CARACTÉRISATION DUALE DES ESPACES DE MAZUR

par

MIGUEL A. CANELA

Considérons deux espaces localement convexes (E, τ) et (F, τ'). Nous désignerons par $L^b(E, F)$ l'espace des applications linéaires sur E, à valeurs dans F, qui sont bornées sur chaque ensemble borné de E. La topologie de la convergence uniforme sur les suites τ-nulles de E (celles qui convergent vers zéro pour τ) sur cet espace est désignée par τ^n, si on n'a pas besoin de préciser la topologie τ'. Nous dirons qu'un espace localement convexe a la *propriété de la compacité convexe* (Ostling et Wilansky [7]), lorsque l'enveloppe disquée fermée de chaque ensemble compact est compacte. Nous dirons qu'il est *complet au sens de Mackey* (Hogbe-Nlend [4]), lorsque chaque suite de Cauchy-Mackey est Mackey-convergente, ou, ce qui est équivalent, lorsque l'enveloppe disquée fermée de chaque suite faiblement nulle est faiblement compacte (Dierolf [1]). Tout d'abord, nous établisons la Proposition suivante:

Proposition 1: *Soient* (E, τ) *et* (F, τ') *des espaces localement convexes non triviaux, et nous considérons sur* $L^b(E, F)$ *la topologie* τ^n. *Alors:*

i) $L^b(E, F)$ *est complet si et seulement si* F *est complet.*

ii) $L^b(E, F)$ *est quasi-complet si et seulement si* F *est quasi-complet.*

iii) $L^b(E, F)$ *est séquentiellement complet si et seulement si* F *est séquentiellement complet.*

iv) $L^b(E, F)$ *a la propriété de la compacité convexe si et seulement si* F *a cette propriété.*

v) $L^b(E, F)$ *est complet au sens de Mackey si et seulement si* F *est complet au sens de Mackey.*

Ces résultats ont eté annoncés dans le VI^e Congrès des Mathématiciens d'Expression Latine, à Luxembourg (septembre de 1981).

Preuve. La nécessité résulte en tout cas du fait suivant: (F, τ') est isomorphe topologiquement à un sous-espace fermé de $(L^b(E, F), \tau^n)$. Pour ça, il suffit de considérer une forme linéaire continue u sur E, avec $u \neq 0$, et assigner à chaque $y \in F$ l'application:

$$f_y : E \longrightarrow F$$
$$x \longrightarrow \langle u, x \rangle y.$$

i) Soit $(f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ une suite généralisée (indexée par un ensemble ordonné et dirigé) dans $L^b(E, F)$, qui soit de Cauchy pour τ^n. Pour chaque $x \in E$, $(f_\alpha(x))_{\alpha \in \Lambda}$ est de Cauchy dans (F, τ'), dû à la continuité de l'évaluation sur $L^b(E, F)$. Nous désignons $f(x) = \lim_\alpha f_\alpha(x)$. Pour montrer que $f \in L^b(E, F)$, il suffit de montrer que f est bornée sur les suites τ-nulles de E. Pour ça, nous considérons une suite τ-nulle $(x_j)_j$ dans E et une semi-norme τ'-continue q sur F. Pour chaque $\delta > 0$, il existe α_0 tel que:

$$\alpha, \beta \geqslant \alpha_0 \Longrightarrow q(f_\alpha(x_j) - f_\beta(x_j)) < \delta \quad \text{pour tout } j. \tag{1}$$

En passant vers la limite:

$$\alpha \geqslant \alpha_0 \Longrightarrow q(f_\alpha(x_j) - f(x_j)) \leqslant \delta \quad \text{pour tout } j. \tag{2}$$

Alors:

$$q(f(x_j)) \leqslant q(f_{\alpha_0}(x_j)) + \delta \quad \text{pour tout } j, \tag{3}$$

et $f \in L^b(E, F)$. D'autre part, (2) nous montre que $(f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converge vers f pour τ^n.

ii) Le même argument peut être utilisé, en prenant $(f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ bornée.

iii) Le même argument, mais avec une suite ordinaire $(f_n)_n$.

iv) Soit H un sous-ensemble τ^n-compact de $L^b(E, F)$, et $\overline{\text{aco}}(H)$ son enveloppe disquée fermée. Nous devons montrer que $\overline{\text{aco}}(H)$ est complet pour τ^n, et, pour ça, nous prenons une suite généralisée de Cauchy $(f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ dans $\overline{\text{aco}}(H)$. Pour $x \in E$, l'ensemble:

$$H(x) = \left\{ h(x) : h \in H \right\}$$

est τ'-compact, et $\overline{\text{aco}}(H)(x) \subset \overline{\text{aco}}(H(x))$ est compact. Alors, il existe $f(x) = \lim f(x)$ dans F. Pour montrer que f appartient à $L^b(E, F)$ et que $(f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ converge vers f pour τ^n, on peut suivre l'argument de i).

v) On peut considérer une suite de Cauchy-Mackey dans L^b (E, F), et, avec l'argument de i), on peut prouver que cette suite est τ^n-convergente dans L^b (E, F). Pour finir, on applique la Proposition 1 de la page 46 de [4].//

De façon analogue, nous désignons par L (E, F) (resp. L^+ (E, F)) l'espace des applications linéaires continues (resp. séquentiellement continues) de E dans F. Nous trouvons tout d'abord la relation triviale:

$$L(E, F) \subset L^+(E, F) \subset L^b(E, F).$$

Proposition 2: L^+ (E, F) *est un sous-espace* τ^n*-fermé de* L^b (E, F).

Preuve. Soit $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ dans L^+ (E, F), avec $f = \lim f_\alpha$, et (x_j) une suite τ-nulle dans E. Pour prouver que $(f(x_j))_j$ est τ'-nulle, nous considérons une semi-norme continue q sur F, et $\delta > 0$. Il y a un certain α_0 tel que:

$$\alpha \geqslant \alpha_0 \Longrightarrow q\,(f(x_j) - f_\alpha(x_j)) < \frac{\delta}{2} \quad \text{pour tout j.} \tag{4}$$

D'autre part, il y a un j_0 avec:

$$j \geqslant j_0 \Longrightarrow q\,(f_{\alpha_0}(x_j)) < \frac{\delta}{2}\ , \tag{5}$$

et alors:

$$j \geqslant j_0 \Longrightarrow q\,(f(x_j)) < \delta\ . //$$

D'accord avec la terminologie de Wilansky [13], nous disons qu'un espace localement convexe (E, τ) est un *espace C-séquentiel* lorsque τ coïncide avec la topologie la plus fine τ^+ sur E, ayant les mêmes suites convergentes que τ. R. Snipes [8] a prouvé que cette propriété est équivalente à: Pour tout espace localement convexe F, L^+ (E, F) = L (E, F). Maintenant, nous obtenons directement:

Corollaire 1: Si (E, τ) *est un espace C-séquentiel et* F *est complet, alors* L (E, F) *est complet pour* τ^n.

Le Corollaire précedant est vrai si on remplace complet pour un autre degré de complétude, comme à la Proposition 1.

Si (E, τ) est un espace localement convexe, nous désignons par E' le dual topologique de E, par E^b l'espace des formes linéaires sur E qui sont bornées sur chaque sous-ensemble borné de E, et par E^+ l'espace des formes linéaires séquentiellement continues. Nous disons que (E, τ) est un *espace semibornologique* lorsque $E^b = E'$ et qu'il est un *espace de Mazur* lorsque $E' = E^+$ (terminologie de [13]). Maintenant:

Corollaire 2: Si (E, τ) *est un espace localement convexe,* E^b *est complet pour* τ^n.

Le résultat suivant a été obtenu directement par J. H. Webb:

Corollaire 3: Si (E, τ) *est un espace de Mazur,* E' *est complet pour* τ^n.

Voyons maintenant la réciproque du Corollaire 3:

Proposition 3: Soit (E, τ) *un espace localement convexe. Si* (E', τ^n) *est complet, alors* (E, τ) *est un espace de Mazur.*

Preuve. Soit $u \in E^+$. D'accord avec le théorème de complétion de Grothendieck, prouver que u appartient à E' équivaut à prouver que u est $\sigma(E, E')$-continue sur l'enveloppe disquée fermée de toute suite τ-nulle. Une telle enveloppe est τ-métrisable ([5], théorème 1.4.), et u est τ-continue sur elle. D'ailleurs, ces ensembles sont τ-precompacts, et τ et $\sigma(E, E')$ doivent coïncider sur eux ([6], 28.5.2). Maintenant, u est $\sigma(E, E')$-continue, et nous avons fini.//

La preuve de la Proposition nous suggère d'essayer quelque d'analogue pour la réciproque du Corollaire 1.Evidemment, la difficulté consiste à trouver un espace qui fonctionne comme dual de $(L(E, F), \tau^n)$, pour appliquer le théorème de Grothendieck.

On doit remarquer la similitude des résultats précédants avec un théorème de Köthe qui affirme qu'un espace est semibornologique si et seulement si son dual est complet pour la topologie de la convergence sur les suites Mackey-convergentes (voir [6], 28.5.2., et [3] pour une démonstration "bornologique").

En utilisant le Corollaire 1.3 de [10], nous pouvons obtenir une version du théorème de Eberlein-Grothendieck pour le dual d'un espace de Mazur:

Proposition 4: Soit (E, τ) *un espace de Mazur et* $A \subset E'$ *une partie convexe bornée non* $\sigma(E', E)$*-relativement compacte. Alors, il existe une suite d'hyperplans* $\sigma(E', E)$*-fermés* $H_n \subset E'$*, telle que*

$$\left(\bigcap_{n=1}^{p} H_n\right) \cap A \neq \varphi \quad \textit{pour tout } p \geqslant 1, \textit{mais} \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n = \varphi.$$

Preuve. D'accord avec le résultat de [10] que nous avons mentionné, si F est un espace localement convexe, $A \subset F$ est une partie convexe bornée non relativement compacte et F est complet pour la topologie de la convergence sur les ensembles fermés disqués et séparables de (F', σ)), il existe une suite d'hyperplans fermés avec la propriété de l'ennoncé. Il suffit, donc, de considérer F = (E', σ (E', E)), et de remarquer que la complétude de (E', τ^n) nous donne la complétude pour la topologie du résultat de [10]. //

En particulier, si $A \subset E'$ est convexe et σ (E', E)-relativament dénombrablement compact, il est σ (E', E)-relativement compact. Cependant, en ce cas, la convexité de A n'est pas necessaire, comme on peut montrer par un raisonnement analogue au précédant, en appliquant le Théorème 6 de [9]. Rappelons que A est σ (E', E)-relativement convexe-compact lorsque, donnée une suite (K_n), decroissante d'ensembles convexes et σ (E', E)-fermés avec $K_n \cap A \neq \phi$ poun tout la suite $(K_n \cap A)_n$ a un point adhérent dans E' (voir [6], page 316). En particulier, tout ensemble relativement dénombrablement compact est relativement convexe-compact.

Proposition 5: *Soit* (E, τ) *un espace de Mazur et* $A \subset E'$ *une partie* σ (E', E)*-relativement convexe-compacte. Alors,* A *est* σ (E', E)*-relativement compacte.*

On doit remarquer que cettes Propositions trouvent leur intérêt dans le cas où E n'est pas complet au sens de Mackey, parce que la topologie de Mackey μ (E', E) serait complete, soyant τ^n compatible avec le système dual $\langle E', E \rangle$, et nous nous trouverions dans un cas particulier du théorème de Eberlein-Grothendieck.

Finalement, par un argument analogue, on peut obtenir, à partir du Théorème 1.1 de [11] une autre variante. Rappelons qu'un sous-ensemble Y d'un espace topologique X est dit bornant lorsque toute fonction réelle continue sur X est bornée sur Y (voir [2], Chapitre 2).

Proposition 6: *Soit* (E, τ) *un espace de Mazur et* $A \subset E'$ *convexe et* σ (E', E)*-bornant. Alors,* A *est* σ (E', E)*-relativement compact.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] Dierolf, P.: Une caractérisation des espaces vectoriels topologiques complets au sens de Mackey. C. R. Acad. Sci. Paris 283 (1976), 245-248.

[2] Floret, K.: Weakly compact sets. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1980.

[3] Hogbe-Nlend, H.: Techniques de bornologie en théorie des espaces vectoriels topologiques et des espaces nucléaires, Summer School in Topological Vector Spaces. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.

[4] Hogbe-Nlend, H.: Bornology and Functional Analysis. North-Holland, Amsterdam, 1978.

[5] Kalton, N. J.: Some forms of the closed graph theorem. Proc. Camb. Phil. Soc. 70 (1971), 401-408).

[6] Köthe, G.: Topological Vector Spaces I. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1969.

[7] Ostling, E. G. and Wilansky, A.: Locally convex topologies and the convex compactness property. Proc. Camb. Phil. Soc. 75 (1974), 45-50.

[8] Snipes, R. F.: C-sequential and S-bornological topological vector spaces. Math. Ann. 202 (1973), 273-283.

[9] Valdivia, M.: Some criteria for weak compactness. J. Reine Angew. Math 255 (1972), 165-169.

[10] Valdivia, M.: On weak compactness. Studia Math. 49 (1973), 35-40.

[11] Valdivia, M.: Some new results on weak compactness. J. Funct. Anal. 24 (1977), 1-10.

[12] Webb, J. H.: Sequential convergence in locally convex spaces. Proc. Camb. Phil. Soc. 64 (1968), 341-364.

[13] Wilansky, A.: Topics in Functional Analysis. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1967.

Miguel A. Canela
Departament de Teoria de Funcions
Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona
Gran Via, 585
Barcelona-7 (ESPAGNE)