

SOLUCION DEL PROBLEMA DE LAMBERT MEDIANTE REGULARIZACION

por

CARLOS SIMÓ

Cátedra de Astronomía
Universidad de Barcelona

INTRODUCCION. — En el problema de los cuerpos, el llamado problema de Lambert consiste en determinar una órbita dados dos puntos de la misma y el tiempo empleado por el secundario en desplazarse de una a otra posición.

En la actualidad este problema ha adquirido un gran interés. Para determinar la órbita de un satélite artificial se dispone de observaciones laser, mediante reflectores que lleva el satélite, que permiten conocer la dirección y la distancia a que se encuentra. A su vez el problema del diseño de órbitas o del «rendez-vous», así como la interceptación de cohetes, son otros aspectos destacados de la misma cuestión.

Existen diversos procedimientos para obtener la solución de dicho problema (ver nota histórica). Sin embargo los distintos métodos presentan los siguientes inconvenientes: a) existencia de singularidades; b) formulación distinta para órbitas elípticas, parabólicas o hiperbólicas; c) imposibilidad o dificultad en el tratamiento de órbitas rectilíneas; d) necesidad de estimaciones iniciales de algún parámetro; e) incertidumbre en cuanto a la convergencia del método; f) pérdida de precisión en los cálculos.

En este trabajo se resuelve el problema de Lambert, en todos sus casos, con un único procedimiento que evita todos los inconvenientes mencionados. Dicho procedimiento se basa en la regularización de Levi-Civita.

1. *Regularización de las ecuaciones del movimiento.* — Consideremos el movimiento de una partícula, alrededor de un primario, some-

tida a una fuerza newtoniana. Se sabe que el movimiento relativo viene regido por:

$$\ddot{\mathbf{x}} + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (1)$$

siendo: $\mu = G(M + m)$, coeficiente gravitatorio;

M , masa puntual del primario;

m , masa de la partícula;

\mathbf{x} , vector de posición de m , con respecto a un sistema de ejes de direcciones fijas y con origen en M ;

r , distancia entre m y M .

Para estudiar el movimiento en el plano hagamos el siguiente cambio: $\mathbf{x} = \mathbf{u}^2$, que introduce una nueva variable dependiente \mathbf{u} , (transformación de Levi-Civita). Consideramos \mathbf{x} y \mathbf{u} como complejos en lugar de elementos de R^2 . Explícitamente:

$$x^1 + ix^2 = (u^1 + iu^2)^2$$

dejando para más adelante la especificación de la determinación de \mathbf{u} tomada. Además cambiamos la variable independiente haciendo:

$$\frac{d}{ds} = r \frac{d}{dt} \quad (2)$$

siendo $r = |\mathbf{x}|$ o bien $r = (\mathbf{u}, \mathbf{u})$. (Convenimos en indicar por \mathbf{ab} el producto de \mathbf{a} y \mathbf{b} como elementos de \mathbf{C} , y (\mathbf{a}, \mathbf{b}) el producto escalar como elementos de R^2 .)

Transformemos primero (1) teniendo en cuenta (2). Designando con un acento la derivación con respecto a s , obtenemos:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{r} \mathbf{x}', \quad \ddot{\mathbf{x}} = -\frac{r'}{r^3} \mathbf{x}' + \frac{1}{r^2} \mathbf{x}''$$

y la ecuación del movimiento (1) puede expresarse en la forma:

$$r\mathbf{x}'' - r'\mathbf{x}' + \mu\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (3)$$

Teniendo en cuenta la expresión de \mathbf{x} en función de \mathbf{u} se puede obtener:

$$r' = 2(\mathbf{u}, \mathbf{u}'), \quad \mathbf{x}' = 2\mathbf{u}\mathbf{u}', \quad \mathbf{x}'' = 2\mathbf{u}\mathbf{u}'' + 2\mathbf{u}'\mathbf{u}'$$

sustituyendo en (3) se tiene:

$$2(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \mathbf{u} \mathbf{u}'' + 2(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \mathbf{u}' \mathbf{u}' - 4(\mathbf{u}, \mathbf{u}') \mathbf{u} \mathbf{u}' + \mu \mathbf{u} \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (4)$$

Utilizando ahora la identidad:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \mathbf{u}' \mathbf{u}' - 2(\mathbf{u}, \mathbf{u}') \mathbf{u} \mathbf{u}' + (\mathbf{u}', \mathbf{u}') \mathbf{u} \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

(4) se transforma en:

$$2(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \mathbf{u} \mathbf{u}'' - 2(\mathbf{u}', \mathbf{u}') \mathbf{u} \mathbf{u} + \mu \mathbf{u} \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (5)$$

Dado que la fuerza deriva de un potencial conservativo, existe la integral de la energía:

$$-\frac{\mu}{r} + \frac{v^2}{2} = h$$

que en las nuevas variables se traduce en:

$$\mu - 2(\mathbf{u}', \mathbf{u}') = -h(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \quad (6)$$

Finalmente de (5) y (6) se desprende que el movimiento viene regido por la ecuación:

$$2(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \mathbf{u} \mathbf{u}'' - h(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \mathbf{u} \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

ó, descartando la solución trivial $\mathbf{u} = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{u}'' - \frac{h}{2} \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (7)$$

ecuación del movimiento regularizada y linealizada (véase [8]).

Estudiamos su solución, suponiendo que en $s = s_0$ conocemos los valores \mathbf{u}_0 y \mathbf{u}'_0 que toman \mathbf{u} y \mathbf{u}' , respectivamente. A partir de la ecuación (7), haciendo $-\frac{h}{2} = \varrho$, se deduce:

$$\mathbf{u}_0^{(2k)} = (-\varrho)^k \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{u}_0^{(2k+1)} = (-\varrho)^k \mathbf{u}'_0$$

con lo cual se obtiene el desarrollo de Taylor de \mathbf{u} en función de s :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varrho^k (s - s_0)^{2k} / (2k)! + \\ + \mathbf{u}'_0 (s - s_0) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varrho^k (s - s_0)^{2k} / (2k + 1)!$$

cuyo radio de convergencia, trivialmente, es infinito. Introduciendo las funciones de Stumpff [9]:

$$c_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k / (2k + n)! \quad (8)$$

el movimiento puede expresarse en forma unificada:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 c_0(\varrho(s - s_0)^2) + \mathbf{u}'_0 (s - s_0) c_1(\varrho(s - s_0)^2) \quad (9)$$

CASOS PARTICULARES:

a) Movimiento elíptico: $\varrho > 0$, $\sqrt{\varrho} = \gamma$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \cos(\gamma(s - s_0)) + \mathbf{u}'_0 \gamma^{-1} \operatorname{sen}(\gamma(s - s_0)) \quad (9.1)$$

(elipse centrada en el origen en el plano u).

b) Movimiento hiperbólico: $\varrho < 0$, $\sqrt{-\varrho} = \gamma$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \operatorname{ch}(\gamma(s - s_0)) + \mathbf{u}'_0 \gamma^{-1} \operatorname{sh}(\gamma(s - s_0)) \quad (9.2)$$

(hipérbola centrada en el origen en el plano u).

c) Movimiento parabólico: $\varrho = 0$.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}'_0 (s - s_0) \quad (9.3)$$

(recta en el plano u).

En cada uno de los tres casos, si \mathbf{u}_0 y \mathbf{u}'_0 son colineales obtendremos un movimiento rectilíneo.

2. *Aplicación al problema de Lambert.* — Sean \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 dos puntos de la órbita correspondientes a los instantes t_1 y t_2 , respectivamente.

Para fijar ideas, suponemos $t_1 < t_2$ y llamamos $\Delta t = t_2 - t_1$. Sea \mathbf{u}_1 una determinación de $\sqrt{\mathbf{x}_1}$ y \mathbf{u}_2 la determinación de $\sqrt{\mathbf{x}_2}$ tal que el ángulo formado por ambas determinaciones sea la mitad del que forman \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 , medido en el sentido del movimiento.

Tomemos ahora en el plano u unos ejes tales que uno de ellos sea colineal con \mathbf{u}_1 y el otro ortogonal al primero, de modo que los vectores \mathbf{u}_1 y \mathbf{u}_2 serán, respectivamente, de la forma $\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$. Si r_1 y r_2 son los módulos de \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 y Δv el ángulo que forman ambos vectores, se tendrá:

$$A = \sqrt{r_1}, \quad B = \sqrt{r_2} \cos \frac{\Delta v}{2}, \quad C = \sqrt{r_2} \operatorname{sen} \frac{\Delta v}{2}$$

En lo sucesivo $A, B, C, \Delta t$, constituirán los datos para la resolución del problema.

Dada la arbitrariedad en la elección del origen de la variable s , hacemos $s = 0$ en el punto \mathbf{x}_1 y llamamos s_2 al valor de s correspondiente al punto \mathbf{x}_2 . A partir de (9) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{u}_0 c_0(0) \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{u}_0 c_0(\varrho s_2^2) + \mathbf{u}'_0 s_2 c_1(\varrho s_2^2) \end{aligned}$$

Definiendo $\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}'_0 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$, inmediatamente se deduce:

$$\alpha_1 = A, \quad \alpha_2 = 0, \quad \beta_1 = \frac{B - A c_0(\varrho s_2^2)}{s_2 c_1(\varrho s_2^2)}, \quad \beta_2 = \frac{C}{s_2 c_1(\varrho s_2^2)} \quad (10)$$

Por otra parte, según (9):

$$\begin{aligned} r = (\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) c_0^2(\varrho s^2) + (\beta_1^2 + \beta_2^2) s^2 c_1^2(\varrho s^2) + \\ &+ 2(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2) s c_0(\varrho s^2) c_1(\varrho s^2) \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta (2):

$$\begin{aligned} \Delta t &= (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) (s_2 - 2\varrho s_2^3 c_3(4\varrho s_2^2)) + (\beta_1^2 + \beta_2^2) 2s_2^3 c_3(4\varrho s_2^2) + \\ &+ 2(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2) s_2^2 c_2(4\varrho s_2^2), \end{aligned} \quad (11)$$

habiéndose utilizado las siguientes propiedades de las funciones de Stumpff [8], [9]:

$$c_0^2(w) = 1 - 2w c_2(4w), \quad c_1^2(w) = 2c_2(4w), \quad c_0(w)c_1(w) = c_1(4w), \quad \forall w \in \mathbf{C}$$

$$\int_0^s \sigma^n c_n(\varrho \sigma^2) d\sigma = s^{n+1} c_{n+1}(\varrho s^2).$$

Sustituyendo en (11) los valores obtenidos en (10) y definiendo las variables auxiliares:

$$P = A^2 + B^2 + C^2 = r_1 + r_2$$

$$Q = 2AB = 2\sqrt{r_1 r_2} \cos \frac{\Delta v}{2}$$

$$\varrho s_2^2 = z$$

se tiene:

$$\Delta t = \frac{P c_3(4z) + Q(c_2(z) - c_3(z))}{c_1^3(z)} \sqrt{\frac{P - Q c_0(z)}{2\mu}} \quad (12)$$

en donde se ha utilizado (6), que permite escribir:

$$\mu = 2 \frac{P - Q c_0(z)}{z c_1^2(z)} \varrho \quad (13)$$

y de la que se obtiene ϱ en función de μ , z , P y Q .

Para determinar la órbita debemos resolver la ecuación (12). En efecto, conociendo z y teniendo en cuenta que

$$h = -\frac{\mu}{2a} = -2\varrho$$

junto con (13), hallamos

$$a = \frac{P - Q c_0(z)}{2z c_1^2(z)}. \quad (14)$$

Además la comparación de las expresiones para r y para $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$, que se hallan a partir de (9), con las clásicas del problema de los dos cuerpos, permiten escribir:

$$e^2 = \left(1 - \frac{2h}{\mu} (\mathbf{u}, \mathbf{u})\right)^2 - \frac{8h}{\mu^2} (\mathbf{u}, \mathbf{u}')^2$$

que finalmente, con (9) y (10), suministran el valor de e :

$$e^2 = 1 - \frac{A^2 C^2}{a^2 z c_1^2} \quad (15)$$

Para el parámetro p de la órbita, de (14) y (15) se obtiene la expresión:

$$p = \frac{2 A^2 C^2}{P - Q c_0(z)}. \quad (16)$$

Conociendo p , a , e se obtiene inmediatamente el tipo de movimiento (circular, elíptico, parabólico, hiperbólico o rectilíneo). Si en el plano orbital tenemos una dirección de referencia (por ejemplo el modo ascendente, si existe), puede hallarse el ángulo $u = v + \omega$, o argumento de latitud de la partícula, correspondiente a una cualquiera de las posiciones dadas. Por otra parte la ecuación

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}$$

permite calcular v para la posición elegida, de donde se desprende ω , argumento de latitud del periastro.

Si estudiamos la órbita en el espacio pueden presentarse dos casos: \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 son colineales o no lo son. Si no lo son, $\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2$ es un vector normal al plano de la órbita, cuyas componentes, proporcionales a

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sen} I \operatorname{sen} \Omega \\ -\operatorname{sen} I \cos \Omega \\ \cos I \end{pmatrix},$$

permiten calcular la inclinación I y el argumento del nodo Ω . La pérdida de precisión que pueda producirse en la determinación de I , Ω es inherente a los datos que se posean: si \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 son «casi colineales», los valores de I , Ω serán muy poco precisos.

Si \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 son colineales debemos distinguir dos casos, según que $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ sea mayor o igual que cero o bien sea negativo. En el primer caso la órbita es rectilínea con colisión, dependiendo de la energía el que sea elíptica, parabólica o hiperbólica, y pudiendo determinarse en este caso la recta soporte del movimiento. En el segundo caso el movimiento es no rectilíneo y tiene lugar en un plano que contiene

la recta soporte de \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 . Existe por lo tanto una infinidad de soluciones al problema de Lambert, pero escogido el plano del movimiento la solución es única (es decir, quedan determinados a , e y las anomalías verdaderas v_1 y v_2 de las dos posiciones).

3. *La ecuación fundamental.* — La ecuación trascendente (12) puede ser resuelta con respecto a z a partir de los datos P , Q , μ y Δt , con lo que obtendremos la solución al problema de Lambert en virtud de (14), (15) y (16).

Estudiemos primero el campo de variación de z . La expresión de $c_1(z)$: $c_1(z) = \frac{\text{sh } \sqrt{-z}}{\sqrt{-z}}$, si $z < 0$; $c_1(z) = \frac{\text{sen } \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$, si $z > 0$, prueba que el denominador de (12) sólo se anula para $z = k\pi^2$. Para el valor $z = \pi^2$ se obtiene $\Delta t = \infty$, correspondiente a un movimiento elíptico de semieje arbitrariamente grande pasando por los dos puntos dados.

Por otra parte $P - Qc_0(z)$ debe ser positivo. Como que $c_0(z)$ se expresa en la forma $c_0(z) = \text{ch } \sqrt{-z}$, si $z < 0$; $c_0(z) = \cos \sqrt{z}$, si $z > 0$, y es $P > |Q|$ (pues $P = |Q|$ si y sólo si $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$), vemos que $P - Qc_0(z)$ sólo puede anularse si $Q > 0$ y $z < 0$. El valor límite z_f tal que $P - Qc_0(z_f) = 0$ corresponde a $\Delta t = 0$. Si $Q < 0$ no existe restricción a los valores de z negativos y $\lim_{z \rightarrow -\infty} \Delta t = 0$. Ponemos en este caso $z_f = -\infty$.

Físicamente, $\Delta t = 0$ corresponde al caso de movimiento (hiperbólico) a velocidad infinita entre las posiciones \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 y sin que, por lo tanto, se manifieste la influencia del campo gravitatorio creado por M .

Nótese además que la expresión $Pc_3(4z) + Q(c_2(z) - c_3(z))$ no se anula para ningún $z \in (z_f, \pi^2)$. En efecto, teniendo en cuenta el valor de $c_n(z)$ según (8), basta probar que

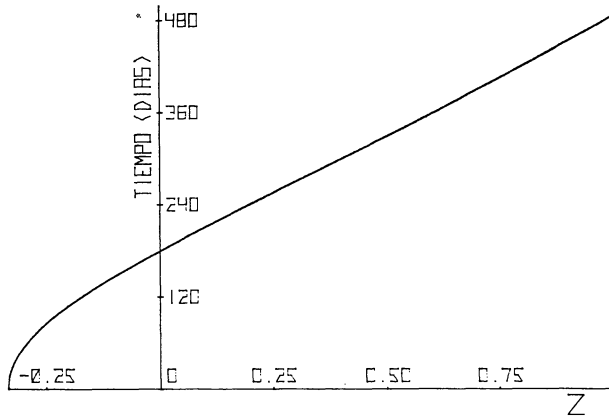
$$\sqrt{z} - \text{sen } \sqrt{z} \cos \sqrt{z} \geq |\text{sen } \sqrt{z} - \sqrt{z} \cos \sqrt{z}|, \quad \text{si } z \geq 0,$$

y que

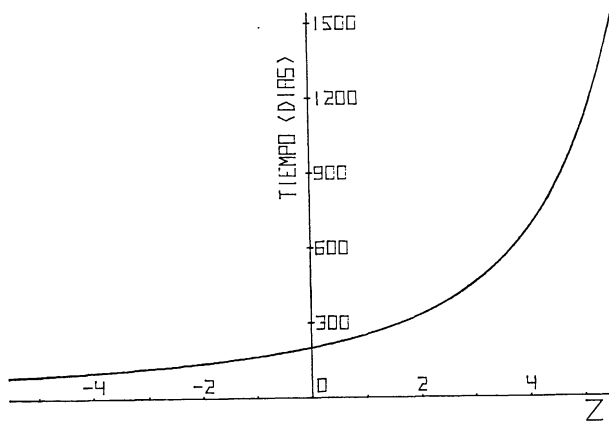
$$\text{sh } \sqrt{-z} \text{ ch } \sqrt{-z} - \sqrt{-z} \geq |\sqrt{-z} \text{ ch } \sqrt{-z} - \text{sh } \sqrt{-z}|, \\ \text{si } z \leq 0.$$

Se comprueba, de forma elemental, que ambas desigualdades son ciertas.

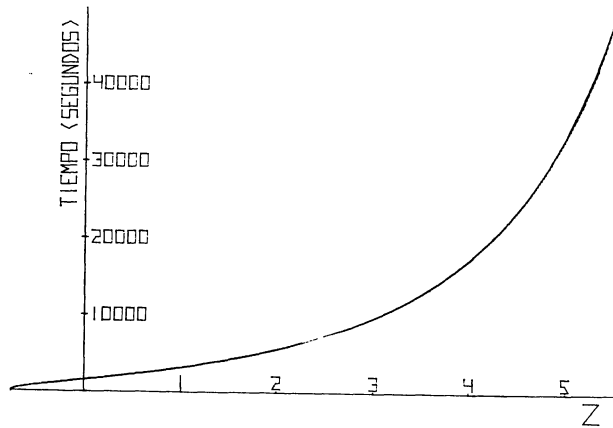
En las figuras se representa para distintos casos la función $\Delta t(z)$. Para $z \in (z_f, 0)$ la función se comporta como una parábola de eje x si $Q > 0$ ó como una exponencial decreciente si $Q \leq 0$. Para $z \in (0, \pi^2)$ la función es aproximadamente rectilínea para valores cercanos a $z = 0$ y de la forma $K(\pi^2 - z)^{-3/2}$ en el entorno de π^2 .



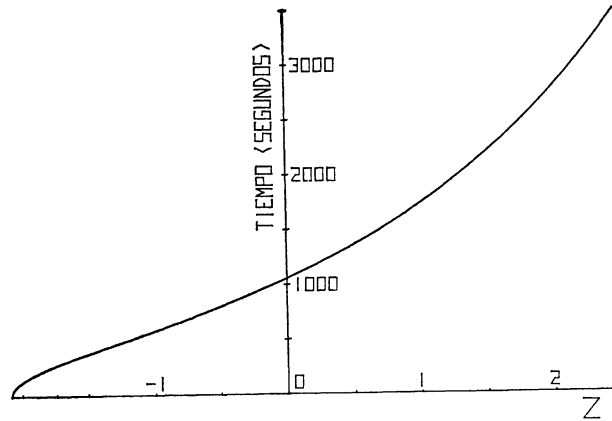
a) [3] pág. 131 (II) Mov. heliocéntrico
 $r_1 = 2,6808913$ u. a.; $r_2 = 2,5480227$ u. a.
 $\Delta v = 1,0981837$ rad.



b) [3] pág. 131 (III) Mov. heliocéntrico
 $r_1 = 1,3787617$ u. a.; $r_2 = 2,4996511$ u. a.
 $\Delta v = 224^\circ$



c) Movimiento geocéntrico
 $r_1 = 10000 \text{ km.} ; r_2 = 10000 \text{ km.}$
 $\Delta v = 90^\circ$



d) Movimiento geocéntrico
 $r_1 = 10000 \text{ km.} ; r_2 = 3400 \text{ km.}$
 $\Delta v = 2 \arctan 5/3$

La expresión (14) permite deducir inmediatamente que el movimiento es elíptico, parabólico o hiperbólico según que z sea positivo, nulo o negativo, respectivamente.

Para $z = 0$

$$\Delta t_p = \frac{1}{3} (2P + Q) \sqrt{\frac{P - Q}{2\mu}}$$

tiempo necesario para ir de \mathbf{x}_1 a \mathbf{x}_2 en movimiento parabólico. Análogamente el movimiento es elíptico, parabólico o hiperbólico según que Δt sea mayor, igual o menor que Δt_p .

Resumiendo lo dicho en los apartados 2 y 3 tenemos el siguiente

TEOREMA. — La ecuación fundamental (12) tiene una solución y una sola en (z_f, π^2) , que puede hallarse por el método de Newton sin que aparezca ninguna singularidad ni tampoco ninguna indeterminación en el cálculo numérico efectivo.

Demostración: Para la primera parte basta calcular la derivada de (12) y probar que es positiva en (z_f, π^2) . Un cálculo laborioso nos da:

$$\begin{aligned} \frac{d \Delta t}{dz} = & \frac{1}{2 \mu \sqrt{P - Q c_0}} \left\{ P^2 \frac{3(c_2 - c_3) - c_1^3}{2 z c_1^4} + \right. \\ & + P Q \frac{3 c_1^2 + c_0(12 c_3 - 12 c_2 + c_1^3)}{4 z c_1^4} + \\ & \left. + Q^2 \frac{6(c_2 - c_3) + c_1^2(3 c_0 - 5 c_1)}{4 z c_1^4} \right\}, \quad (c_i = c_i(z)) \quad (17) \end{aligned}$$

en donde es ficticia la singularidad para $z = 0$, ya que en los numeradores aparecen sendos factores z , pero se ha preferido esta expresión, más compacta, a la obtenida sin que aparezca el factor z en los denominadores.

Para probar que (17) es positivo debemos proceder por partes:

Pongamos (12) como $(\beta P + \gamma Q) \sqrt{\frac{P - Q c_0(z)}{2 \mu}}$ y (17) como $\frac{P^2 \xi + P Q \eta + Q^2 \zeta}{2 \mu \sqrt{P - Q c_0(z)}}$.

Si $z > 0$ y $Q \geq 0$ basta probar que $\xi + \zeta > 0, \eta > 0$, lo cual se reduce a comprobaciones trigonométricas. Si $z > 0$ y $Q < 0$ se obtiene que $\xi > 0, \eta > 0, \xi > \zeta, \xi - \eta + \zeta \geq 0$, que garantizan $\frac{d \Delta t}{dz} > 0$.

Si $z < 0$ y $Q > 0$ es inmediato ver que tanto $\sqrt{\frac{P - Q c_0(z)}{2 \mu}}$ como $(\beta P + \gamma Q)$ son monótonas crecientes. Finalmente, si $z < 0$ y $Q < 0$ se tiene que $\frac{1}{\sqrt{-z c_1}} \sqrt{\frac{P - Q c_0(z)}{2 \mu}}$ es monótona creciente. En cuanto se refiere a $(\beta P + \gamma Q) \sqrt{-z c_1}$, se deduce que es monó-

tona creciente si $z < -1,285$ a partir de las propiedades de las funciones hiperbólicas, mientras que para valores de z en $[-1,285, 0)$ el crecimiento se obtiene del desarrollo en serie de potencias de z .

Para resolver (12), procedamos ahora a probar la convergencia del método de Newton. En primer lugar indiquemos que una comprobación muy laboriosa muestra que $\frac{d^2 \Delta t}{dz^2}$ es positiva si $Q \leq 0$ y tiene un único cero si $Q > 0$. Recordemos el gráfico de $\Delta t(z)$ indicado en las figuras. Por lo tanto, el teorema global de convergencia del método de Newton [4] puede aplicarse aquí si procedemos como sigue: si el movimiento es elíptico y $z_i \geq \pi^2$ en alguna iteración, lo modificamos tomando $z_i = \pi^2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ arbitrario, y si $z_i < 0$ lo modificamos haciendo $z_i = 0$. Análogamente si el movimiento es hiperbólico y $z_i > 0$ lo hacemos igual a cero y si $z_i \leq z_f$ tomamos como valor de z_i el de $z_f + \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ arbitrario. Este es válido partiendo de cualquier $z_0 \in [0, \pi^2)$ si el movimiento es elíptico y de $z_0 \in (z_f, 0]$ si es hiperbólico.

En la práctica parece conveniente partir de $z_0 = \left(\frac{\Delta v}{2}\right)^2$ para el movimiento elíptico y de $z_0 = 0$ para el hiperbólico, con lo cual los movimientos casi circulares y casi parabólicos quedan determinados en muy pocas iteraciones.

El examen de las expresiones (12) y (17) muestra la no existencia de singularidades en (z_f, π^2) . Sin embargo pueden aparecer indeterminaciones de tipo calculístico que se evitan a continuación. Para ello, en primer lugar, introducimos $R = P - Q = (A - B)^2 + C^2$ de forma que $\sqrt{P - Q c_0(z)}$ se transforme en $\sqrt{R + Q z c_2(z)}$. Esto evita la posible diferencia entre dos cantidades pequeñas, si $|z|$ es próximo a cero y Q próximo a P . Sea $z c_2(z) = \alpha$. Con las notaciones establecidas, en el entorno del origen se tiene:

$$\begin{aligned} \alpha &= z/2 - z^2/24 + z^3/720 - z^4/40320 + \dots \\ \beta &= 2/3 + z/5 + 17z^2/420 + 29z^3/4200 + 1181z^4/1108800 + \dots \\ \gamma &= 1/3 + 2z/15 + 2z^2/63 + 4z^3/675 + 2z^4/2079 + \dots \\ \xi &= 1/5 + 17z/210 + 29z^2/1400 + 1181z^3/277200 + \\ &\quad + 1393481z^4/1816214400 + \dots \\ \eta &= 1/10 + 11z/105 + 17z^2/525 + 2z^3/273 + 19511z^4/14189175 + \dots \\ \zeta &= -1/20 + 19z/840 + 193z^2/16800 - 1109z^3/369600 + \\ &\quad + 405319z^4/1816214400 \dots \end{aligned}$$

Es inmediato comprobar, a través de las expresiones que han dado origen a las series expuestas, que se puede garantizar para todas ellas un radio de convergencia mínimo r_0 tal que satisfaga la ecuación

$$\operatorname{sh} \sqrt{r_0} = 2^{1/3} \sqrt{r_0}.$$

Finalmente puede aparecer otra dificultad del mismo tipo si $Q > 0$ y z es próximo a z_f . La evitamos efectuando una traslación adecuada, de modo que si $z = -\varepsilon^2$, $\delta = \sqrt{-z_f} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $0 > z > z_f$, queda

$$\begin{aligned} \Delta t = & \sqrt{\frac{-P \delta^2 c_2 (-\delta^2) + \sqrt{R(P+Q)} c_1 (-\delta^2)}{2\mu}} \times \\ & \times \left[P \frac{\operatorname{sh} \varepsilon \operatorname{ch} \varepsilon - \varepsilon}{\operatorname{sh}^3 \varepsilon} + Q \frac{\varepsilon \operatorname{ch} \varepsilon - \operatorname{sh} \varepsilon}{\operatorname{sh}^3 \varepsilon} \right] \end{aligned}$$

Análogamente procederemos con $\frac{d\Delta t}{dz}$, eliminando así todas las diferencias entre cantidades muy próximas y los cocientes entre expresiones muy pequeñas, evitando con ello la pérdida de precisión en nuestros cálculos. Con ésto queda probado el teorema enunciado anteriormente.

Se observará que el método propuesto para resolver el problema de Lambert no tiene ninguno de los inconvenientes mencionados en la introducción.

4. *Experiencias numéricas.* — Se ha procedido a realizar un programa FORTRAN del método expuesto para someterlo a diversos tests. Se ha tomado como criterio para acabar las iteraciones en la resolución de (12) un error absoluto menor que 10^{-6} en las unidades empleadas en la medición del intervalo de tiempo y un error relativo menor que 10^{-9} .

En primer lugar se ha resuelto el problema de Lambert con datos de ejemplos citados en diversos textos. El número de iteraciones se resume en la tabla 1.

En segundo lugar se ha hecho una exploración sistemática de posibles datos iniciales. Para ello se han examinado un total de 1320 supuestas órbitas alrededor de la Tierra de acuerdo con los valores de los parámetros que se indican en la tabla 2.

TABLA 1

Ejemplo (Referencia)	Número de iteraciones			
	Gauss	Lambert-Euler	Herrick (univ.)	Regularizado
[5], pág. 243, H1	2 *	5 *	2 *	3
[5], pág. 243, H2	4 *	5 *	3 *	2
[5], pág. 243, H3	4 *	6 *	3 *	1
[5], pág. 243, H4	diverge	6 *	3 *	1
[5], pág. 243, H5	singular	singular	3 *	1
[1], pág. 68	6	—	—	2
[3], pág. 129 (I)	2 *	—	—	3
[3], pág. 131 (II)	3 *	—	—	2
[3], pág. 131 (III)	3 *	—	—	3
[3], pág. 143	3 *	—	—	3

* Estimación inicial mediante gráficos o cálculos previos

TABLA 2

Parámetro	Valores
a (1)	10000 km — 20000 km — 40000 km
e	0 — 0,001 — 0,01 — 0,1 — 0,3 — 0,5 — 0,7 — 0,9 — 0,99 — 0,999 — 1(4) — 1(5) — 1(6) — 1,001 — 1,01 — 1,1 — 1,5 — 2 — 3 — 5 — 10 — 100
$t_1 - T$ (2)	2000 ^s — 4000 ^s — 6000 ^s — 8000 ^s
Δt	1 ^s — 40 ^s — 2000 ^s — 4000 ^s — 8000 ^s
Ω (3)	0
ω (3)	$\pi/2$
I (3)	0

- (1) Para las órbitas parabólicas se indica el valor de q .
- (2) T = época de paso por el perigeo.
- (3) Se toman constantes pues la dificultad estriba en la determinación de la órbita en su plano.
- (4) Movimiento rectilíneo elíptico.
- (5) Movimiento parabólico.
- (6) Movimiento hiperbólico rectilíneo.

Para los 1320 casos mencionados se han calculado las efemérides en los instantes t_1 y t_2 . (Destaquemos de paso que el método utilizado en la resolución de la ecuación de Kepler generalizada ha permitido obtener un error menor que 10^{-9} en la anomalía excéntrica

con un máximo de 4 iteraciones en el caso elíptico, un máximo de 5 en el hiperbólico y 2,87 de promedio global.)

Tomando como datos las efemérides obtenidas se ha procedido a resolver el problema de Lambert. El número de iteraciones para resolver (12) ha sido menor o igual que 8 en el caso elíptico y que 6 en el hiperbólico, siendo el promedio global de 3,07.

En la tabla 3 se expone el número de casos en que han sido precisas de 0 a 8 iteraciones.

TABLA 3

Número de iteraciones	Tipo de movimiento											
	Elíptico				Parabólico				Hiperbólico			
	a (km)			Total	q (km)			Total	a (km)			Total
	10000	20000	40000		10000	20000	40000		10000	20000	40000	
0	20	20	20	60	40	40	40	120	0	0	0	0
1	0	2	0	2	0	0	0	0	18	32	39	89
2	39	45	40	124	0	0	0	0	68	58	57	183
3	33	54	87	174	0	0	0	0	12	14	20	46
4	52	59	73	184	0	0	0	0	17	46	79	142
5	47	40	0	87	0	0	0	0	73	50	5	128
6	15	0	0	15	0	0	0	0	12	0	0	12
7	8	0	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0
8	6	0	0	6	0	0	0	0	0	0	0	0
Total iterac.	814	690	633	2137	0	0	0	0	695	624	554	1873
Prom.	3,7	3,14	2,88	3,24	0	0	0	0	3,48	3,12	2,77	3,12

Los errores obtenidos en el semieje son menores que 5 cm. excepto en 39 casos, siendo en 35 de éstos del orden de 10 cm., y en los otros 4 del orden de 20 cm. En la excentricidad el error es inferior a $5 \cdot 10^{-8}$ excepto en 8 casos en que es del orden de 10^{-7} . En el argumento del perigeo el error es inferior a 10^{-7} radianes en todos los casos.

En promedio el tiempo empleado en la resolución de la ecuación (12) en el terminal del ordenador UNIVAC 1108 de la E.T.S.I.I.B. ha sido de 5 ms.

Finalmente se han estudiado 1570 casos adicionales obtenidos de la siguiente manera: el parámetro A se ha tomado constante e igual a $100 \text{ km}^{1/2}$; B y C recorriendo la parte real e imaginaria, respectivamente, de los puntos de C de módulo menor o igual que 100, argumento en $[0, \pi)$ y cuyas componentes son múltiplos de 10. Por último el valor de Δt se ha hecho igual a 3^k segundos con $k = 2 \div 11$.

La determinación se ha efectuado correctamente si bien el número medio de iteraciones se ha elevado a 6. Esto es lógico si se piensa que se han incluido en este estudio casos de órbitas verdaderamente «patológicas».

5. *Nota histórica.* — De hecho, el llamado problema de Lambert fue introducido por primera vez por Euler en 1744 (Miscell. Berolin. T. VII, p. 20), [2], [3], para relacionar el tiempo empleado por un cometa en ir desde una posición \mathbf{x}_1 a otra \mathbf{x}_2 , en función de la suma $r_1 + r_2$ y de la cuerda c que une ambas posiciones. Sin embargo Euler no se ocupó en lo sucesivo de este método de determinación de órbitas comitarias y fue Lambert (1728-1777) quien lo extendió a las restantes cónicas.

Gauss a los 24 años se ocupó de este problema en relación con el descubrimiento de Ceres en el inicio de 1801. El pequeño planeta fue perdido a las pocas semanas debido a los pocos datos de que se disponía. Gauss introdujo la relación Area sector/Area triángulo y desarrolló un método de determinación de órbitas que permitió encontrar a Ceres a finales de año en la posición por él predicha.

Modernamente se han introducido varios procedimientos [2], como son la iteración p , debida a Herrick y Liu (1959); la iteración v , original de Lascody (1958); la iteración $f - g$, usada por Douglas; la iteración e , desarrollada por Escobal (1964) y el método universal de Herrick [5].

Es curioso constatar que en textos como [2], [3], [6] y [7] se insista en la dificultad para obtener la determinación correcta del ángulo ε que se utiliza en el método de Lambert-Euler (lo que llevaría a varias soluciones mientras que el teorema probado muestra la unicidad). Es inmediato verificar que ε debe ser menor (resp. mayor) que π si el tiempo τ es menor (resp. mayor) que

$$\mu^{-1/2} \left[\frac{r_1 + r_2 + c}{4} \right]^{3/2} \left(\pi \mp 2 \arcsin \sqrt{\frac{r_1 + r_2 - c}{r_1 + r_2 + c}} \pm 2 \frac{\sqrt{(r_1 + r_2 - c)2c}}{r_1 + r_2 + c} \right)$$

tomándose el arco en $[0, \pi/2)$, y utilizando los signos superiores si $\Delta v < \pi$ y los inferiores si $\Delta v > \pi$.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] BAKER, R. M. L., JR., *Astrodynamics: Applications and Advanced Topics*, Academic Press, New York, 1967.
- [2] ESCOBAL, P. R., *Methods of Orbit Determination*, Wiley, New York, 1965.
- [3] GAUSS, C. F., *Theoria Motus*, Dover Publications, New York, 1963.
- [4] HENRICI, P., *Elements of Numerical Analysis*, Wiley, New York, 1964.
- [5] HERRICK, S., *Astrodynamics*, Vol. 1, Van Nostrand Reinhold, London, 1971.
- [6] POLLARD, H., *Mathematical Introduction to Celestial Mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1966.
- [7] PLUMMER, M. A., *An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy*, Dover Publications, New York, 1960.
- [8] STIEFEL, E. L. y SCHEIFELE, G., *Linear and Regular Celestial Mechanics*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.
- [9] STUMPF, K., *Himmelsmechanik*, Vol. 1, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956.

