mathbf{I} \simeq \mathbf{I}'$ y podemos elegir S' de manera que corte a C en un número finito de puntos:

$$\Omega/\mathbf{A}^{n-1} \otimes_\Omega \mathbf{I} \simeq \Omega/\mathbf{A}^{n-1} \otimes_\Omega \mathbf{I}' \simeq \mathbf{I}'/\mathbf{I}'\,\mathbf{A}^{n-1}$$

Sabido que S' no contiene ninguna componente de C, se observa que $\mathbf{I}'$ no está contenido en ninguno de los haces de ideales primos asociados a $\mathbf{A}$ que son exactamente los asociados a $\mathbf{A}^{(n-1)} = \mathbf{A}^{n-1}$, ello permite demostrar facilmente que $\mathbf{I}'\,\mathbf{A}^{n-1} = \mathbf{I}' \cap \mathbf{A}^{n-1}$ de donde

$$\mathbf{I}'/\mathbf{I}'\,\mathbf{A}^{n-1} = \mathbf{I}'/\mathbf{I}' \cap \mathbf{A}^{n-1} = \mathbf{I}' + \mathbf{A}^{n-1}/\mathbf{A}^{n-1}$$

podemos considerar la sucesión exacta

$$0 \to \mathbf{I}' + \mathbf{A}^{n-1}/\mathbf{A}^{n-1} \to \Omega/\mathbf{A}^{n-1} \to \Omega/\mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{I}' \to 0$$

y tendremos

$$\chi(\mathbf{I} + \mathbf{A}^n/\mathbf{A}^n) = \chi(\Omega/\mathbf{A}^{n-1}) - \chi(\Omega/\mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{I}') \qquad (2)$$

El haz $\Omega/\mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{I}'$ está cocentrado en un número finito de puntos,

$$\chi(\Omega/\mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{I}') = \Sigma_{x \in S' \cap C}\, dim_k\, \Omega_x/\mathbf{A}_x^{n-1} + \mathbf{I}_x'$$

y un cálculo sin dificultades permite obtener

$$dim_k\, \Omega_x / \mathbf{A}_x^{n-1} + \mathbf{I}_x' = \frac{1}{2}(n+1)\, n\, \mu_x$$

donde μ_x es la multiplicidad de intersección de C con S' en x. El cálculo se simplifica con una adecuada elección de S', puede tomarse por ejemplo S' formada por planos de un haz transversales a C y de modo que la recta base sea disjunta con C. En cualquier caso, si δ es el orden de C y s el de S' y S, $s\delta = \sum_x \mu_x$ y

$$\chi(\Omega / \mathbf{A}^{n-1} + \mathbf{I}') = \frac{1}{2}\delta s (n+1) n$$

De ahí, utilizando (1) y (2),

$$\chi(\Omega / \mathbf{A}^n) - \chi(\Omega / \mathbf{A}^{n-1}) = \chi(\theta / \mathbf{a}^n) - \frac{1}{2}\delta s (n+1) n =$$

$$= -\frac{n^2}{2}((C \cdot C) + \delta s) + n(1 - p_C + \frac{1}{2}((C \cdot C) + \delta s))$$

y sumando

$$\chi(\Omega / \mathbf{A}^n) = -\frac{n^3}{6}((C \cdot C) + \delta s) + \frac{n^2}{2}(1 - p_C) +$$

$$+ \frac{n}{6}(3 - 3p_C + (C \cdot C) + \delta s)$$

que es la expresión efectiva de la función asociada. La dependencia de esta expresión de la superficie auxiliar S es sólo aparente ya que S no interviene en la definición de la función asociada. En el próximo capítulo probaremos que $(C \cdot C) + \delta s = 2p_C - 2 + 4\delta$, con ello quedará demostrado el

Teorema VII.1. *Si C es una curva de $P_3(k)$, localmente intersección de dos superficies en cada uno de sus puntos, llamando δ al orden de C y p_C a su género virtual, la función asociada a C en el espacio es el siguiente polinomio en n*

$$\chi(\Omega / \mathbf{A}^n) = -\frac{1}{6}(2p_C - 2 + 4\delta) n^3 +$$

$$+ \frac{1}{2}(1 - p_C) n^2 + \frac{1}{6}(1 - p_C + 4\delta) n.$$

CAPITULO VIII. LA IGUALDAD $(C \cdot C) + \delta s = 2p_C - 2 + 4\delta$.

Demostraremos en este capítulo que si C es una curva de $P_3(k)$ y S es una superficie irreducible que pasa por C de manera que C es localmente principal sobre S, se tiene $(C \cdot C) + \delta s = 2p_C - 2 + 4\delta$, donde $(C \cdot C)$ está calculado sobre S, s es el orden de S y δ y p_C son, respectivamente, el orden y el género virtual de C. El resultado es conocido cuando la superficie S es no singular ([32] § 11, por ejemplo), basta tener en cuenta que el sistema canónico de una superficie no singular de orden s viene cortado sobre ella por las superficies de orden $s - 4$. Nuestra demostración de la igualdad en el caso general se basa en la igualdad para superficie no singular y utiliza los teoremas de Bertini. Una demostración directa, en la línea de la que se utiliza para superficie no singular exigiría la consideración de un cierto sistema canónico virtual para curvas y superficies singulares al modo del de [25], cap. IV; de este modo quizás pudiera extenderse la relación clásica entre el sistema canónico de una curva, el característico y la traza sobre la curva del sistema canónico de la superficie.

1. — Caso de una curva no singular.

Es esencial observar en primer lugar que, cualquiera que sea la superficie S (irreducible y con C localmente principal sobre S), el entero $(C \cdot C) + \delta s$ depende tan sólo de C y su inmersión en el espacio ya que en el capítulo anterior ha aparecido como uno de los términos de la función asociada a C en el espacio. Resulta así que para probar en general la igualdad $(C \cdot C) + \delta s = 2p_C - 2 + 4\delta$ basta hacerlo para una elección particular de la superficie S sobre la que C es localmente principal.

Proposición VIII.1. *Si C es irreducible y no singular, vale la igualdad* $(C \cdot C) + \delta s = 2p_C - 2 + 4\delta$.

Demostración. Puesto que basta probar la igualdad para una superficie, utilizando un resultado clásico (Severi [27] pag. 239), existe una superficie irreducible y no singular que pasa por C, C es forzosamente localmente principal sobre la superficie y ya hemos señalado que en este caso el resultado era conocido.

PROPOSICIÓN VIII.2. *Sea C una curva localmente principal sobre una superficie irreducible S del espacio $P_3(k)$, representada como intersección parcial de S con otra superficie S'. Designemos por C' la curva complementaria de C respecto de la intersección de S y S', δ' y $p_{C'}$ serán, respectivamente, el orden y el género virtual de C'. Si es cierta la igualdad $(C' \cdot C') + \delta' s = 2p_{C'} - 2 + 4\delta'$, es cierta también la $(C \cdot C) + \delta s = 2p_C - 2 + 4\delta$, entendiendo que los números de autointersección se calculan sobre S y s es el grado de S.*

Demostración. Designando por s' el grado de S', es bien sabido que al ser $C + C'$ intersección completa de dos superficies, su género virtual vale

$$p_{C+C'} = \frac{1}{2} s s' (s + s' - 4) + 1 \tag{1}$$

Por otra parte

$$1 - p_{C+C'} = 1 - p_C + 1 - p_{C'} - (C \cdot C') \tag{2}$$

Inmediatamente se obtiene las relaciones

$$(C \cdot C) = \delta s' - (C \cdot C')$$
$$(C' \cdot C') = \delta' s' - (C \cdot C')$$

Eliminando $(C' \cdot C')$ de la igualdad de la hipótesis

$$2p_{C'} - 2 + 4\delta' = \delta' s' + \delta' s - (C \cdot C')$$

llevando esta expresión de $p_{C'}$ a (2)

$$2p_{C+C'} - 2 = 2p_C - 2 + \delta' (s + s' - 4) + (C \cdot C')$$

y utilizando (1),

$$s s'(s + s' - 4) = 2p_C - 2 + \delta'(s + s' - 4) + (C \cdot C')$$

recordando que $s s' = \delta + \delta'$,

$$2p_C - 2 = \delta(s + s' - 4) - (C \cdot C')$$

igualdad de la que se obtiene la deseada sin más que eliminar $(C \cdot C')$ introduciendo $(C \cdot C)$.

2. — CASO DE UNA CURVA REDUCIDA.

PROPOSICIÓN VIII.3. *Si C es una curva reducida de $P_3(k)$ localmente intersección de dos superficies en cada punto, vale la igualdad* $(C \cdot C) + \delta s = 2p_C - 2 + 4\delta$.

Demostración. Como hemos hecho notar ya, basta probar la igualdad sobre una superficie particular. Consideremos el sistema lineal de las superficies de grado s que pasan por C: si s es lo bastante alto tal sistema no tiene otros puntos base que los de C y también, si s es lo suficientemente alto, C es localmente principal sobre una superficie genérica del sistema: basta para ello tomar S de manera que el sistema lineal contenga a las superficies $S_1, \ldots, S_4$ de VI.4, razonando directamente, si se quiere, a la manera de VI.5.

Si en estas condiciones S es una superficie lo bastante general que pasa por C, C es lo localmente principal sobre S y, por los teoremas de BERTINI ([30], [31]), S es irreducible y carece de puntos singulares fuera de C. No es posible asegurar en general que S sea no singular, basta que C tenga un punto singular con tangentes no coplanarias para que toda superficie que contenga a C sea singular; probaremos sin embargo que S debe ser normal: las únicas curvas múltiples que puede admitir S son las componentes de C; sea x un punto de una componente C_1 de C, el ideal de C en θ_x (θ haz estructural de S) es principal, sea (f); por ser C reducida las componentes primarias de (f) son los ideales primos de θ_x correspondientes a las componentes de C que pasan por x, sea pues $(f) = p_1 \cap \ldots \cap p_r$: si por ejemplo p_1 corresponde a C_1, f genera el ideal maximal de $(\theta_x)_{p_1}$ que es el anillo local de C_1 en S, tal anillo es pues regular y C_1 no es una curva múltiple de S.

Sabido ya que S presenta un número finito de puntos singulares, consideremos el sistema lineal cortado sobre S por las superficies de grado suficientemente alto que pasan por C, excluida la parte fija C: la curva genérica es irreducible y, si el grado de las superficies es suficientemente alto, carece de puntos singulares ya que estos deberían ser puntos base del sistema pero la existencia de ecuación local de C en un entorno de cada punto x de S asegura la existencia de una superficie que pasa por C y corta a S exactamente en C en un entorno de x. Podemos afirmar pues que C puede representarse como intersección parcial de S con otra superficie de manera que la curva complementaria sea irreducible y no singular: por VIII.1 vale la fórmula para la curva complementaria y aplicando VIII.2, vale también para C.

3. — CASO GENERAL.

TEOREMA VIII.4. *Si C es una curva localmente intersección de dos superficies en cada punto y S una superficie irreducible que pasa por C, de manera que C es localmente principal sobre S, vale la fórmula $(C \cdot C) + \delta s = 2p_C - 2 + 4\delta$ donde $(C \cdot C)$ se ha calculado sobre S, δ es el orden de C y s el de S.*

Demostración. El resultado viene asegurado por VIII.3 para curvas reducidas, bastará probar que C admite, sobre una conveniente superficie S, un complemento reducido para que, por VIII.2, valga la fórmula para C sobre S y valga por tanto en general.

Ello resulta de repetir el razonamiento de VIII.3 con ligeras modificaciones: podemos tomar una superficie irreducible S de manera que C sea localmente principal sobre S y S carezca de singularidades fuera de C (1). Tomando otra vez el sistema lineal de las trazas sobre S de las superficies de grado suficientemente elevado que pasan por C desprovisto de su parte fija C, dicho sistema sigue carente de puntos base y mediante una nueva aplicación del teorema de BERTINI, su curva genérica carece de partes múltiples.

La igualdad obtenida permite obtener nuevas demostraciones de teoremas clásicos extendiendo su validez a curvas localmente intersección de dos superficies en cada punto; de entre ellos queremos destacar:

COROLARIO VIII.5. (Género de una intersección parcial). *Si S es una superficie irreducible de $P_3(k)$ y C una curva localmente principal sobre S, representada como intersección parcial de S con otra superficie S', el género virtual de C se calcula por la fórmula*

$$P_C = \frac{\delta(s + s' - 4) - (C \cdot C')}{2} + 1$$

donde δ, s y s' son los órdenes, respectivamente, de C, S y S' y C' es la curva complementaria de C respecto de la intersección de S y S'.

---

(1) No parece posible probar que S sea normal, en cuyo caso bastaría la demostración de VIII. 3.

Demostración. Asegurada la validez de la fórmula $(C \cdot C) + \delta s = 2p_C - 2 + 4\delta$ sobre S, basta expresar $(C \cdot C)$ en función de δ, s' y $(C \cdot C')$ como en la demostración de VIII.2.

Conviene señalar que $(C \cdot C')$ es independiente de la superficie S ya que por definición es la característica de Euler-Poincaré de la variedad (de dimensión cero) intersección de C y C'.

CAPITULO IX

LA VARIACION DE GENERO VIRTUAL PARA ALGUNAS SUPERFICIES DEL ESPACIO ORDINARIO

Si C es una curva ν-uple de una superficie irreducible S del espacio ordinario $P_3(k)$, calcularemos en este capítulo la función asociada a C en S admitiendo como hipótesis que C sea localmente intersección de dos superficies en cada punto y que la dilatación de S centrada en C sea finita. En particular el término independiente del polinomio que corresponde a la función asociada proporcionará la diferencia a $p_S - p_{\bar{S}}$ donde S es la transformada de S respecto de C (cap. III.). Supondremos pues a lo largo de todo el capítulo que S es una superficie irreducible de $P_3(k)$, C será una curva reducida de $P_3(k)$, localmente intersección de dos superficies en cada uno de sus puntos, cada una de cuyas componentes será una curva ν-uple de S. En particular las potencias ordinarias y simbólicas del haz de ideales de C en el espacio coinciden.

1. — *Resultados auxiliares.*

Si A es un anillo local, m su ideal maximal y g un elemento de A tal que $g \in m^n - m^{n+1}$, llamaremos forma inicial de g, y la designaremos por $\bar{g}$, a la clase de g en m^n/m^{n+1} ([21], pág. 177).

Supongamos en primer lugar que C es una curva irreducible de $P_3(k)$, designaremos por Ω el haz estructural de $P_3(k)$ y por θ el de la superficie S, θ es cociente de Ω por el haz de ideales localmente principal correspondiente a S en el espacio. Sean Ω_0 el anillo local de C en el espacio, fibra de Ω en el punto genérico de C, θ_0 el anillo local de C en S, fibra de θ en el mismo punto, y P_0 y p_0 sus respectivos ideales maximales; si g es una ecuación local de S en un punto cualquiera de C, g es un elemento de Ω_0 y genera el ideal de S en Ω_0, de ahí que $\theta_0 = \Omega_0/(g)$. Al ser Ω_0 un anillo regular de dimensión dos, su graduado, $G(\Omega_0)$ es un anillo de polinomios en dos variables; el graduado $G(\theta_0)$ resulta isomorfo al cociente de $G(\Omega_0)$ por el ideal homogéneo engendrado por la forma inicial de g, de ahí se obtiene inmediatamente la expresión efectiva de la función de *Hilbert-Samuel* de θ_0 para $n \geq \nu - 1$

$$dim_k\ \theta_0 / p_0^n = \nu n - \frac{1}{2} \nu (\nu - 1)$$

donde ν, que por definición es la multiplicidad del anillo local θ_0 ([22] vol II. cap. VIII. § 10), es decir, la multiplicidad de S en C, aparece en el cálculo como el grado de la forma inicial de g.

LEMA IX.1. *Si $f \in \theta_0$ es tal que $f p_0^n = p_0^{n+1}$ para n mayor que un cierto n_0, entonces vale la misma igualdad para $n \geq \nu - 1$.*

Demostración. Se observa inmediatamente que $f \in p_0 - p_0^2$. Sea $f' \in \Omega_0$ una antiimagen de f, $f' \in P_0 - P_0^2$. Recordando que una familia de elementos de P_0 generan el ideal si sus clases en P_0/P_0^2 son una base, existe $h' \in P_0$ tal que f', h' generan P_0; la forma inicial de g (g base del ideal de S) se expresará como una forma de grado ν en $\bar{f}', \bar{h}'$:

$$\bar{g} = M_\nu(\bar{f}', \bar{h}') = a_0 \bar{f}'^\nu + \ldots + a_\nu \bar{h}'^\nu$$

con los $a_i \in k$. Comprobemos que $a_\nu \neq 0$: designando por h la imagen de h' en θ_0,

$$0 = a_0 \bar{f}^\nu + \ldots + a_\nu \bar{h}^\nu$$

y para cualquier n mayor que n_0 tendremos, en virtud de la hipótesis, $h^{n+1} = f r$ con $r \in p_0^n$; en $G(\theta_0)$ resultará $\bar{h}^{n+1} = \bar{f}\bar{r}$ y si r' es una antiimagen de r en Ω_0, el elemento $\bar{h}'^{n+1} - \bar{f}'\bar{r}'$ deberá ser un múltiplo de $\bar{g} = M_\nu(\bar{f}', \bar{h}')$ ya que su imagen es nula en $G(\theta_0)$; la existencia en $G(\Omega_0) = k[\bar{f}', \bar{h}']$ de un múltiplo de M_ν con un término no nulo en $\bar{h}'^{n+1}$ asegura que $a_\nu \neq 0$.

Tendremos pues en $G(\theta_0)$ una expresión

$$\bar{h}^\nu = b_\nu \bar{f}^\nu + b_{\nu-1} \bar{f}^{\nu-1} \bar{h} + \ldots + b_1 \bar{f} \bar{h}^{\nu-1}$$

de la que es inmediato probar inductivamente que los

$$\bar{f}^n,\ \bar{f}^{n-1}\,\bar{h},\ \ldots,\ \bar{f}^{n-\nu+1}\,\bar{h}^{\nu-1}$$

generan p_0^n/p_0^{n+1} para $n \geq \nu - 1$; utilizando la función de HILBERT-SAMUEL, tales elementos son una base y por el lema de NAKAYAMA los

$$f^n,\ f^{n-1}\,h,\ \ldots,\ f^{n-\nu+1}\,h^{\nu-1}$$

son un sistema mínimo de generadores de p_0^n para $n \geq \nu - 1$. De ahí se sigue inmediatamente la afirmación del enunciado.

Volvamos ahora al caso en que C es una curva ν-uple de S, reducida pero no necesariamente irreducible. El haz de ideales $\mathbf{a}$ de C en S es intersección de los haces de ideales primos asociados y tenemos:

LEMA IX.2. *Si, para un cierto* $f \in \mathbf{a}_x$, $f\mathbf{a}_x^{(n)} = \mathbf{a}_x^{(n+1)}$ *para* n *mayor que un cierto* n_0, *la misma igualdad vale para* $n \geq \nu - 1$.

Demostración. El enunciado es trivial si $x \notin C$. Si $x \in C$ se observa inmediatamente que $f \in \mathbf{a}_x - \mathbf{a}_x^{(2)}$, basta por ejemplo aplicar III.1; con ello es obvio que $f\mathbf{a}_x^{(n)} \subset \mathbf{a}_x^{(n+1)}$ cualquiera que sea n.

Designemos por $p_1, \ldots, p_r$ los ideales primos asociados a $\mathbf{a}_x$ y por $\theta_1, \ldots, \theta_r$ los localizados de θ_x en dichos ideales. Cada p_i es de altura uno y corresponde a una de las componentes de C que pasan por x, el localizado θ_i es el anillo local de dicha componente en S y al ser C reducida, $\mathbf{a}_x = p_1 \cap \ldots \cap p_r$. De la hipótesis y del hecho de que $\mathbf{a}_x^n\,\theta_i = \mathbf{a}_x^{(n)}\,\theta_i = p_i^n\,\theta_i$ se deduce inmediatamente que $f p_i^n \theta_i = p_i^{n+1}\,\theta_i$ para $n > n_0$; por el lema anterior tal igualdad es válida para $n \geqslant \nu - 1$. Recordando que, por definición, $\mathbf{a}_x^{(n)} = \theta_x \cap (\bigcap_i \mathbf{a}_x^n\,\theta_i)$, si $z \in \mathbf{a}_x^{(n+1)}$ $z \in p_i^{n+1}\,\theta_i$ para cada i, de ahí que si $n \geq \nu - 1$, $z/f \in p_i^n\,\theta_i$ para todo i. Si p es cualquier otro ideal primo de altura uno de θ_x, $f \notin p$ en virtud de III.1 y $z/f \in (\theta_x)_p$. Resulta pues que z/f es de θ_x al ser de todos sus localizados en primos de altura uno, por lo tanto $z/f \in \mathbf{a}_x^{(n)}$ y queda probada la igualdad del enunciado para $n \geq \nu - 1$.

LEMA IX.3. *Si* g *es un elemento cualquiera de* Ω_x *tal que* $g \in \mathbf{A}_x^{\mu} - \mathbf{A}_x^{\mu+1}$ *y* $\mathbf{A}$ *es el haz de ideales de* C *en el espacio,* $(g) \cap \mathbf{A}_x^n = g\,\mathbf{A}_x^{n-\mu}$ *para cualquier* $n \geq \mu$.

Demostración. Si x no es un punto de C la igualdad es obvia. En caso contrario sean $P_1, \ldots, P_r$ los ideales primos asociados a $\mathbf{A}_x$;

Escribiendo $(\Omega_x)_{P_i} = \Omega_i$ y $P_i \Omega_i = M_i$, cada Ω_i es un anillo local regular de ideal maximal M_i. Es sabido que definiendo $v_i(\alpha) = t$ si y sólo si $\alpha \in M_i^t - M_i^{t+1}$ se determina una valoración del cuerpo de fracciones de Ω_i centrada en M_i (1). Si $g \in \mathbf{A}_x^\mu - \mathbf{A}_x^{\mu+1}$. teniendo en cuenta que $\mathbf{A}_x^{(\mu+1)} = \mathbf{A}_x^{\mu+1}$, $g \in M_i^\mu - M_i^{\mu+1}$ y por tanto $v_i(g) = \mu$ para todo i. Si ahora $hg \in \mathbf{A}_x^n$ $(n \geq \mu)$ se tendrá $v_i(hg) \geq n$ para todo i, de donde $v_i(h) \geq n - \mu$ para todo i y $h \in \bigcap_i M_i^{n-\mu}$ resultando $h \in \mathbf{A}_x^{(n-\mu)} = \mathbf{A}_x^{n-\mu}$. Queda probado pues $(g) \cap \mathbf{A}_x^n \subset g\mathbf{A}_x^{n-\mu}$ y la inclusión contraria es trivial.

3. — Las potencias simbólicas y el morfismo de restricción a S.

En general, si Ψ es el morfismo natural $\Psi: \Omega \to \theta$, no puede asegurarse que $\Psi(\mathbf{A}^{(n)}) = \mathbf{a}^{(n)}$ si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{a}$ son los haces de ideales, en el espacio y en la superficie, de una curva de S. Baste observar que de ser así, si la curva es localmente intersección de dos superficies en cada uno de sus puntos, coinciden las potencias ordinarias y simbólicas de $\mathbf{A}$ y de ser cierta la anterior igualdad, lo mismo ocurriría con $\mathbf{a}$: en el apéndice se tiene un ejemplo en el que la curva es un par de rectas y las potencias ordinarias y simbólicas de su haz de ideales sobre la superficie no coinciden. Probaremos que se verifica la igualdad cuando la curva y la superficie verifican las hipótesis introducidas al comienzo del capítulo.

Lema IX.4. *Consideremos, con las notaciones utilizadas hasta ahora, el morfismo en fibra $\Psi_x: \Omega_x \to \theta_x$ en un punto cerrado x de C. Si Σ es el sistema multiplicativo complementario de la reunión de los ideales primos asociados a $\mathbf{A}_x$, escribiendo para un ideal cualquiera I de Ω_x, $\Sigma(I) = I\Sigma^{-1}\Omega_x \cap \Omega_x$, se tiene $\Psi_x^{-1}(\mathbf{a}_x^{(n)}) = \Sigma((g) + \mathbf{A}_x^n)$ donde (g) es el ideal de la superficie en Ω_x, núcleo de Ψ_x* (2).

Demostración. Sea $\sigma = \Psi_x(\Sigma)$, σ es el complementario de la reunión de los ideales primos asociados a $\mathbf{a}_x$ y $\mathbf{a}_x^{(n)} = \sigma(\mathbf{a}_x^n)$ con la notación introducida en el enunciado. Es obvio que $\Psi_x^{-1}(\mathbf{a}_x^{(n)}) \supset \Sigma((g) +$

(1) [22] Vol. 2.º pág. 302.

(2) Son innecesarias aquí las hipótesis de que C sea curva ν-uple de S, localmente intersección de dos superficies en cada punto y la dilatación de S centrada en C sea finita.

$+ \mathbf{A}_x^n)$. Recíprocamente, si $\Psi_x(z) \in \mathbf{a}_x^{(n)}$, $d\,\Psi_x(z) \in \mathbf{a}_x^n$ para un cierto $d \in \sigma$; escribiendo $d = \Psi_x(d')$, $d' \in \Sigma$, $d'\,z$ difiere de un elemento de $\mathbf{A}_x^n$ en un elemento del núcleo de Ψ_x, $d'\,z \in \mathbf{A}_x^n + (g)$ y $z \in \Sigma\,(\mathbf{A}_x^n + (g))$.

PROPOSICIÓN IX.5. *Si C es una curva localmente intersección de dos superficies en cada uno de sus puntos, curva ν-uple de una superficie irreducible S de modo que la dilatación de S centrada en C es finita, se cumple* $\Psi(\mathbf{A}^{(n)}) = \mathbf{a}^{(n)}$ cualquiera que sea n.

Demostración. Basta probar la igualdad en fibra y ello para los puntos de C ya que en los demás la igualdad es obvia. La igualdad en los puntos genéricos de las componentes de C se obtiene sin más que observar que $\mathbf{A}^{(n)} = \mathbf{A}^n$ y la fibra de $\mathbf{a}$ en tales puntos es el ideal maximal cuyas potencias simbólicas coinciden con las ordinarias. Supongamos pues que x es un punto cerrado de C y sea g un generador del ideal de S en Ω_x. Por ser C curva ν-uple de S, $g \in \mathbf{A}_x^{(\nu)} - \mathbf{A}_x^{(\nu+1)} = \mathbf{A}_x^\nu - \mathbf{A}_x^{\nu+1}$ y por el lema anterior, para $n \leq \nu$,

$$\Psi_x^{-1}(\mathbf{a}^{(n)}) = \Sigma\,((g) + \mathbf{A}_x^n) = \Sigma\,(\mathbf{A}_x^n) = \mathbf{A}_x^{(n)}$$

de donde $\mathbf{a}_x^{(n)} = \Psi_x(\mathbf{A}_x^{(n)})$ para $n \leq \nu$. Si $n > \nu$ es obvio que

$$\Psi_x(\mathbf{A}_x^{(n)}) = \Psi_x(\mathbf{A}_x^n) = \mathbf{a}_x^n \subset \mathbf{a}_x^{(n)}$$

En virtud de IV.12, existe $f \in \theta_x$ tal que $\mathbf{a}_x^{(n)} = f^{n-\nu}\,\mathbf{a}_n^{(\nu)} = f^{n-\nu}\,\Psi_x(\mathbf{A}_x^{(\nu)}) \subset \mathbf{a}_x^{n-\nu}\,\Psi_x(\mathbf{A}_x^{(\nu)}) = \mathbf{a}_x^{n-\nu}\,\Psi_x(\mathbf{A}_x^\nu) = \Psi_x(\mathbf{A}_x^{n-\nu})\,\Psi_x(\mathbf{A}_x^\nu) = \Psi_x(\mathbf{A}^n) = \Psi(\mathbf{A}^{(n)})$.

COROLARIO IX.6. *En las condiciones de la proposición anterior,* $\mathbf{a}^n = \mathbf{a}^{(n)}$ *para todo n.*

COROLARIO IX.7. *Cualquiera que sea n, la sucesión*

$$0 \to \mathbf{A}^n + \Phi/\mathbf{A}^n \to \Omega/\mathbf{A}^n \to \theta/\mathbf{a}^{(n)} \to 0$$

es exacta, siendo Φ el haz de ideales de S en el espacio.

4. — CALCULO EFECTIVO DE LA FUNCIÓN ASOCIADA A C EN S.

A partir de VII.1 y IX.7 podemos proceder ahora al cálculo de la función asociada a C en S. Tenemos en primer lugar el isomorfismo

$$\mathbf{A}^n + \Phi / \mathbf{A}^n \simeq \Phi / \mathbf{A}^n \cap \Phi$$

y usando IX.3,

$$\Phi / \mathbf{A}^n \cap \Phi = \Phi / \mathbf{A}^{n-\nu} \Phi \simeq \Omega / \mathbf{A}^{n-\nu} \otimes_\Omega \Phi \qquad n \geq \nu$$

Tomando ahora otra superficie S' del mismo grado que S de modo que corte a C simplemente en un número finito de puntos, si Φ' es el haz de ideales de S', $\Phi \simeq \Phi'$ y

$$\Omega / \mathbf{A}^{n-\nu} \otimes_\Omega \Phi \simeq \Omega / \mathbf{A}^{n-\nu} \otimes_\Omega \Phi' \simeq \Phi' / \mathbf{A}^{n-\nu} \Phi'.$$

Usando de nuevo IX.3

$$\mathbf{A}^{n-\nu} \Phi' = \mathbf{A}^{n-\nu} \cap \Phi'$$

y podemos establecer la sucesión exacta

$$0 \to \Phi' / \mathbf{A}^{n-\nu} \Phi' \to \Omega / \mathbf{A}^{n-\nu} \to \Omega / \mathbf{A}^{n-\nu} + \Phi' \to 0$$

en la que $\Omega / \mathbf{A}^{n-\nu} + \Phi'$ está concentrado en el número finito de puntos de intersección de S' y C; se obtiene fácilmente

$$\chi (\Omega / \mathbf{A}^{n-\nu} + \Phi') = \frac{1}{2} s\, \delta\, (n - \nu)\, (n - \nu + 1)$$

si δ es el orden de C y s el de S.

Calculando ahora a partir de la sucesión exacta de IX.7, de las relaciones precedentes resulta

$$\chi (\theta / \mathbf{a}^{(n)}) = \chi (\Omega / \mathbf{A}^n) - \chi (\Omega / \mathbf{A}^{n-\nu}) + \frac{1}{2} s\, \delta\, (n - \nu)\, (n - \nu + 1)$$

para $n \geq \nu$. Basta ahora tener en cuenta la expresión de la función asociada a C en el espacio (VII.1) para obtener el

Teorema IX.8. *Si C es una curva de $P_3(k)$, localmente intersección de dos superficies en cada punto, curva ν-uple de una superficie irreducible S de modo que la dilatación de S centrada en C es finita, la función asociada a C en S es un polinomio en n, para $n \geq \nu$, que vale*

$$- [(p_C - 1)\,\nu + \frac{1}{2}(4\nu - s)\,\delta]\,n^2 +$$

$$+ [(p_C - 1)(\nu^2 - \nu) + \frac{\delta}{2}(4\nu^2 - 2\nu s + s)]\,n -$$

$$- \frac{1}{6}[(p_C - 1)(2\nu^3 - 3\nu^2 + \nu) + \delta\,(4\nu^3 - 4\nu - 3s\,\nu^2 + 3s\,\nu)]$$

donde δ y p_C son el orden y el género virtual de C y s es el orden de S.

En particular se obtiene la variación de género virtual:

COROLARIO IX.9. *En las condiciones del teorema anterior, la diferencia entre los géneros virtuales de la transformada de S respecto de C y la propia S es*

$$p_{\bar{S}} - p_S = \frac{1}{6}[(p_C - 1)(2\nu^3 - 3\nu^2 + \nu) + \delta\,(4\nu^3 - 4\nu - 3s\,\nu^2 + 3s\,\nu)]$$

con las notaciones del teorema anterior.

El corolario presenta su mayor interés en el caso de aquellas superficies dotadas de una sola curva ν-uple cuya transformada $\bar{S}$ sea no singular o presente tan solo singularidades racionales. El género virtual $p_{\bar{S}}$ es entonces el género aritmético efectivo de S y resulta directamente calculable a partir del corolario y la expresión bien conocida de p_S en función del orden de S:

$$p_S = \frac{1}{6}(s - 1)(s - 2)(s - 3)$$

Conviene señalar que la fórmula obtenida coincide, para $\nu = 2$, con la clásica fórmula del género para superficies dotadas de singularidades ordinarias ([5] pág. 108 o [29] pág. 75) (1); sin embargo, en esta última no se requiere que la curva doble sea localmente intersección de dos superficies en cada punto lo que hace suponer que no sean necesarias, para la validez de IX.8, las hipótesis introducidas en este capítulo.

(1) En la expresión clásica suele figurar el género efectivo de la curva que se relaciona con el virtual aquí utilizado mediante los órdenes de singularidad de los puntos múltiples de la curva (véase [3]).

APENDICE

Sea $\mathfrak{C}$ el cuerpo de los números complejos y consideremos, en el espacio $P_3(\mathfrak{C})$ un cono cuártico cuya directriz presente un punto cuspidal triple. Eligiendo convenientemente una referencia afín la ecuación del cono es $X^3 Z - Y^4 = 0$; sus singularidades son la generatriz que pasa por el punto singular de la directriz (eje Z), que es una recta triple, y el vértice, que es un punto de multiplicidad cuatro. Designemos por (x, y, z) el punto genérico del cono, el anillo correspondiente a la parte afín, V, considerada es $\mathfrak{C}[x, y, z]$.

Sea ϱ la dilatación centrada en la recta triple. La antiimagen por ϱ de la parte afín considerada viene recubierta por dos abiertos afines U_1, U_2 de anillos $\mathfrak{C}[x, y, z, x/y]$, $\mathfrak{C}[x, y, z, y/x]$. Tomando por ejemplo U_1, el punto genérico de la transformada es $(x, y, z, x/y)$ y U_1 aparece sumergido en un espacio afín de dimensión cuatro E_4, la proyección paralelamente al cuarto eje, $E_4 \to E_3$, induce en U_1 la restricción de ϱ. Es inmediato probar que el cuarto eje está contenido en U_1 y por ello ϱ no es finita en el vértice del cono.

Para obtener una dilatación finita tomemos como centro un par de generatrices, una de las cuales sea la triple: elijamos como segunda generatriz el eje X, con ello el ideal correspondiente al par de generatrices en $\mathfrak{C}[x, y, z]$ es (xz, y) y resulta inmediatamente que se verifican las condiciones de III.2. De hecho, la antiimagen por la dilatación τ, centrada en el par de generatrices, del abierto afín V es un abierto afín U de anillo $\mathfrak{C}[x, y, z, xz/y]$.

El cono que nos ocupa es racional, tomemos la parametrización

$$x = \alpha^4$$
$$y = \alpha^3 \beta$$
$$z = \beta^4$$

El anillo afín de V aparece entonces como $\mathfrak{C}[\alpha^4, \alpha^3\beta, \beta^4]$ con α, β libres sobre $\mathfrak{C}$; el de U será $\mathfrak{C}[\alpha^4, \alpha^3\beta, \beta^4, \alpha\beta^3]$. Es fácil observar en este último anillo que $\alpha^6\beta^2 \notin (\alpha^4)$ y en cambio, $\alpha^6\beta^2(\alpha^4, \alpha^3\beta, \alpha\beta^3, \beta^4) \subset$ $\subset (\alpha^4)$, de ahí que el ideal maximal $(\alpha^4, \alpha^3\beta, \alpha\beta^3, \beta^4)$, correspondiente al origen con las coordenadas tomadas en U, sea primo asociado del ideal principal (α^4) y la superficie transformada del cono no sea $C.\,M.$

En particular, utilizando IV. 13, las potencias simbólicas del haz de ideales del par de generatrices utilizado no coinciden con las ordinarias.