«RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE CAUCHY RELATIVO A UNA CLASE DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES DE 3.^{er} ORDEN, CUASI-LINEALES Y DE TIPO HIPERBÓLICO»

por

J. M. CASCANTE DÁVILA

Parte primera

PLANTEO DEL PROBLEMA Y EXISTENCIA DE SOLUCIÓN DEL MISMO

1. Formulacion del problema. — Consideremos la ecuación en derivadas parciales:

$$D_{112}\, u + \varrho\,(x_1, x_2) \cdot (D_{122}\, u) = f\,(x_1, x_2, u, \underset{(i=1,2)}{(D_i\, u)}, \underset{(j,k=1,2;j\leq k)}{(D_{jk}\, u)}) \quad (1)$$

en la que se supone que $\varrho : G' \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ es una función numérica definida y dos veces contínuamente diferenciable sobre un abierto $G' \subset \mathbf{R}^2$ conteniendo la adherencia $\overline{G}$ (es decir: $\overline{G} \subset G'$) de un abierto acotado $G \subset \mathbf{R}^2$, que es regularmente convexo relativamente a la ecuación diferencial ordinaria $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho\,(x_1, x_2)$, no anulándose ϱ sobre $\overline{G}$, [y por tanto, dada la conexión de $\mathcal{E}_c \subset \overline{G}$ (n.º 9 de la INTRODUCCIÓN), es ϱ de signo constante sobre $\mathcal{E}_c$, signo que siempre se puede suponer positivo (*)], y estando acotado ϱ sobre $\overline{G}$ por un cierto número positivo $m < 1$(**). G además contiene un arco $C = \bigcup_{r \in [r_A, r_B]} \{(x_1\,(r), x_2\,(r))\}$ de la clase (Γ) relativamente a la ecuación diferencial ordinaria $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho_{|G}\,(x_1, x_2)$, y sea $(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \in E_c^{(3)} \times E_c^{(2)} \times E_c^{(2)}$. Por otra parte $f : \mathcal{A} \subset \mathbf{R}^8 \to \mathbf{R}$ es una función definida y continuamente diferenciable y con derivadas primeras localmente lipschitziana respecto a u; $u_i\,(i = 1, 2)$; $u_{jk}\,(j, k = 1, 2)$ sobre un abierto $\mathcal{A}$ de $\mathbf{R}^8$

(*) Bastaría en caso contrario efectuar el cambio de variables independientes: $\left\{\begin{array}{l} x_1 = -\,\xi_1 \\ x_2 = \xi_2 \end{array}\right\}$.

(**) En caso contrario, supuesto ya $\varrho_{|\mathcal{E}_c} > 0$ sobre $\mathcal{E}_c$, bastaría efectuar el cambio de variables independientes: $\left\{\begin{array}{l} \xi_1 = kx_1 \\ \xi_2 = x_2 \end{array}\right\}$, siendo k un número positivo cualquiera mayor que $\sup_{\mathcal{E}_c} \varrho$ (por ejemplo, $k = 1 + \sup_{\mathcal{E}_c} \varrho$). Estos cambios de variables no modifican las condiciones de regularidad exigidas a G, G', ϱ, f, así como tampoco la relación de inclusión existente entre el abierto $\mathcal{A}$ de definición de f y el grafo de la aplicación: $M \in D_c \to (\widetilde{w}^0\,(M), \underset{(i=1,2)}{(D_i\, \widetilde{w}^0)}\,(M), \underset{(j\, k,=1,2; j\leq k)}{(D_{jk}\, \widetilde{w}^0)}\,(M)) \in \mathbf{R}^6$.

que contiene el grafo $\widetilde{\mathcal{F}}^0$ de la aplicación $M \in D_c \to (\widetilde{w}^0(M), \underset{(i=1,2)}{(D_i\, \widetilde{w}^0)}(M), \underset{(j,k=1,2;\, j\leq k)}{(D_{ik}\, \widetilde{w}^0)}(M)) \in \mathbf{R}^6$, [en la que $\widetilde{w}^0$ denota, como anteriormente, la solución al Problema de Cauchy definido por el sistema (16) del n.º 11 de la INTRODUCCION, en el que las condiciones iniciales del mismo se imponen, precisamente, mediante las funciones $\widetilde{\varphi}$, $\widetilde{\Psi}$, $\widetilde{\chi}$ consideradas].

La compacidad del subconjunto $\mathcal{H}^0 = \bigcup_{H \in \widetilde{\mathcal{F}}^0} \bar{B}_r(H) \subset \mathcal{A}$ (n.º 11 de la INTRODUCCION), entraña que f y las derivadas parciales primeras de dicha función sean globalmente lipschitzianas sobre $\mathcal{H}^0$ respecto a u, $\underset{(i=1,2)}{u_i}$, $\underset{(j,k=1,2;\, j\leq k)}{u_{jk}}$. [La condición de ser una función contínua y localmente lipschitziana sobre un abierto respecto a algunos de sus argumentos, implica, como se sabe, que la referida función sea globalmente lipschitziana respecto a dichos argumentos, sobre cualquier subconjunto compacto de aquel abierto; puesto que, por hipótesis, f admite derivadas parciales contínuas sobre $\mathcal{A}$, y, consecuentemente, f es localmente lipschitziana sobre $\mathcal{A}$ respecto a u, $\underset{(i=1,2)}{u_i}$, $\underset{(j,k=1,2;\, j\leq k)}{u_{jk}}$, así como son, asimismo por hipótesis, localmente lipschitzianas sobre $\mathcal{A}$ respecto a u, $\underset{(i=1,2)}{u_i}$, $\underset{(j,k=1,2;\, j\leq k)}{u_{jk}}$, las derivadas parciales f_{x_1}, f_{x_2}, f_u, $\underset{(i=1,2)}{f_{u_i}}$, $\underset{(j,k=1,2;\, j\leq k)}{f_{u_{jk}}}$, se sigue, finalmente, que f, f_{x_1}, f_{x_2}, f_u, $\underset{(i=1,2)}{f_{u_i}}$, $\underset{(j,k=1,2;\, j\leq k)}{f_{u_{jk}}}$ son globalmente lipschitzianas sobre el compacto $\mathcal{H}^0$ respecto a u, $\underset{(i=1,2)}{u_i}$, $\underset{(j,k=1,2;\, j\leq k)}{u_{jk}}$].

Finalmente, sea $M_s = \sup_{\mathcal{H}^0} |f| + 1 \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$, y sea $L \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$, el máximo del conjunto finito constituido por los extremos superiores de los módulos de ϱ, $\dfrac{1}{\varrho}$ y sus derivadas primeras y segundas sobre el compacto $\mathcal{E}_c \subset \bar{G}$, y pongamos:

$$\left.\begin{aligned} \nu &= \text{mín}\left\{\sqrt[3]{\frac{r}{2\sqrt{6}\cdot M_s}},\ \sqrt{\frac{r}{2\sqrt{6}\cdot M_s}},\ \sqrt{\frac{r}{6\sqrt{6}\cdot M_s\cdot L}},\ \frac{r}{2\sqrt{6}\cdot M_s},\ \frac{r}{6\sqrt{6}\cdot M_s\cdot L}\right\} \\ \varkappa &= \text{mín}\left\{\sqrt[3]{\frac{r}{2\sqrt{6}\cdot M_s}},\ \sqrt{\frac{r}{2\sqrt{6}\cdot M_s}},\ \sqrt{\frac{r}{6\sqrt{6}\cdot M_s\cdot L}},\ \frac{r}{6\sqrt{6}\cdot M_s}\right\} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

[en donde $r \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$ es un número real y estrictamente positivo que se supone verifica la relación (16*) del n.º 11 de la INTRODUCCION (existente siempre dada la hipótesis $\widetilde{\mathcal{F}}^0 \subset \mathcal{A}$, según se estableció allí)], y sea $\sigma_r \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$ determinado de acuerdo con la relación (16**) del n.º 11 de la INTRODUCCION.

2. TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD. — «Supuestas satisfechas las condiciones prescritas en el n.º 1, existe para todo $(\varphi, \Psi, \chi) \in B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$ una función numérica $u_{(\varphi,\Psi,\chi)}$ definida, contínua y acotada sobre el conjunto $\bigcup_{c^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu;\varkappa)}} D_{c^{(\nu,\varkappa)}} = D$, cuya restricción al abierto $\bigcup_{c^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} \overset{\circ}{D}_{c^{(\nu,\varkappa)}}$ es tres veces contínuamente diferenciable sobre $\bigcup_{c^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} \overset{\circ}{D}_{c^{(\nu,\varkappa)}}$, siendo las derivadas primeras, segundas y terceras prolongables con contínuidad a D, [de modo unívoco ya que se tiene, (en virtud de lo establecido en el n.º 10 de la INTRODUCCION), $\bigcup_{c^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} \overset{\circ}{D}_{c^{(\nu,\varkappa)}} \subset D = \bigcup_{c^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} D_{c^{(\nu,\varkappa)}} = \bigcup_{c^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} \overline{\overset{\circ}{D}}_{c^{(\nu,\varkappa)}} \subset \overline{\bigcup_{c^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} \overset{\circ}{D}_{c^{(\nu,\varkappa)}}}$, es decir, el subconjunto $\bigcup_{c^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} \overset{\circ}{D}_{c^{(\nu,\varkappa)}} \subset D$ es denso por todo sobre D], con prolongaciones asimismo acotadas sobre D, y que verifica:

a) $u_{(\varphi,\Psi,\chi)}$ es solución de (1) sobre D.

b) La restricción de $u_{(\varphi,\Psi,\chi)}$ a C coincide con φ.

c) La restricción a C de su derivada parcial $D_1 u_{(\varphi,\Psi,\chi)}$ coincide con Ψ.

d) La restricción a C de su derivada parcial mixta $D_{12} u_{(\varphi,\Psi,\chi)}$ coincide con χ.

e) Esta solución es única en el sentido que se precisa en el n.º 1 de la PARTE SEGUNDA.

f) Si $E_D^{(3)}$. denota el espacio vectorial de las funciones numéricas definidas, contínuas y acotadas sobre $D = \bigcup_{c^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} D_{c^{(\nu,\varkappa)}}$, cuyas restricciones al abierto $\bigcup_{c^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} \overset{\circ}{D}_{c^{(\nu,\varkappa)}}$ son tres veces contínuamente diferenciables sobre $\bigcup_{c^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} \overset{\circ}{D}_{(\nu,\varkappa)}$, con derivadas primeras, segundas y terceras prolongables con contínuidad a D y cuyas prolongaciones contínuas son asimismo acotadas sobre D, la aplicación $\Lambda : B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \to E_D^{(3)}$, definida por:

$$(\varphi, \Psi, \chi) \in B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \to \Lambda(\varphi, \Psi, \chi) = u_{(\varphi,\Psi,\chi)} \in E_D^{(3)}$$

es uniformemente contínua sobre la bola abierta $B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, supuestos dotados $B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$ de la topología inducida sobre $B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$ por la topología sobre $E_c^{(3)} \times E_c^{(2)} \times E_c^{(2)}$ engendrada por la norma $(\varphi, \Psi, \chi) \in E_c^{(3)} \times E_c^{(2)} \times E_c^{(2)} \to ||(\varphi, \Psi, \chi)||_{(c)} \in \mathbf{R}$, (n.º 11 de la IN-

TRODUCCION), y $E_D^{(3)}$, de la topología generada por la norma de la convergencia uniforme: $u \in E_D^{(3)} \to \|u\|_{(D)} = \sup\limits_D |u| + \max\limits_{(i=1,2)} \{\sup\limits_D |D_i u|\} + \max\limits_{(j,k=1,2)} \{\sup\limits_D |D_{jk} u|\} + \max\limits_{(p,q,r=1,2)} \{\sup\limits_D |D_{pqr} u|\} \in \mathbf{R}$».

3. Definicion de las aproximaciones y calculo de las mismas. — Consideremos para todo $(\varphi, \Psi, \chi) \in B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$ y todo $C^{(\nu,\varkappa)} \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)}$, las ecuaciones en derivadas parciales que siguen (*):

$$\left.\begin{array}{l}
D_{112}\, \overset{1}{u}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} + \varrho(x_1, x_2) \cdot (D_{122}\, \overset{1}{u}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}) = \\
= f_{|D_{c^{(\nu,\varkappa)}}}(x_1, x_2, \overset{0}{w}_{(\varphi,\Psi,\chi)}(x_1, x_2), \underset{(i=1,2)}{(D_i \overset{0}{w}_{(\varphi,\Psi,\chi)})}(x_1, x_2), \underset{(j,k=1,2;\, j\le k)}{(D_{jk} \overset{0}{w}_{(\varphi,\Psi,\chi)})}(x_1, x_2)) \\
\text{y para } n = 2, 3, \ldots \\
D_{112}\, \overset{n}{u}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} + \varrho(x_1, x_2) \cdot (D_{122}\, \overset{n}{u}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}) = \\
= f_{|D_{c^{(\nu,\varkappa)}}}(x_1, x_2, \overset{n-1}{u}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}(x_1, x_2), \underset{(i=1,2)}{(D_i \overset{n-1}{u}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})}(x_1, x_2), \\
\quad , \underset{(j,k=1,2;\, j\le k)}{(D_{jk} \overset{n-1}{u}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})}(x_1, x_2))
\end{array}\right\} \quad (3)$$

las cuales se obtienen por ley recurrente que demostraremos tiene sentido, si se adoptan para todas ellas las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{array}{l}
\overset{n}{u}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}(M) = \varphi(M) \\
(D_1 \overset{n}{u}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})(M) = \Psi(M) \\
(D_{12} \overset{n}{u}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})(M) = \chi(M)
\end{array}\right\} M \in C^{(\nu,\varkappa)} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Dichas ecuaciones son del mismo tipo que la estudiada en el n.º 11 de la INTRODUCCION de este trabajo, así como las condiciones iniciales impuestas a sus soluciones, y dado que, según se

(*) $\overset{0}{w}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$ es la solución (ya considerada en el n.º 11 de la INTRODUCCION), del Problema de Cauchy representado por el sistema:

$$\begin{array}{l}
D_{112}\, u + \varrho(x_1, x_2)(D_{122}\, u) = 0 \\
\left.\begin{array}{l}
u(M) = \varphi(M) \\
(D_1 u)(M) = \Psi(M) \\
(D_{12} u)(M) = \chi(M)
\end{array}\right\} M \in C
\end{array}$$

ha demostrado precedentemente, [relación (16**) de dicho n.º 11], se verifica:

$$«(\forall (\varphi, \Psi, \chi)) ((\varphi, \Psi, \chi) \in B_{\sigma_r} (\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \Rightarrow \vec{g}_{(c, \varphi, \Psi, \chi)} (D_c) \subset$$

$$\subset \bigcup_{H \in \widetilde{\mathcal{F}}^0} B_{r/2} (H) \subset \bigcup_{H \in \widetilde{\mathcal{F}}^0} \bar{B}_r (H) = \mathcal{H}^0 \subset \mathcal{A})»$$

y consecuentemente, para todo $(\varphi, \Psi, \chi) \in B_{\sigma_r} (\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$ y todo $C^{(\nu, \varkappa)} \in \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)}$ está definida la composición $f \circ \vec{g}_{(c, \varphi, \Psi, \chi)|D_{c^{(\nu,\varkappa)}}} = \Phi^0_{(c^{(\nu,\varkappa)}, \varphi, \Psi, \chi)}$ es decir, la aplicación:

$$M \in D_{c^{(\nu,\varkappa)}} \to f (M, \; w^0_{(\varphi, \Psi, \chi)} (M), \; \underset{(i=1,2)}{(D_i \, w^0_{(\varphi, \Psi, \chi)})} (M), \; \underset{(j, k=1,2; j \leq k)}{(D_{jk} \, w^0_{(\varphi, \Psi, \chi)})} (M)) \in \mathbf{R}$$

[aplicación, cuya restricción al abierto $\mathring{D}_{c^{(\nu,\varkappa)}}$ es, a fortiori, continuamente diferenciable sobre $\mathring{D}_{c^{(\nu,\varkappa)}}$ y con derivadas parciales primeras prolongables con contínuidad a $D_{c^{(\nu,\varkappa)}}$], se sigue (n.º 11 de la INTRODUCCION), que para todo $(\varphi, \Psi, \chi) \in B_{\sigma_r} (\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, y todo $C^{(\nu, \varkappa)} \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)}$ está perfectamente determinada la función $u^1_{(c^{(\nu,\varkappa)}, \varphi, \Psi, \chi)}$. Si suponemos que para algún $(\varphi, \Psi, \chi) \in B_{\sigma_r} (\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, $C^{(\nu,\varkappa)} \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)}$ y $n \in N - \{1\}$, es válida la relación:

$$\left.\begin{array}{l} «(\forall M) (M \in D_{c^{(\nu,\varkappa)}} \Rightarrow (M, \; u^1_{(c^{(\nu,\varkappa)}, \varphi, \Psi, \chi)} (M), \; \underset{(i=1,2)}{(D_i \, u^1_{(c^{(\nu,\varkappa)}, \varphi, \Psi, \chi)})} (M), \\ \quad , \; \underset{(j, k=1, 2; j \leq k)}{(D_{jk} \, u^1_{(c^{(\nu,\varkappa)}, \varphi, \Psi, \chi)})} (M)) \in \mathcal{A})» \\ \qquad\qquad \text{y} \\ «(\forall M) (M \in D_{c^{(\nu,\varkappa)}} \Rightarrow (M, \; u^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)}, \varphi, \Psi, \chi)} (M), \; \underset{(i=1,2)}{(D_i \, u^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)}, \varphi, \Psi, \chi)})} (M), \\ \quad , \; \underset{(j, k=1, 2; j \leq k)}{(D_{jk} \, u^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)}, \varphi, \Psi, \chi)})} (M)) \in \mathcal{A})» \end{array}\right\}$$

se verifica, entonces, que está definida la composición $f \circ \vec{g}^{\,n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)}, \varphi, \Psi, \chi)}$ [en donde, para todo $(C^{(\nu,\varkappa)}, \; \varphi, \; \Psi, \; \chi) \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)} \times B_{\sigma_r} (\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$ se indica mediante $\vec{g}^{\,n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)}, \varphi, \Psi, \chi)} : D_{c^{(\nu,\varkappa)}} \to \mathbf{R}^8$ la aplicación definida por:

$$M \in D_{c^{(\nu,\varkappa)}} \to (M, \; u^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)}, \varphi, \Psi, \chi)} (M), \; \underset{(i=1,2)}{(D_i \, u^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)}, \varphi, \Psi, \chi)})} (M), \; \underset{(j, k=1,2; j \leq k)}{(D_{jk} \, u^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)}, \varphi, \Psi, \chi)})} (M)) \in \mathbf{R}^8$$

supuesto que para el entero $n \in N - \{1\}$ considerado hayan sido determinadas $u^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)}, \varphi, \Psi, \chi)}$, $\underset{(i=1,2)}{D_i \, u^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)}, \varphi, \Psi, \chi)}}$, $\underset{(j, k=1,2)}{D_{jk} \, u^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)}, \varphi, \Psi, \chi)}}$, como ocurre, por hipótesis, en el caso que nos ocupa], y en consecuencia, en virtud de lo establecido en el n.º 11 de la INTRODUCCION, existe una función $u^{n}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}$ unívocamente determinada, definida y contínua sobre $D_{c^{(\nu,\varkappa)}}$ cuya restricción al abierto $\overset{\circ}{D}_{c^{(\nu,\varkappa)}}$ es tres veces contínuamente diferenciable sobre $\overset{\circ}{D}_{c^{(\nu,\varkappa)}}$ con derivadas primeras, segundas y terceras prolongables con continuidad a $D_{c^{(\nu,\varkappa)}}$, que es solución del problema de Cauchy definido por el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} D_{112}u + \varrho(x_1, x_2)\cdot(D_{122}u) = f\Big(x_1, x_2, u^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}(x_1, x_2), \\ \quad \underset{(i=1,2)}{\big(D_i u^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}\big)}(x_1, x_2), \underset{(j,k=1,2;\, j\leq k)}{\big(D_{jk} u^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}\big)}(x_1, x_2)\Big) \\ \left.\begin{array}{r} u(M) = \varphi(M) \\ (D_1 u)(M) = \Psi(M) \\ (D_{12}u)(M) = \chi(M) \end{array}\right\} M \in C^{(\nu,\varkappa)} \end{array}\right\} \quad (4)$$

Las expresiones, para todo $M \in D_{c^{(\nu,\varkappa)}}$ de $u^{n}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}$ y de sus derivadas primeras, segundas y terceras, se obtendrán superponiendo aditivamente las correspondientes a las respectivas soluciones $\overset{0}{w}_{(\varphi,\Psi,\chi)|D_{c^{(\nu,\varkappa)}}}$, $v^{n}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}$ de los Problemas de Cauchy parcialmente homogéneos (n.º 11 de la INTRODUCCION):

$$\left.\begin{array}{l} D_{112}u + \varrho(x_2, x_2)\cdot(D_{112}u) = 0 \\ \left.\begin{array}{r} u(M) = \varphi(M) \\ (D_1 u)(M) = \Psi(M) \\ (D_{12}u)(M) = \chi(M) \end{array}\right\} M \in C^{(\nu,\varkappa)} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} D_{112}u + \varrho(x_1, x_2)(D_{122}u) = \Phi^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}(x_1, x_2) \\ \left.\begin{array}{r} u(M) = 0 \\ (D_1 u)(M) = 0 \\ (D_{12}u)(M) = 0 \end{array}\right\} M \in C^{(\nu,\varkappa)} \end{array}\right\}$$

[en que, para abreviar, para todo $s \in N$ denota $\Phi^{s}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}$ la aplicación compuesta (supuesta existente, lo que se verifica, por hipótesis, para $s = n - 1$, $(\varphi, \Psi, \chi) \in B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$ y $C^{(\nu,\varkappa)} \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)})$, $f \circ \vec{g}^{\,s}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}$] y tener en cuenta las fórmulas resolutivas del n.º 11 de la INTRODUCCION, expresiones que en definitiva son las siguientes:

$$
\left.
\begin{aligned}
& u^{n}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}(M) = w^{0}_{(\varphi,\,\Psi,\,\chi)}(M) + \\
& + \iint_{(M P_M Q_M)} \left(J\left(\Phi^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}\right)\right)(\xi_1,\ \xi_2)\, d\xi_1,\ d\xi_2 \\
& \left(D_1\, u^{n}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}\right)(M) = \\
& = \left(D_1\, w^{0}_{(\varphi,\,\Psi,\,\chi)}\right)(M) - \int_{(M P_M)} \left(J\left(\Phi^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}\right)\right)(\xi_1,\ \xi_2)\, d\xi_2 \\
& \left(D_2\, u^{n}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}\right)(M) = \\
& = \left(D_2\, w^{0}_{(\varphi,\,\Psi,\,\chi)}\right)(M) - \int_{(M Q_M)} \left(J\left(\Phi^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}\right)\right)(\xi_1,\ \xi_2)\, d\xi_1 \\
& \left(D_{11}\, u^{n}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}\right)(M) = \\
& = \left(D_{11}\, w^{0}_{(\varphi,\,\Psi,\,\chi)}\right)(M) - \left(\varrho \cdot J\left(\Phi^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}\right)\right)(M) - \\
& - \int_{(M P_M)} \left((D_2\,\varrho)\cdot J\left(\Phi^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}\right)\right)(\xi_1,\ \xi_2)\, d\xi_2 - \\
& - \int_{(M P_M)} \Phi^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}(\xi_1,\ \xi_2)\, d\xi_2 \\
& \left(D_{12}\, u^{n}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}\right)(M) = \left(D_{12}\, w^{0}_{(\varphi,\,\Psi,\,\chi)}\right)(M) + \left(J\left(\Phi^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}\right)\right)(M) \\
& \left(D_{22}\, u^{n}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}\right)(M) = \left(D_{22}\, w^{0}_{(\varphi,\,\Psi,\,\chi)}\right)(M) - \\
& - \left(\frac{J\left(\Phi^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}\right)}{\varrho}\right)(M) + \\
& + \int_{(M Q_M)} \left(\frac{D_1\,\varrho}{\varrho^2}\cdot J\left(\Phi^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}\right)\right)(\xi_1,\ \xi_2)\, d\xi_1 - \\
& - \int_{(M Q_M)} \left(\frac{\Phi^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}}{\varrho}\right)(\xi_1,\ \xi_2)\, d\xi_1 \\
& \left(D_{111}\, u^{n}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}\right)(M) = \\
& = \left(D_{111}\, w^{0}_{(\varphi,\,\Psi,\,\chi)}\right)(M) - \left(D_1\left(\varrho\cdot J\left(\Phi^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}\right)\right)\right)(M) - \\
& - \int_{(M P_M)} \left(D_1\left((D_2\,\varrho)\cdot J\left(\Phi^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}\right)\right)\right)(\xi_1,\ \xi_2)\, d\xi_2 - \\
& - \int_{(M P_M)} \left(D_1\, \Phi^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}\right)(\xi_1,\ \xi_2)\, d\xi_2 - \left(\Phi^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}\cdot \frac{x_2'}{x_1'}\right)(P_M)
\end{aligned}
\right\} (5)
$$

$$\left.\begin{aligned}
&(D_{112}\, u^n_{(c^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)})\,(M) = \\
&= (D_{112}\, w^0_{(\varphi,\,\Psi,\,\chi)})\,(M) + \Phi^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}\,(M) + \\
&+ \left(\Phi^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)} \cdot \frac{x'_1}{x'_2 - \varrho \cdot x'_1}\right)(L_M) \cdot (\varrho \cdot \exp\,\{-J\,(D_2\,\varrho)\})\,(M) - \\
&- (\varrho \cdot \exp\,\{-J\,(D_2\,\varrho)\} \cdot J\,((D_2\,\Phi^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}) \cdot \exp\,\{J\,(D_2\,\varrho)\}))\,(M) \\
&(D_{122}\, u^n_{(c^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)})\,(M) = (D_{122}\, w^0_{(\varphi,\,\Psi,\,\chi)})\,(M) - \\
&- \left(\Phi^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)} \cdot \frac{x'_1}{x'_2 - \varrho \cdot x'_1}\right)(L_M) \cdot \exp\,\{-J\,(D_2\,\varrho)\}\,(M) + \\
&+ (\exp\,\{-J\,(D_2\,\varrho)\} \cdot J\,((D_2\,\Phi^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}) \cdot \exp\,\{J\,(D_2\,\varrho)\}))\,(M) \\
&(D_{222}\, u^n_{(c^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)})\,(M) = \\
&= (D_{222}\, w^0_{(\varphi,\,\Psi,\,\chi)})\,(M) - \left(D_2\left(\frac{J\,(\Phi^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)})}{\varrho}\right)\right)(M) + \\
&+ \int_{(MQ_M)} \left(D_2\left(\frac{D_1\,\varrho}{\varrho^2} \cdot J\,(\Phi^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)})\right)\right)(\xi_1,\,\xi_2)\,d\,\xi_1 - \\
&- \int_{(MQ_M)} \left(D_2\left(\frac{\Phi^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}}{\varrho}\right)\right)(\xi_1,\,\xi_2)\,d\,\xi_1 - \left(\frac{\Phi^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}}{\varrho} \cdot \frac{x'_1}{x'_2}\right)(Q_M)
\end{aligned}\right\}\quad (5)$$

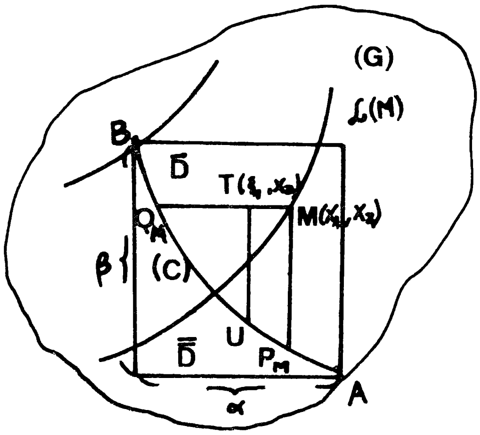
Demostremos ahora, que para todo $(\varphi,\,\Psi,\,\chi) \in B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi},\,\widetilde{\Psi},\,\widetilde{\chi})$, $C^{(\nu,\varkappa)} \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)}$ y cualquiera sea $n \in N$ está definida la aplicación compuesta $f \circ \vec{g}^{\,n}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)} = \Phi^n_{(c^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}$, para lo cual bastará probar que $\vec{g}^{\,n}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}\,(D_{c^{(\nu,\varkappa)}}) \subset \mathcal{A}$, y para ello procederemos por recurrencia. En primer lugar, se tiene, según se ha visto precedentemente, que para todo $(C^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi) \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)} \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi},\,\widetilde{\Psi},\,\widetilde{\chi})$ se verifica $\vec{g}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}\,(D_{c^{(\nu,\varkappa)}}) \subset \mathcal{A}$, por lo que fijado $(C^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi) \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)} \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi},\,\widetilde{\Psi},\,\widetilde{\chi})$, la solución al problema de Cauchy representado por el sistema (4) en donde se suponen sustituidos $u^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}$, $\underset{(i=1,2)}{D_i}\, u^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}$, $\underset{(j,k=1,2\,;\,j\leq k)}{D_{jk}}\, u^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}$, respectivamente por $w^0_{(\varphi,\,\Psi,\,\chi)\,|\,D_{c^{(\nu,\varkappa)}}}$, $D_i\, w^0_{(\varphi,\,\Psi,\,\chi)\,|\,D_{c^{(\nu,\varkappa)}}}$, $D_{jk}\, w^0_{(\varphi,\,\Psi,\,\chi)\,|\,D_{c^{(\nu,\varkappa)}}}$, está perfectamente determinada, y dado que se tiene:

$$\text{«}\ (\forall M)\ (M \in D_{c^{(\nu,\varkappa)}} \Rightarrow |\ (J\ (\Phi^0_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}))\ (M)\ | =$$

$$= \left| \int_{\mathcal{L}(M)} \Phi^0_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}\ (\xi_1,\ \xi_2)\ d\,\xi_1 \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{x_1\ (r^{L_M})}^{x_1{}^M} |\ \Phi^0_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}\ (\xi_1,\ \mu\ (\xi_1,\ x_1{}^M,\ x_2{}^M))\ |\ d\,\xi_1 \right| \leq$$

$$\leq M_s \cdot |\ x_1{}^M - x_1\ (r^{L_M})\ | \leq M_s \cdot \nu)\ \text{»}$$



se deduce sucesivamente [habida cuenta las expresiones (5)], las desigualdades siguientes, válidas para todo $M \in D_{c^{(\nu,\varkappa)}}$:

$$|\ u^1_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} - w^0_{(\varphi,\Psi,\chi)}\ |\ (M) =$$

$$= \left| \iint_{(M\,P_M\,Q_M)} (J\ (\Phi^0_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}))\ (\xi_1,\ \xi_2)\ d\,\xi_1\ d\,\xi_2 \right| =$$

$$= \left| \int_{Q_M}^{M} d\,\xi_1 \int_{U}^{T} (J\ (\Phi^0_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi\,\chi)}))\ (\xi_1,\ \xi_2)\ d\,\xi_2 \right| \leq M_s \cdot \nu^2 \cdot \varkappa \leq$$

$$\leq M_s \sqrt[3]{\left(\frac{r}{2\sqrt{6}\cdot M_s}\right)^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{r}{2\sqrt{6}\ M_s}} = \frac{r}{2\sqrt{6}}$$

$$|\ D_1\ u^1_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} - D_1\ w^0_{(\varphi,\Psi,\chi)}\ |\ (M) =$$

$$= \left| \int_{(M\,P_M)} (J\ (\Phi^0_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}))\ (\xi_1,\ \xi_2)\ d\,\xi_2 \right| \leq M_s \cdot \nu \cdot \varkappa \leq$$

$$\leq M_s \cdot \sqrt{\frac{r}{2\sqrt{6}\cdot M_s}} \cdot \sqrt{\frac{r}{2\sqrt{6}\cdot M_s}} = \frac{r}{2\sqrt{6}}$$

$$| D_2 u^1_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} - D_2 w^0_{(\varphi,\Psi,\chi)} | (M) =$$

$$= \left| \int_{(M Q_M)} (J (\Phi^0_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})) (\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 \right| \leq M_s \cdot \nu^2 \leq$$

$$\leq M_s \cdot \left(\sqrt{\frac{r}{2\sqrt{6} \cdot M_s}} \right)^2 = \frac{r}{2\sqrt{6}}$$

$$| D_{11} u^1_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} - D_{11} w^0_{(\varphi,\Psi,\chi)} | (M) \leq | \varrho \cdot J (\Phi^0_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}) | (M) +$$

$$+ \left| \int_{(M P_M)} ((D_2 \varrho) \cdot J (\Phi^0_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi\,\chi)})) (\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2 \right| +$$

$$+ \left| \int_{(M P_M)} \Phi^0_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} (\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2 \right| \leq M_s \cdot L \cdot \nu +$$

$$+ M_s \cdot L \cdot \nu \cdot \varkappa + M_s \cdot \varkappa \leq M_s \cdot L \cdot \frac{r}{6\sqrt{6} \cdot M_s \cdot L} +$$

$$+ M_s \cdot L \sqrt{\frac{r}{6\sqrt{6} \cdot M_s \cdot L}} \cdot \sqrt{\frac{r}{6\sqrt{6} M_s \cdot L}} + M_s \cdot \frac{r}{6\sqrt{6}\, M_s} = \frac{r}{2\sqrt{6}}$$

$$| D_{12} u^1_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} - D_{12} w^0_{(\varphi,\Psi,\chi)} | (M) = | J (\Phi^0_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}) | (M) \leq$$

$$\leq M_s \cdot \nu \leq M_s \cdot \frac{r}{2\sqrt{6} \cdot M_s} = \frac{r}{2\sqrt{6}}$$

$$| D_{22} u^1_{(c^{(c,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} - D_{22} w^0_{(\varphi,\Psi,\chi)} | (M) \leq \left| \frac{J (\Phi^0_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})}{\varrho} \right| (M) +$$

$$+ \left| \int_{(M Q_M)} \left(\frac{D_1 \varrho}{\varrho^2} \cdot J (\Phi^0_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}) \right) (\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 \right| +$$

$$+ \left| \int_{(M Q_M)} \left(\frac{\Phi^0_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}}{\varrho} \right) (\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 \right| \leq M_s \cdot L \cdot \nu +$$

$$+ M_s \cdot L \cdot \nu^2 + M_s \cdot L \cdot \nu \leq M_s \cdot L \frac{r}{6\sqrt{6} \cdot M_s \cdot L} +$$

$$+ M_s \cdot L \left(\sqrt{\frac{r}{6\sqrt{6}\, M_s \cdot L}} \right)^2 + M_s \cdot L \cdot \frac{r}{6\sqrt{6} M_s \cdot L} = \frac{r}{2\sqrt{6}}$$

resultando, como consecuencia de ellas, que para todo $M \in D_{c^{(\nu,\varkappa)}}$ [teniendo en cuenta además (16**) del n.º 11 de la INTRODUCCION], se verifica:

$$« \| \vec{g}^{1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} (M) - \widetilde{H}_M \| \leq \| \vec{g}^{1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} (M) - \vec{g}_{(c,\varphi,\Psi,\chi)} (M) \| +$$
$$+ \| \vec{g}_{(c,\varphi,\Psi,\chi)} (M) - \widetilde{H}_M \| \leq \| ((u^{1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} - w^{0}_{(\varphi,\Psi,\chi)}) (M),$$
$$(D_i\, u^{1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} \underset{(i=1,2)}{-} D_i\, w^{0}_{(\varphi,\Psi,\chi)}) (M),$$
$$(D_{jk}\, u^{1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} \underset{(j,k=1,2;\, j\leq k)}{-} D_{jk}\, w^{0}_{(\varphi,\Psi,\chi)}) (M)) \| +$$
$$+ \frac{r}{2} \leq \sqrt{6 \cdot \left(\frac{r}{2\sqrt{6}}\right)^2} + \frac{r}{2} = r »$$

es decir:

$$« \vec{g}^{1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} (M) \in \bar{B}_r (\widetilde{H}_M) »$$

lo que entraña:

$$« \vec{g}^{1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} (D_{c^{(\nu,\varkappa)}}) \subset \bigcup_{M \in D_{c^{(\nu,\varkappa)}}} \bar{B}_r (\widetilde{H}_M) \subset \bigcup_{M \in D_c} \bar{B}_r (\widetilde{H}_M) = \bigcup_{H \in \widetilde{\mathcal{F}}^0} \bar{B}_r (H) = \mathcal{H}^0 \subset \mathcal{A} »$$

y dada la arbitrariedad de $(c^{(\nu,\varkappa)}, \varphi, \Psi, \chi) \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)} \times B_{\sigma_r} (\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, se puede poner:

$$« (\forall_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}) ((c^{(\nu,\varkappa)}, \varphi, \Psi, \chi) \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)} \times B_{\sigma_r} (\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \vec{g}^{1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} (D_{c^{(\nu,\varkappa)}}) \subset \mathcal{H}^0 \subset \mathcal{A}) » \tag{6}$$

Supuesto ahora que exista un $n \in N - \{1\}$ y un $(c^{(\nu,\varkappa)}, \varphi, \Psi, \chi) \in \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)} \times B_{\sigma_r} (\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$ tal que para todo $s \in N$ con $1 \leq s \leq n-1$, se verifique la relación: $\vec{g}^{s}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} (D_{c^{(\nu,\varkappa)}}) \subset \mathcal{H}^0 \subset \mathcal{A}$, se tendrá primeramente que está definida la aplicación compuesta $\Phi^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} = = f \circ \vec{g}^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}$, y en consecuencia, la solución al problema de Cauchy representado por el sistema (4) está perfectamente determinada, y dado que es cierta la relación:

$$« (\forall M) (M \in D_{c^{(\nu,\varkappa)}} \Rightarrow | (J\, (\Phi^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})) (M) | =$$
$$= \left| \int_{\mathcal{L}(M)} \Phi^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} (\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 \right| \leq$$
$$\leq \left| \int_{x_1 (r^{L_M})}^{x_1{}^M} \left| \Phi^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} (\xi_1, \mu\, (\xi_1, x_1{}^M, x_2{}^M)) \right| d\xi_1 \right| \leq$$
$$\leq M_s \cdot | x_1{}^M - x_1 (r^{L_M}) | \leq M_s \cdot \nu) »$$

se deduce sucesivamente, habida cuenta las expresiones (5), las siguientes desigualdades válidas para todo $M \in D_{c^{(\nu,\varkappa)}}$:

$$\left| u^{n}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} - w^{0}_{(\varphi,\Psi,\chi)} \right| (M) = \left| \iint_{(M P_M Q_M)} (J\,(\Phi^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}))\,(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2 \right| =$$

$$= \left| \int_{Q_M}^{M} d\xi_1 \int_{U}^{T} (J\,(\Phi^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}))\,(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_2 \right| \le M_s \cdot \nu^2 \cdot \varkappa \le$$

$$\le M_s \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{r}{2\sqrt{6}\,M_s}\right)^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{r}{2\sqrt{6}\cdot M_s}} = \frac{r}{2\sqrt{6}}$$

$$\left| D_1\, u^{n}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} - D_1\, w^{0}_{(\varphi,\Psi,\chi)} \right| (M) = \left| \int_{(M P_M)} (J\,(\Phi^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}))\,(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_2 \right| \le$$

$$\le M_s \cdot \nu \cdot \varkappa \le M_s \cdot \sqrt{\frac{r}{2\sqrt{6}\,M_s}} \cdot \sqrt{\frac{r}{2\sqrt{6}\,M_s}} = \frac{r}{2\sqrt{6}}$$

$$\left| D_2\, u^{n}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} - D_2\, w^{0}_{(\varphi,\Psi,\chi)} \right| (M) = \left| \int_{(M Q_M)} (J\,(\Phi^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}))\,(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1 \right| \le$$

$$\le M_s \cdot \nu^2 \le M_s \left(\sqrt{\frac{r}{2\sqrt{6}\,M_s}}\right)^2 = \frac{r}{2\sqrt{6}}$$

$$\left| D_{11}\, u^{n}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} - D_{11}\, w^{0}_{(\varphi,\Psi,\chi)} \right| (M) \le \left| \varrho \cdot J\,(\Phi^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}) \right| (M) +$$

$$+ \left| \int_{(M P_M)} ((D_2\varrho)\cdot J\,(\Phi^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}))\,(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_2 \right| +$$

$$+ \left| \int_{(M P_M)} \Phi^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}\,(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_2 \right| \le M_s \cdot L \cdot \nu + M_s \cdot L \cdot \nu \cdot \varkappa + M_s \cdot \varkappa \le$$

$$\le M_s \cdot L \cdot \frac{r}{6\cdot\sqrt{6}\cdot M_s \cdot L} + M_s \cdot L \cdot \sqrt{\frac{r}{6\sqrt{6}\cdot M_s\cdot L}} \cdot \sqrt{\frac{r}{6\sqrt{6}\cdot M_s \cdot L}} +$$

$$+ M_s \cdot \frac{r}{6\sqrt{6}\,M_s} = \frac{r}{2\sqrt{6}}$$

$$\left| D_{12}\, u^{n}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} - D_{12}\, w^{0}_{(\varphi,\Psi,\chi)} \right| (M) = \left| J\,(\Phi^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}) \right| (M) \le M_s \cdot \nu \le$$

$$\le M_s \cdot \frac{r}{2\sqrt{6}\cdot M_s} = \frac{r}{2\sqrt{6}}$$

$$\left| D_{22}\, u^{n}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} - D_{22}\, w^{0}_{(\varphi,\Psi,\chi)} \right| (M) \le \left| \frac{J\,(\Phi^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})}{\varrho} \right| (M) +$$

$$+ \left| \int_{(M Q_M)} \left(\frac{D_1 \varrho}{\varrho^2} \cdot J\,(\Phi^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}) \right) (\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1 \right| +$$

$$+ \left| \int_{(M Q_M)} \left(\frac{\Phi^{n-1}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}}{\varrho} \right) (\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1 \right| \le M_s \cdot L \cdot \nu + M_s \cdot L \cdot \nu^2 + M_s \cdot L \cdot \nu \le$$

$$\leq M_s \cdot L \cdot \frac{r}{6\sqrt{6} \cdot M_s \cdot L} + M_s \cdot L \cdot \left(\sqrt{\frac{r}{6 \cdot \sqrt{6} \cdot M_s \cdot L}}\right)^2 +$$

$$+ M_s \cdot L \cdot \frac{r}{6\sqrt{6} \cdot M_s \cdot L} = \frac{r}{2\sqrt{6}}$$

obteniéndose para todo $M \in D_{c^{(\nu,\varkappa)}}$ [teniendo en cuenta, además, (16**) del n.º 11 de la INTRODUCCION], la relación:

$$« \| \vec{g}^{\,n}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}(M) - \widetilde{H}_M \| \leq \| \vec{g}^{\,n}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}(M) - \vec{g}_{(c,\varphi,\Psi,\chi)}(M) \| +$$

$$+ \| \vec{g}_{(c,\varphi,\Psi,\chi)}(M) - \widetilde{H}_M \| \leq \| (u^{n}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} - \overset{0}{w}_{(\varphi,\Psi,\chi)})(M),$$

$$\underset{(i=1,2)}{(D_i\, u^{n}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} - D_i\, \overset{0}{w}_{(\varphi,\Psi,\chi)})(M)}, \underset{(j,k=1,2;\, j\leq k)}{(D_{jk}\, u^{n}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} - D_{jk}\, \overset{0}{w}_{(\varphi,\Psi,\chi)})(M)} \| +$$

$$+ \frac{r}{2} \leq \sqrt{6 \cdot \left(\frac{r}{2\sqrt{6}}\right)^2} + \frac{r}{2} = r »$$

es decir:

$$« (\forall M)\, (M \in D_{c^{(\nu,\varkappa)}} \Rightarrow \vec{g}^{\,n}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}(M) \in \bar{B}_r(\widetilde{H}_M)) »$$

lo que entraña:

$$« \vec{g}^{\,n}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}(D_{c^{(\nu,\varkappa)}}) \subset \bigcup_{M \in D_{c^{(\nu,\varkappa)}}} \bar{B}_r(\widetilde{H}_M) \subset \bigcup_{M \in D_c} \bar{B}_r(\widetilde{H}_M) = \bigcup_{H \in \mathfrak{F}^0} \bar{B}_r(H) = \mathcal{H}^0 \subset \mathcal{A} »$$

y dada la arbitrariedad de $(c^{(\nu,\varkappa)}, \varphi, \Psi, \chi) \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)} \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$ es válida, asimismo, la relación:

$$« (\forall_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})\, ((c^{(\nu,\varkappa)}, \varphi, \Psi, \chi) \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)} \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{g}^{\,n}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}(D_{c^{(\nu,\varkappa)}}) \subset \mathcal{H}^0 \subset \mathcal{A}) »$$

Puesto que para $n = 2$ son ciertas, en virtud de (6), las hipótesis de la recurrencia, el resultado obtenido es completamente general quedando así establecida la validez de la relación:

$$« (\forall n)\, (n \in N \Rightarrow (\forall_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})\, ((c^{(\nu,\varkappa)}, \varphi, \Psi, \chi) \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)} \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{g}^{\,n}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}(D_{c^{(\nu,\varkappa)}}) \subset \mathcal{H}^0 \subset \mathcal{A})) »$$

resultado que demuestra que cualquiera sean $n \in N$, $C^{(\nu,\varkappa)} \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)}$ y $(\varphi, \Psi, \chi) \in B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, está perfectamente determinada la aproximación $u^{n}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}$, cuya expresión así como las de sus derivadas primeras, segundas y terceras vienen dadas, para todo $M \in D_{c^{(\nu,\varkappa)}}$ por las fórmulas (5). [Obsérvese, que, puesto que:

$$\widetilde{H}_M = (M, \widetilde{w}^0 (M), \underset{(i=1,2)}{(D_i \widetilde{w}^0)} (M), \underset{(j,k=1,2\,;\,j\leq k)}{(D_{jk} \widetilde{w}^0)} (M)), \text{ y } \vec{g}^n_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} (M) =$$

$$= (M, u^n_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} (M), \underset{(i=1,2)}{(D_i u^n_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})} (M), \underset{(j,k=1,2;j\leq k)}{(D_{jk} u^n_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})} (M)),$$

y consecuentemente,

$$|| \vec{g}^n_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} (M) - \widetilde{H}_M || = || ((u^n_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} - \widetilde{w}^0) (M),$$
$$\underset{(i=1,2)}{(D_i u^n_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} - D_i \widetilde{w}^0)} (M), \underset{(j,k=1,2\,;\,j\leq k)}{(D_{jk} u^n_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} - D_{jk} \widetilde{w}^0)} (M)) ||,$$

se sigue, teniendo en cuenta lo precedente, que para todo $(n, \varphi, \Psi, \chi) \in N \times B_{\sigma_r} (\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, y cualquiera sea $C^{(\nu,\varkappa)} \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)}$ así como $M \in D_{c^{(\nu,\varkappa)}}$, se verifica:

$$| u^n_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} (M) | \leq | \widetilde{w}^0 (M) | + | u^n_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} (M) - \widetilde{w}^0 (M) | \leq$$
$$\leq | \widetilde{w}^0 (M) | + || \vec{g}^n_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} (M) - \widetilde{H}_M || \leq | \widetilde{w}^0 (M) | + r,$$

y análogamente:

$$| (D_i u^n_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}) (M) | \leq | (D_i \widetilde{w}^0) (M) | + r\,; (i = 1,2), \text{ y}$$
$$\text{y } | (D_{jk} u^n_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}) (M) | \leq | (D_{jk} \widetilde{w}^0) (M) | + r\,; (j, k = 1,2)]$$

4. Continua prolongacion de las aproximaciones y de sus derivadas primeras, segundas y terceras a $D = \bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} D_{C^{(\nu,\varkappa)}}$ — Es válido el siguiente:

Teorema i. — «Para todo $n \in N$ y cualquiera que sean $(\varphi, \Psi, \chi) \in B_{\sigma_r} (\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, existen sendas funciones $u^n{}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$, $\underset{(i=1,2)}{u^n{}_{i(\varphi,\Psi,\chi)}}$, $\underset{(j,k=1,2)}{u^n{}_{jk(\varphi,\Psi,\chi)}}$ y $\underset{(p,q,r=1,2)}{u^n{}_{pqr(\varphi,\Psi,\chi)}}$, definidas y contínuas sobre $D = \bigcup_{C(\nu,\varkappa)\in C(\nu,\varkappa)} D_{c^{(\nu,\varkappa)}}$, que para todo $C^{(\nu,\varkappa)} \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)}$, prolongan con continuidad, respectivamente, $u^n{}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}$, $\underset{(i=1,2)}{D_i u^n{}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}}$ $\underset{(j,k=1,2)}{D_{jk} u^n{}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}}$ y $\underset{(p,q,r=1,2)}{D_{pqr} u^n{}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}}$ a $D = \bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} D_{c^{(\nu,\varkappa)}}$».

Para establecer dicho Teorema, demostremos previamente este:

Lema. — «Sea $r \in [r^A, r^B] \to \vec{x} (r) = (x_1 (r), x_2 (r)) \in \mathbf{R}^2$, la función vectorial que define el arco C. Para todo $M \in D_c - M$, si $C_M = \bigcup_{r\in[\min\{r^{L_M},r^{P_M},r^{Q_M}\},\max\{r^{L_M},r^{P_M},r^{Q_M}\}]} \{(x_1 (r), x_2 (r))\}$ [con r^{L_M}, r^{P_M}, r^{Q_M} teniendo el mismo significado que en el n.º 11 de la INTRODUCCION], denota el sub-arco de C definido por la restricción de la función vectorial $r \in [r^A, r^B] \to \vec{x}(r) \in \mathbf{R}^2$ considerada al intervalo $[\text{mín}\{r^{L_M}, r^{P_M}, r^{Q_M}\}, \text{ máx}\{r^{L_M}, r^{P_M}, r^{Q_M}\}]$, (sub-arco C_M que evidentemente es de la clase (Γ) contenido en G relativamente a la ecuación diferencial ordinaria $\dfrac{d x_2}{d x_1} = \varrho_{|G}(x_1, x_2)$), se verifica que $M \in D_{C_M}$».

En efecto, se tiene evidentemente, que:

$$«r^{L_M} \in [\text{mín}\{r^{L_M}, r^{P_M}, r^{Q_M}\}, \text{ máx}\{r^{L_M}, r^{P_M}, r^{Q_M}\}] \text{ y } (x_1(r^{L_M}), x_1^M, x_2^M) \in \mathfrak{A}' \text{ y } x_2(r^{L_M}) = \mu(x_1(r^{L_M}), x_1^M, x_2^M)»$$

es decir, se verifica que:

$$«M = (x_1^M, x_2^M) \in \overline{G} \text{ y } (\exists r)(r \in [\text{mín}\{r^{L_M}, r^{P_M}, r^{Q_M}\}, \text{máx}\{r^{L_M}, r^{P_M}, r^{Q_M}\}] \text{ y } (x_1(r), x_1^M, x_2^M) \in \mathfrak{A}' \text{ y } x_2(r) = \mu(x_1(r), x_1^M, x_2^M))»$$

relación equivalente (n.º 9 de la INTRODUCCION) a la:

$$«M \in \mathcal{E}_{C_M}» \tag{7}$$

Por otro lado, dado que $M \in D_c - C \subset D_c$, se tiene, como consecuencia de la propia definición de D_c, que son válidas las relaciones:

$$«(\forall x_1)(x_1 \in [\text{mín}\{x_1^M, x_1^{Q_M}\}, \text{máx}\{x_1^M, x_1^{Q_M}\}] \Rightarrow (x_1, x_2^M) \in \mathcal{E}_c \subset \overline{G})»$$

$$«(\forall x_2)(x_2 \in [\text{mín}\{x_2^M, x_2^{P_M}\}, \text{máx}\{x_2^M, x_2^{P_M}\}] \Rightarrow (x_1^M, x_2) \in \mathcal{E}_c \subset \overline{G})»$$

y puesto que, por otra parte (según se demostró en el n.º 10 de la INTRODUCCION), las aplicaciones: $x_1 \in [\text{mín}\{x_1^M, x_1^{Q_M}\}, \text{máx}\{x_1^M, x_1^{Q_M}\}] \to h_c(x_1, x_2^M) \in \mathbf{R}$, y $x_2 \in [\text{mín}\{x_2^M, x_2^{P_M}\}, \text{ máx}\{x_2^M, x_2^{P_M}\}] \to h_c(x_1^M, x_2) \in \mathbf{R}$, definen sendos homeomorfismos, la primera del intervalo $[\text{mín}\{x_1^M, x_1^{Q_M}\}, \text{máx}\{x_1^M, x_1^{Q_M}\}]$ sobre el intervalo $[\text{mín}\{r^{L_M}, r^{Q_M}\}, \text{máx}\{r^{L_M}, r^{Q_M}\}] \subset [\text{mín}\{r^{L_M}, r^{P_M}, r^{Q_M}\}, \text{máx}\{r^{L_M}, r^{P_M}, r^{Q_M}\}]$ y la segunda del intervalo $[\text{mín}\{x_2^M, x_2^{P_M}\}, \text{máx}\{x_2^M, x_2^{P_M}\}]$ sobre el intervalo $[\text{mín}\{r^{L_M}, r^{P_M}\}, \text{máx}\{r^{L_M}, r^{P_M}\}] \subset [\text{mín}\{r^{L_M}, r^{P_M}, r^{Q_M}\}, \text{máx}\{r^{L_M}, r^{P_M}, r^{Q_M}\}]$, son válidas, consecuentemente, las relaciones:

$$«(\forall x_1)\ (x_1 \in [\text{mín}\ \{x_1{}^M, x_1{}^{Q_M}\},\ \text{máx}\ \{x_1{}^M, x_1{}^{Q_M}\}] \Rightarrow (x_1, x_2{}^M) \in \overline{G}\ \text{y}$$
$$\text{y}\ r = h_c\,(x_1, x_2{}^M) \in [\text{mín}\ \{r^{L_M}, r^{P_M}, r^{Q_M}\},\ \text{máx}\ \{r^{L_M}, r^{P_M}, r^{Q_M}\}])»$$
$$«(\forall x_2)\ (x_2 \in [\text{mín}\ \{x_2{}^M, x_2{}^{P_M}\},\ \text{máx}\ \{x_2{}^M, x_2{}^{P_M}\}] \Rightarrow (x_1{}^M, x_2) \in \overline{G}\ \text{y}$$
$$\text{y}\ r = h_c\,(x_1{}^M, x_2) \in [\text{mín}\ \{r^{L_M}, r^{P_M}, r^{Q_M}\},\ \text{máx}\ \{r^{L_M}, r^{P_M}, r^{Q_M}\}])»$$

y puesto que [Véase (*) del n.º 9 de la INTRODUCCION]:

$$\left.\begin{array}{l} «r = h_c\,(x_1, x_2{}^M) \Rightarrow (x_1\,(r), x_1, x_2{}^M) \in \mathfrak{A}'\ \text{y}\ x_2\,(r) = \mu\,(x_1\,(r), x_1, x_2{}^M)» \\ «r = h_c\,(x_1{}^M, x_2) \Rightarrow (x_1\,(r), x_1{}^M, x_2) \in \mathfrak{A}'\ \text{y}\ x_2\,(r) = \mu\,(x_1\,(r), x_1{}^M, x_2)» \end{array}\right\}$$

se sigue de todo ello la validez de las relaciones:

$$«(\forall x_1)\ (x_1 \in [\text{mín}\ \{x_1{}^M, x_1{}^{Q_M}\},\ \text{máx}\ \{x_1{}^M, x_1{}^{Q_M}\}] \Rightarrow (x_1, x_2{}^M) \in \overline{G}\ \text{y}$$
$$\text{y}\ (\exists r)\ (r \in [\text{mín}\ \{r^{L_M}, r^{P_M}, r^{Q_M}\},\ \text{máx}\ \{r^{L_M}, r^{P_M}, r^{Q_M}\}]\ \text{y}$$
$$\text{y}\ (x_1\,(r), x_1, x_2{}^M) \in \mathfrak{A}'\ \text{y}\ x_2\,(r) = \mu\,(x_1\,(r), x_1, x_2{}^M)))»$$
$$«(\forall x_2)\ (x_2 \in [\text{mín}\ \{x_2{}^M, x_2{}^{P_M}\},\ \text{máx}\ \{x_2{}^M, x_2{}^{P_M}\}] \Rightarrow (x_1{}^M, x_2) \in \overline{G}\ \text{y}$$
$$\text{y}\ (\exists r)\ (r \in [\text{mín}\ \{r^{L_M}, r^{P_M}, r^{Q_M}\},\ \text{máx}\ \{r^{L_M}, r^{P_M}, r^{Q_M}\}]\ \text{y}$$
$$\text{y}\ (x_1\,(r), x_1{}^M, x_2) \in \mathfrak{A}'\ \text{y}\ x_2\,(r) = \mu\,(x_1\,(r)\, x_1{}^M, x_2)))»$$

las cuales equivalen, respectivamente, a las:

$$\left.\begin{array}{c} «(\forall x_1)\ (x_1 \in [\text{mín}\ \{x_1{}^M, x_1{}^{Q_M}\},\ \text{máx}\ \{x_1{}^M, x_1{}^{Q_M}\}] \Rightarrow (x_1, x_2{}^M) \in \mathcal{E}_{C_M})» \\ \text{y} \\ «(\forall x_2)\ (x_2 \in [\text{mín}\ \{x_2{}^M, x_2{}^{P_M}\},\ \text{máx}\ \{x_2{}^M, x_2{}^{P_M}\}] \Rightarrow (x_1{}^M, x_2) \in \mathcal{E}_{C_M})» \end{array}\right\}$$

es decir, teniendo en cuenta, además, (7):

$$«M \in \mathcal{E}_{C_M}\ \text{y} \bigcup_{x_1 \in [\text{mín}\{x_1{}^M, x_1{}^{Q_M}\}, \text{máx}\{x_1{}^M, x_1{}^{Q_M}\}]} \{(x_1, x_2{}^M)\} = \overline{MQ_M} \subset \mathcal{E}_{C_M}\ \text{y} \bigcup_{x_2 \in [\text{mín}\{x_2{}^M, x_2{}^{P_M}\}, \text{máx}\{x_2{}^M, x_2{}^{P_M}\}]} \{(x_1{}^M, x_2)\} = \overline{MP_M} \subset \mathcal{E}_{C_M}»$$

y en definitiva se verifica:

$$«M \in D_{C_M}»$$

de acuerdo con lo afirmado en el LEMA.

[Observemos, que si $C' \subset C$ y $C'' \subset C$ son dos sub-arcos cualesquiera de C, tales que $C' \subset C''$, se tiene trivialmente: $\mathcal{E}_{c'} \subset \mathcal{E}_{c''}$ y y $D_{c'} \subset D_{c''}$].

Sentado esto, sean $(\varphi, \Psi, \chi) \in B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$ y $(C^{*(\nu,\varkappa)}, C^{**(\nu,\varkappa)}) \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)} \times \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)}$, y consideremos las aproximaciones $u^1{}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}$ y $u^1{}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}$ correspondientes. Si $M \in D_{C^{*(\nu,\varkappa)}} \cap D_{C^{**(\nu,\varkappa)}}$, son posibles los dos casos siguientes, mutuamente excluyentes:

$$\left.\begin{array}{l} 1.^{\circ}\ M \in D_{C^{*(\nu,\varkappa)}} \cap D_{C^{**(\nu,\varkappa)}} \text{ y } M \in C \\ 2.^{\circ}\ M \in D_{C^{*(\nu,\varkappa)}} \cap D_{C^{**(\nu,\varkappa)}} \text{ y } M \notin C \end{array}\right\}$$

En el caso 1.º), se tiene $M \in (D_{C^{*(\nu,\varkappa)}} \cap C) \cap (D_{C^{**(\nu,\varkappa)}} \cap C) = C^{*(\nu,\varkappa)} \cap C^{**(\nu,\varkappa)}$, y consecuentemente:

$$«u^1{}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}(M) = u^1{}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}(M) = \varphi(M) \text{ y } (D_1 u^1{}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})(M) =$$
$$= (D_1 u^1{}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})(M) = \Psi(M) \text{ y}$$
$$\text{y } (D_{12} u^1{}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})(M) = (D_{12} u^1{}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})(M) = \chi(M)»$$

así como:

$$«(D_2 u^1{}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})(M) = (D_2 u^1{}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})(M) \text{ y}$$
$$\text{y } (D_{ii} u^1{}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})(M) \underset{(i=1,2)}{=} (D_{ii} u^1{}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})(M) = \text{ y}$$
$$\text{y } (D_{pqr} u^1{}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})(M) \underset{(p,q,r=1,2)}{=} (D_{pqr} u^1{}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})(M)»$$

[ya que los valores de la solución u al problema de Cauchy definido por el sistema
$$\left\{\begin{array}{r} D_{112} u + \varrho(x_1, x_2)(D_{112} u) = \Phi(x_1, x_2) \\ \left.\begin{array}{r} u(M) = \varphi(M) \\ (D_1 u)(M) = \Psi(M) \\ (D_{12} u)(M) = \chi(M) \end{array}\right\} M \in C \end{array}\right\}$$
y de sus derivadas $D_1 u$ y $D_{12} u$ en un punto M del arco C sobre el que son dadas las condiciones iniciales, determinan, como se sabe, los valores en dicho punto M de las restantes derivadas primeras, segundas y terceras de u].

En el caso 2.º), se tiene, como consecuencia:

$$«M \in D_c - C»$$

por lo que, en virtud del Lema precedente [poniendo

$$C_M = \bigcup_{r \in [\min\{{}_rL_M, {}_rP_M, {}_rQ_M\}, \max\{{}_rL_M, {}_rP_M, {}_rQ_M\}]} \{(x_1(r), x_2(r))\}]$$

se verifica:

$$«M \in D_{C_M}»$$

Ahora bien:

$$«(C^{*(\nu,\varkappa)}, C^{**(\nu,\varkappa)}) \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)} \times \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)} \Leftrightarrow (\exists\, (r_1{}^*, r_2{}^*, r_1{}^{**}, r_2{}^{**}))$$
$$((r_1{}^*, r_2{}^*, r_1{}^{**}, r_2{}^{**}) \in [r^A, r^B] \times [r^A, r^B] \times [r^A, r^B] \times [r^A, r^B] \text{ y}$$
$$\text{y } 0 < r_2{}^* - r_1{}^* < \delta^{(\nu,\varkappa)} \text{ y } 0 < r_2{}^{**} - r_1{}^{**} < \delta^{(\nu,\varkappa)} \text{ y } C^{*(\nu,\varkappa)} =$$
$$\bigcup_{r \in [r_1{}^*, r_2{}^*]} \{(x_1(r), x_2(r))\} \text{ y } C^{**(\nu,\varkappa)} = \bigcup_{r \in [r_1{}^{**}, r_2{}^{**}]} \{(x_1(r), x_2(r))\})»$$

y si se pone $r_1 = \text{mín}\ \{r^{L_M}, r^{P_M}, r^{Q_M}\}$ y $r_2 = \text{máx}\ \{r^{L_M}, r^{P_M}, r^{Q_M}\}$, puesto que se tiene:

$$«r_2 - r_1 > 0 \text{ y } [r_1, r_2] \subset [r_1{}^*, r_2{}^*] \cap [r_1{}^{**}, r_2{}^{**}]»$$

se sigue de todo ello, que:

$$«(r_1, r_2) \in [r^A, r^B] \times [r^A, r^B] \text{ y } 0 < r_2 - r_1 < \delta^{(\nu,\varkappa)} \text{ y}$$
$$\text{y } [r_1, r_2] \subset [r_1{}^*, r_2{}^*] \cap [r_1{}^{**}, r_2{}^{**}]»$$

por lo que se verifica:

$$«C_M = \bigcup_{r \in [r_1, r_2]} \{(x_1(r), x_2(r))\} \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)} \text{ y } C_M \subset C^{*(\nu,\varkappa)} \cap C^{**(\nu,\varkappa)}»$$

lo que entraña:

$$«C_M \in \mathscr{C}^{(\varkappa,\nu)} \text{ y } M \in D_{C_M} \subset D_{C^{*(\nu,\varkappa)}} \cap D_{C^{**(\nu,\varkappa)}}»$$

Pero $u^1{}_{(C_M, \varphi, \Psi, \chi)}$, $u^1{}_{(C^{*(\nu,\varkappa)}, \varphi, \Psi, \chi)|D_{C_M}}$ y $u^1{}_{(C^{**(\nu,\varkappa)}, \varphi, \Psi, \chi)|D_{C_M}}$ son soluciones del problema de Cauchy definido por el sistema:

$$\left.\begin{array}{c} D_{112}\, u + \varrho\,(x_1, x_2)(D_{122}\, u) = \Phi^0\,(x_1, x_2) = f\,(x_1, x_2, w^0{}_{(\varphi,\Psi,\chi)}(x_1, x_2), \\ (\underset{(i=1,2)}{D_i\, w^0{}_{(\varphi,\Psi,\chi)}})\,(x_1, x_2), (\underset{(j,k=1,2;j\leq k)}{D_{jk}\, w^0{}_{(\varphi,\Psi,\chi)}})\,(x_1, x_2)) \\ \left.\begin{array}{l} u\,(H) = \varphi\,(H) \\ (D_1\, u)\,(H) = \Psi\,(H) \\ (D_{12}\, u)\,(H) = \chi\,(H) \end{array}\right\} H \in C_M \end{array}\right\}$$

por lo que, en virtud del Teorema de Unicidad que se estableció en el n.º 11 de la INTRODUCCION, se verifica:

$$
\begin{aligned}
&«u^1{}_{(C_M,\varphi,\Psi,\chi)} = u^1{}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)|D_{C_M}} = u^1{}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)|D_{C_M}}» \\
&«D_i\, u^1{}_{(C_M,\varphi,\Psi,\chi)} = D_i(u^1{}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)|D_{C_M}}) = D_i(u^1{}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)|D_{C_M}})» \ (i=1,2) \\
&«D_{jk}u^1{}_{(C_M,\varphi,\Psi,\chi)} = D_{jk}(u^1{}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)|D_{C_M}}) = D_{jk}(u^1{}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)|D_{C_M}})» (j,k=1,2) \\
&«D_{pqr}\, u^1{}_{(C_M,\varphi,\Psi,\chi)} = D_{pqr}\,(u^1{}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)|D_{C_M}}) = D_{pqr}\,(u^1{}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)|D_{C_M}})» \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (p,\,q,\,r=1,2)
\end{aligned}
$$

y en particular:

$$
\begin{aligned}
&«u^1{}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}\,(M) = u^1{}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}(M)» \text{ y } «(D_i\, u^1{}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})\,(M) = \\
&= (D_i\, u^1{}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})\,(M)\,;\ (i=1,2)» \text{ y } «(D_{jk}\, u^1{}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})\,(M) = \\
&= (D_{jk}\, u^1{}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})\,(M)\,;\ (j,k=1,2) \text{ y } (D_{pqr}\, u^1{}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})\,(M) = \\
&= (D_{pqr}\, u^1{}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})\,(M)\,;\ (p,q,r=1,2)».
\end{aligned}
$$

Así pues, en los dos casos 1.º) y 2.º) se ha demostrado que los valores en M de $u^1{}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}$ y de $u^1{}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}$ y de sus derivadas primeras, segundas y terceras correspondientes coinciden, y dada la arbitrariedad de $M \in D_{C^{*(\nu,\varkappa)}} \cap D_{C^{**(\nu,\varkappa)}}$, se concluye que es válida la relación:

$$
\left.
\begin{aligned}
&«u^1{}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)|D_{C^{*(\nu,\varkappa)}}\cap D_{C^{**(\nu,\varkappa)}}} = u^1{}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)|D_{C^{*(\nu,\varkappa)}}\cap D_{C^{**(\nu,\varkappa)}}}» \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{y} \\
&«(D_i u^1{}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})_{|D_{C^{*(\nu,\varkappa)}}\cap D_{C^{**(\nu,\varkappa)}}} = (D_i u^1{}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})_{|D_{C^{*(\nu,\varkappa)}}\cap D_{C^{**(\nu,\varkappa)}}}» \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (i=1,2) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{y} \\
&«(D_{jk} u^1{}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})_{|D_{C^{*(\nu,\varkappa)}}\cap D_{C^{**(\nu,\varkappa)}}} = (D_{jk} u^1{}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})_{|D_{C^{*(\nu,\varkappa)}}\cap D_{C^{**(\nu,\varkappa)}}}» \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (j,\,k=1,2) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{y} \\
&«(D_{pqr} u^1{}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})_{|D_{C^{*(\nu,\varkappa)}}\cap D_{C^{**(\nu,\varkappa)}}} = (D_{pqr} u^1{}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})_{|D_{C^{*(\nu,\varkappa)}}\cap D_{C^{**(\nu,\varkappa)}}}» \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (p,\,q,\,r=1,2)
\end{aligned}
\right\} (7^*)
$$

Supongamos, ahora, que para un $n \in N$ las restricciones de $u^n{}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}$ y de sus derivadas primeras, segundas y terceras a $D_{C^{*(\nu,\varkappa)}} \cap D_{C^{**(\nu,\varkappa)}}$ coincidan con las respectivas restricciones de $u^n{}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}$ y de sus derivadas primeras, segundas y terceras a

$D_{C^{*(\nu,\varkappa)}} \cap D_{C^{**(\nu,\varkappa)}}$, y sea $M \in D_{C^{*(\nu,\varkappa)}} \cap D_{C^{**(\nu,\varkappa)}}$ Como antes, consideremos los casos:

$$\left.\begin{array}{ll} 1.^{\circ}) & M \in D_{C^{*(\nu,\varkappa)}} \cap D_{C^{**(\nu,\varkappa)}} \text{ y } M \in C \\ 2.^{\circ}) & M \in D_{C^{*(\nu,\varkappa)}} \cap D_{C^{**(\nu,\varkappa)}} \text{ y } M \notin C \end{array}\right\}$$

En el caso 1.º) se tiene:

$$«M \in (D_{C^{*(\nu,\varkappa)}} \cap C) \cap (D_{C^{**(\nu,\varkappa)}} \cap C) = C^{*(\nu,\varkappa)} \cap C^{**(\nu,\varkappa)}»$$

y por tanto:

$$«u^{n+1}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}(M) = u^{n+1}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}(M) = \varphi\,(M) \text{ y } (D_1 u^{n+1}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})\,(M) =$$
$$= (D_1\, u^{n+1}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})\,(M) = \Psi\,(M) \text{ y } (D_{12}\, u^{n+1}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})\,(M) =$$
$$= (D_{12}\, u^{n+1}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})\,(M) = \chi\,(M)»$$

así como:

$$«(D_2\, u^{n+1}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})(M) = (D_2\, u^{n+1}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})(M) \text{ y } (D_{ii}\, u^{n+1}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})(M) \underset{(i=1,2)}{=}$$
$$= (D_{ii}\, u^{n+1}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})(M) \text{ y } (D_{pqr}\, u^{n+1}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})(M) \underset{(p,q,r=1,2)}{=} (D_{pqr}\, u^{n+1}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})(M)»$$

En el caso 2.º) se tiene que:

$$«M \in D_C - C»$$

por lo que en virtud del Lema anterior, poniendo $C_M = \bigcup_{r \subset [r_1, r_2]} \{(x_1(r), x_2(r))\}$, (con $r_1 = \text{mín}\,\{r^{L_M}, r^{P_M}, r^{Q_M}\}$ y $r_2 = \text{máx}\,\{r^{L_M}, r^{P_M}, r^{Q_M}\}$), se verifica:

$$«M \in D_{C_M}»$$

y además, según se ha visto precedentemente:

$$«C_M \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)} \text{ y } C_M \subset C^{*(\nu,\varkappa)} \cap C^{**(\nu,\varkappa)}»$$

lo que entraña:

$$«M \in D_{C_M} \subset D_{C^{*(\nu,\varkappa)}} \cap D_{C^{**(\nu,\varkappa)}}»$$

Ahora bien, en virtud de la hipótesis de la recurrencia, se verifica como consecuencia de la última relación:

$$«u^n_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)|Dc_M} = u^n_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)|Dc_M} \text{ y } \underset{(i=1,2)}{(D_i\, u^n_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})_{|Dc_M} =}$$
$$= (D_i\, u^n_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})_{|Dc_M} \text{ y } \underset{(j,k=1,2)}{(D_{jk}\, u^n_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})_{|Dc_M} =}$$
$$= (D_{jk}\, u^n_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})_{|Dc_M}»$$

por lo que:

$$«(\forall\, (x_1, x_2))\,((x_1, x_2) \in D_{C_M} \Rightarrow f(x_1, x_2, u^n_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}(x_1, x_2), \underset{(i=1,2)}{(D_i u^n_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})}$$
$$(x_1, x_2), \underset{(j,k=1,2;j\leq k)}{(D_{jk}\, u^n_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})}\,(x_1, x_2)) = f\,(x_1, x_2, u^n_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}\,(x_1, x_2),$$
$$, \underset{(i=1,2)}{(D_i\, u^n_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})}\,(x_1, x_2), \underset{(j,k=1,2;j\leq k)}{(D_{jk}\, u^n_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi\,\Psi,\chi)})}\,(x_1, x_2)))»$$

y por tanto, si $F : D_{C_M} \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ denota la aplicación así definida:

$$«(x_1, x_2) \in D_{C_M} \to F\,(x_1, x_2) = f\,(x_1, x_2, u^n_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}\,(x_1, x_2),$$
$$\underset{(i=1,2)}{(D_i\, u^n_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})}\,(x_1, x_2), \underset{(j,k=1,2;j\leq k)}{(D_{jk}\, u^n_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})}\,(x_1, x_2)) =$$
$$= f\,(x_1, x_2, u^n_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}\,(x_1, x_2), \underset{(i=1,2)}{(D_i\, u^n_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})}\,(x_1, x_2),$$
$$\underset{(j,k=1,2;j\leq k)}{(D_{jk}\, u^n_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})}\,(x_1, x_2)) \in \mathbf{R}»$$

se verifica que $u^{n+1}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)|Dc_M}$ y $u^{n+1}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)|Dc_M}$ son soluciones del problema de Cauchy representado por el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} D_{112}\, u + \varrho\,(x_1, x_2)\,(D_{122}\, u) = F\,(x_1, x_2) \\ \left.\begin{array}{rl} u(H) &= \varphi(H) \\ (D_1 u)\,(H) &= \Psi(H) \\ (D_{12} u)\,(H) &= \chi(H) \end{array}\right\} H \in C \end{array}\right\}$$

lo que en virtud del Teorema de Unicidad (n.º 11 de la INTRODUCCION), entraña:

$$\left.\begin{array}{l} «u^{n+1}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)|Dc_M} = u^{n+1}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)|Dc_M}» \\ \qquad\qquad\qquad \text{y} \\ «D_i\,(u^{n+1}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)|Dc_M}) = D_i\,(u^{n+1}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)|Dc_M})»\ (i = 1,2) \\ \qquad\qquad\qquad \text{y} \\ «D_{jk}\,(u^{n+1}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)|Dc_M}) = D_{jk}\,(u^{n+1}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)|Dc_M})»\ (j, k = 1,2) \\ \qquad\qquad\qquad \text{y} \\ «D_{pqr}\,(u^{n+1}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)|Dc_M}) = D_{pqr}\,(u^{n+1}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)|Dc_M})»\ (p, q, r = 1,2) \end{array}\right\}$$

y en particular:

$$«u^{n+1}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}(M) = u^{n+1}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}(M) \text{ y } (D_i\, u^{n+1}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})(M) \underset{(i=1,2)}{=}$$

$$= (D_i\, u^{n+1}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})(M) \text{ y } (D_{jk}\, u^{n+1}_{(C^{*(\nu,\varkappa)}\varphi,\Psi,\chi)})(M) \underset{(j,k=1,2)}{=}$$

$$= (D_{jk}\, u^{n+1}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})(M) \text{ y } (D_{pqr}\, u^{n+1}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})(M) \underset{(p,q,r=1,2)}{=}$$

$$= (D_{pqr}\, u^{n+1}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})(M)»$$

En los dos casos 1.º) y 2.º) se ha demostrado que los valores en M de $u^{n+1}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}$ y de $u^{n+1}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}$, así como los de sus respectivas derivadas primeras, segundas y terceras coinciden, y dada la arbitrariedad de $M \in D_{C^{*(\nu,\varkappa)}} \cap D_{C^{**(\nu,\varkappa)}}$, se concluye que es válida la relación:

$$\left.\begin{array}{l}
«u^{n+1}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)|D_{C^*(\nu,\varkappa)} \cap D_{C^{**}(\nu,\varkappa)}} = u^{n+1}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)|D_{C^*(\nu,\varkappa)} \cap D_{C^{**}(\nu,\varkappa)}}» \\
\text{y} \\
«(D_i\, u^{n+1}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})_{|D_{C^*(\nu,\varkappa)} \cap D_{C^{**}(\nu,\varkappa)}} = \\
\qquad = (D_i\, u^{n+1}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})_{|D_{C^*(\nu,\varkappa)} \cap D_{C^{**}(\nu,\varkappa)}}» \quad (i = 1,2) \\
\text{y} \\
«(D_{jk}\, u^{n+1}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi\chi)})_{|D_{C^*(\nu,\varkappa)} \cap D_{C^{**}(\nu,\varkappa)}} = \\
\qquad = (D_{jk}\, u^{n+1}_{(C^{**(\varkappa,\nu)},\varphi,\Psi,\chi)})_{|D_{C^*(\nu,\varkappa)} \cap D_{C^{**}(\nu,\varkappa)}}» \quad (j,\, k = 1,2) \\
\text{y} \\
«(D_{pqr}\, u^{n+1}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})_{|D_{C^*(\nu,\varkappa)} \cap D_{C^{**}(\nu,\varkappa)}} = \\
\qquad = (D_{pqr}\, u^{n+1}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})_{|D_{C^*(\nu,\varkappa)} \cap D_{C^{**}(\nu,\varkappa)}}» \quad (p,\, q,\, r = 1,2)
\end{array}\right\}$$

Puesto que para $n = 1$ es cierta, en virtud de (7*), la hipótesis de la recurrencia, el resultado obtenido es completamente general y válido para todo $n \in N$.

Por otra parte, $(\varphi,\, \Psi,\, \chi) \in B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi},\, \widetilde{\Psi},\, \widetilde{\chi})$ y $(C^{*(\nu,\varkappa)},\, C^{**(\nu,\varkappa)}) \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)} \times \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)}$ son completamente arbitrarios, y en consecuencia se verifica la relación:

$$«(\forall\,(\varphi,\,\Psi,\,\chi))\ ((\varphi,\,\Psi,\,\chi)\in B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi},\,\widetilde{\Psi},\,\widetilde{\chi})\Rightarrow\ (\forall n)\ (n\in N\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (\forall_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\,C^{**(\nu,\varkappa)})})\ ((C^{*(\nu,\varkappa)},\ C^{**(\nu,\varkappa)})\in\mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)}\times\mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ las restricciones de $\overset{n}{u}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}$, $\underset{(i=1,2)}{D_i}\,\overset{n}{u}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}$, $\underset{(j,k=1,2)}{D_{jk}}\,\overset{n}{u}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}$ y y $\underset{(p,q,r=1,2)}{D_{pqr}}\,\overset{n}{u}_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}$ a $D_{C^{*(\nu,\varkappa)}}\cap D_{C^{**(\nu,\varkappa)}}$ son respectivamente iguales a las restricciones de $\overset{n}{u}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}$, $\underset{(i=1,2)}{D_i}\overset{n}{u}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}$, $\underset{(j,k=1,2)}{D_{jk}}\overset{n}{u}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}$ y

y $\underset{(p,q,r=1,2)}{D_{pqr}}\,\overset{n}{u}_{(C^{**(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}$ a $D_{C^{*(\nu,\varkappa)}}\cap D_{C^{**(\nu,\varkappa)}})))»$

la cual entraña, que para todo $(\varphi,\,\Psi,\,\chi)\in B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi},\,\widetilde{\Psi},\,\widetilde{\chi})$ y todo $n\in N$, existan unívocamente, sendas funciones $\overset{n}{u}_{(\varphi,\,\Psi,\,\chi)}$, $\underset{(i=1,2)}{\overset{n}{u}_{i\,(\varphi,\,\Psi,\,\chi)}}$, $\underset{(j,k=1,2)}{\overset{n}{u}_{jk\,(\varphi,\,\Psi,\,\chi)}}$ y y $\underset{(p,q,r=1,2)}{\overset{n}{u}_{pqr\,(\varphi,\,\Psi,\,\chi)}}$, tales que para todo $C^{(\nu,\varkappa)}\in\mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)}$ prolongan respectivamente, $\overset{n}{u}_{(C^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}$, $\underset{(i=1,2)}{D_i}\overset{n}{u}_{(C^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}$, $\underset{(j,k=1,2)}{D_{jk}}\overset{n}{u}_{(C^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}$ y $\underset{(p,q,r=1,2)}{D_{pqr}}\overset{n}{u}_{(C^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}$ a a $D=\bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)}\in C^{(\nu,\varkappa)}} D_{C^{(\nu,\varkappa)}}$.

Pero además, para todo $(\varphi,\,\Psi,\,\chi)\in B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi},\,\widetilde{\Psi}.\,\widetilde{\chi})$ y todo $n\in N$, se verifica que dichas prolongaciones $\overset{n}{u}_{(\varphi,\,\Psi,\,\chi)}$, $\underset{(i=1,2)}{\overset{n}{u}_{i\,(\varphi,\,\Psi,\,\chi)}}$, $\underset{(j,k=1,2}{\overset{n}{u}_{jk\,(\varphi,\,\Psi,\,\chi)}}$ y y $\underset{(p,q,r=1,2)}{\overset{n}{u}_{pqr\,(\varphi,\,\Psi,\,\chi)}}$ son contínuas sobre $D=\bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)}\in C^{(\nu,\varkappa)}} D_{C^{(\nu,\varkappa)}}$.

En efecto, consideremos dos casos:

1.º) $C\in\mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)}$, lo que entraña $D_C\subset\bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)}\in C^{(\nu,\varkappa)}} D_{C^{(\nu,\varkappa)}}=D\subset D_C$, y por tanto $D=D_C$. Puesto que para todo $n\in N$ y todo $(C^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)\in\in\mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)}\times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi},\,\widetilde{\Psi},\,\widetilde{\chi})$ es $\overset{n}{u}_{(C^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}$ contínua sobre $D_{C^{(\nu,\varkappa)}}$, y la restricción $\overset{n}{u}_{(C^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)|\mathring{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}}$ al abierto $\mathring{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}$ es tres veces contínuamente diferenciable sobre $\mathring{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}$, con derivadas parciales

$$\underset{(i=1,2)}{D_i}\left(\overset{n}{u}_{(C^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)|\mathring{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}}\right),\ \underset{(j,k=1,2)}{D_{jk}}\left(\overset{n}{u}_{(C^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)|\mathring{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}}\right)\ \text{y}$$

$$\text{y}\ \underset{(p,q,r=1,2)}{D_{pqr}}\left(\overset{n}{u}_{(C^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)|\mathring{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}}\right)$$

prolongables unívocamente con contínuidad a $D_{C^{(\nu,\varkappa)}}$ [prolongaciones que como hasta ahora denotaremos asimismo por $\underset{(i=1,2)}{D_i}\,\overset{n}{u}_{(C^{(\nu,\varkappa)},\,\varphi,\,\Psi,\,\chi)}$,

$\underset{(j,k=1,2)}{D_{jk}} \overset{n}{u}_{(C^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}$ y $\underset{(p,q,r=1,2)}{D_{pqr}} \overset{n}{u}_{(C^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}$] y dado que $C \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)}$, así como $D_C = D$, se sigue, en particular, que para todo $n \in N$ y todo $(\varphi, \Psi, \chi) \in B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, es $\overset{n}{u}_{(C,\varphi,\Psi,\chi)}$ contínua sobre $D = D_C$, con restricción $\overset{n}{u}_{(C,\varphi,\Psi,\chi)|\mathring{D}} = \overset{n}{u}_{(C,\varphi,\Psi,\chi)|\mathring{D}_C} = \overset{n}{u}_{(C,\varphi,\Psi,\chi)|\bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)}\in C^{(\nu,\varkappa)}} \mathring{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}}$ al abierto $\mathring{D} = \mathring{D}_C$, tres veces contínuamente diferenciable sobre $\mathring{D}$, con derivadas parciales prolongables con contínuidad a $D = D_C$.

Ahora bien:

$$«(\forall_{C^{(\nu,\varkappa)}})\ (C^{(\nu,\varkappa)} \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)} \Rightarrow D_{C^{(\nu,\varkappa)}} \subset D_C = D)»$$

lo que entraña, en virtud el Teorema de Unicidad, (n.º 11 de la INTRODUCCION), y procediendo recurrentemente, la validez para todo $n \in N$ y todo $(\varphi, \Psi, \chi) \in B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, de la relación:

$$«(\forall_{C^{(\nu,\varkappa)}})\ (C^{(\nu,\varkappa)} \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)} \Rightarrow \overset{n}{u}_{(C,\varphi,\Psi,\chi)|D_{c^{(\nu,\varkappa)}}} = \overset{n}{u}_{(C^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} \text{ y}$$

$$\text{y } (D_i \overset{n}{u}_{(C,\varphi,\Psi,\chi)})_{|D_{c^{(\nu,\varkappa)}}} = \underset{(i=1,2)}{D_i} \overset{n}{u}_{(C^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} \text{ y } (D_{jk} \overset{n}{u}_{(C,\varphi,\Psi,\chi)})_{|D_{c^{(\nu,\varkappa)}}} =$$

$$= \underset{(j,k=1,2)}{D_{jk}} \overset{n}{u}_{(C^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} \text{ y } (D_{pqr} \overset{n}{u}_{(C,\varphi,\Psi,\chi)})_{|D_{c^{(\nu,\varkappa)}}} = \underset{(p,q,r=1,2)}{D_{pqr}} \overset{n}{u}_{(C^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})»$$

es decir, $\overset{n}{u}_{(C,\varphi,\Psi,\chi)}$, $\underset{(i=1,2)}{D_i} \overset{n}{u}_{(C,\varphi,\Psi,\chi)}$, $\underset{(j,k=1,2)}{D_{jk}} \overset{n}{u}_{(C,\varphi,\Psi,\chi)}$ y $\underset{(p,q,r=1,2)}{D_{pqr}} \overset{n}{u}_{(C,\varphi,\Psi,\chi)}$, son tales que para todo $C^{(\nu,\varkappa)} \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)}$ prolongan con contínuidad, respectivamente,

$$\overset{n}{u}_{(C^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)},\ \underset{(i=1,2)}{D_i} \overset{n}{u}_{(C^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)},\ \underset{(j,k=1,2)}{D_{jk}} \overset{n}{u}_{(C^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} \text{ y } \underset{(p,q,r=1,2)}{D_{pqr}} \overset{n}{u}_{(C^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)} \text{ a } D = D_C,$$

y consecuentemente, para todo $n \in N$ y todo $(\varphi, \Psi, \chi) \in B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, se verifica:

$$«\overset{n}{u}_{(\varphi,\Psi,\chi)} = \overset{n}{u}_{(C,\varphi,\Psi,\chi)} \text{ y } \overset{n}{u}_{i(\varphi,\Psi,\chi)} = \underset{(i=1,2)}{D_i} \overset{n}{u}_{(C,\varphi,\Psi,\chi)} \text{ y } \overset{n}{u}_{jk(\varphi,\Psi,\chi)} =$$

$$= \underset{(j,k=1,2)}{D_{jk}} \overset{n}{u}_{(C,\varphi,\Psi,\chi)} \text{ y } \overset{n}{u}_{pqr(\varphi,\Psi,\chi)} = \underset{(p,q,r=1,2)}{D_{pqr}} \overset{n}{u}_{(C,\varphi,\Psi,\chi)}»$$

lo que prueba la continuidad sobre $D = D_C$. para todo $n \in N$ y todo $(\varphi, \Psi, \chi) \in B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, de las prolongaciones $\overset{n}{u}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$, $\underset{(i=1,2)}{\overset{n}{u}_{i(\varphi,\Psi,\chi)}}$, , $\underset{(j,k=1,2)}{\overset{n}{u}_{jk(\varphi,\Psi,\chi)}}$ y $\underset{(p,q,r=1,2)}{\overset{n}{u}_{pqr(\varphi,\Psi,\chi)}}$ construidas precedentemente.

2.º) $C \notin \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)}$. Sea $\vec{x}^{M^*} = (x_1^{M^*}, x_2^{M^*}) = M^* \in D = \bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} D_{C^{(\nu,\varkappa)}}$; se verifica que:

$$\text{«}(\exists_{C^{*(\nu,\varkappa)}})\ (C^{*(\nu,\varkappa)} \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)} \text{ y } M^* \in D_{C^{*(\nu,\varkappa)}} \text{ y } C^{*(\nu,\varkappa)} \subset C \text{ y } C^{*(\nu,\varkappa)} \neq C)\text{»}$$

Denotemos por $r^{L_{M^*}}$, $r^{P_{M^*}}$ y $r^{Q_{M^*}}$, respectivamente, a $h_c(\vec{x}^{M^*})$, $\overset{-1}{x_1}(x_1^{M^*})$ y $\overset{-1}{x_2}(x_2^{M^*})$. Subdividamos el caso 2.º) en los dos sub-casos siguientes:

2.º a) «$r^A < \text{mín}\,\{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} \leq \text{máx}\,\{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} < r^B$»

2.º b) «$(r^A = \text{mín}\,\{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} \leq \text{máx}\,\{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} < r^B)$ ó
ó $(r^A < \text{mín}\,\{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} \leq \text{máx}\,\{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} = r^B)$»

[No cabe la posibilidad $r^A = \text{mín}\,\{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\}$ y $r^B = \text{máx}\,\{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\}$, puesto que designando por $r^A{}_{C^{*(\nu,\varkappa)}}$, $r^B{}_{C^{*(\nu,\varkappa)}}$ las extremidades del subintervalo de $[r^A, r^B]$ cuya restricción al mismo de la aplicación $r \in [r^A, r^B] \to (x_1(r), x_2(r)) \in \mathbf{R}^2$, define el sub-arco $C^{*(\nu,\varkappa)}$, se tendría: $r^A \leq r^A{}_{C^{*(\nu,\varkappa)}} \leq \text{mín}\,\{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} = r^A < r^B = \text{máx}\,\{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} \leq r^B{}_{C^{*(\nu,\varkappa)}} \leq r^B$, lo que entrañaría: $[r^A{}_{C^{*(\nu,\varkappa)}}, r^B{}_{C^{*(\nu,\varkappa)}}] = [r^A, r^B]$, y en consecuencia: $C = C^{*(\nu,\varkappa)} \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)}$, lo que contradice la hipótesis $C \notin \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)}$].

En el sub-caso 2.º a), pongamos: $\sigma' = \text{mín}\,\{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} - r^A \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$; $\sigma'' = r^B - \text{máx}\,\{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$, y $\tau = \delta^{(\nu,\varkappa)} - [\text{máx}\,\{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} - \text{mín}\,\{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\}]$. Puesto que: $\text{máx}\,\{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} - \text{mín}\,\{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} \leq r^B{}_{C^{*(\nu,\varkappa)}} - r^A{}_{C^{*(\nu,\varkappa)}} < \delta^{(\nu,\varkappa)}$ (por ser $C^{*(\nu,\varkappa)} \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)}$), se tiene asimismo $\tau \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$.

Sea además $\iota = \text{mín}\cdot\left\{\sigma', \sigma'', \dfrac{\tau}{3}\right\} \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$.

Se verifica, en primer lugar, que:

$$\text{«}r^A = \text{mín}\,\{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} - \sigma' \leq$$
$$\leq \text{mín}\,\{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} - \iota < \text{máx}\,\{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} + \iota \leq$$
$$\leq \text{máx}\,\{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} + \sigma'' = r^B\text{»}$$

y

$$\text{«}(\text{máx}\,\{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} + \iota) - (\text{mín}\,\{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} - \iota) =$$
$$= [\text{máx}\,\{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} - \text{mín}\,\{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\}] + 2\,\iota \leq$$

$$\leq [\text{máx}\ \{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} - \text{mín}\ \{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\}] + \frac{2}{3}\tau <$$

$$< [\text{máx}\ \{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} - \text{mín}\ \{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\}] + \tau = \delta^{(\nu, \varkappa)}»$$

por lo que:

$$«(\text{mín}\ \{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} - \iota, \text{máx}\ \{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} + \iota) \in [r^A, r^B] \times [r^A, r^B] \text{ y}$$
$$\text{y } 0 < (\text{máx}\ \{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} + \iota) - (\text{mín}\ \{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} - \iota) < \delta^{(\nu, \varkappa)}»$$

y en consecuencia, la restricción a

$$[\text{mín}\ \{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} - \iota,\ \text{máx}\ \{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} + \iota]$$

de la aplicación $r \in [r^A, r^B] \to \vec{x}(r) \in \mathbf{R}^2$, define un sub-arco $\widetilde{C}^{(\nu, \varkappa)} \in \in \mathscr{C}^{(\nu, \varkappa)}$ de C del tipo $(\nu, \varkappa)$.

En segundo lugar, en virtud de la contínuidad sobre $\mathcal{E}_c$ de la función h_c, así como de la contínuidad sobre R_{AB} de las aplicaciones $\overset{-1}{x_1} \circ pr_1$ y $\overset{-1}{x_2} \circ pr_2$, se puede poner:

$$«(\exists \varrho_1)\ (\varrho_1 \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \text{ y } (\forall M)\ (M \in B_{\varrho_1}(M^*) \cap D \subset B_{\varrho_1}(M^*) \cap (\mathcal{E}_c \cap R_{AB}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [r^{L_{M^*}} - \iota = h_c(M^*) - \iota < h_c(M) = r^{L_M} < h_c(M^*) + \iota = r^{L_{M^*}} + \iota] \text{ y}$$
$$\text{y } [r^{P_{M^*}} - \iota = (\overset{-1}{x_1} \circ pr_1)(M^*) - \iota < (\overset{-1}{x_1} \circ pr_1)(M) =$$
$$= r^{P_M} < (\overset{-1}{x_1} \circ pr_1)(M^*) + \iota = r^{P_{M^*}} + \iota] \text{ y}$$
$$\text{y } [r^{Q_{M^*}} - \iota = (\overset{-1}{x_2} \circ pr_2)(M^*) - \iota < (\overset{-1}{x_2} \circ pr_2)(M) =$$
$$= r^{Q_M} < (\overset{-1}{x_2} \circ pr_2)(M^*) + \iota = r^{Q_{M^*}} + \iota]))» \tag{8}$$

y consecuentemente, se verifican para todo $M \in B_{\varrho_1}(M^*) \cap D$, las desigualdades:

$$\left.\begin{array}{l}
«\text{mín}\ \{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} - \iota \leq r^{L_{M^*}} - \iota < r^{L_M} < r^{L_{M^*}} + \iota \leq \\
\qquad \leq \text{máx}\ \{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} + \iota» \\
«\text{mín}\ \{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} - \iota \leq r^{P_{M^*}} - \iota < r^{P_M} < r^{P_{M^*}} + \iota \leq \\
\qquad \leq \text{máx}\ \{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} + \iota» \\
«\text{mín}\ \{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} - \iota \leq r^{Q_{M^*}} - \iota < r^{Q_M} < r^{Q_{M^*}} + \iota \leq \\
\qquad \leq \text{máx}\ \{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} + \iota»
\end{array}\right\}$$

las cuales a su vez entrañan:

$$\left.\begin{array}{l}
«r^{L_M} \in \left]\text{mín } \{r^{L_M*}, r^{P_M*}, r^{Q_M*}\} - \iota, \text{ máx } \{r^{L_M*}, r^{P_M*}, r^{Q_M*}\} + \iota\right[» \\
«r^{P_M} \in \left]\text{mín } \{r^{L_M*}, r^{P_M*}, r^{Q_M*}\} - \iota, \text{ máx } \{r^{L_M*}, r^{P_M*}, r^{Q_M*}\} + \iota\right[» \\
«r^{Q_M} \in \left]\text{mín } \{r^{L_M*}, r^{P_M*}, r^{Q_M*}\} - \iota, \text{ máx } \{r^{L_M*}, r^{P_M*}, r^{Q_M*}\} + \iota\right[»
\end{array}\right\}$$

y por tanto, poniendo $C_M = \bigcup\limits_{r \in [\text{mín}\{r^{L_M}, r^{P_M}, r^{Q_M}\}, \text{máx}\{r^{L_M}, r^{P_M}, r^{Q_M}\}]} \{(x_1(r), x_2(r))\}$, es válida la relación (Véase el Lema de este n.º):

$$«M \in D_{C_M} \subset D_{\widetilde{C}^{(\nu,\varkappa)}}»$$

[En el supuesto $M \notin C$; si $M \in C$, se tiene trivialmente:

$$M = L^M = P^M = Q^M \in \widetilde{C}^{(\nu,\varkappa)} \subset D_{\widetilde{C}^{(\nu,\varkappa)}}]$$

que junto con (8) establece, a su vez, la validez de la relación:

$$«(\exists \varrho_1)\ (\varrho_1 \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \text{ y } B_{\varrho_1}(M^*) \cap D \subset D_{\widetilde{C}^{(\nu,\varkappa)}})»$$

de la que se deduce:

$$\begin{gathered}
«(\forall_{(n,\varphi,\Psi,\chi)})\ ((n, \varphi, \Psi, \chi) \in N \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \Rightarrow \\
\Rightarrow (\forall M)\ (M \in B_{\varrho_1}(M^*) \cap D \Rightarrow \overset{n}{u}_{(\varphi,\Psi,\chi)}(M) = \overset{n}{u}_{\widetilde{C}^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}(M) \text{ y} \\
\text{y } \underset{(i=1,2)}{\overset{n}{u}_{i(\varphi,\Psi,\chi)}(M) = (D_i \overset{n}{u}_{(\widetilde{C}^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})(M)} \text{ y } \overset{n}{u}_{jk(\varphi,\Psi,\chi)}(M) = \\
\underset{(j,k=1,2)}{= (D_{jk}\overset{n}{u}_{(\widetilde{C}^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})(M)} \text{ y } \underset{(p,q,r=1,2)}{\overset{n}{u}_{pqr(\varphi,\Psi,\chi)}(M) = (D_{pqr}\overset{n}{u}_{(\widetilde{C}^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})(M)}))» \quad (8^*)
\end{gathered}$$

Puesto que sobre $D_{\widetilde{C}^{(\nu,\varkappa)}}$ son contínuas $\overset{n}{u}_{(\widetilde{C}^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}$, $\underset{(i=1,2)}{D_i\overset{n}{u}_{(\widetilde{C}^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}}$, $\underset{(j,k=1,2)}{D_{jk}\overset{n}{u}_{(\widetilde{C}^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}}$ y $\underset{(p,q,r=1,2)}{D_{pqr}\overset{n}{u}_{(\widetilde{C}^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}}$, es válida, por tanto, la relación:

$$\begin{gathered}
«(\forall \varepsilon)\ (\varepsilon \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \Rightarrow (\exists \varrho_2)\ (\varrho_2 \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \text{ y} \\
\text{y } (\forall M)\ (M \in B_{\varrho_2}(M^*) \cap D_{\widetilde{C}^{(\nu,\varkappa)}} \Rightarrow \\
\Rightarrow |\overset{n}{u}_{(\widetilde{C}^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}(M) - \overset{n}{u}_{(\widetilde{C}^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}(M^*)| < \varepsilon \text{ y} \\
\text{y } \underset{(i=1,2)}{|(D_i\overset{n}{u}_{(\widetilde{C}^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})(M) - (D_i\overset{n}{u}_{(\widetilde{C}^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})(M^*)|} < \varepsilon \text{ y}
\end{gathered}$$

$$\text{y } |(D_{jk} u^n_{\widetilde{C}(\nu,\varkappa),\varphi,\Psi,\chi})(M) \underset{(j,k=1,2)}{-} (D_{jk} u^n_{\widetilde{C}(\nu,\varkappa),\varphi,\Psi,\chi})(M^*)| < \varepsilon \text{ y}$$

$$\text{y } |(D_{pqr} u^n_{\widetilde{C}(\nu,\varkappa),\varphi,\Psi,\chi})(M) \underset{(p,q,r=1,2)}{-} (D_{pqr} u^n_{\widetilde{C}(\nu,\varkappa),\varphi,\Psi,\chi})(M^*)| < \varepsilon)))\text{»} \qquad (8^{**})$$

Poniendo $\varrho = \text{mín } \{\varrho_1, \varrho_2\} \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$, y dado que se tiene: $B_\varrho(M^*) \cap D \subset B_{\varrho_1}(M^*) \cap D$ y $B_\varrho(M^*) \cap D \subset B_{\varrho_2}(M^*) \cap D_{\widetilde{C}(\nu,\varkappa)}$, se verificará como consecuencia de (8*) y (8**), la relación:

$$\text{«}(\forall \varepsilon)(\varepsilon \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \Rightarrow (\exists \varrho)\ \varrho \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \text{ y } (\forall M)(M \in B_\varrho(M^*) \cap D \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)}(M) - u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)}(M^*)| < \varepsilon \text{ y } |u^n_{i(\varphi,\Psi,\chi)}(M) \underset{(i=1,2)}{-} u^n_{i(\varphi,\Psi,\chi)}(M^*)| < \varepsilon \text{ y}$$

$$\text{y } |u^n_{jk(\varphi,\Psi,\chi)}(M) \underset{(j,k=1,2)}{-} u^n_{jk(\varphi,\Psi,\chi)}(M^*)| < \varepsilon \text{ y}$$

$$\text{y } |u^n_{pqr(\varphi,\Psi,\chi)}(M) \underset{(p,q,r=1,2)}{-} u^n_{pqr(\varphi,\Psi,\chi)}(M^*)| < \varepsilon)))\text{»}$$

la cual establece la continuidad de

$$u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)},\ \underset{(i=1,2)}{u^n_{i(\varphi,\Psi,\chi)}},\ \underset{(j,k=1,2)}{u^n_{jk(\varphi,\Psi,\chi)}} \text{ y } \underset{(p,q,r=1,2)}{u^n_{pqr(\varphi,\Psi,\chi)}} \text{ en } M^*$$

En el sub-caso 2.º b), sea para fijar ideas,

$$r^A = \text{mín } \{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} \leq \text{máx } \{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} < r^B,$$

y pongamos

$$\sigma = r^B - \text{máx } \{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} \in \mathbf{R}^+ - \{0\}, \text{ y}$$

$$\text{y } \tau = \delta^{(\nu,\varkappa)} - [\text{máx } \{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} - \text{mín } \{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\}].$$

Se tiene:

$$\text{«máx } \{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} - \text{mín } \{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} \leq$$

$$\leq r^{B_{C^*(\nu,\varkappa)}} - r^{A_{C^*(\nu,\varkappa)}} < \delta^{(\nu,\varkappa)}\text{»}$$

por lo que:

$$\text{«}\tau \in \mathbf{R}^+ - \{0\}\text{»}$$

y asimismo:

$$\text{«}\iota = \text{mín}\cdot\left\{\sigma, \frac{\tau}{2}\right\} \in \mathbf{R}^+ - \{0\}\text{»}$$

Se verifica primeramente:

$$«r^A = \text{mín}\ \{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} < \text{máx}\ \{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} + $$
$$+ \iota \leq \text{máx}\ \{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} + \sigma = r^B»$$

y

$$«(\text{máx}\ \{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} + \iota) - r^A =$$
$$= (\text{máx}\ \{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} - \text{mín}\ \{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\}) + \iota \leq$$
$$\leq (\text{máx}\ \{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} - \text{mín}\ \{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\}) + \frac{\tau}{2} <$$
$$< (\text{máx}\ \{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} - \text{mín}\ \{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\}) + \tau = \delta^{(\nu,\varkappa)}»$$

lo que entraña:

$$«(r^A,\ \text{máx}\ \{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} + \iota) \in [r^A, r^B] \times [r^A, r^B] \text{ y}$$
$$\text{y}\ \ 0 < (\text{máx}\ \{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} + \iota) - r^A < \delta^{(\nu,\varkappa)}»$$

y en consecuencia, la restricción a $[r^A, \text{máx}\ \{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} + \iota]$ de la aplicación $r \in [r^A, r^B] \to \vec{x}\,(r) \in \mathbf{R}^2$, define un sub-arco $\widetilde{C}\,(\nu, \varkappa)$ del tipo $(\nu, \varkappa)$.

Por otra parte, en virtud de la continuidad sobre $\mathcal{E}_c$ de h_c, así como de la continuidad sobre R_{AB} de las aplicaciones $\overset{-1}{x_1} \circ pr_1$ y $\overset{-1}{x_2} \circ pr_2$, se puede poner:

$$«(\exists\, \varrho_1)\ (\varrho_1 \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \text{ y}$$
$$\text{y}\ \ (\forall\, M)\ (M \in B_{\varrho_1}(M^*) \cap D \subset B_{\varrho_1}(M^*) \cap (\mathcal{E}_c \cap R_{AB}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [r^A \leq h_c(M) = r^{L_M} < h_c(M^*) + \iota = r^{L_{M^*}} + \iota] \text{ y}$$
$$\text{y}\ \ [r^A \leq (\overset{-1}{x_1} \circ pr_1)(M) = r^{P_M} < (\overset{-1}{x_1} \circ pr_1)(M^*) + \iota = r^{P_{M^*}} + \iota] \text{ y}$$
$$\text{y}\ \ [r^A \leq (\overset{-1}{x_2} \circ pr_2)(M) = r^{Q_M} < (\overset{-1}{x_2} \circ pr_2)(M^*) + \iota = r^{Q_{M^*}} + \iota]))» \quad (8^{***})$$

y en consecuencia, para todo $M \in B_{\varrho_1}(M^*) \cap D$, se verifica:

$$\left.\begin{array}{l} «r^A \leq r^{L_M} < r^{L_{M^*}} + \iota \leq \text{máx}\ \{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} + \iota» \\ «r^A \leq r^{P_M} < r^{P_{M^*}} + \iota \leq \text{máx}\ \{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} + \iota» \\ «r^A \leq r^{Q_M} < r^{Q_{M^*}} + \iota \leq \text{máx}\ \{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} + \iota» \end{array}\right\}$$

relaciones que entrañan:

$$\left.\begin{array}{l}«r^{L_M} \in [r^A,\ \text{máx}\ \{r^{L_M*},\ r^{P_M*},\ r^{Q_M*}\} + \iota[» \\ «r^{P_M} \in [r^A,\ \text{máx}\ \{r^{L_M*},\ r^{P_M*},\ r^{Q_M*}\} + \iota[» \\ «r^{Q_M} \in [r^A,\ \text{máx}\ \{r^{L_M*},\ r^{P_M*},\ r^{Q_M*}\} + \iota[»\end{array}\right\}$$

y por tanto, poniendo $C_M = \bigcup_{r \in [\text{mín}\{r^L{}_M, r^P{}_M, r^Q{}_M\}, \text{máx}\{r^L{}_M, r^P{}_M, r^Q{}_M\}]} \{(x_1(r), x_2(r))\}$ es válida la relación

$$«M \in D_{C_M} \subset D_{\widetilde{C}^{(\nu,\varkappa)}}»$$

[En el supuesto $M \notin C$; si $M \in C$, se tiene trivialmente: $M = L^M = P^M = Q^M \in \widetilde{C}^{(\nu,\varkappa)} \subset D_{\widetilde{C}^{(\nu,\varkappa)}}$] que junto con (8***) establece, a su vez, la validez de la relación:

$$«(\exists \varrho_1)\ (\varrho_1 \in \mathbf{R}^+ - \{0\}\ \text{ y }\ B_{\varrho_1}(M^*) \cap D \subset D_{\widetilde{C}^{(\nu,\varkappa)}})»$$

de la que, del mismo modo que en el sub-caso 2.º), se deduce:

$$«(\forall_{(n,\varphi,\Psi,\chi)})\ (n, \varphi, \Psi, \chi) \in N \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\forall M)\ (M \in B_{\varrho_1}(M^*) \cap D \Rightarrow u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)}(M) = u^n_{(\widetilde{C}^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}(M) \text{ y}$$

$$\text{y } u^n_{i(\varphi,\Psi,\chi)}(M) = \underset{(i=1,2)}{(D_i u^n_{(\widetilde{C}^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})}(M) \text{ y } u^n_{jk(\varphi,\Psi,\chi)}(M) =$$

$$= \underset{(j,k=1,2)}{(D_{jk} u^n_{(\widetilde{C}^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})}(M) \text{ y } u^n_{pqr(\varphi,\Psi,\chi)}(M) = \underset{(p,q,r=1,2)}{(D_{pqr} u^n_{(\widetilde{C}^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})}(M)))» \quad (9)$$

En virtud de la continuidad sobre $D_{\widetilde{C}^{(\nu,\varkappa)}}$ de

$$u^n_{(\widetilde{C}^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)},\ \underset{(i=1,2)}{D_i u^n_{(\widetilde{C}^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}},\ \underset{(j,k=1,2)}{D_{jk} u^n_{(\widetilde{C}^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}} \text{ y } \underset{(p,q,r=1,2)}{D_{pqr} u^n_{(\widetilde{C}^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}},$$

es válida, por tanto, la relación:

$$«(\forall \varepsilon)\ (\varepsilon \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \Rightarrow (\exists \varrho_2)\ (\varrho_2 \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \text{ y}$$

$$\text{y } (\forall M)\ (M \in B_{\varrho_2}(M^*) \cap D_{\widetilde{C}^{(\nu,\varkappa)}} \Rightarrow |u^n_{(\widetilde{C}^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}(M) - u^n_{(\widetilde{C}^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}(M^*)| < \varepsilon \text{ y}$$

$$\text{y } |(D_i u^n_{(\widetilde{C}^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})(M) \underset{(i=1,2)}{-} (D_i u^n_{(\widetilde{C}^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})(M^*)| < \varepsilon \text{ y}$$

$$\text{y } |(D_{jk} u^n_{(\widetilde{C}^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})(M) \underset{(j,k=1,2)}{-} (D_{jk} u^n_{(\widetilde{C}^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})(M^*)| < \varepsilon \text{ y}$$

$$\text{y } |(D_{pqr} u^n_{(\widetilde{C}^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})(M) \underset{(p,q,r=1,2)}{-} (D_{pqr} u^n_{(\widetilde{C}^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})(M^*)| < \varepsilon)))» \quad (9^*)$$

Poniendo $\varrho = \text{mín}\,\{\varrho_1, \varrho_2\} \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$ y puesto que se tiene

$$B_\varrho(M^*) \cap D \subset B_{\varrho_1}(M^*) \cap D \text{ y } B_\varrho(M^*) \cap D \subset B_{\varrho_2}(M^*) \cap D_{\widetilde{C}^{(\nu,\varkappa)}},$$

se verificará, como consecuencia de (9) y (9*), la relación:

$$\text{«}(\forall\, \varepsilon)\, (\varepsilon \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \Rightarrow (\exists\, \varrho)\, (\varrho \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \text{ y } (\forall M)\, (M \in B_\varrho(M^*) \cap D \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\overset{n}{u}_{(\varphi,\Psi,\chi)}(M) - \overset{n}{u}_{(\varphi,\Psi,\chi)}(M^*)| < \varepsilon \text{ y } \underset{(i=1,2)}{|\overset{n}{u}_{i(\varphi,\Psi,\chi)}(M) - \overset{n}{u}_{i(\varphi,\Psi,\chi)}(M^*)|} < \varepsilon \text{ y}$$

$$\text{y } \underset{(j,k=1,2)}{|\overset{n}{u}_{jk(\varphi,\Psi,\chi)}(M) - \overset{n}{u}_{jk(\varphi,\Psi,\chi)}(M^*)|} < \varepsilon \text{ y}$$

$$\text{y } \underset{(p,q,r=1,2)}{|\overset{n}{u}_{pqr(\varphi,\Psi,\chi)}(M) - \overset{n}{u}_{pqr(\varphi,\Psi,\chi)}(M^*)|} < \varepsilon)))\text{»}$$

la cual establece la continuidad de $\overset{n}{u}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$, $\underset{(i=1,2)}{\overset{n}{u}_{i(\varphi,\Psi,\chi)}}$, $\underset{(j,k=1,2)}{\overset{n}{u}_{jk(\varphi,\Psi,\chi)}}$ y y $\underset{(p,q,r=1,2)}{\overset{n}{u}_{pqr(\varphi,\Psi,\chi)}}$ en M^*.

De modo enteramente análogo se procedería para demostrar la continuidad, para todo $(n, \varphi, \Psi, \chi) \in N \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, de $\overset{n}{u}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$, , $\underset{(i=1,2)}{\overset{n}{u}_{i(\varphi,\Psi,\chi)}}$, $\underset{(j,k=1,2)}{\overset{n}{u}_{jk(\varphi,\Psi,\chi)}}$ y $\underset{(p,q,r=1,2)}{\overset{n}{u}_{pqr(\varphi,\Psi,\chi)}}$ en M^*, cuando es

$$r^A < \text{mín}\,\{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} \leq \text{máx}\,\{r^{L_{M^*}}, r^{P_{M^*}}, r^{Q_{M^*}}\} = r^B$$

Así pues, en el caso 2.º) se ha demostrado que para todo $(n, \varphi, \Psi, \chi) \in N \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, y cualquiera sea $M^* \in D$ se verifica que $\overset{n}{u}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$, $\underset{(i=1,2)}{\overset{n}{u}_{i(\varphi,\Psi,\chi)}}$, $\underset{(j,k=1,2)}{\overset{n}{u}_{jk)\varphi,\Psi,\chi)}}$ y $\underset{(p,q,r=1,2)}{\overset{n}{u}_{pqr(\varphi,\Psi,\chi)}}$, son contínuas en M^*, o lo que es equivalente:

$$\text{«}(\forall_{(n,\varphi,\Psi,\chi)})\, ((n, \varphi, \Psi, \chi) \in N \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overset{n}{u}_{(\varphi,\Psi,\chi)}, \underset{(i=1,2)}{\overset{n}{u}_{i(\varphi,\Psi,\chi)}}, \underset{(j,k=1,2}{\overset{n}{u}_{jk(\varphi,\Psi,\chi)}}, \underset{(p,q,r=1,2)}{\overset{n}{u}_{pqr(\varphi,\Psi,\chi)}} \text{ son contínuas sobre } D)\text{»}$$

resultado que junto con el establecido en el caso 1.º) permite afirmar que para todo $(n, \varphi, \Psi, \chi) \in N \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, las funciones $\overset{n}{u}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$, $\underset{(i=1,2)}{\overset{n}{u}_{i(\varphi,\Psi,\chi)}}$, $\underset{(j,k=1,2)}{\overset{n}{u}_{jk(\varphi,\Psi,\chi)}}$, $\underset{(p,q,r=1,2)}{\overset{n}{u}_{pqr(\varphi,\Psi,\chi)}}$, que para cada $C^{(\nu,\varkappa)} \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)}$, prolongan, respectivamente,

$$\overset{n}{u}_{(C^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}, \underset{(i=1,2)}{D_i \overset{n}{u}_{(C^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}}, \underset{(j,k=1,2)}{D_{jk} \overset{n}{u}_{(C^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}}, \underset{(p,q,r=1,2)}{D_{pqr} \overset{n}{u}_{(C^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}}$$

a $D = \bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} D_{C^{(\nu,\varkappa)}}$, son contínuas sobre D de acuerdo con lo afirmado.

Señalemos, por otra parte, que, puesto que para todo $(n, \varphi, \Psi, \chi))$ $\in N \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, se verifica:

$$«(\forall_{C^{*(\nu,\varkappa)}})\,(C^{*(\nu,\varkappa)} \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)} \Rightarrow (u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)|\bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)}\in C^{(\nu,\varkappa)}} \mathring{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}})_{|\mathring{D}_{C^{*(\nu,\varkappa)}}} = u^n_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)|\mathring{D}_{C^{*(\nu,\varkappa)}}} \text{ y}$$

y $u^n_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)|\mathring{D}_{C^{*(\nu,\varkappa)}}}$ es tres veces continuamente diferenciable sobre

$$\mathring{D}_{C^{*(\nu,\varkappa)}} \text{ y } D_i\,(u^n_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)|\mathring{D}_{C^{*(\nu,\varkappa)}}}) = (D_i\,u^n_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})_{|\mathring{D}_{C^{*(\nu,\varkappa)}}} =$$

$$= u^n_{i\,(\varphi,\Psi,\chi)|\mathring{D}_{C^{*(\nu,\varkappa)}}},\ (i = 1{,}2) \text{ y } D_{jk}\,(u^n_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)|\mathring{D}_{C^{*(\nu,\varkappa)}}}) =$$

$$= (D_{jk}\,u^n_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})_{|\mathring{D}_{C^{*(\nu,\varkappa)}}} = u^n_{jk\,(\varphi,\Psi,\chi)|\mathring{D}_{C^{*(\nu,\varkappa)}}},(j,\,k = 1{,}2) \text{ y}$$

$$\text{y } D_{pqr}\,(u^n_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)|\mathring{D}_{C^{*(\nu,\varkappa)}}}) = (D_{pqr}\,u^n_{(C^{*(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})_{|\mathring{D}_{C^{*(\nu,\varkappa)}}} =$$

$$= u^n_{pqr\,(\varphi,\Psi,\chi)|\mathring{D}_{C^{*(\nu,\varkappa)}}},\ (p,\,q,\,r = 1{,}2))»$$

se sigue, en consecuencia, que para todo $(n, \varphi, \Psi, \chi) \in N \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$ es válida la relación:

$$«u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)|\bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)}\in C^{(\nu,\varkappa)}} \mathring{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}} \text{ es tres veces continuamente diferenciable sobre}$$

$$\bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)}\in C^{(\nu,\varkappa)}} \mathring{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}} \text{ y } D_i\,(u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)|\bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)}\in C^{(\nu,\varkappa)}} \mathring{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}}) = \underset{(i=1,2)}{u^n_{i\,(\varphi,\Psi,\chi)|\bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)}\in C^{(\nu,\varkappa)}} \mathring{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}}} \text{ y } D_{jk}\,(u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)|\bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)}\in C^{(\nu,\varkappa)}} \mathring{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}}) =$$

$$= \underset{(j,k=1,2)}{u^n_{jk\,(\varphi,\Psi,\chi)|\bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)}\in C^{(\nu,\varkappa)}} \mathring{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}}} \text{ y } D_{pqr}\,(u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)|\bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)}\in C^{(\nu,\varkappa)}} \mathring{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}}) = \underset{(p,q,r=1,2)}{u^n_{pqr\,(\varphi,\Psi,\chi)|\bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)}\in C^{(\nu,\varkappa)}} \mathring{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}}}»$$

es decir, teniendo en cuenta lo precedente, y que como ya se ha hecho notar en el n.º 1, es $D = \bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)}\in C^{(\nu,\varkappa)}} D_{C^{(\nu,\varkappa)}} \subset \overline{\bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)}\in C^{(\nu,\varkappa)}} \mathring{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}}$, se puede enunciar el siguiente:

Teorema II — «Para todo $(n, \varphi, \Psi, \chi) \in N \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, la función prolongada $u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)}$ es contínua sobre D, con restricción $u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)|\bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)}\in C^{(\nu,\varkappa)}} \mathring{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}}$ al abierto $\bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)}\in C^{(\nu,\varkappa)}} \mathring{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}$, tres veces contínuamente diferenciable sobre $\bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)}\in C^{(\nu,\varkappa)}} \mathring{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}$, siendo las derivadas parciales primeras, segundas y terceras de dicha restricción prolongables unívocamente con contínuidad a D. (Dichas derivadas primeras, segundas y terceras prolongadas a D, se denotarán por $\underset{(i=1,2)}{D_i} u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)}$, $\underset{(j,k=1,2)}{D_{jk}} u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)}$ y $\underset{(p,q,r=1,2)}{D_{pqr}} u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)}$, respectivamente)».

Se deduce de este TEOREMA, que para todo $(n, \varphi, \Psi, \chi) \in N \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, existen sendas funciones $\vec{g}^n_{(\varphi,\Psi,\chi)}$ y $\Phi^n_{(\varphi,\Psi,\chi)}$ unívocamente determinadas, que para todo $C^{(\nu,\varkappa)} \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)}$ prolongan con continuidad, respectivamente, $\vec{g}^n_{(C^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}$ y $\Phi^n_{(C^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}$ a $D = \bigcup\limits_{C^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} D_{C^{(\nu,\varkappa)}}$, siendo la restricción $\Phi^n_{(\varphi,\Psi,\chi)|\bigcup\limits_{C^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} \overset{\circ}{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}}$ al abierto $\bigcup\limits_{C^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} \overset{\circ}{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}$ contínuamente diferenciable sobre $\bigcup\limits_{C^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} \overset{\circ}{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}$, con derivadas parciales primeras prolongables con contínuidad a D.

Por otra parte, mediante razonamiento idéntico al seguido para establecer los TEOREMAS I y II, se demuestra que cualquiera sea $(n, \varphi, \Psi, \chi) \in [N - \{1\}] \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, las aplicaciones

$$M \in D \rightarrow \int_{\mathcal{L}(M)} \Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}(t, \mu(t, x_1{}^M, x_2{}^M))\, dt \in \mathbf{R}\,;\; M \in D \rightarrow \int_{\mathcal{L}(M)} ((D_2 \Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}) \cdot \exp\{J(D_2 \varrho)\})(t, \mu(t, x_1{}^M, x_2{}^M))\, dt \in \mathbf{R},$$

son tales, que para todo $C^{(\nu,\varkappa)} \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)}$ prolongan con continuidad, respectivamente, $J(\Phi^{n-1}_{(C^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})$ y $J((D_2 \Phi^{n-1}_{(C^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}) \cdot \exp\{J(D_2\varrho)\})$ a D, siendo la restricción de la primera de estas prolongaciones al abierto $\bigcup\limits_{C^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} \overset{\circ}{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}$ continuamente diferenciable sobre $\bigcup\limits_{C^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} \overset{\circ}{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}$, con derivadas parciales primeras prolongables con continuidad a D. Se denotarán a dichas prolongaciones mediante $J(\Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)})$ y y $J((D_2 \Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}) \cdot \exp \cdot \{J(D_2 \varrho)\})$, respectivamente.

Teniendo en cuanta estas convenciones, así como las fórmulas resolutivas del n.º 3, se obtienen para las prolongac'ones de las aproximaciones, las siguientes expresiones, válidas para todo $M \in D$:

$$\left.\begin{aligned}
u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)}(M) &= w^0_{(\varphi,\Psi,\chi)}(M) + \iint_{(MP_MQ_M)} (J(\Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}))(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 \\
(D_1 u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)})(M) &= (D_1 w^0_{(\varphi,\Psi,\chi)})(M) - \int_{(MP_M)} (J(\Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}))(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2 \\
(D_2 u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)})(M) &= (D_2 w^0_{(\varphi,\Psi,\chi)})(M) - \int_{(MQ_M)} (J(\Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}))(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1
\end{aligned}\right\} \quad (9^{**})$$

$$
\left.
\begin{aligned}
(D_{11}\ u^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)})(M) &= (D_{11}\ w^{0}_{(\varphi,\Psi,\chi)})(M) - (\varrho\cdot J(\Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}))(M) - \\
&\quad - \int_{(M\,P_M)} ((D_2\,\varrho)\cdot J(\Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)})(\xi_1,\ \xi_2)\,d\,\xi_2 - \int_{(M\,P_M)} \Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}(\xi_1,\ \xi_2)\,d\,\xi_2 \\
(D_{12}\ u^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)})(M) &= (D_{12}\ w^{0}_{(\varphi,\Psi,\chi)})(M) + (J(\Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}))(M) \\
(D_{22}\ u^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)})(M) &= (D_{22}\ w^{0}_{(\varphi,\Psi,\chi)})(M) - \left(\frac{J(\Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)})}{\varrho}\right)(M) + \\
&\quad + \int_{(M\,Q_M)} \left(\frac{D_1\,\varrho}{\varrho^2}\cdot J(\Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)})\right)(\xi_1,\ \xi_2)\,d\,\xi_1 - \\
&\quad - \int_{(M\,Q_M)} \left(\frac{\Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}}{\varrho}\right)(\xi_1,\ \xi)_2\,d\xi_2 \\
(D_{111}\,u^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)})(M) &= (D_{111}\,w^{0}_{(\varphi,\Psi,\chi)})(M) - (D_1(\varrho\cdot J(\Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)})))(M) - \\
&\quad - \int_{(M\,P_M)} (D_1((D_2\,\varrho)\cdot J(\Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)})))(\xi_1,\ \xi_2)\,d\,\xi_2 - \\
&\quad - \int_{(M\,P_M)} (D_1\,\Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)})(\xi_1,\ \xi_2)\,d\,\xi_2 - \left(\Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}\cdot\frac{x'_1}{x'_2}\right)(P_M) \\
(D_{112}\,u^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)})(M) &= (D_{112}\,w^{0}_{(\varphi,\Psi,\chi)})(M) + \Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}(M) + \\
&\quad + \left(\Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}\cdot\frac{x'_1}{x'_2-\varrho\cdot x'_1}\right)(L_M)\cdot(\varrho\cdot\exp\cdot\{-J(D_2\,\varrho)\})(M) - \\
&\quad - \varrho\cdot\exp\cdot\{-J(D_2\varrho)\}\cdot J((D_2\Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)})\cdot\exp\cdot\{J(D_2\varrho)\}))(M) \\
(D_{122}\,u^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)})(M) &= (D_{122}\,w^{0}_{(\varphi,\Psi,\chi)})(M) - \\
&\quad - \left(\Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}\cdot\frac{x'_1}{x'_2-\varrho\cdot x'_1}\right)(L_M)\cdot\exp\cdot\{-J(D_2\,\varrho)\}(M) + \\
&\quad + (\exp\cdot\{-J(D_2\,\varrho)\}\cdot J((D_2\,\Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)})\cdot\exp\cdot\{J(D_2\,\varrho)\}))(M) \\
(D_{222}\,u^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)})(M) &= (D_{222}\,w^{0}_{(\varphi,\Psi,\chi)})(M) - \left(D_2\left(\frac{J(\Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)})}{\varrho}\right)\right)(M) + \\
&\quad + \int_{(M\,Q_M)} \left(D_2\left(\frac{D_1\,\varrho}{\varrho^2}\cdot J(\Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)})\right)\right)(\xi_1,\ \xi_2)\,d\,\xi_1 - \\
&\quad - \int_{(M\,Q_M)} \left(D_2\left(\frac{\Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}}{\varrho}\right)\right)(\xi_1,\ \xi_2)\,d\,\xi_1 - \left(\frac{\Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}}{\varrho}\cdot\frac{x'_1}{x'_2}\right)(Q_M)
\end{aligned}
\right\}(9^{**})
$$

5. EXISTENCIA DE UNA ACOTACION SOBRE D DE LOS MODULOS DE $\overset{n}{u}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$, $\underset{(i=1,2)}{D_i}\overset{n}{u}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$, $\underset{(j,k=1,2)}{D_{jk}}\overset{n}{u}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$, $\underset{(p,q,r=1,2)}{D_{pqr}}\overset{n}{u}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$, INDEPENDIENTE DE $(n, \varphi, \Psi, \chi) \in N \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$. — Sea $P \in \mathbf{R}^+$ el máximo del conjunto finito constituido por los extremos superiores de $|\widetilde{w}^0|$, $|\underset{(i=1,2)}{D_i}\widetilde{w}^0|$, $|\underset{(j,k=1,2)}{D_{jk}}\widetilde{w}^0|$, $|\underset{(p,q,r=1,2)}{D_{pqr}}\widetilde{w}^0|$ sobre el compacto D_c en el cual están definidas y son continuas dichas funciones [$\widetilde{w}^0$ es la solución al problema de Cauchy definido por el sistema (16) del n.º 11 de la INTRODUCCION]; en virtud de los resultados establecidos en el n.º 3 (Observación final) de esta PARTE PRIMERA, se tiene para todo $(n, \varphi, \Psi, \chi) \in N \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, que cualquiera sea $C^{(\nu,\varkappa)} \in \mathscr{C}^{(\nu,\varkappa)}$ es válida la relación:

$$« (\forall M)\ (M \in D_{c^{(\nu,\varkappa)}} \Rightarrow |\overset{n}{u}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)}(M)| \leq P + r \text{ y}$$

$$\text{y } |(\underset{(i=1,2)}{D_i}\overset{n}{u}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})(M)| \leq P + r \text{ y } |(\underset{(j,k=1,2)}{D_{jk}}\overset{n}{u}_{(c^{(\nu,\varkappa)},\varphi,\Psi,\chi)})(M)| \leq P + r) »$$

y consecuentemente, para todo $(n, \varphi, \Psi, \chi) \in N \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, se verifica:

$$« (\forall M)\ (M \in D = \bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} D_{c^{(\nu,\varkappa)}} \Rightarrow |\overset{n}{u}_{(\varphi,\Psi,\chi)}(M)| \leq P + r \text{ y}$$

$$\text{y } |(\underset{(i=1,2)}{D_i}\overset{n}{u}_{(\varphi,\Psi,\chi)})(M)| \leq P + r \text{ y } |(\underset{(j,k=1,2)}{D_{jk}}\overset{n}{u}_{(\varphi,\Psi,\chi)})(M)| \leq P + r) »$$

lo que entraña:

$$« (\forall_{(n,\varphi,\Psi,\chi)})\ (n, \varphi, \Psi, \chi) \in N \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \Rightarrow \text{Máx}\,\{\sup_{M \in D} |\overset{n}{u}_{(\varphi,\Psi,\chi)}(M)|,$$

$$, |\sup_{M \in D} |(\underset{(i=1,2)}{D_i}\overset{n}{u}_{(\varphi,\Psi,\chi)})(M)|, \sup_{M \in D} |(\underset{(j,k=1,2)}{D_{jk}}\overset{n}{u}_{(\varphi,\Psi,\chi)})(M)|\} \leq P + r) »$$

resultado que demuestra, en primer lugar, que para todo $(n, \varphi, \Psi, \chi) \in$ $\in N \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, los módulos de $\overset{n}{u}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$ y de sus derivadas primeras y segundas están igualmente acotados sobre D.

En cuanto a las derivadas terceras observemos que en las expresiones de $D_1 \Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$ y $D_2 \Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$:

$$\begin{aligned} D_1 \Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)} = {} & (D_1 f) \circ \vec{g}^{\,n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)} + ((D_3 f) \circ \vec{g}^{\,n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}) \cdot (D_1 \overset{n-1}{u}_{(\varphi,\Psi,\chi)}) + \\ & + \sum_{i=1,2} ((D_{i+3} f) \circ \vec{g}^{\,n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}) \cdot (D_{i1} \overset{n-1}{u}_{(\varphi,\Psi,\chi)}) + \\ & + \sum_{j,k=1,2;\, j \leq k} ((D_{j+k+4} f) \circ \vec{g}^{\,n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}) \cdot (D_{jk1} \overset{n-1}{u}_{(\varphi,\Psi,\chi)}) \end{aligned}$$

$$D_2\,\Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)} = (D_2 f)\circ \vec{g}^{\,n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)} + ((D_3 f)\circ \vec{g}^{\,n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)})\cdot (D_2\, u^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}) +$$
$$+ \sum_{i=1,2} ((D_{i+3} f)\circ \vec{g}^{\,n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)})\cdot (D_{i\,2}\, u^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}) +$$
$$+ \sum_{j,k=1,2\,;\, j\leq k} ((D_{j+k} f)\circ \vec{g}^{\,n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)})\cdot (D_{jk2}\, u^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)})$$

figuran términos en los que no intervienen las derivadas terceras de la aproximación $u^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$. Por tanto en las integrales que afecten a $\Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$, $D_1\,\Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$ y a $D_2\,\Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$, así como en las expresiones que resulten de aplicar a dichas funciones el operador J, se podrán acotar, independientemente de $(n, \varphi, \Psi, \chi) \in N \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, las partes correspondientes a dichos términos.

Teniendo en cuenta las expresiones de las derivadas terceras de $u^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$ [n.º 4 de esta PARTE PRIMERA, (9**)]: $D_{111}\,u^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$, $D_{112}\,u^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$, $D_{122}\,u^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$, $D_{222}\,u^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$, y que las expresiones de $D_1\,(J\,(\Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}))$ y $D_2\,(J\,(\Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}))$, para todo $M = (x_1{}^M, x_2{}^M)$, son, [Véase II del APENDICE que sigue a la PARTE SEGUNDA de esta Memoria]:

$$(D_1\,(J\,(\Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)})))\,(M) = -\,\varrho\,(M)\,\cdot$$
$$\cdot \int_{x_1\,({}_rL_M)}^{x_1{}^M} (D_2\,\Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)})\,(\xi_1, \mu\,(\xi_1, (x_1{}^M, x_2{}^M))\,\cdot$$
$$\cdot \exp\cdot \left\{ \int_{x_1{}^M}^{\xi_1} (D_2\,\varrho)\,(t, \mu\,(t, x_1{}^M, x_2{}^M))\,dt \right\} \cdot d\,\xi_1 +$$
$$+ \Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}\,(M) + \left(\Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}\cdot \frac{x'_1}{x'_2 - \varrho\cdot x'_1}\right)(L_M)\cdot (\varrho\cdot \exp\cdot \{-J\,(D_2\,\varrho)\})\,(M)$$

y

$$(D_2\,(J\,(\Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)})))\,(M) = \int_{x_1\,({}_rL_M)}^{x_1{}^M} (D_2\,\Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)})\,(\xi_1, \mu\,(\xi_1, x_1{}^M, x_2{}^M))\,\cdot$$
$$\cdot \exp\cdot \left\{ \int_{x_1{}^M}^{\xi_1} (D_2\,\varrho)\,(t, \mu\,(t, x_1{}^M, x_2{}^M))\,dt \right\} d\,\xi_1 -$$
$$- \left(\Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}\cdot \frac{x'_1}{x'_2 - \varrho\cdot x'_1}\right)(L_M)\cdot \exp\cdot \{-J\,(D_2\,\varrho)\}\,(M)$$

así como que la aplicación lineal: $\Lambda^{(0)} : E_c^{(3)} \times E_c^{(2)} \times E_c^{(2)} \to E_{D_c}^{(3)}$, definida por: $(\varphi, \Psi, \chi) \in E_c^{(3)} \times E_c^{(2)} \times E_c^{(2)} \to \Lambda^0\,(\varphi, \Psi, \chi) = w^0_{(\varphi,\Psi,\chi)} \in E_{D_c}^{(3)}$, [véase el n.º 11 de la INTRODUCCION], es contínua sobre

$E_c^{\prime} \times E_c^{(2)} \times E_c^{(2)}$, y consecuentemente, el conjunto numérico $\bigcup_{(\varphi, \Psi, \chi) \in B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})} \{ \| A^{(0)} (\varphi, \Psi, \chi) \|_{(D_c)} \} = \bigcup_{(\varphi, \Psi, \chi) \in B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})} \{ \| \overset{0}{w}_{(\varphi, \Psi, \chi)} \|_{(D_c)} \}$ está acotado (denotaremos por P' a Máx $\{ P + r, \sup_{(\varphi, \Psi, \chi) \in B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})} \cdot \| \overset{0}{w}_{(\varphi, \Psi, \chi)} \|_{(D_c)} \})$, lo que entraña que los módulos de $\overset{0}{w}_{(\varphi, \Psi, \chi)}$ y de sus derivadas primeras, segundas y terceras estén acotadas por P' sobre D_c, y a fortiori sobre $D \subset D_c$, uniformemente respecto a $(\varphi, \Psi, \chi) \in B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, se puede poner, por tanto:

$$\left.\begin{aligned}
&|(D_{111} \overset{n}{u}_{(\varphi, \Psi, \chi)}) (M) | \leq P' + Q + \\
&+ L^2 \cdot R \cdot \exp \cdot \{ L \cdot \alpha \} \cdot \sum_{\substack{j,k=1,2 \\ (j \leq k)}} | J (| D_{jk2} \overset{n-1}{u}_{(\varphi, \Psi, \chi)} |) | (M) + \\
&+ L^2 \cdot R \cdot \exp \cdot \{ L \cdot \alpha \} \sum_{\substack{j,k=1,2 \\ (j \leq k)}} \left| \int_{(MP_M)} | J (| D_{jk2} \overset{n-1}{u}_{(\varphi, \Psi, \chi)} |) | (\xi_1, \xi_2) \, d\xi_2 \right| + \\
&+ R \cdot \sum_{\substack{j,k=1,2 \\ (j \leq k)}} \left| \int_{(MP_M)} | D_{jk1} \overset{n-1}{u}_{(\varphi, \Psi, \chi)} | (\xi_1, \xi_2) \, d\xi_2 \right| \\
&|(D_{112} \overset{n}{u}_{(\varphi, \Psi, \chi)}) (M) | \leq P' + Q + \\
&+ L \cdot R \cdot \exp \cdot \{ L \cdot \alpha \} \cdot \sum_{\substack{j,k=1,2 \\ (j \leq k)}} | J (| D_{jk2} \overset{n-1}{u}_{(\varphi, \Psi, \chi)} |) | (M) \\
&|(D_{122} \overset{n}{u}_{(\varphi, \Psi, \chi)}) (M) | \leq P' + Q + \\
&+ R \cdot \exp \cdot \{ L \cdot \alpha \} \cdot \sum_{\substack{j,k=1,2 \\ (j \leq k)}} | J (| D_{jk2} \overset{n-1}{u}_{(\varphi, \Psi, \chi)} |) | (M) \\
&|(D_{222} \overset{n}{u}_{(\varphi, \Psi, \chi)}) (M) | \leq P' + Q + \\
&+ L \cdot R \cdot \exp \cdot \{ L \cdot \alpha \} \cdot \sum_{\substack{j,k=1,2 \\ (j \leq k)}} | J (| D_{jk2} \overset{n-1}{u}_{(\varphi, \Psi, \chi)} |) | (M) + \\
&+ L \cdot R \cdot \exp \cdot \{ L \cdot \alpha \} \cdot \sum_{\substack{j,k=1,2 \\ (j \leq k)}} \left| \int_{(MQ_M)} | J (| D_{jk2} \overset{n-1}{u}_{(\varphi, \Psi, \chi)} |) | (\xi_1, \xi_2) \, d\xi_1 \right| + \\
&+ L \cdot R \cdot \sum_{\substack{j,k=1,2 \\ (j \leq k)}} \left| \int_{(MQ_M)} | D_{jk2} \overset{n-1}{u}_{(\varphi, \Psi, \chi)} | (\xi_1, \xi_2) \, d\xi_1 \right|
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

denotando L, igual que en el n.º 1, el máximo del conjunto finito constituido por los extremos superiores de los módulos de ϱ, $\frac{1}{\varrho}$ y de sus derivadas primeras y segundas sobre $\mathcal{E}_c$, α la longitud del lado paralelo al eje Ox_1 del rectángulo R_{AB}, Q al máximo del conjunto $\{Q_{111}, Q_{112}, Q_{122}, Q_{222}\}$, constituido por las sumas de los extremos superiores de los módulos de los términos, que figurando en las expresiones de $D_{111}\, u^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$, $D_{112}\, u^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$, $D_{122}\, u^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$, $D_{222}\, u^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$, respectivamente, no afecten dichos términos a derivadas terceras de la aproximación $u^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$, [$Q_{111}$, Q_{112}, Q_{122}, Q_{222}, y consecuentemente, $Q = \text{Máx}\,\{Q_{111}, Q_{112}, Q_{122}, Q_{222}\}$, por lo precedente, existen y son independientes de $(n, \varphi, \Psi, \chi) \in B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$], y R denota el máximo del conjunto constituido por los extremos superiores de los módulos de las derivadas primeras de f sobre el compacto $\mathcal{H}^0$

Para $n = 1$ es $D_{jk1}\, u^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)} = D_{jk1}\, w^{0}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$; $(j, k = 1, 2)$ y $D_{jk2}\, u^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)} = D_{jk2}\, w^{0}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$; $(j, k = 1, 2)$, las cuales, para todo $(\varphi, \Psi, \chi) \in B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, están en módulo acotadas por P' sobre D, deduciéndose, habida cuenta (10), en consecuencia, que $D_{111}\, u^{1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$, $D_{112}\, u^{1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$, $D_{122}\, u^{1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$ y $D_{222}\, u^{1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$, están acotadas en módulo sobre D, uniformemente respecto a $(\varphi, \Psi, \chi) \in B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$. Sea:

$$P^* = \text{Máx}\cdot\{P' + Q,\ \underset{p,q,r=1,2}{\text{Máx}}\{\underset{(M,\varphi,\Psi,\chi)\in D\times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi},\widetilde{\Psi},\widetilde{\chi})}{\sup}.\,|\,(D_{pqr}\, u^{1}_{(\varphi,\Psi,\chi)})\,(M)\,|\}\}$$

Se tiene, pues, por tanto:

$$«\,(\forall_{(\varphi,\Psi,\chi)})\,((\varphi, \Psi, \chi) \in B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \Rightarrow (\forall_{(p,q,r)})\,((p, q, r) \in \{1, 2\} \times \{1, 2\} \times \{1, 2\} \Rightarrow \sup_{M\in D}\cdot\,|\,(D_{pqr}\, u^{1}_{(\varphi,\Psi,\chi)})\,(M)\,| \leq P^*))\,»$$

y

$$«\,P' + Q \leq P^*\,»$$

Para $n = 2$, procediendo análogamente a lo efectuado en el n.º 7 de la Parte primera (pág. 237) de S.P.A. [3], se obtienen, en primer lugar, las desigualdades siguientes, válidas para todo $(M, \varphi, \Psi, \chi) \in D \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$:

$$\left.\begin{aligned}
&\mid J\,(\mid D_{jk2}\,u^{1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}\mid)\mid(M) = \\
&= \left| \int_{\mathcal{L}(M)} \mid D_{ik2}\,u^{1}_{(\varphi,\Psi,\chi)} \mid (\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 \right| \leq \frac{P^*}{1-m} \cdot \frac{\xi+\eta}{1!} \\
&\left| \int_{(MP_M)} \mid D_{jk1}\,u^{1}_{(\varphi,\Psi,\chi)} \mid (\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2 \right| = \\
&= \left| \int_{x_2(rP_M)}^{x_2 M} \mid D_{jk1}\,u^{1}_{(\varphi,\Psi,\chi)} \mid (\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2 \right| \leq P^* \cdot \frac{\xi+\eta}{1!} \\
&\left| \int_{(MQ_M)} \mid D_{jk2}\,u^{1}_{(\varphi,\Psi,\chi)} \mid (\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 \right| = \\
&= \left| \int_{x_1(rQ_M)}^{x_1 M} \mid D_{jk2}\,u^{1}_{(\varphi,\Psi,\chi)} \mid (\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 \right| \leq P^* \cdot \frac{\xi+\eta}{1!} \\
&\left| \int_{(MP_M)} \mid J\,(\mid D_{jk2}\,u^{1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}\mid) \mid (\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2 \right| \leq \\
&\leq \frac{P^*}{1-m} \cdot \frac{(\xi+\eta)^2}{2!} \leq \frac{P^*}{1-m}\,(\alpha+\beta) \cdot \frac{\xi+\eta}{1!} \\
&\left| \int_{(MQ_M)} \mid J\,(\mid D_{jk2}\,u^{1}_{(\chi,\Psi,\chi)}\mid) \mid (\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 \right| \leq \\
&\leq \frac{P^*}{1-m} \cdot \frac{(\xi+\eta)^2}{2!} \leq \frac{P^*}{1-m}\,(\alpha+\beta) \cdot \frac{\xi+\eta}{1!}
\end{aligned}\right\}\ (j,\, k = 1{,}2)$$

Haciendo en (10), $n = 2$, y teniendo en cuenta las desigualdades precedentes, resultan las acotaciones válidas para todo $(M, \varphi, \Psi, \chi) \in \in D \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, que siguen, [$\beta$ denota la longitud del lado paralelo al eje Ox_2 del rectángulo R_{AB}]:

$$\begin{aligned}
&\mid D_{111}\,u^{2}_{(\varphi,\Psi,\chi)} \mid (M) \leq P' + Q + 3L^2 \cdot \exp\cdot\{L\cdot\alpha\} \cdot \frac{R}{1-m} \cdot P^* \cdot \frac{\xi+\eta}{1!} + \\
&+ 3L^2 \exp\cdot\{L\,\alpha\} \cdot \frac{R}{1-m}\,(\alpha+\beta)\cdot P^* \frac{\xi+\eta}{1!} + 3RP^* \frac{\xi+\eta}{1!} \leq P^* + \\
&+ 3R \cdot \left[L^2 \cdot \exp\cdot\{L\cdot\alpha\} \cdot \frac{\alpha+\beta+1}{1-m} + 1 \right] P^* \cdot \frac{\xi+\eta}{1!}
\end{aligned}$$

$$| D_{112} \overset{2}{u}_{(\varphi, \Psi, \chi)} | (M) \leq P' + Q + 3L \exp \cdot \{L \cdot \alpha\} \cdot \frac{R}{1-m} P^* \cdot \frac{\xi + \eta}{1!} \leq$$
$$\leq P^* + 3L \exp \cdot \{L\alpha\} \cdot \frac{R}{1-m} \cdot P^* \cdot \frac{\xi + \eta}{1!}$$
$$| D_{122} \overset{2}{u}_{(\varphi, \Psi, \chi)} | (M) \leq P' + Q + 3 \cdot \exp \cdot \{L \cdot \alpha\} \frac{R}{1-m} P^* \cdot \frac{\xi + \eta}{1!} \leq$$
$$\leq P^* + 3 \cdot \exp \cdot \{L\alpha\} \cdot \frac{R}{1-m} \cdot P^* \cdot \frac{\xi + \eta}{1!}$$
$$| D_{222} \overset{2}{u}_{(\varphi, \Psi, \chi)} | (M) \leq P' + Q + 3L \exp \cdot \{L\alpha\} \frac{R}{1-m} P^* \frac{\xi + \eta}{1!} +$$
$$+ 3L \exp \cdot \{L\alpha\} \cdot \frac{R}{1-m} (\alpha + \beta) \cdot P^* \cdot \frac{\xi + \eta}{1!} + 3LRP^* \frac{\xi + \eta}{1!} \leq$$
$$\leq P^* + 3LR \left[\exp \cdot \{L\alpha\} \frac{\alpha + \beta + 1}{1-m} + 1 \right] \cdot P^* \frac{\xi + \eta}{1!}$$

y si ω representa el máximo del conjunto finito constituido por P^* y por los coeficientes de $P^* \frac{\xi + \eta}{1!}$, se puede poner:

$$| D_{pqr} \overset{2}{u}_{(\varphi, \Psi, \chi)} | (M) \leq \omega + \omega^2 \frac{\xi + \eta}{1!} =$$
$$= S_2 (\xi, \eta); \ ((M, \varphi, \Psi, \chi) \in D \times B_{\sigma_r} (\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \text{ y } p, q, r = 1, 2)$$

en la que para todo $n \in N$, denota $S_n (\xi, \eta)$ la expresión:

$$\omega + \omega^2 \frac{\xi + \eta}{1!} + \omega^3 \frac{(\xi + \eta)^2}{2!} + \ldots + \omega^n \cdot \frac{(\xi + \eta)^{n-1}}{(n-1)!}$$

así como también:

$$| D_{pqr} \overset{1}{u}_{(\varphi, \Psi, \chi)} | (M) \leq P^* \leq \omega =$$
$$= S_1 (\xi, \eta); \ ((M, \varphi, \Psi, \chi) \in D \times B_{\sigma_r} (\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \text{ y } p, q, r = 1, 2)$$

Generalicemos estos resultados, demostrando que para todo $(n, M, \varphi, \Psi, \chi) \in N \times D \times B_{\sigma_r} (\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, se verifica que:

$$| D_{pqr} \overset{n}{u}_{(\varphi, \Psi, \chi)} | (M) \leq S_n (\xi, \eta); \ (p, q, r = 1, 2)$$

En efecto, procediendo por recurrencia, supuesta cierta la hipótesis para $n - 1 \in N$, se tendrá, como consecuencia, las desigualdades siguientes, válidas para todo $(M, \varphi, \Psi, \chi) \in D \times B_{\sigma_r} (\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$:

$$\left.\begin{array}{l}
| J (| D_{jk2} u^{n}_{(\varphi, \Psi, \chi)} |) | (M) = \left| \int\limits_{\mathcal{L}(M)} | D_{jk2} u^{n-1}_{(\varphi, \Psi, \chi)} | (\xi_1, \xi_2)\, d\,\xi_1 \right| \leq \\
\leq \frac{1}{1-m} \cdot \left[\omega \cdot \frac{\xi + \eta}{1!} + \omega^2 \frac{(\xi+\eta)^2}{2!} + \ldots + \omega^{n-1} \frac{(\xi+\eta)^{n-1}}{(n-1)!} \right] = \\
= \frac{1}{1-m} \cdot \frac{1}{\omega} (S_n (\xi, \eta) - \omega) \\
\left| \int\limits_{(MP_M)} | D_{jk1} u^{n-1}_{(\varphi, \Psi, \chi)} | (\xi_1, \xi_2)\, d\,\xi_2 \right| = \left| \int\limits_{x_2 (rP_M)}^{x_2 M} | D_{jk1} u^{n-1}_{(\varphi, \Psi, \chi)} | (\xi_1, \xi_2)\, d\,\xi_2 \right| \leq \\
\leq \omega \cdot \frac{\xi + \eta}{1!} + \omega^2 \cdot \frac{(\xi+\eta)^2}{2!} + \ldots + \omega^{n-1} \cdot \frac{(\xi+\eta)^{n-1}}{(n-1)!} = \\
= \frac{1}{\omega} (S_n (\xi, \eta) - \omega) \\
\left| \int\limits_{(MQ_M)} | D_{jk2} u^{n-1}_{(\varphi, \Psi, \chi)} | (\xi_1, \xi_2)\, d\,\xi_1 \right| = \left| \int\limits_{x_1 (rQ_M)}^{x_1 M} | D_{jk2} u^{n-1}_{(\varphi, \Psi, \chi)} | (\xi_1, \xi_2)\, d\,\xi_1 \right| \leq \\
\leq \omega \cdot \frac{\xi + \eta}{1!} + \omega^2 \cdot \frac{(\xi+\eta)^2}{2!} + \ldots + \omega^{n-1} \cdot \frac{(\xi+\eta)^{n-1}}{(n-1)!} = \\
= \frac{1}{\omega} (S_n (\xi, \eta) - \omega) \\
\left| \int\limits_{(MP_M)} | J (| D_{jk2} u^{n-1}_{(\varphi, \Psi, \chi)} |) | (\xi_1, \xi_2)\, d\,\xi_2 \right| \leq \\
\leq \frac{\alpha + \beta}{1-m} \left[\omega \cdot \frac{\xi + \eta}{1!} + \omega^2 \cdot \frac{(\xi+\eta)^2}{2!} + \ldots + \omega^{n-1} \cdot \frac{(\xi+\eta)^{n-1}}{(n-1)!} \right] = \\
= \frac{\alpha + \beta}{1-m} \cdot \frac{1}{\omega} (S_n (\xi, \eta) - \omega) \\
\left| \int\limits_{(MQ_M)} | J (| D_{jk2} u^{n-1}_{(\varphi, \Psi, \chi)} |) | (\xi_1, \xi_2)\, d\,\xi_1 \right| \leq \\
\leq \frac{\alpha + \beta}{1-m} \left[\omega \cdot \frac{\xi + \eta}{1!} + \omega^2 \cdot \frac{(\xi+\eta)^2}{2!} + \ldots + \omega^{n-1} \cdot \frac{(\xi+\eta)^{n-1}}{(n-1)!} \right] = \\
= \frac{\alpha + \beta}{1-m} \cdot \frac{1}{\omega} (S_n (\xi, \eta) - \omega)
\end{array}\right\} (j, k = 1{,}2)$$

de las que, habida cuenta además (10), se deducen las acotaciones, válidas para todo $(M, \varphi, \Psi, \chi) \in D \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, que siguen:

$$| D_{111} u^n_{(\varphi, \Psi, \chi)} | (M) \leq P^* + 3R \left[L^2 \cdot \exp \cdot \{L \cdot \alpha\} \cdot \frac{\alpha + \beta + 1}{1 - m} + 1 \right] \cdot$$

$$\cdot \frac{S_n(\xi, \eta) - \omega}{\omega} \leq \omega + \omega \cdot \frac{S_n(\xi, \eta) - \omega}{\omega} = S_n(\xi, \eta)$$

$$| D_{112} u^n_{(\varphi, \Psi, \chi)} | (M) \leq P^* + 3 \cdot L \cdot \exp \cdot \{L \cdot \alpha\} \cdot \frac{R}{1 - m} \cdot$$

$$\cdot \frac{S_n(\xi, \eta) - \omega}{\omega} \leq \omega + \omega \cdot \frac{S_n(\xi, \eta) - \omega}{\omega} = S_n(\xi, \eta)$$

$$| D_{122} u^n_{(\varphi, \Psi, \chi)} | (M) \leq P^* + 3 \cdot \exp \cdot \{L \cdot \alpha\} \cdot \frac{R}{1 - m} \cdot$$

$$\cdot \frac{S_n(\xi, \eta) - \omega}{\omega} \leq \omega + \omega \cdot \frac{S_n(\xi, \eta) - \omega}{\omega} = S_n(\xi, \eta)$$

$$| D_{222} u^n_{(\varphi, \Psi, \chi)} | (M) \leq P^* + 3 \cdot L \cdot R \cdot \left[\exp \cdot \{L \cdot \alpha\} \cdot \frac{\alpha + \beta + 1}{1 - m} + 1 \right] \cdot$$

$$\cdot \frac{S_n(\xi, \eta) - \omega}{\omega} \leq \omega + \omega \cdot \frac{S_n(\xi, \eta) - \omega}{\omega} = S_n(\xi, \eta)$$

Como para $n = 1{,}2$ es cierta la hipótesis de la recurrencia, el resultado obtenido es completamente general.

Ahora bien, para todo $(n, M, \varphi, \Psi, \chi) \in N \times D \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, se verifica:

$$«S_n(\xi, \eta) \leq \lim_{r \to \infty} \cdot S_r(\xi, \eta) = \omega \cdot \lim_{r \to \infty} \cdot$$

$$\cdot \left[1 + \omega \cdot \frac{\xi + \eta}{1!} + \omega^2 \cdot \frac{(\xi + \eta)^2}{2!} + \ldots + \omega^{r-1} \cdot \frac{(\xi + \eta)^{r-1}}{(r - 1)!} \right] =$$

$$= \omega \cdot e^{\omega(\xi + \eta)} \leq \omega \cdot e^{\omega(\alpha + \beta)} »$$

por lo que:

$$« (\forall_{(n, \varphi, \Psi, \chi)}) ((n, \varphi, \Psi, \chi) \in N \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{(p,q,r=1,2)}{\text{Máx}} \cdot \{ \sup_{M \in D} \cdot | (D_{pqr} u^n_{(\varphi, \Psi, \chi)}) (M) | \} \leq \omega \cdot e^{\omega(\alpha + \beta)}) »$$

lo que demuestra la existencia de una cota superior común sobre D, de los módulos de $\overset{n}{u}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$ y de sus derivadas primeras, segundas y terceras independiente de $(n, \varphi, \Psi, \chi) \in N \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, de acuerdo con lo afirmado al principio de este número. Designaremos por T a:

$$«\text{Máx}\left\{ P', \sup_{(n,M,\varphi,\Psi,\chi)\in N\times D\times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi},\widetilde{\Psi},\widetilde{\chi})} \cdot \left| \overset{n}{u}_{(\varphi,\Psi,\chi)}(M) \right|, \right.$$

$$, \text{Máx}_{(i=1,2)} \cdot \left\{ \sup_{(n,M,\varphi,\Psi,\chi)\in N\times D\times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi},\widetilde{\Psi},\widetilde{\chi})} \cdot \left| (D_i \overset{n}{u}_{(\varphi,\Psi,\chi)})(M) \right| \right\}, \text{Máx}_{(j,k=1,2)} \cdot \left\{ \sup_{(n,M,\varphi,\Psi,\chi)\in N\times D\times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi},\widetilde{\Psi},\widetilde{\chi})} \cdot \left| (D_{jk} \overset{n}{u}_{(\varphi,\Psi,\chi)})(M) \right| \right\},$$

$$\left., \text{Máx}_{(p,q,r=1,2)} \cdot \left\{ \sup_{(n,M,\varphi,\Psi,\chi)\in N\times D\times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi},\widetilde{\Psi},\widetilde{\chi})} \cdot \left| (D_{pqr} \overset{n}{u}_{(\varphi,\Psi,\chi)})(M) \right| \right\} \right\}»$$

6. Acotacion de $\overset{2}{u}_{(\varphi,\Psi,\chi)} - \overset{1}{u}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$ y de sus derivadas parciales. — Designemos por A, $\underset{(i=1,2)}{A_i}$, $\underset{(j,k=1,2;\, j\leq k)}{A_{jk}}$ los coeficientes de la desigualdad de Lipschitz, que como consecuencia de las hipótesis efectuadas en el n.º 1 de esta Parte primera, verifica f sobre el compacto $\mathcal{H}^0 \subset \mathcal{A}$, y por $A^{(x_l)}$, $\underset{(i=1,2)}{A_i^{(x_l)}}$, $\underset{(j,k=1,2)}{A_{jk}^{(x_l)}}$, $(l = 1, 2)$; $A^{(u)}$, $\underset{(i=1,2)}{A_i^{(u)}}$, $\underset{(j,k=1,2;\, j\leq k)}{A_{jk}^{(u)}}$; $A^{(u_r)}$, $\underset{(i=1,2)}{A_i^{(u_r)}}$, $\underset{(j,k=1,2)}{A_{jk}^{(u_r)}}$, $(r = 1, 2)$; $A^{(u_{pq})}$, $\underset{(i=1,2)}{A_i^{(u_{pq})}}$, $\underset{(j,k=1,2;\, j\leq k)}{A_{jk}^{(u_{pq})}}$, $(p, q = 1, 2; p \leq q)$, los sistemas de coeficientes de las desigualdades de Lipschitz, verificadas asimismo sobre el referido compacto $\mathcal{H}^0$, por $f_{x_l} = D_l f$, $(l = 1, 2)$; $f_u = D_3 f$; $f_{u_r} = D_{r+3} f$, $(r = 1, 2)$; $f_{u_{pq}} = D_{p+q+4} f$, $(p, q = 1, 2; p \leq q)$, respectivamente, [Véase la observación al final del n.º 1 de esta Parte primera], y sea H el máximo de este conjunto de coeficientes. Pongamos $\mathcal{M}_0 = \text{Máx}\left\{\dfrac{r}{2\sqrt{6}}, 2T\right\}$, y para todo $(s, \varphi, \Psi, \chi) \in [N \cup \{0\}] \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, hagamos, para abreviar, $f_{x_l}^{(s,\varphi,\Psi,\chi)} = f_{x_l} \circ \overset{\rightarrow s}{g}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$, $(l = 1, 2)$; $f_u^{(s,\varphi,\Psi,\chi)} = f_u \circ \overset{\rightarrow s}{g}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$; $f_{u_r}^{(s,\varphi,\Psi,\chi)} = f_{u_r} \circ \overset{\rightarrow s}{g}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$, $(r = 1, 2)$; $f_{u_{pq}}^{(s,\varphi,\Psi,\chi)} = f_{u_{pq}} \circ \overset{\rightarrow s}{g}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$, $(p, q = 1, 2; p \leq q) \cdot [\overset{\rightarrow 0}{g}_{(\varphi,\Psi,\chi)} = \vec{g}_{(c,\varphi,\Psi,\chi)\mid D}]$.

Se tendrá en primer lugar, como consecuencia de los resultados establecidos en el n.º 3, y cualquiera sea $(M, \varphi, \Psi, \chi) \in D \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$:

$$|\overset{1}{u}_{(\varphi,\Psi,\chi)} - \overset{0}{w}_{(\varphi,\Psi,\chi)}|(M) \leq \frac{r}{2\sqrt{6}} \leq \mathcal{M}_0;\ |D_i \overset{1}{u}_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_i \overset{0}{w}_{(\varphi,\Psi,\chi)}|(M) \leq$$

$$\leq \frac{r}{2\sqrt{6}} \leq \mathcal{M}_0, \ (i = 1, 2) \ ; \ |D_{jk} u^1_{(\varphi, \Psi, \chi)} - D_{jk} w^0_{(\varphi, \Psi, \chi)}| \ (M) \leq$$

$$\leq \frac{r}{2\sqrt{6}} \leq \mathcal{M}_0, \ (j, \ k = 1, \ 2)$$

y además, habida cuenta lo establecido en el n.º precedente:

$$|D_{pqr} u^1_{(\varphi, \Psi, \chi)} - D_{pqr} w^0_{(\varphi, \Psi, \chi)}| \ (M) \leq |(D_{pqr} u^1_{(\varphi, \Psi, \chi)}) \ (M)| + $$
$$+ \ |(D_{pqr} w^0_{(\varphi, \Psi, \chi)}) \ (M)| \leq T + P' \leq 2\,T \leq \mathcal{M}_0.$$

obteniéndose seguidamente, las desigualdades, válidas para todo $(M, \varphi, \Psi, \chi) \in D \times B_{\sigma_r} (\varphi, \Psi, \chi)$, siguientes, [con: $\Phi^0_{(\varphi, \Psi, \chi)} = f \circ \vec{g}^{\,0}_{(\varphi, \Psi, \chi)}$] .

$$|\Phi^1_{(\varphi, \Psi, \chi)} - \Phi^0_{(\varphi, \Psi, \chi)}| \ (M) =$$

$$= |f(M, \ u^1_{(\varphi, \Psi, \chi)} (M), \ \underset{(i=1,2)}{(D_i u^1_{(\varphi, \Psi, \chi)})} (M), \ \underset{(j,k=1,2)}{(D_{jk} u^1_{(\varphi, \Psi, \chi)})} (M)) \ -$$

$$- f(M, \ w^0_{(\varphi, \Psi, \chi)} (M), \ \underset{(i=1,2)}{(D_i w^0_{(\varphi, \Psi, \chi)})} (M), \ \underset{(j,k=1,2)}{(D_{jk} w^0_{(\varphi, \Psi, \chi)})} (M))| \leq$$

$$\leq A \cdot |u^1_{(\varphi, \Psi, \chi)} - w^0_{(\varphi, \Psi, \chi)}| \ (M) + \sum_{i=1,2} A_i \, |D_i u^1_{(\varphi, \Psi, \chi)} - D_i w^0_{(\varphi, \Psi, \chi)}| (M) +$$

$$+ \sum_{\substack{j,k=1,2 \\ (j \leq k)}} A_{jk} \, |D_{jk} u^1_{(\varphi, \Psi, \chi)} - D_{jk} w^0_{(\varphi, \Psi, \chi)}| \ (M) \leq$$

$$\leq (A + \sum_{i=1,2} A_i + \sum_{\substack{j,k=1,2 \\ (j \leq k)}} A_{jk}) \cdot \mathcal{M}_0 \leq 6 \cdot H \cdot \mathcal{M}_0$$

$$|D_1 \Phi^1_{(\varphi, \Psi, \chi)} - D_1 \Phi^0_{(\varphi, \Psi, \chi)}| \ (M) \leq |f^{(1, \varphi, \Psi, \chi)}_{x_1} - f^{(0, \varphi, \Psi, \chi)}_{x_1}| \ (M) +$$

$$+ \ |f^{(1, \varphi, \Psi, \chi)}_u \cdot D_1 u^1_{(\varphi, \Psi, \chi)} - f^{(0, \varphi, \Psi, \chi)}_u \cdot D_1 w^0_{(\varphi, \Psi, \chi)}| \ (M) +$$

$$+ \sum_{r=1,2} |f^{(1, \varphi, \Psi, \chi)}_{u_r} \cdot D_{r1} u^1_{(\varphi, \Psi, \chi)} - f^{(0, \varphi, \Psi, \chi)}_{u_r} \cdot D_{r1} w^0_{(\varphi, \Psi, \chi)}| \ (M) +$$

$$+ \sum_{\substack{p,q=1,2 \\ (p \leq q)}} |f^{(1, \varphi, \Psi, \chi)}_{u_{pq}} \cdot D_{pq1} u^1_{(\varphi, \Psi, \chi)} - f^{(0, \varphi, \Psi, \chi)}_{u_{pq}} \cdot D_{pq1} w^0_{(\varphi, \Psi, \chi)}| \ (M) \leq$$

$$\leq |f^{(1, \varphi, \Psi, \chi)}_{x_1} - f^{(0, \varphi, \Psi, \chi)}_{x_1}| \ (M) +$$

$$+ \ (|f^{(1, \varphi, \Psi, \chi)}_u| \cdot |D_1 u^1_{(\varphi, \Psi, \chi)} - D_1 w^0_{(\varphi, \Psi, \chi)}|) \ (M) +$$

$$+ \ (|f^{(1, \varphi, \Psi, \chi)}_u - f^{(0, \varphi, \Psi, \chi)}_u| \cdot |D_1 w^0_{(\varphi, \Psi, \chi)}|) \ (M) +$$

$$+ \sum_{r=1,2} (|f_{u_r}^{(1,\varphi,\Psi,\chi)}| \cdot |D_{r1} \overset{1}{u}_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_{r1} \overset{0}{w}_{(\varphi,\Psi,\chi)}|)(M) +$$

$$+ \sum_{r=1,2} (|f_{u_r}^{(1,\varphi,\Psi,\chi)} - f_{u_r}^{(0,\varphi,\Psi,\chi)}| \cdot |D_{r1} \overset{0}{w}_{(\varphi,\Psi,\chi)}|)(M) +$$

$$+ \sum_{\substack{p,q=1,2 \\ (p \leq q)}} (|f_{u_{pq}}^{(1,\varphi,\Psi,\chi)}| \cdot |D_{pq1} \overset{1}{u}_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_{pq1} \overset{0}{w}_{(\varphi,\Psi,\chi)}|)(M) +$$

$$+ \sum_{\substack{p,q=1,2 \\ (p \leq q)}} (|f_{u_{pq}}^{(1,\varphi,\Psi,\chi)} - f_{u_{pq}}^{(0,\varphi,\Psi,\chi)}| \cdot |D_{pq1} \overset{0}{w}_{(\varphi,\Psi,\chi)}|)(M) \leq$$

$$\leq (A^{(x_1)} + \sum_{i=1,2} A_i^{(x_1)} + \sum_{\substack{j,k=1,2 \\ (j \leq k)}} A_{jk}^{(x_1)}) \cdot \mathcal{M}_0 + R \cdot \mathcal{M}_0 +$$

$$+ (A^{(u)} + \sum_{i=1,2} A_i^{(u)} + \sum_{\substack{j,k=1,2 \\ (j \leq k)}} A_{jk}^{(u)}) \cdot P' \cdot \mathcal{M}_0 + 2 R \mathcal{M}_0 +$$

$$+ P' \cdot \sum_{r=1,2} (A^{(u_r)} + \sum_{i=1,2} A_i^{(u_r)} + \sum_{\substack{j,k=1,2 \\ (j \leq k)}} A_{jk}^{(u_r)}) \cdot \mathcal{M}_0 + 3 R \mathcal{M}_0 +$$

$$+ P' \cdot \sum_{\substack{p,q=1,2 \\ (p \leq q)}} (A^{(u_{pq})} + \sum_{i=1,2} A_i^{(u_{pq})} + \sum_{\substack{j,k=1,2 \\ (j \leq k)}} A_{jk}^{(u_{pq})}) \mathcal{M}_0 \leq$$

$$\leq (6H + R + 6HP' + 2R + 12HP' + 3R + 18HP') \mathcal{M}_0 =$$

$$= 6[R + (1 + 6P')H] \mathcal{M}_0 \leq \mathcal{M}_0 \cdot 6 \cdot [R + (1 + 6T) \cdot H]$$

y análogamente:

$$|D_2 \overset{1}{\Phi}_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_2 \overset{0}{\Phi}_{(\varphi,\Psi,\chi)}|(M) \leq \mathcal{M} \cdot 6 \cdot [R + (1 + 6T) \cdot H]$$

De estas desigualdades se deduce procediendo de un modo enteramente análogo a como se hizo en el n.º 7 (pág. 237) de la PARTE PRIMERA de S.P.A., [3], estas otras:

$$\left.\begin{aligned} &|J(\overset{1}{\Phi}_{(\varphi,\Psi,\chi)} - \overset{0}{\Phi}_{(\varphi,\Psi,\chi)})|(M) \leq \mathcal{M}_0 \cdot \frac{6H}{1-m} \cdot \frac{\xi + \eta}{1!} \\ &|J(D_2 \overset{1}{\Phi}_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_2 \overset{0}{\Phi}_{(\varphi,\Psi,\chi)})|(M) \leq \\ &\leq \mathcal{M}_0 \cdot \frac{6 \cdot [R + (1 + 6T) \cdot H]}{1-m} \cdot \frac{\xi + \eta}{1!} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &(M, \varphi, \Psi, \chi) \in D \times \\ &\times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \end{aligned}$$

Demostremos ahora el siguiente:

TEOREMA III. — «Cualquiera que sea $(\varphi, \Psi, \chi) \in B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, $\overset{2}{u}_{(\varphi, \Psi, \chi)} - \overset{1}{u}_{(\varphi, \Psi, \chi)}$ y sus derivadas primeras y segundas están mayoradas en módulo para cada $M \in D$ por $\mathcal{M}_0 \cdot K \cdot \frac{\xi + \eta}{1!}$ (teniendo ξ, η el mismo significado que en el n.º 7 de la PARTE PRIMERA de S.P.A. [3]); las derivadas terceras de $\overset{2}{u}_{(\varphi, \Psi, \chi)} - \overset{1}{u}_{(\varphi, \Psi, \chi)}$ admiten sobre D la cota numérica $\mathcal{M}_0$, siendo K un número positivo perfectamente determinado».

En efecto, cualquiera sea $(\varphi, \Psi, \chi) \in B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, se tiene para todo $M \in D$ la validez de la desigualdad:

$$|\overset{2}{u}_{(\varphi, \Psi, \chi)} - \overset{1}{u}_{(\varphi, \Psi, \chi)}|(M) = \left| \iint\limits_{(MP_M Q_M)} (J(\Phi^1_{(\varphi, \Psi, \chi)} - \Phi^0_{(\varphi, \Psi, \chi)}))(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 \right| =$$

$$= \left| \int_{x_1(rQ_M)}^{x_1 M} d\xi_1 \int_{x_2(rU)}^{x_2 M} (J(\Phi^1_{(\varphi, \Psi, \chi)} - \Phi^0_{(\varphi, \Psi, \chi)}))(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 \right| \leq$$

$$\leq \int_{\xi_{Q_M}}^{\xi} d\xi' \int_{\eta_U}^{\eta} \mathcal{M}_0 \frac{6H}{1-m} \cdot \frac{\xi' + \eta'}{1!}\, d\eta' \leq$$

$$\leq \mathcal{M}_0 \cdot \frac{6H}{1-m} \cdot \frac{(\xi+\eta)^2}{2 \cdot 3} \cdot \frac{\xi+\eta}{1!} \leq \mathcal{M}_0 \cdot \frac{6H}{1-m} (\alpha + \beta)^2 \frac{\xi + \eta}{1!}$$

Asimismo se tendrá:

$$|D_1 \overset{2}{u}_{(\varphi, \Psi, \chi)} - D_1 \overset{1}{u}_{(\varphi, \Psi, \chi)}|(M) =$$

$$= \left| \int\limits_{(MP_M)} (J(\Phi^1_{(\varphi, \Psi, \chi)} - \Phi^0_{(\varphi, \Psi, \chi)}))(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2 \right| \leq \mathcal{M}_0 \frac{6H \cdot (\alpha + \beta)}{1-m} \cdot \frac{\xi+\eta}{1!}$$

$$|D_2 \overset{2}{u}_{(\varphi, \Psi, \chi)} - D_2 \overset{1}{u}_{(\varphi, \Psi, \chi)}|(M) =$$

$$= \left| \int\limits_{(MQ_M)} (J(\Phi^1_{(\varphi, \Psi, \chi)} - \Phi^0_{(\varphi, \Psi, \chi)}))(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 \right| \leq \mathcal{M}_0 \frac{6H \cdot (\alpha + \beta)}{1-m} \cdot \frac{\xi+\eta}{1!}$$

Para las derivadas segundas, habida cuenta las fórmulas resolutivas del n.º 4 (9**) se obtiene del mismo modo:

$$|D_{11} \overset{2}{u}_{(\varphi, \Psi, \chi)} - D_{11} \overset{1}{u}_{(\varphi, \Psi, \chi)}|(M) \leq$$

$$\leq \mathcal{M}_0 \frac{6LH}{1-m} \cdot \frac{\xi+\eta}{1!} + \mathcal{M}_0 \cdot \frac{6LH}{1-m} (\alpha+\beta) \cdot \frac{\xi+\eta}{1!} +$$

$$+ \mathcal{M}_0 \cdot 6H \cdot \frac{\xi+\eta}{1!} = \mathcal{M}_0 \cdot 6H \cdot \left[L \cdot \frac{\alpha + \beta + 1}{1-m} + 1 \right] \cdot \frac{\xi+\eta}{1!}$$

[ya que:

$$|\varrho \cdot J\,(\Phi^1_{(\varphi,\Psi,\chi)} - \Phi^0_{(\varphi,\Psi,\chi)})|\,(M) \leq \mathcal{M}_0 \cdot \frac{6 \cdot L \cdot H}{1-m} \cdot \frac{\xi+\eta}{1!}$$

$$\left| \int_{(MP_M)} ((D_2\,\varrho) \cdot J\,(\Phi^1_{(\varphi,\Psi,\chi)} - \Phi^0_{(\varphi,\Psi,\chi)}))\,(\xi_1,\,\xi_2)\,d\,\xi_2 \right| \leq$$

$$\leq \mathcal{M}_0 \cdot \frac{6\,LH}{1-m} \int_{\eta_{P_M}}^{\eta} \frac{\xi'+\eta'}{1!}\,d\eta' \leq \mathcal{M}_0\,\frac{6\,LH}{1-m} \cdot \frac{(\xi+\eta)^2}{2!} \leq$$

$$\leq \mathcal{M}_0\,\frac{6\,LH \cdot (\alpha+\beta)}{1-m} \cdot \frac{\xi+\eta}{1!}$$

$$\left| \int_{(MP_M)} (\Phi^1_{(\varphi,\Psi,\chi)} - \Phi^0_{(\varphi,\Psi,\chi)})\,(\xi_1,\,\xi_2)\,d\,\xi_2 \right| \leq$$

$$\leq \mathcal{M}_0 \cdot 6\,H \cdot \int_{\eta_{P_M}}^{\eta} d\eta' \leq \mathcal{M}_0 \cdot 6\,H \cdot \frac{\eta}{1!} \leq \mathcal{M}_0 \cdot 6\,H \cdot \frac{\xi+\eta}{1!} \Big]$$

y análogamente:

$$|D_{12}\,u^2_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_{12}\,u^1_{(\varphi,\Psi,\chi)}|\,(M) =$$

$$= |\,J\,(\Phi^1_{(\varphi,\Psi,\chi)} - \Phi^0_{(\varphi,\Psi,\chi)})|\,(M) \leq \mathcal{M}_0 \cdot \frac{6\,H}{1-m} \cdot \frac{\xi+\eta}{1!}$$

$$|D_{22}\,u^2_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_{22}\,u^1_{(\varphi,\Psi,\chi)}|\,(M) \leq \mathcal{M}_0 \cdot 6\,LH \cdot \left[\frac{\alpha+\beta+1}{1-m} + 1\right] \cdot \frac{\xi+\eta}{1!}$$

En cuanto a las derivadas terceras de $u^2_{(\varphi,\Psi,\chi)} - u^1_{(\varphi,\Psi,\chi)}$, teniendo en cuenta el resultado establecido en el n.º 5 de esta PARTE PRIMERA, así como la definición de $\mathcal{M}_0$, resulta que para todo $(\varphi,\,\Psi,\,\chi) \in B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi},\,\widetilde{\Psi},\,\widetilde{\chi})$, cualquiera sea $M \in D$ y $(p,\,q,\,r) \in \{1,\,2\} \times \{1,\,2\} \times \{1,\,2\}$, es válida la relación:

$$|D_{pqr}\,u^2_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_{pqr}\,u^1_{(\varphi,\Psi,\chi)}|\,(M) \leq |D_{pqr}\,u^2_{(\varphi,\Psi,\chi)}|\,(M) +$$
$$+ |D_{pqr}\,u^1_{(\varphi,\Psi,\chi)}|\,(M) \leq 2\,T \leq \mathcal{M}_0$$

Designando por K el máximo del conjunto finito constituido por los factores numéricos que multiplican a $\mathcal{M}_0 \cdot \dfrac{\xi+\eta}{1!}$ en las expresiones de las mayorantes obtenidas para $|u^2_{(\varphi,\Psi,\chi)} - u^1_{(\varphi,\Psi,\chi)}|\,(M)$; $|D_i\,u^2_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_i\,u^1_{(\varphi,\Psi,\chi)}|\,(M)$, $(i = 1,\,2)$; $|D_{jk}\,u^2_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_{jk}\,u^1_{(\varphi,\Psi,\chi)}|\,(M)$, $(j,\,k = 1,\,2)$, resulta que cualquiera sea $(\varphi,\,\Psi,\,\chi) \in B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi},\,\widetilde{\Psi},\,\widetilde{\chi})$, $u^2_{(\varphi,\Psi,\chi)} - u^1_{(\varphi,\Psi,\chi)}$ y sus derivadas primeras y segundas están mayoradas en módulo para cada $M \in D$ por $\mathcal{M}_0 \cdot K \cdot \dfrac{\xi + \eta}{1!}$, y las derivadas terceras de $u^2_{(\varphi,\Psi,\chi)} - u^1_{(\varphi,\Psi,\chi)}$ admiten sobre D la cota numérica $\mathcal{M}_0$.

El Teorema resulta pues demostrado.

7. Acotación de $u^3_{(\varphi,\Psi,\chi)} - u^2_{(\varphi,\Psi,\chi)}$ y de sus derivadas parciales. — Es válido el siguiente:

Teorema iv. — «Cualquiera que sea $(\varphi,\,\Psi,\,\chi) \in B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi},\,\widetilde{\Psi},\,\widetilde{\chi})$, $u^3_{(\varphi,\Psi,\chi)} - u^2_{(\varphi,\Psi,\chi)}$ y sus derivadas primeras y segundas están mayoradas en módulo, para cada $M \in D$, por $\mathcal{M}_0 \cdot K^2\, \dfrac{(\xi + \eta)^2}{2!}$; las derivadas terceras de $u^3_{(\varphi,\Psi,\chi)} - u^2_{(\varphi,\Psi,\chi)}$ están mayoradas en módulo, para cada $M \in D$, por $\mathcal{M}_0 \cdot \bar{K} \cdot \dfrac{\xi + \eta}{1!}$, siendo $\bar{K}$ un número positivo bien precisado».

En efecto, análogamente al caso anterior, se tiene para todo $(M,\,\varphi,\,\Psi,\,\chi) \in D \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi},\,\widetilde{\Psi},\,\widetilde{\chi})$ la validez de las relaciones:

$$|\Phi^2_{(\varphi,\Psi,\chi)} - \Phi^1_{(\varphi,\Psi,\chi)}|\,(M) =$$

$$= |\,f\,(M,\, u^2_{(\varphi,\Psi,\chi)}\,(M),\, \underset{(i=1,2)}{(D_i\,u^2_{(\varphi,\Psi,\chi)})}\,(M),\, \underset{(j,k=1,2;\,j\le k)}{(D_{jk}\,u^2_{(\varphi,\Psi,\chi)})}\,(M)) -$$

$$- f\,(M,\, u^1_{(\varphi,\Psi,\chi)}\,(M),\, \underset{(i=1,2)}{(D_i\,u^1_{(\varphi,\Psi,\chi)})}\,(M),\, \underset{(j,k=1,2;\,j\le k)}{(D_{jk}\,u^1_{(\varphi,\Psi,\chi)})}\,(M))| \le$$

$$\le \mathcal{M}_0 \cdot K \cdot (A + \sum_{i=1,2} A_i + \sum_{\substack{j,k=1,2\\(j\le k)}} A_{jk}) \cdot \frac{\xi + \eta}{1!} \le \mathcal{M}_0 \cdot 6 \cdot H \cdot K \cdot \frac{\xi + \eta}{1!}$$

$$|D_1\,\Phi^2_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_1\,\Phi^1_{(\varphi,\Psi,\chi)}|\,(M) \le |f_{x_1}^{(2,\varphi,\Psi,\chi)} - f_{x_1}^{(1,\varphi,\Psi,\chi)}|\,(M) +$$

$$+ (|f_u^{(2,\varphi,\Psi,\chi)}| \cdot |D_1\,u^2_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_1\,u^1_{(\varphi,\Psi,\chi)}|)\,(M) +$$

$$+ (|f_u^{(2,\varphi,\Psi,\chi)} - f_u^{(1,\varphi,\Psi,\chi)}| \cdot |D_1\,u^1_{(\varphi,\Psi,\chi)}|)\,(M) +$$

$$+ \sum_{r=1,2} (|f_{u_r}^{(2,\varphi,\Psi,\chi)}| \cdot |D_{r1} u^2_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_{r1} u^1_{(\varphi,\Psi,\chi)}|) (M) +$$

$$+ \sum_{r=1,2} (|f_{u_r}^{(2,\varphi,\Psi,\chi)} - f_{u_r}^{(1,\varphi,\Psi,\chi)}| \cdot |D_{r1} u^1_{(\varphi,\Psi,\chi)}|) (M) +$$

$$+ \sum_{\substack{p,q=1,2\\(p\leq q)}} (|f_{u_{pq}}^{(2,\varphi,\Psi,\chi)}| \cdot |D_{pq_1} u^2_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_{pq_1} u^1_{(\varphi,\Psi,\chi)}|) (M) +$$

$$+ \sum_{\substack{p,q=1,2\\(p\leq q)}} (|f_{u_{pq}}^{(2,\varphi,\Psi,\chi)} - f_{u_{pq}}^{(1,\varphi,\Psi,\chi)}| \cdot |D_{pq_1} u^1_{(\varphi,\Psi,\chi)}|) (M) \leq$$

$$\leq (A^{(x_1)} + \sum_{i=1,2} A_i^{(x_1)} + \sum_{\substack{j,k=1,2\\(j\leq k)}} A_{jk}^{(x_1)}) \cdot \mathcal{M}_0 \cdot K \cdot \frac{\xi+\eta}{1!} +$$

$$+ R \cdot \mathcal{M}_0 \cdot K \cdot \frac{\xi+\eta}{1!} + (A^{(u)} + \sum_{i=1,2} A_i^{(u)} + \sum_{\substack{j,k=1,2\\(j\leq k)}} A_{jk}^{(u)})\, T \cdot \mathcal{M}_0 \cdot K \cdot \frac{\xi+\eta}{1!}$$

$$+ 2R \cdot \mathcal{M}_0 K \frac{\xi+\eta}{1!} + \sum_{r=1,2} (A^{(u_r)} + \sum_{i=1,2} A_i^{(u_r)} + \sum_{\substack{j,k=1,2\\(j\leq k)}} A_{jk}^{(u_r)}) \cdot T \cdot \mathcal{M}_0 \cdot K \cdot \frac{\xi+\eta}{1!} +$$

$$+ 3R\mathcal{M}_0 + \sum_{\substack{p,q=1,2\\(p\leq q)}} (A^{(u_{pq})} + \sum_{i=1,2} A_i^{(u_{pq})} + \sum_{\substack{j,k=1,2\\(j\leq k)}} A_{jk}^{(u_{pq})}) \cdot T \cdot \mathcal{M}_0 \cdot K \cdot \frac{\xi+\eta}{1!} \leq$$

$$\leq 6H\mathcal{M}_0 K \frac{\xi+\eta}{1!} + 3R\mathcal{M}_0 K \frac{\xi+\eta}{1!} + 36HT\mathcal{M}_0 K \frac{\xi+\eta}{1!} + 3R\mathcal{M}_0 =$$

$$= 3\left[R + K(2H + R + 12HT) \cdot \frac{\xi+\eta}{1!}\right] \cdot \mathcal{M}_0 \leq$$

$$\leq 3 \cdot [R + K(2H + R + 12HT) \cdot (\alpha + \beta)]\, \mathcal{M}_0$$

Asimismo:

$$|D_2 \Phi^2_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_2 \Phi^1_{(\varphi,\Psi,\chi)}| (M) \leq$$
$$\leq 3 \cdot [R + K(2H + R + 12HT) \cdot (\alpha + \beta)]\, \mathcal{M}_0$$

y además:

$$|J(\Phi^2_{(\varphi,\Psi,\chi)} - \Phi^1_{(\varphi,\Psi,\chi)})| (M) \leq \mathcal{M}_0 \frac{6H}{1-m} \cdot K \cdot \frac{(\xi+\eta)}{2!}$$

$$|J(D_2 \Phi^2_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_2 \Phi^1_{(\varphi,\Psi,\chi)})| (M) \leq$$
$$\leq \mathcal{M}_0 \cdot \frac{3}{1-m} \cdot [R + K(2H + R + 12HT) \cdot (\alpha + \beta)] \cdot \frac{\xi+\eta}{1!}$$

así como:

$$|D_1 (J (\Phi^2_{(\varphi, \Psi, \chi)} - \Phi^1_{(\varphi, \Psi, \chi)}))| (M) \leq$$

$$\leq \mathcal{M}_0 \cdot 3 \cdot \left[2HK + \frac{L \cdot \exp\{L \cdot \alpha\}}{1 - m} (R + K \cdot (2H + R + 12HT) \cdot (\alpha + \beta)) \right] \cdot \frac{\xi + \eta}{1!}$$

y

$$|D_2 (J (\Phi^2_{(\varphi, \Psi, \chi)} - \Phi^1_{(\varphi, \Psi, \chi)}))| (M) \leq$$

$$\leq \mathcal{M}_0 \cdot 3 \cdot \exp\{L \cdot \alpha\} \cdot \frac{R + K (2H + R + 12HT) \cdot (\alpha + \beta)}{1 - m} \cdot \frac{\xi + \eta}{1!}$$

[puesto que, en primer lugar, (Véase el n.º 5 de esta PARTE PRIMERA), en las expresiones de $(D_1 (J (\Phi^2_{(\varphi, \Psi, \chi)} - \Phi^1_{(\varphi, \Psi, \chi)}))) (M)$ y de $(D_2 (J (\Phi^2_{(\varphi, \Psi, \chi)} - \Phi^1_{(\varphi, \Psi, \chi)}))) (M)$ no figuran los términos afectados del factor $(\Phi^2_{(\varphi, \Psi, \chi)} - \Phi^1_{(\varphi, \Psi, \chi)}) (L_M)$, dado que éste es nulo como consecuencia de haberse adoptado las mismas condiciones iniciales para todas las aproximaciones, (lo que entraña $u^2_{(\varphi, \Psi, \chi)} (L_M) = u^1_{(\varphi, \Psi, \chi)} (L_M)$; $(D_i u^2_{(\varphi, \Psi, \chi)}) (L_M) \underset{(i=1,2)}{=} (D_i u^1_{(\varphi, \Psi, \chi)}) (L_M)$; $(D_{jk} u^2_{(\varphi, \Psi, \chi)}) (L_M) \underset{(j,k=1,2)}{=} (D_{jk} u^1_{(\varphi, \Psi, \chi)}) (L_M)$, y por tanto: $\Phi^2_{(\varphi, \Psi, \chi)} (L_M) = \Phi^1_{(\varphi, \Psi, \chi)} (L_M)$), y para los restantes términos se tienen las acotaciones:

$$|\exp\{- J (D_2 \varrho)\} \cdot J [(D_2 \Phi^2_{(\varphi, \Psi, \chi)} - D_2 \Phi^1_{(\varphi, \Psi, \chi)}) \cdot \exp\{J (D_2 \varrho)\}]| (M) \leq$$

$$\leq \mathcal{M}_0 \frac{3 \cdot \exp\{L\alpha\}}{1 - m} [R + K \cdot (2H + R + 12HT) \cdot (\alpha + \beta)] \cdot \frac{\xi + \eta}{1!};$$

$$\left. |\Phi^2_{(\varphi, \Psi, \chi)} - \Phi^1_{(\varphi, \Psi, \chi)}| (M) \leq \mathcal{M}_0 \cdot 6HK \cdot \frac{\xi + \eta}{1!} \right]$$

resultando, consecuentemente, las siguientes acotaciones, válidas para todo $(M, \varphi, \Psi, \chi) \in D \times B_{\sigma_r} (\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$:

$$|u^3_{(\varphi, \Psi, \chi)} - u^2_{(\varphi, \Psi, \chi)}| (M) = \left| \iint_{(M P_M Q_M)} (J (\Phi^2_{(\varphi, \Psi, \chi)} - \Phi^1_{(\varphi, \Psi, \chi)})) (\xi_1, \xi_2) \, d\xi_1 \, d\xi_2 \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{x_1 (r Q_M)}^{x_1 M} d\xi_1 \int_{x_2 (r U)}^{x_2 M} (J (\Phi^2_{(\varphi, \Psi, \chi)} - \Phi^1_{(\varphi, \Psi, \chi)})) (\xi_1, \xi_2) \, d\xi_2 \right| \leq$$

$$\leq \int_{\xi_{Q_M}}^{\xi} d\xi' \int_{\eta_U}^{\eta} \mathcal{M}_0 \frac{6H}{1 - m} \cdot K \frac{(\xi' + \eta')^2}{2!} \, d\eta' \leq$$

$$\leq \mathcal{M}_0 \frac{6H}{1 - m} \cdot \frac{(\xi + \eta)^2}{3 \cdot 4} \cdot K \frac{(\xi + \eta)^2}{2!} \leq \mathcal{M}_0 \frac{6H (\alpha + \beta)^2}{1 - m} K \cdot \frac{(\xi + \eta)^2}{2!}$$

$$|D_1 u^3_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_1 u^2_{(\varphi,\Psi,\chi)}|(M) =$$

$$= \left| \int_{(MP_M)} (J(\Phi^2_{(\varphi,\Psi,\chi)} - \Phi^1_{(\varphi,\Psi,\chi)}))(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2 \right| \leq \mathcal{M}_0 \cdot \frac{6H(\alpha+\beta)}{1-m} K \frac{(\xi+\eta)^2}{2!}$$

$$|D_2 u^3_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_2 u^2_{(\varphi,\Psi,\chi)}|(M) =$$

$$= \left| \int_{(MQ_M)} (J(\Phi^2_{(\varphi,\Psi,\chi)} - \Phi^1_{(\varphi,\Psi,\chi)}))(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 \right| \leq \mathcal{M}_0 \cdot \frac{6H(\alpha+\beta)}{1-m} K \frac{(\xi+\eta)^2}{2!}$$

Para las derivadas segundas se obtienen las desigualdades:

$$|D_{11} u^3_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_{11} u^2_{(\varphi,\Psi,\chi)}|(M) \leq \mathcal{M}_0 \cdot 6H \left[L \cdot \frac{\alpha+\beta+1}{1-m} + 1 \right] K \frac{(\xi+\eta)^2}{2!}$$

$$\Bigg[\text{ya que: } |\varrho \cdot J(\Phi^2_{(\varphi,\Psi,\chi)} - \Phi^1_{(\varphi,\Psi,\chi)})|(M) \leq \mathcal{M}_0 \cdot \frac{6LH}{1-m} K \frac{(\xi+\eta)^2}{2!};$$

$$\left| \int_{(MP_M)} ((D_2\varrho) \cdot J(\Phi^2_{(\varphi,\Psi,\chi)} - \Phi^1_{(\varphi,\Psi,\chi)}))(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2 \right| \leq \mathcal{M}_0 \frac{6LH}{1-m} K \int_{\eta_{P_M}}^{\eta} \frac{(\xi'+\eta')^2}{2!} d\eta' \leq$$

$$\leq \mathcal{M}_0 \frac{6LH}{1-m} K \frac{(\xi+\eta)^3}{3!} \leq \mathcal{M}_0 \frac{6LH}{1-m} (\alpha+\beta) K \frac{(\xi+\eta)^2}{2!};$$

$$\left| \int_{(MP_M)} (\Phi^2_{(\varphi,\Psi,\chi)} - \Phi^1_{(\varphi,\Psi,\chi)})(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2 \right| \leq$$

$$\leq \mathcal{M}_0 \cdot 6HK \int_{\eta_{P_M}}^{\eta} \frac{\xi'+\eta'}{1!} d\eta' \leq \mathcal{M}_0 \cdot 6HK \frac{(\xi+\eta)^2}{2!}\Bigg]$$

y análogamente:

$$|D_{12} u^3_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_{12} u^2_{(\varphi,\Psi,\chi)}|(M) = |J(\Phi^2_{(\varphi,\Psi,\chi)} - \Phi^1_{(\varphi,\Psi,\chi)})|(M) \leq$$

$$\leq \mathcal{M}_0 \frac{6H}{1-m} K \frac{(\xi+\eta)^2}{2!}$$

$$|D_{22} u^3_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_{22} u^2_{(\varphi,\Psi,\chi)}|(M) \leq \mathcal{M}_0 \cdot 6LH \left[\frac{\alpha+\beta+1}{1-m} + 1 \right] K \cdot \frac{(\xi+\eta)^2}{2!}$$

Para el cálculo de las mayorantes de las derivadas terceras, procederemos previamente a mayorar en módulo separadamente, cada uno de los términos que las componen:

Así para $D_{111} u^3_{(\varphi, \Psi, \chi)} - D_{111} u^2_{(\varphi, \Psi, \chi)}$, se obtiene:

$$|(D_1 \varrho) \cdot J(\Phi^2_{(\varphi, \Psi, \chi)} - \Phi^1_{(\varphi, \Psi, \chi)})|(M) \leq$$

$$\leq \mathcal{M}_0 \cdot \frac{6LH}{1-m} \cdot K \frac{(\xi+\eta)^2}{2!} \leq \mathcal{M}_0 \frac{6LH}{1-m} (\alpha+\beta) K \frac{\xi+\eta}{1!}$$

$$|\varrho \cdot (D_1 (J(\Phi^2_{(\varphi, \Psi, \chi)} - \Phi^1_{(\varphi, \Psi, \chi)})))|(M) \leq$$

$$\leq \mathcal{M}_0 \cdot 3L\left[2HK + \frac{L \cdot \exp\{L \cdot \alpha\}}{1-m} (R + K(2H + R + 12HT) \cdot (\alpha+\beta))\right] \cdot \frac{\xi+\eta}{1!}$$

$$\left| \int_{(MP_M)} (D_1((D_2 \varrho) \cdot J(\Phi^2_{(\varphi, \Psi, \chi)} - \Phi^1_{(\varphi, \Psi, \chi)})))(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2 \right| \leq$$

$$\leq \mathcal{M}_0 \cdot 3L(\alpha+\beta)\left[2\left(1 + \frac{\alpha+\beta}{1-m}\right) HK + \right.$$

$$\left. + \frac{L \cdot \exp \cdot \{L\alpha\}}{1-m} (R + K(2H + R + 12HT)(\alpha+\beta))\right] \frac{\xi+\eta}{1!}$$

$$\left| \int_{(MP_M)} (D_1(\Phi^2 - \Phi^1))(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2 \right| \leq \mathcal{M}_0 \cdot 3 \cdot [R + K(2H + R + 12HT)(\alpha+\beta)] \frac{\xi+\eta}{1!}$$

Asimismo:

$$|D_{112} u^3_{(\varphi, \Psi, \chi)} - D_{112} u^2_{(\varphi, \Psi, \chi)}|(M) = |D_1(J(\Phi^2_{(\varphi, \Psi, \chi)} - \Phi^1_{(\varphi, \Psi, \chi)}))|(M) \leq$$

$$\leq \mathcal{M}_0 3 \cdot \left[2HK + \frac{L \cdot \exp \cdot \{L \cdot \alpha\}}{1-m} (R + K(2H + R + 12HT)(\alpha+\beta))\right] \frac{\xi+\eta}{1!}$$

$$|D_{122} u^3_{(\varphi, \Psi, \chi)} - D_{122} u^2_{(\varphi, \Psi, \chi)}|(M) = |D_2(J(\Phi^2_{(\varphi, \Psi, \chi)} - \Phi^1_{(\varphi, \Psi, \chi)}))|(M) \leq$$

$$\leq \mathcal{M}_0 \cdot 3 \cdot \exp \cdot \{L \cdot \alpha\} \cdot \frac{R + K(2H + R + 12HT) \cdot (\alpha+\beta)}{1-m} \cdot \frac{\xi+\eta}{1!}$$

y finalmente, las mayorantes, para cada $(M, \varphi, \Psi, \chi) \in D \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, de los módulos de los diversos términos componentes de $D_{222} u^3_{(\varphi, \Psi, \chi)} - - D_{222} u^2_{(\varphi, \Psi, \chi)}$, son las siguientes;

$$\left|\frac{D_2 \varrho}{\varrho^2} \cdot J(\Phi^2_{(\varphi, \Psi, \chi)} - \Phi^1_{(\varphi, \Psi, \chi)})\right| (M) \leq$$

$$\leq \mathcal{M}_0 \cdot \frac{6LH}{1-m} K \frac{(\xi+\eta)^2}{2!} \leq \mathcal{M}_0 \frac{6LH}{1-m} (\alpha+\beta) K \frac{\xi+\eta}{1!}$$

$$\left|\frac{D_2 (J(\Phi^2_{(\varphi, \Psi, \chi)} - \Phi^1_{(\varphi, \Psi, \chi)}))}{\varrho}\right| (M) \leq$$

$$\leq \mathcal{M}_0 \cdot 3L \cdot \exp\{L \cdot \alpha\} \frac{R + K(2H + R + 12HT)(\alpha+\beta)}{1-m} \frac{\xi+\eta}{1!}$$

$$\left|\int_{(MQ_M)} \left(D_2 \left(\frac{D_1 \varrho}{\varrho^2} \cdot J(\Phi^2_{(\varphi, \Psi, \chi)} - \Phi^1_{(\varphi, \Psi, \chi)})\right)\right)(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\right| \leq$$

$$\leq \mathcal{M}_0 \cdot 3L(\alpha+\beta)\left[2HK \frac{\alpha+\beta}{1-m} + \right.$$

$$\left. + \exp \cdot \{L \cdot \alpha\} \cdot \frac{R + K(2H + R + 12HT) \cdot (\alpha+\beta)}{1-m}\right] \frac{\xi+\eta}{1!}$$

$$\left|\int_{(MQ_M)} \left(D_2 \left(\frac{\Phi^2_{(\varphi, \Psi, \chi)} - \Phi^1_{(\varphi, \Psi, \chi)}}{\varrho}\right)\right)(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1\right| \leq \mathcal{M}_0 6LHK \frac{(\xi+\eta)^2}{2!} +$$

$$+ \mathcal{M}_0 \cdot 3L[R + K(2H + R + 12HT)(\alpha+\beta)] \frac{\xi+\eta}{1!} \leq$$

$$\leq \mathcal{M}_0 \cdot 3L \cdot [R + K(4H + R + 12HT) \cdot (\alpha+\beta)] \frac{\xi+\eta}{1!}$$

Teniendo en cuenta el significado de K, resulta que para todo $(\varphi, \Psi, \chi) \in B_{\varrho_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, los módulos de los valores de $u^3_{(\varphi, \Psi, \chi)} - u^2_{(\varphi, \Psi, \chi)}$ y de sus derivadas primeras y segundas correspondientes a cada $M \in D$ no superan a $\mathcal{M}_0 \cdot K^2 \cdot \frac{(\xi+\eta)^2}{2!}$, y si $\overline{K}$ denota el máximo del conjunto finito constituido por K y por los factores que multiplican a $\mathcal{M}_0 \cdot \frac{\xi+\eta}{1!}$ en las expresiones de los segundos miembros de las desigualdades obtenidas para los módulos de las derivadas terceras de $u^3_{(\varphi, \Psi, \chi)} - u^2_{(\varphi, \Psi, \chi)}$, una mayorante de dichas derivadas terceras será $\mathcal{M}_0 \cdot \overline{K} \cdot \frac{\xi+\eta}{1!}$, resultando así demostrado el TEOREMA.

8. ACOTACION DE LAS RESTANTES DIFERENCIAS $u^{n+1}_{(\varphi,\Psi,\chi)} - u^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$ Y DE SUS DERIVADAS PARCIALES. — Generalicemos los resultados anteriores demostrando el:

TEOREMA V. — «Cualquiera que sea $(n, \varphi, \Psi, \chi) \in N \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, la diferencia $u^{n+1}_{(\varphi,\Psi,\chi)} - u^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$ y sus derivadas primeras y segundas están mayoradas en módulo, para cada $M \in D$, por $\mathcal{M}_0 \cdot K^n \cdot \dfrac{(\xi + \eta)^n}{n!}$; las derivadas terceras de $u^{n+1}_{(\varphi,\Psi,\chi)} - u^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$ están mayoradas en módulo, para cada $M \in D$, por $\mathcal{M}_0 \cdot \overline{K}^{n-1} \cdot \dfrac{(\xi + \eta)^{n-1}}{(n-1)!}$».

Para establecer dicho TEOREMA procederemos por recurrencia; suponiendo cierto el TEOREMA para $n - 1 \in N$, se verificarán en primer lugar las desigualdades siguientes, válidas para todo $(M, \varphi, \Psi, \chi) \in D \times B_{\sigma_r}(\varphi, \Psi, \chi)$:

$$|\Phi^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)} - \Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}|(M) \leq \mathcal{M}_0 \cdot K^{n-1} \cdot (A + \sum_{i=1,2} A_i + \sum_{\substack{j,k=1,2\\(j\leq k)}} A_{jk}) \cdot \frac{(\xi+\eta)^{n-1}}{(n-1)!} \leq$$

$$\leq \mathcal{M}_0 \cdot 6\,H\,K^{n-1} \cdot \frac{(\xi+\eta)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$|D_1\,\Phi^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_1\,\Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}|(M) \leq |f^{(n,\varphi,\Psi,\chi)}_{x_1} - f^{(n-1,\varphi,\Psi,\chi)}_{x_1}|(M) +$$
$$+ (|f^{(n,\varphi,\Psi,\chi)}_{u}| \cdot |D_1\,u^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_1\,u^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}|)(M) +$$
$$+ (|f^{(n,\varphi,\Psi,\chi)}_{u} - f^{(n-1,\varphi,\Psi,\chi)}_{u}| \cdot |D_1\,u^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}|)(M) +$$
$$+ \sum_{r=1,2} (|f^{(n,\varphi,\Psi,\chi)}_{u_r}| \cdot |D_{r1}\,u^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_{r1}\,u^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}|)(M) +$$
$$+ \sum_{r=1,2} (|f^{(n,\varphi,\Psi,\chi)}_{u_r} - f^{(n-1,\varphi,\Psi,\chi)}_{u_r}| \cdot |D_{r1}\,u^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}|)(M) +$$
$$+ \sum_{\substack{p,q=1,2\\(p\leq q)}} (|f^{(n,\varphi,\Psi,\chi)}_{u_{pq}}| \cdot |D_{pq1}\,u^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_{pq1}\,u^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}|)(M) +$$
$$+ \sum_{\substack{p,q=1,2\\(p\leq q)}} (|f^{(n,\varphi,\Psi,\chi)}_{u_{pq}} - f^{(n-1,\varphi,\Psi,\chi)}_{u_{pq}}| \cdot |D_{pq1}\,u^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}|)(M) \leq$$
$$\leq (A^{(x_1)} + \sum_{i=1,2} A^{(x_1)}_i + \sum_{\substack{j,k=1,2\\(j\leq k)}} A^{(x_1)}_{jk}) \cdot \mathcal{M}_0 \cdot K^{n-1} \cdot \frac{(\xi+\eta)^{n-1}}{(n-1)!} +$$
$$+ \mathcal{M}_0 \cdot R \cdot K^{n-1} \cdot \frac{(\xi+\eta)^{n-1}}{(n-1)!} +$$
$$+ (A^{(u)} + \sum_{i=1,2} A^{(u)}_i + \sum_{\substack{j,k=1,2\\(j\leq k)}} A^{(u)}_{jk}) \cdot \mathcal{M}_0 \cdot T \cdot K^{n-1} \cdot \frac{(\xi+\eta)^{n-1}}{(n-1)!} +$$

$$+ \mathcal{M}_0 \cdot 2\, R\, K^{n-1} \cdot \frac{(\xi + \eta)^{n-1}}{(n-1)!} +$$

$$+ \sum_{r=1,2} (A^{(u_r)} + \sum_{i=1,2} A_i^{(u_r)} + \sum_{\substack{j,k=1,2 \\ (j \leq k)}} A_{jk}^{(u_r)}) \cdot \mathcal{M}_0\, T\, K^{n-1} \frac{(\xi + \eta)^{n-1}}{(n-1)!} +$$

$$+ \mathcal{M}_0 \cdot 3\, R\, \bar{K}^{n-2} \cdot \frac{(\xi + \eta)^{n-2}}{(n-2)!} +$$

$$+ \sum_{\substack{p,q=1,2 \\ (p \leq q)}} (A^{(u_{pq})} + \sum_{i=1,2} A_i^{(u_{pq})} + \sum_{\substack{j,k=1,2 \\ (j \leq k)}} A_{jk}^{(u_{pq})}) \cdot \mathcal{M}_0 \cdot T \cdot K^{n-1} \cdot \frac{(\xi + \eta)^{n-1}}{(n-1)!} \leq$$

$$\leq \mathcal{M}_0 \cdot 6\, H\, K^{n-1} \frac{(\xi + \eta)^{n-1}}{(n-1)!} + \mathcal{M}_0 \cdot 3\, R\, K^{n-1} \frac{(\xi + \eta)^{n-1}}{(n-1)!} +$$

$$+ \mathcal{M}_0 \cdot 36\, H\, T\, K^{n-1} \frac{(\xi + \eta)^{n-1}}{(n-1)!} + \mathcal{M}_0 \cdot 3R \cdot \bar{K}^{n-2} \frac{(\xi + \eta)^{n-2}}{(n-2)!} \leq$$

$$\leq \mathcal{M}_0 \cdot 3 \cdot [R + K \cdot (2H + R + 12 \cdot H\, T) \cdot (\alpha + \beta)] \cdot \bar{K}^{n-2} \cdot \frac{(\xi + \eta)^{n-2}}{(n-2)!}$$

De la misma manera, se obtiene:

$$| D_2 \Phi^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_2 \Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)} |\, (M) \leq \mathcal{M}_0 \cdot 3 \cdot [R + K \cdot (2H + R + 12 \cdot HT) \cdot$$

$$\cdot (\alpha + \beta)] \cdot \bar{K}^{n-2} \cdot \frac{(\xi + \eta)^{n-2}}{(n-2)!}$$

y además:

$$| J\, (\Phi^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)} - \Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}) |\, (M) \leq \mathcal{M}_0 \cdot \frac{6\, H}{1-m} K^{n-1} \cdot \frac{(\xi + \eta)^{n}}{n!}$$

$$| J\, (D_2\, \Phi^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_2\, \Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}) |\, (M) \leq \mathcal{M}_0 \cdot \frac{3}{1-m} [R + K\, (2\, H +$$

$$+ R + 12 \cdot HT) \cdot (\alpha + \beta)]\, \bar{K}^{n-2} \cdot \frac{(\xi + \eta)^{n-1}}{(n-1)!}$$

así como:

$$| D_1\, (J\, (\Phi^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)} - \Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)})) |(M) \leq \mathcal{M}_0 \cdot 3 \cdot [2\, HK + \frac{L \cdot \exp\{L \cdot \alpha\}}{1-m} \cdot$$

$$\cdot (R + K \cdot (2\, H + R + 12\, H\, T)\, (\alpha + \beta))]\, \bar{K}^{n-2} \cdot \frac{(\xi + \eta)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$|\, D_2 (J (\Phi^n_{(\varphi,\Psi,\chi)} - \Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}))\, | (M) \leq$$

$$\leq \mathcal{M}_0 \cdot 3 \exp\{L \cdot \alpha\} \cdot \frac{R + K (2H + R + 12 H T) \cdot (\alpha + \beta)}{1 - m} \cdot \overline{K}^{n-2} \cdot \frac{(\xi + \eta)^{n-1}}{(n-1)!}$$

[ya que, en primer lugar, (Véase el n.º 5 de esta PARTE PRIMERA), en las expresiones de $(D_1 (J (\Phi^n_{(\varphi,\Psi,\chi)} - \Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}))) (M)$ y de $(D_2 (J (\Phi^n_{(\varphi,\Psi,\chi)} - \Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}))) (M)$, no figuran los términos afectados del factor $(\Phi^n_{(\varphi,\Psi,\chi)} - \Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}) (L_M)$, dado que éste es nulo como consecuencia de haberse adoptado las mismas condiciones iniciales para todas las aproximaciones (lo que entraña $u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)} (L_M) = u^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)} (L_M)$; $(D_i\, u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)}) (L_M) \underset{(i=1,2)}{=} (D_i\, u^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}) (L_M)$; $(D_{jk}\, u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)}) (L_M) \underset{(j,k=1,2)}{=} (D_{jk}\, u^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}) (L_M)$), y para los restantes términos se tienen las acotaciones:

$$|\exp\{- J (D_2 \varrho)\} \cdot J [(D_2 \Phi^n_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_2 \Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}) \cdot \exp\{J (D_2 \varrho)\}] | (M) \leq$$

$$\leq \mathcal{M}_0 \cdot \frac{3 \cdot \exp\{L \cdot \alpha\}}{1 - m} \cdot [R + K \cdot (2H + R + 12 H T) \cdot$$

$$(\alpha + \beta)] \cdot \overline{K}^{n-2} \cdot \frac{(\xi + \eta)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$|\, \Phi^n_{(\varphi,\Psi,\chi)} - \Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)} | (M) \leq \mathcal{M}_0 \cdot 6 \cdot H \cdot \overline{K}^{n-2} \cdot \frac{(\xi + \eta)^{n-1}}{(n-1)!} \Big]$$

resultando de todo ello las siguientes acotaciones, válidas para todo

$$|(M, \varphi, \Psi, \chi) \in D \times B_{\sigma_r} (\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}):$$

$$|\, u^{n+1}_{(\varphi,\Psi,\chi)} - u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)} | (M) = \left| \iint_{M P_M Q_M} (J (\Phi^n_{(\varphi,\Psi,\chi)} - \Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)})) (\xi_1, \xi_2)\, d\, \xi_1\, d\, \xi_2 \right| =$$

$$= \left| \int_{x_1(r Q_M)}^{x_1 M} d\, \xi_1 \int_{x_2(r^U)}^{x_2 M} (J (\Phi^n_{(\varphi,\Psi,\chi)} - \Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)})) (\xi_1, \xi_2)\, d\, \xi_2 \right| \leq$$

$$\leq \int_{\xi_{Q_M}}^{\xi} d\xi' \int_{\eta_U}^{\eta} \frac{6 H \mathcal{M}_0}{1 - m} K^{n-1} \cdot \frac{(\xi' + \eta')^n}{n!} d\eta' \leq \mathcal{M}_0 \cdot \frac{6 H (\alpha + \beta)^2}{1 - m} K^{n-1} \frac{(\xi + \eta)^n}{n!}$$

$$|\, D_1\, u^{n+1}_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_1\, u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)} | (M) = \left| \int_{(M P_M)} (J (\Phi^n_{(\varphi,\Psi,\chi)} - \Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)})) (\xi_1, \xi_2)\, d\, \xi_2 \right| \leq$$

$$\leq \mathcal{M}_0 \cdot \frac{6 H (\alpha + \beta)}{1 - m} K^{n-1} \cdot \frac{(\xi + \eta)^n}{n!}$$

$$| D_2 u^{n+1}_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_2 u^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)} | (M) = \left| \int\limits_{(MQ_M)} (J (\Phi^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)} - \Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)})) (\xi_1, \xi_2) \, d\,\xi_1 \right| \leq$$

$$\leq \mathcal{M}_0 \cdot \frac{6\,H\,(\alpha+\beta)}{1-m} K^{n-1} \cdot \frac{(\xi+\eta)^n}{n!}$$

$$| D_{11} u^{n+1}_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_{11} u^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)} | (M) \leq \mathcal{M}_0 \cdot 6H \left[L.\frac{\alpha+\beta+1}{1-m} + 1 \right] K^{n-1} \cdot \frac{(\xi+\eta)^n}{n!}$$

$$\Big[\text{puesto que: } | \varrho \cdot J (\Phi^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)} - \Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}) | (M) \leq \mathcal{M}_0 \cdot \frac{6\,L\,H}{1-m} K^{n-1} \cdot \frac{(\xi+\eta)^n}{n!} \,;$$

$$\left| \int\limits_{(MP_M)} ((D_2\,\varrho) \cdot J (\Phi^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)} - \Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)})) (\xi_1, \xi_2) \, d\,\xi_2 \right| \leq$$

$$\leq \mathcal{M}_0 \cdot \frac{6LH \cdot (\alpha+\beta)}{1-m} K^{n-1} \cdot \frac{(\xi+\eta)^n}{n!} \,;$$

$$\left| \int\limits_{(MP_M)} (\Phi^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)} - \Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}) (\xi_1, \xi_2) d\xi_2 \right| \leq \mathcal{M}_0\, 6\, H\, K^{n-1} \cdot \frac{(\xi+\eta)^n}{n\,!} \Big]$$

y análogamente:

$$| D_{12} u^{n+1}_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_{12} u^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)} | (M) = | J (\Phi^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)} - \Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}) | (M) \leq$$

$$\leq \mathcal{M}_0 \cdot \frac{6\,H}{1-m} \cdot K^{n-1} \cdot \frac{(\xi+\eta)^n}{n!}$$

$$| D_{22} u^{n+1}_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_{22} u^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)} | (M) \leq$$

$$\mathcal{M}_0 \cdot 6\,L\,H \left[\frac{\alpha+\beta+1}{1-m} + 1 \right] K^{n-1} \frac{(\xi+\eta)^n}{n!}$$

Para el cálculo de las mayorantes de los módulos de las derivadas terceras, igual que en el caso anterior, mayoraremos en módulo separadamente, los diversos términos componentes de las mismas:

De este modo para $D_{111} u^{n+1}_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_{111} u^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)}$ se obtiene:

$$| (D_1\,\varrho) \cdot J (\Phi^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)} - \Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}) | (M) \leq \mathcal{M}_0 \cdot \frac{6\,L\,H}{1-m} K^{n-1} \cdot \frac{(\xi+\eta)^n}{n!} \leq$$

$$\leq \mathcal{M}_0 \frac{6\,L \cdot H}{1-m} (\alpha+\beta) \cdot K \cdot \bar{K}^{n-2} \cdot \frac{(\xi+\eta)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$| \varrho \cdot (D_1 (J (\Phi^n_{(\varphi,\Psi,\chi)} - \Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}))) | (M) \leq \mathcal{M}_0 \cdot 3 L \Big[2 H K +$$

$$\frac{L \cdot \exp\{L \cdot \alpha\}}{1 - m} (R + K (2 H + R + 12 H T) (\alpha + \beta)) \Big] \bar{K}^{n-2} \cdot \frac{(\xi + \eta)^{n-1}}{(n - 1)!}$$

$$\left| \int_{(MP_M)} D_1 ((D_2 \varrho) \cdot J (\Phi^n_{(\varphi,\Psi,\chi)} - \Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)})) (\xi_1, \xi_2) \, d \xi_2 \right| \leq$$

$$\leq \mathcal{M}_0 3 L \cdot (\alpha + \beta) \left[2 \left(1 + \frac{\alpha + \beta}{1 - m} \right) H K + \right.$$

$$\left. + \frac{L \cdot \exp\{L \cdot \alpha\}}{1 - m} (R + K(2H + R + 12HT)(\alpha + \beta)) \right] \cdot \bar{K}^{n-2} \cdot \frac{(\xi + \eta)^{n-1}}{(n - 1)!}$$

$$\left| \int_{(MP_M)} (D_1 (\Phi^n_{(\varphi,\Psi,\chi)} - \Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)})) (\xi_1, \xi_2) \, d\xi_2 \right| \leq$$

$$\leq \mathcal{M}_0 \cdot 3[R + K \cdot (2H + R + 12HT) \cdot (\alpha + \beta)] \cdot \bar{K}^{n-2} \cdot \frac{(\xi + \eta)^{n-1}}{(n - 1)!}$$

Asimismo:

$$| D_{112} \, u^{n+1}_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_{112} \, u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)} | (M) = | D_1 (J (\Phi^n_{(\varphi,\Psi,\chi)} - \Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)})) | (M) \leq$$

$$\leq \mathcal{M}_0 \, 3 \Big[2 HK +$$

$$+ \frac{L \cdot \exp\{L \cdot \alpha\}}{1 - m} (R + K (2H + R + 12 HT) (\alpha + \beta)) \Big] \bar{K}^{n-2} \cdot \frac{(\xi + \eta)^{n-1}}{(n - 1)!}$$

$$| D_{122} \, u^{n+1}_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_{122} \, u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)} | (M) = | D_2 (J (\Phi^n_{(\varphi,\Psi,\chi)} - \Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)})) | (M) \leq$$

$$\leq \mathcal{M}_0 \cdot 3 \exp \{L\alpha\} \cdot \frac{R + K \cdot (2H + R + 12HT) \cdot (\alpha + \beta)}{1 - m \cdot} \bar{K}^{n-2} \cdot \frac{(\xi + \eta)^{n-1}}{(n - 1)!}$$

y finalmente, las mayorantes, para cada $(M, \varphi, \Psi, \chi) \in D \times B_{\sigma_r} (\varphi, \Psi, \chi)$, de los módulos de los términos que componen $D_{222} \, u^{n+1}_{(\varphi,\Psi,\chi)} - - D_{222} \, u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)}$, son las siguientes:

$$\left| \frac{D_2 \varrho}{\varrho^2} \cdot J (\Phi^n_{(\varphi,\Psi,\chi)} - \Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}) \right| (M) \leq \mathcal{M}_0 \cdot \frac{6 L H}{1 - m} \cdot K^{n-1} \cdot \frac{(\xi + \eta)^n}{n!} \leq$$

$$\leq \mathcal{M}_0 \frac{6 \cdot L \cdot H}{1 - m} (\alpha + \beta) \cdot K \cdot \bar{K}^{n-2} \cdot \frac{(\xi + \eta)^{n-1}}{(n - 1)!}$$

$$\left|\frac{D_2\,(J\,(\Phi^n_{(\varphi,\Psi,X)} - \Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,X)}))}{\varrho}\right|(M) \leq$$

$$\leq \mathcal{M}_0 \cdot 3L \cdot \exp\{L \cdot \alpha\} \cdot \frac{R+K(2H+R+12HT)\cdot(\alpha+\beta)}{1-m}\,\overline{K}^{n-2} \cdot \frac{(\xi+\eta)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\left|\int_{(MQ_M)}\left(D_2\left(\frac{D_1\,\varrho}{\varrho}\cdot J\,(\Phi^n_{(\varphi,\Psi,X)} - \Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,X)})\right)\right)(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1\right| \leq$$

$$\leq \mathcal{M}_0\, 3L\,(\alpha+\beta)\left[2HK\frac{\alpha+\beta}{1-m} + \right.$$

$$\left. + \exp\{L\cdot\alpha\} \cdot \frac{R+K\cdot(2H+R+12\,HT)\cdot(\alpha+\beta)}{1-m}\right]\overline{K}^{n-2} \cdot \frac{(\xi+\eta)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\left|\int_{(MQ_M)}\left(D_2\left(\frac{\Phi^n_{(\varphi,\Psi,X)} - \Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,X)}}{\varrho}\right)\right)(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1\right| \leq$$

$$\leq \mathcal{M}_0 \cdot 3\,L \cdot [R + K\,(4H + R + 12\,HT)\cdot(\alpha+\beta)] \cdot \overline{K}^{n-2} \cdot \frac{(\xi+\eta)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Teniendo en cuenta la definición de K y de $\overline{K}$, resulta que para todo $(\varphi, \Psi, X) \in B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{X})$, los módulos de los valores de $u^{n+1}_{(\varphi,\Psi,X)} - u^n_{(\varphi,\Psi,X)}$ y de sus derivadas primeras y segundas correspondientes a cada $M \in D$, no superan a $\mathcal{M}_0 \cdot K^n \cdot \frac{(\xi+\eta)^n}{n!}$, mientras que los módulos de los valores de las derivadas terceras de $u^{n+1}_{(\varphi,\Psi,X)} - u^n_{(\varphi,\Psi,X)}$ correspondientes a cada $M \in D$ no superan a $\mathcal{M}_0 \cdot \overline{K}^{n-1} \cdot \frac{(\xi+\eta)^{n-1}}{(n-1)!}$.

Como para $n = 2$, y en virtud del TEOREMA IV, es cierta la hipótesis de la recurrencia, el resultado obtenido es completamente general lo que concluye la demostración del TEOREMA V.

9. CONSTRUCCION PARA TODO $(\varphi, \Psi, X) \in B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{X})$ DE LA SOLUCION AL PROBLEMA DE CAUCHY CONSIDERADO. — Los resultados establecidos en los n.os 5, 6, 7, 8, permiten afirmar la validez de las relaciones, [en las que $\overset{o}{u}_{(\varphi,\Psi,X)}$ denota $\overset{o}{w}_{(\varphi,\Psi,X)/D}$]:

«$(\forall(M, \varphi, \Psi, X))\ ((M, \varphi, \Psi, X) \in D \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{X}) \Rightarrow |\overset{o}{u}_{(\varphi,\Psi,X)}(M)| < \mathcal{M}_0$ y

y $|(D_i\,\overset{o}{u}_{(\varphi,\Psi,X)})(M)| \leq \mathcal{M}_0$ y $|(D_{jk}\,\overset{o}{u}_{(\varphi,\Psi,X)})(M)| \leq \mathcal{M}_0$ y
$\quad {}_{(i=1,2)} \qquad\qquad\qquad {}_{(j,k=1,2)}$

$$\text{y } |(\underset{(p,q,r=1,2)}{D_{pqr}} u^{o}_{(\varphi,\Psi,\chi)})(M)| \leq \mathcal{M}_0 \text{ y } |(\underset{(p,q,r=1,2)}{D_{pqr}} u^{1}_{(\varphi,\Psi,\chi)})(M) - (D_{pqr} u^{o}_{(\varphi,\Psi,\chi)})(M)| \leq \mathcal{M}_0)»$$

y

$$«(\forall\ (n, M, \varphi, \Psi, \chi))\ ((n, M, \varphi, \Psi, \chi) \in [N \cup \{0\}] \times D \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |u^{n+1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}(M) - u^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)}(M)| \leq \mathcal{M}_0 \cdot K^n \cdot \frac{(\alpha+\beta)^n}{n!} \text{ y}$$

$$\text{y } \left| (D_i u^{n+1}_{(\varphi,\Psi,\chi)})(M) \underset{(i=1,2)}{-} (D_i u^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)})(M) \right| \leq \mathcal{M}_0 \cdot K^n \frac{(\alpha+\beta)^n}{n!} \text{ y}$$

$$\text{y } \left| (D_{jk} u^{n+1}_{(\varphi,\Psi,\chi)})(M) \underset{(j,k=1,2)}{-} (D_{jk} u^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)})(M) \right| \leq \mathcal{M}_0 K^n \frac{(\alpha+\beta)^n}{n!} \Big)»$$

y

$$«(\forall\ (n, M, \varphi, \Psi, \chi) \Big((n, M, \varphi, \Psi, \chi) \in N \times D \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |(D_{pqr} u^{n+1}_{(\varphi,\Psi,\chi)})(M) \underset{(p,q,r=1,2)}{-} (D_{pqr} u^{n}_{(\varphi,\Psi,\chi)})(M)| \leq \mathcal{M}_0 \cdot \bar{K}^{n-1} \frac{(\alpha+\beta)^{n-1}}{(n-1)!} \Big)»$$

por lo que las series funcionales, [en las que para todo $n \in N \cup \{0\}$, denotan $u^n\colon D \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \to \mathbf{R}$; $\underset{(i=1,2)}{D_i} u^n\colon D \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \to \mathbf{R}$; $\underset{(j,k=1,2)}{D_{jk}} u^n\colon D \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \to \mathbf{R}$; $\underset{(p,q,r=1,2)}{D_{pqr}} u^n\colon D \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \to \mathbf{R}$, las aplicaciones definidas, respectivamente, por: $(M, \varphi, \Psi, \chi) \in D \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \to u^n(M, \varphi, \Psi, \chi) = u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)}(M) \in \mathbf{R}$; $(M, \varphi, \Psi, \chi) \in D \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \to (D_i u^n)(M, \varphi, \Psi, \chi) \underset{(i=1,2)}{=} (D_i u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)})(M) \in \mathbf{R}$; $(M, \varphi, \Psi, \chi) \in D \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \to (D_{jk} u^n)(M, \varphi, \Psi, \chi) \underset{(j,k=1,2)}{=} (D_{jk} u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)})(M) \in \mathbf{R}$; $(M, \varphi, \Psi, \chi) \in D \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \to (D_{pqr} u^n)(M, \varphi, \Psi, \chi) \underset{(p,q,r=1,2)}{=} (D_{pqr} u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)})(M) \in \mathbf{R}$]:

$«u^0 + \sum_{n=0}^{\infty}(u^{n+1} - u^n)$; $D_i u^0 + \sum_{n=0}^{\infty}(D_i u^{n+1} \underset{(i=1,2)}{-} D_i u^n)$; $D_{jk} u^0 + \sum_{n=0}^{\infty}(D_{jk} u^{n+1} \underset{(j,k=1,2)}{-} D_{jk} u^n)$; $D_{pqr} u^0 + \sum_{n=0}^{\infty}(D_{pqr} u^{n+1} \underset{(p,q,r=1,2)}{-} D_{pqr} u^n)»$ (11), son tales que las seis primeras admiten sobre $D \times B_{\sigma_r}(\varphi, \Psi, \chi)$ como mayorante, a la serie numérica de términos positivos y convergente:

$$« \mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K^n \cdot (\alpha+\beta)^n}{n!} = \mathcal{M}_0 (1 + e^{K\cdot(\alpha+\beta)})»$$

y las cuatro últimas a la:

$$«\mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_0 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{K}^{n-1} \cdot (\alpha + \beta)^{n-1}}{(n-1)!} = \mathcal{M}_0 \, (2 + e^{\bar{K}(\alpha+\beta)})»$$

y consecuentemente, dichas series (11) serán absoluta y uniformemente convergentes sobre $D \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$.

La primera de estas series (11) determina una aplicación $u : D \times \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \to \mathbf{R}$, límite uniforme sobre $D \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$ de la sucesión de aproximaciones $(u^n)_{n \in N}$, tal que para cada $(\varphi, \Psi, \chi) \in \in B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, la aplicación parcial $u_{(\varphi,\Psi,\chi)}$ determinada por u relativamente a los valores φ, Ψ, χ del tercero, cuarto y quinto argumento, es continua y acotada, sobre D, con restricción $u_{(\varphi,\Psi,\chi)} \mid \bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} \mathring{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}$ tres veces continuamente diferenciable sobre $\bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} \mathring{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}$ [consecuencia de la convergencia uniforme sobre $\bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} \mathring{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}$ de las sucesiones de derivadas parciales $(\underset{(i=1,2)}{D_i} u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)} \mid \bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} \mathring{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}})_{n \in N}$; $(\underset{(j,k=1,2)}{D_{jk}} u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)} \mid \bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} \mathring{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}})_{n \in N}$; $(\underset{(p,q,r=1,2)}{D_{pqr}} u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)} \mid \bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} \mathring{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}})_{n \in N}$], y las restantes series de (11) determinan sendas aplicaciones definidas asimismo sobre $D \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, [límites uniformes sobre $D \times B_{\sigma_r}(\varphi, \Psi, \chi)$ de las sucesiones $(D_i u^n)_{n \in N}$, $(D_{jk} u^n)_{n \in N}$, $(D_{pqr} u^n)_{n \in N}$], tales que para cada $(\varphi, \Psi, \chi) \in B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, las aplicaciones parciales correspondientes por aquellas determinadas, relativamente a los valores φ, Ψ, χ del tercero, cuarto y quinto argumento, son continuas y acotadas sobre D, con restricciones a $\bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} \mathring{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}$ coincidentes, respectivamente, con las derivadas primeras, segundas y terceras de $u_{(\varphi,\Psi,\chi)} \mid \bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} \mathring{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}$, y consecuentemente, las aplicaciones parciales: $D_i u^0_{(\varphi,\Psi,\chi)} + \sum_{n=0}^{\infty} (\underset{(i=1,2)}{D_i u^{n+1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}} - D_i u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)})$; $D_{jk} u^0_{(\varphi,\Psi,\chi)} + \sum_{n=0}^{\infty} (D_{jk} \underset{(j,k=1,2)}{u^{n+1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}} - D_{jk} u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)})$; $D_{pqr} u^0_{(\varphi,\Psi,\chi)} + \sum_{n=0}^{\infty} (D_{pqr} \underset{(p,q,r=1,2)}{u^{n+1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}} - D_{pqr} u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)})$, determinadas por las sumas respectivas: $D_i u^0 + \sum_{n=0}^{\infty} (D_i u^{n+1} - D_i u^n)$, $(i = 1,2)$; $D_{jk} u^0 + \sum_{n=0}^{\infty} (D_{jk} u^{n+1} - D_{jk} u^n)$, $(j, k = 1,2)$; $D_{pqr} u^0 + \sum_{n=0}^{\infty} (D_{pqr} u^{n+1} - D_{pqr} u^n)$, $(p, q, r = 1,2)$, de las nueve últimas series de (11), relativamente a los valores φ, Ψ, χ del tercero, cuarto y quinto argumento, prolongan con continuidad a D, de modo unívoco, las correspondientes derivadas primeras, segundas y terceras de $u_{(\varphi,\Psi,\chi)} \mid \bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} \mathring{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}$.

[Denotaremos, para cada $(\varphi, \Psi, \chi) \in B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, las prolongaciones continuas a D de las derivadas primeras, segundas y terceras de $u_{(\varphi,\Psi,\chi)} \mid \bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} \mathring{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}$, por $\underset{(i=1,2)}{D_i}\, u_{(\varphi,\Psi,\chi)}$, $\underset{(j,k=1,2)}{D_{jk}}\, u_{(\varphi,\Psi,\chi)}$ y $\underset{(p,q,r=1,2)}{D_{pqr}}\, u_{(\varphi,\Psi,\chi)}$, respectivamente].

De la igualdad [en donde, para todo $n \in N$, denota $\Phi^{n-1}: D \times \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, la aplicación definida por: $(M, \varphi, \Psi, \chi) \in D \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \to \to \Phi^{n-1}(M, \varphi, \Psi, \chi) = \Phi^{n-1}_{(\varphi,\Psi,\chi)}(M) \in \mathbf{R}$]:

$$«D_{12}\, u^n = D_{12}\, w^0 + J\,(\Phi^{n-1}),\ (n = 1,2...)»$$

y en virtud de la convergencia uniforme sobre $D \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$ de la sucesión $(\Phi^{n-1})_{n \in N}$, consecuencia de la continuidad uniforme sobre el compacto $\mathcal{H}^0$ de la función f, así como de la convergencia uniforme sobre $D \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, acabada de establecer, de las sucesiones $(u^n)_{n \in N}$, $(D_i\, u^n)_{n \in N}$, $(D_{jk}\, u^n)_{n \in N}$, y que por otra parte, la validez de la relación, ya demostrada en el n.º 3 de esta PARTE PRIMERA:

$$«(\forall\,(n, M, \varphi, \Psi, \chi))\,((n, M, \varphi, \Psi, \chi) \in [N \cup \{0\}] \times D \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (M, u^n(M, \varphi, \Psi, \chi), \underset{(i=1,2)}{(D_i\, u^n)}(M, \varphi, \Psi, \chi), \underset{(j,k=1,2;j \leq k)}{(D_{jk}\, u^n)}(M, \varphi, \Psi, \chi)) \in \mathcal{H}^0)»$$

junto con la de la relación:

$$«(\forall\,(M, \varphi, \Psi, \chi))\,((M, \varphi, \Psi, \chi) \in D \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \Rightarrow (M, u^n(M, \varphi, \Psi, \chi),$$

$$\underset{(i=1,2)}{(D_i\, u)}(M, \varphi, \Psi, \chi), \underset{(j,k=1,2;j \leq k)}{(D_{jk}\, u)}(M, \varphi, \Psi, \chi))_{n \in N}$$

converge en $\mathbf{R}^8$ hacia

$$(M, u(M, \varphi, \Psi, \chi), \underset{(i=1,2)}{(D_i\, u)}(M, \varphi, \Psi, \chi), \underset{(j,k=1,2;j \leq k)}{(D_{jk}\, u)}(M, \varphi, \Psi, \chi)) \in \mathcal{H}^0)»$$

entraña a su vez la validez de la relación:

$$«(\forall\,(M, \varphi, \Psi, \chi)\,((M, \varphi, \Psi, \chi) \in D \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (M, u(M, \varphi, \Psi, \chi), \underset{(i=1,2)}{(D_i\, u)}(M, \varphi, \Psi, \chi), \underset{(j,k=1,2;j \leq k)}{(D_{jk}\, u)}(M, \varphi, \Psi, \chi)) \in \mathcal{H}^0)»$$

se deduce por paso al límite esta otra:

$$D_{12}\, u = D_{12}\, w^0 + J\,(\Phi) \quad (11^*)$$

en la que se ha designado por Φ la aplicación:

$$(M, \varphi, \Psi, \chi) \in D \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \to \Phi\,(M, \varphi, \Psi, \chi) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \Phi^n\,(M, \varphi, \Psi, \chi) \in \mathbf{R}$$

resultante del paso al límite.

De (11*) se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l} D_{112}\,u = D_{112}\,w^0 + D_1\,(J\,(\Phi)) \\ D_{122}\,u = D_{122}\,w^0 + D_2\,(J\,(\Phi)) \end{array}\right\}$$

y de esta última relación [habida cuenta que $D_1\,(J\,(F)) + \varrho\cdot D_2\,(J\,(F)) = F$ (II del Apendice que sigue a Parte segunda) y: $D_{112}\,w^0 + \varrho\cdot D_{122}\,w^0 = 0$, (n.º 3 de esta Parte primera)], resulta:

$$«D_{112}\,u + \varrho\cdot D_{122}\,u = \Phi»$$

es decir:

$$«(\forall\,(M, \varphi, \Psi, \chi))\,((M, \varphi, \Psi, \chi) \in D \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (D_{112}\,u_{(\varphi,\Psi,\chi)})\,(M) + \varrho\,(M)\cdot(D_{122}\,u_{(\varphi,\Psi,\chi)})\,(M) =$$
$$= f\,(M, u_{(\varphi,\Psi,\chi)}\,(M), \underset{(i=1,2)}{(D_i\,u_{(\varphi,\Psi,\chi)})}\,(M), \underset{(j,k=1,2;\,j\leq k)}{(D_{jk}\,u_{(\varphi,\Psi,\chi)})}\,(M)))»$$

lo que demuestra que para todo $(\varphi, \Psi, \chi) \in B_{\sigma_r}(\varphi, \Psi, \chi)$, la función $u_{(\varphi,\Psi,\chi)} = \lim\limits_{n\to\infty} u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)}$ verifica sobre D a la ecuación en derivadas parciales propuesta.

Cumple además, dado que, [n.º 3 de esta Parte primera]:

$$«(\forall\,(\varphi, \Psi, \chi))\,((\varphi, \Psi, \chi) \in B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \Rightarrow (\forall\,(n, M))\,((n, M) \in N \times C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)}\,(M) = \varphi\,(M) \text{ y } (D_1\,u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)})\,(M) = \Psi\,(M) \text{ y}$$
$$\text{y } (D_{12}\,u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)})\,(M) = \chi\,(M)))»$$

las condiciones iniciales:

$$«(\forall\,(\varphi, \Psi, \chi))\,((\varphi, \Psi, \chi) \in B_{\sigma_r}\,(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \Rightarrow u_{(\varphi,\Psi,\chi)|C} = \varphi \text{ y } (D_1\,u_{(\varphi,\Psi,\chi)})_{|C} =$$
$$= \Psi \text{ y } (D_{12}\,u_{(\varphi,\Psi,\chi)})_{|C} = \chi)»$$

La función $u_{(\varphi,\Psi,\chi)}$, así construida para cada $(\varphi, \Psi, \chi) \in B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, es pues solución al Problema de Cauchy definido por el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} D_{112}\, u + \varrho\,(x_1, x_2) \cdot (D_{122}\, u) = f\,(x_1, x_2, u, \underset{(i=1,2)}{D_i\, u}, \underset{(j,k=1,2;j\leq k)}{D_{jk}\, u}) \\ \left.\begin{array}{l} u\,(M) = \varphi\,(M) \\ (D_1\, u)\,(M) = \Psi\,(M) \\ (D_{12}\, u)\,(M) = \chi\,(M) \end{array}\right\} M \in C \end{array}\right\}$$

[OBSERVACION. — Se acaba de establecer que la función u:

$$(M, \varphi, \Psi, \chi) \in D \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \to u\,(M, \varphi, \Psi, \chi) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \cdot u^n\,(M, \varphi, \Psi, \chi) \in \mathbf{R};$$

es tal, que para todo $(\varphi, \Psi, \chi) \in B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, la aplicación parcial $u_{(\varphi\,\Psi,\chi)}$ determinada por u relativamente a los valores φ, Ψ, χ del tercero, cuarto y quinto argumento, es continua y acotada sobre D, y su restricción $u_{(\varphi,\Psi,\chi)} \mid \bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} \overset{\circ}{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}$ al abierto $\bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} \overset{\circ}{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}$ es tres veces continuamente diferenciable sobre $\bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} \overset{\circ}{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}$, con derivadas primeras, segundas y terceras prolongables con continuidad de modo unívoco (prolongaciones continuas que coinciden, respectivamente, con los límites uniformes $\lim_{n\to\infty} \underset{(i=1,2)}{D_i}\, u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)}$; $\lim_{n\to\infty} \underset{(j,k=1,2)}{D_{jk}}\, u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)}$; $\lim_{n\to\infty} \underset{(p,q,r=1,2)}{D_{pqr}}\, u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)}$, de las sucesiones $(D_i\, u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)})_{n\in N}$; $(\underset{(j,k=1,2)}{D_{jk}}\, u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)})_{n\in N}$; $(\underset{(p,q,r=1,2)}{D_{pqr}}\, u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)})_{n\in N}$), estando asimismo dichas prolongaciones acotadas sobre D, por lo que, para todo $(\varphi, \Psi, \chi) \in B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$, pertenece $u_{(\varphi,\Psi,\chi)}$ al espacio vectorial $E_D^{(3)}$ constituido por las funciones numéricas definidas, continuas y acotadas sobre D, cuyas restricciones al abierto $\bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} \overset{\circ}{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}$ son tres veces continuamente diferenciables sobre $\bigcup_{C^{(\nu,\varkappa)} \in C^{(\nu,\varkappa)}} \overset{\circ}{D}_{C^{(\nu,\varkappa)}}$, con derivadas primeras, segundas y terceras prolongables con continuidad a D, y cuyas prolongaciones continuas son acotadas asimismo sobre D, pudiendose poner, por tanto:

$$«\| u_{(\varphi,\Psi,\chi)} \|_{(D)} = \sup_{M\in D} | u_{(\varphi,\Psi,\chi)}\,(M)| + \underset{i=1,2}{\text{Máx}} \{\sup_{M\in D} | (D_i\, u_{(\varphi,\Psi,\chi)})\,(M) | \} +$$
$$+ \underset{j,k=1,2}{\text{Máx}} \{\sup_{M\in D} | (D_{jk}\, u_{(\varphi,\Psi,\chi)})\,(M) |\} + \underset{p,q,r=1,2}{\text{Máx}} \{\sup_{M\in D} | (D_{pqr}\, u_{(\varphi,\Psi,\chi)})\,(M) |\}»$$

Ahora bien, como consecuencia de la convergencia uniforme sobre $D \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$ de las sucesiones $(u^n)_{n\in N}$; $\underset{(i=1,2)}{(D_i u^n)_{n\in N}}$; $\underset{(j,k=1,2)}{(D_{jk} u^n)_{n\in N}}$; $(D_{pqr} u^n)_{n\in N}$, es válida la relación:

$$«(\forall \varepsilon)(\varepsilon \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \Rightarrow (\exists \nu)\ (\nu \in N \text{ y } (\forall(n, M, \varphi, \Psi, \chi))\ ((n, M, \varphi, \Psi, \chi) \in$$

$$\in N \times D \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \text{ y } n > \nu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)} - u_{(\varphi,\Psi,\chi)}|(M) < \frac{\varepsilon}{8} \text{ y } \underset{(i=1,2)}{|D_i u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_i u_{(\varphi,\Psi,\chi)}|}(M) < \frac{\varepsilon}{8} \text{ y}$$

$$\text{y } \underset{(j,k=1,2)}{|D_{jk} u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_{jk} u_{(\varphi,\Psi,\chi)}|}(M) < \frac{\varepsilon}{8} \text{ y } \underset{(p,q,r=1,2)}{|D_{pqr} u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_{pqr} u_{(\varphi,\Psi,\chi)}|}(M) < \frac{\varepsilon}{8})))»$$

o lo que es equivalente:

$$«(\forall \varepsilon)\ (\varepsilon \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \Rightarrow (\exists \nu)\ (\nu \in N \text{ y}$$

$$\text{y } (\forall (n, \varphi, \Psi, \chi))\ ((n, \varphi, \Psi, \chi) \in N \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \text{ y}$$

$$\text{y } n > \nu \Rightarrow (\forall M)\ (M \in D \Rightarrow |u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)} - u_{(\varphi,\Psi,\chi)}|(M) < \frac{\varepsilon}{8} \text{ y}$$

$$\text{y } \underset{(i=1,2)}{|D_i u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_i u_{(\varphi,\Psi,\chi)}|}(M) < \frac{\varepsilon}{8} \text{ y } \underset{(j,k=1,2)}{|D_{jk} u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)} -}$$

$$- D_{jk} u_{(\varphi,\Psi,\chi)}|(M) < \frac{\varepsilon}{8} \text{ y } \underset{(p,q,r=1,2)}{|D_{pqr} u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_{pqr} u_{(\varphi,\Psi,\chi)}|}(M) < \frac{\varepsilon}{8}))))»$$

y consecuentemente es válida la relación:

$$«(\forall \varepsilon)\ (\varepsilon \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \Rightarrow (\exists \nu)\ (\nu \in N \text{ y } (\forall (n, \varphi, \Psi, \chi) \in N \times B_{\sigma_r}(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \text{ y}$$

$$\text{y } n > \nu \Rightarrow \sup_{M\in D} |u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)} - u_{(\varphi,\Psi,\chi)}|(M) \leq \frac{\varepsilon}{8} \text{ y } \sup_{M\in D} |D_i u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)} -$$

$$\underset{(i=1,2)}{- D_i u_{(\varphi,\Psi,\chi)}|}(M) \leq \frac{\varepsilon}{8} \text{ y } \sup_{M\in D} \underset{(j,k=1,2)}{|D_{jk} u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_{jk} u_{(\varphi,\Psi,\chi)}|}(M) \leq \frac{\varepsilon}{8} \text{ y}$$

$$\text{y } \sup_{M\in D} \underset{(p,q,r=1,2)}{|D_{pqr} u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_{pqr} u_{(\varphi,\Psi,\chi)}|}(M) \leq \frac{\varepsilon}{8})))»$$

la cual a su vez entraña:

$$«(\forall \varepsilon)\ (\varepsilon \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \Rightarrow (\exists \nu)\ (\nu \in N \text{ y } (\forall (n, \varphi, \Psi, \chi))\ ((n, \varphi, \Psi, \chi) \in N \times$$

$$\times B_{\sigma_r}(\varphi, \Psi, \chi) \text{ y } n > \nu \Rightarrow \|u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)} - u_{(\varphi\,\Psi,\chi)}\|_{(D)} = \sup_{M\in D} |u^n_{(\varphi,\Psi,\chi)} -$$

$$- u_{(\varphi,\Psi,\chi)} \mid (M) + \underset{(i=1,2)}{\text{Máx}} \{\sup_{M \in D} |D_i \overset{n}{u}_{(\varphi,\Psi,\chi)} - \underset{(i=1,2)}{D_i} u_{(\varphi,\Psi,\chi)} \mid (M)\} +$$

$$+ \underset{(j,k=1,2)}{\text{Max}} \{\sup_{M \in D} \mid D_{jk} \overset{n}{u}_{(\varphi,\Psi,\chi)} - D_{jk} u_{(\varphi,\Psi,\chi)} \mid (M)\} + \underset{(p,q,r=1,2)}{\text{Máx}} \{\sup_{M \in D} \mid D_{pqr} \overset{n}{u}_{(\varphi,\Psi,\chi)} -$$

$$- D_{pqr} u_{(\varphi,\Psi,\chi)} \mid (M)\} \leq 4 \cdot \frac{\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon)))»$$

es decir, se verifica que:

$$«(\forall \varepsilon) (\varepsilon \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \Rightarrow (\exists \nu) (\nu \in N \text{ y } (\forall (n, \varphi, \Psi, \chi) \in N \times B_{\sigma_r} (\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi}) \text{ y}$$

$$\text{y } n > \nu \Rightarrow \| \overset{n}{u}_{(\varphi,\Psi,\chi)} - u_{(\varphi,\Psi,\chi)} \|_{(D)} < \varepsilon)))» \qquad (12)$$

Este resultado se tendrá en cuenta más adelante en la PARTE SEGUNDA, al estudiar la dependencia continua de la solución $u_{(\varphi, \Psi, \chi)}$ respecto a las condiciones iniciales $(\varphi, \Psi, \chi) \in B_{\sigma_r} (\widetilde{\varphi}, \widetilde{\Psi}, \widetilde{\chi})$ dadas sobre C].

(Continuará)