

ESTUDIO E INTEGRACIÓN DE UNA FAMILIA DE  
ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES  
DE CUARTO ORDEN

POR

RAFAEL AGUILÓ FUSTER

En una memoria anterior sobre la aplicación de los funcionales abeloides a la resolución de las ecuaciones en derivadas parciales de cuarto orden con coeficientes constantes <sup>(1)</sup>, se hizo la clasificación de las ecuaciones cuyo cono característico posee una generatriz tacnodal. Entre las ecuaciones de tipo totalmente hiperbólico se destacaron dos casos, según que el cono característico correspondiente sea de género 0 (primer caso), o bien sea de género 1 (segundo caso). En la citada memoria se estudia dicho primer caso, mientras que en ésta trataremos del segundo: con más precisión, se tratará de resolver las ecuaciones en derivadas parciales del tipo indicado cuyo cono característico además de ser de género 1, sea simétrico respecto al plano tangente al cono a lo largo de la generatriz tacnodal. El desarrollo de los cálculos es aquí muy penoso pero se puede evitar mediante consideraciones sintéticas sobre los resultados obtenidos en la memoria anteriormente citada. <sup>(2)</sup>

1. *Estudio de la curva asociada.* La ecuación de la curva asociada a una ecuación de derivadas parciales de 4.º orden totalmente hiperbólica de cono característico con generatriz tacnodal es: <sup>(3)</sup>

$$y^2 = P_4(x) + hx^2y \quad (1,1)$$

---

<sup>(1)</sup> «Funcionales abeloides y aplicaciones a ecuaciones en derivadas parciales de cuarto orden». *Collectanea Mathematica*, Vol. VIII (1955-56), págs. 3 a 72. Citada en lo sucesivo por F. A.

<sup>(2)</sup> F. A., Cap. II.

<sup>(3)</sup> F. A., pág. 10.

y si  $h = 0$ , el cono presenta una simetría respecto al plano tangente a lo largo de la generatriz tacnodal, que es el caso que vamos a considerar.

$P_4(x)$  es un polinomio en  $x$  de cuarto grado, con sus cuatro raíces reales y distintas, y coeficiente de  $x^4$  positivo, que escribiremos en la forma

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 + 6 a_2 x^2 + 4 a_3 x + a_4 = \\ &= a_0 (x - a) (x - b) (x - c) (x - d), \quad a < b < c < d \end{aligned} \quad (1,2)$$

Podemos aplicar a (1,1) (para  $h = 0$ ) una transformación afín que conserve el eje  $X$ ; por consiguiente, podemos considerar que las raíces de (1,2) sean dos negativas y dos positivas, y que  $a_4 = 1$  ( $a_0$  y  $a_4$  tienen que ser del mismo signo, pues el producto de las raíces es positivo).

La representación paramétrica de (1,1) ( $h = 0$ ), la encontramos en GOURSAT (1). Sea la función  $pu$  de invariantes

$$g_2 = \frac{a_0 + 3 a_2^2}{a_0^2} \quad g_3 = \frac{a_0 a_2 - a_2 - a_0 a_3^2}{a_0^3} \quad (1,3)$$

y  $v$  el valor tal que

$$pv = -\frac{a_2}{a_0} \quad p'v = \frac{a_3}{a_0} \quad (1,4)$$

que son compatibles. ( $v$  está determinado en el interior de un paralelogramo de periodos). La representación paramétrica es la siguiente:

$$x = \frac{1}{2} \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \quad y = \sqrt{a_0} [pu - p(u + v)] \quad (1,5)$$

donde elegimos la determinación positiva para  $\sqrt{a_0}$ .

2. *Estudio de la ecuación en derivadas parciales.* La ecuación en derivadas parciales correspondiente es:

$$\frac{\partial^4 U}{\partial t^4} + a_0 \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 4 a_1 \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial t} + 6 a_2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial t^2} + 4 a_3 \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial t^3} - \frac{\partial^4 U}{\partial y^2 \partial t^2} = f(t, x, y) \quad (2,1)$$

y la ecuación de la curva impropia del cono característico (en tangenciales) es:

$$Q(\alpha, \beta) = a_0 \alpha^4 + 4 a_1 \alpha^3 + 6 a_2 \alpha^2 + 4 a_3 \alpha + 1 - \beta^2 = 0 \quad (2,2)$$

(1) *Cours d'Analyse Mathématique.* T. II, 6.ª edición, párrafo 332, págs. 218 y siguientes.

y en paramétricas

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \quad \beta = \sqrt{a_0} [pu - p(u+v)] \quad (2,3)$$

su ecuación puntual  $P(X, Y)$  será la que resulte de eliminar  $\alpha, \beta$  en

$$X\alpha(u) + Y\beta(u) + 1 = 0$$

$$X \frac{d\alpha}{du} + Y \frac{d\beta}{du} = 0$$

y su representación paramétrica la que resulte de despejar  $X, Y$  en el precedente sistema, que dará

$$X = f(u) \quad Y = \varphi(u) \quad (2,4)$$

cuyos desarrollos no es necesario escribir.

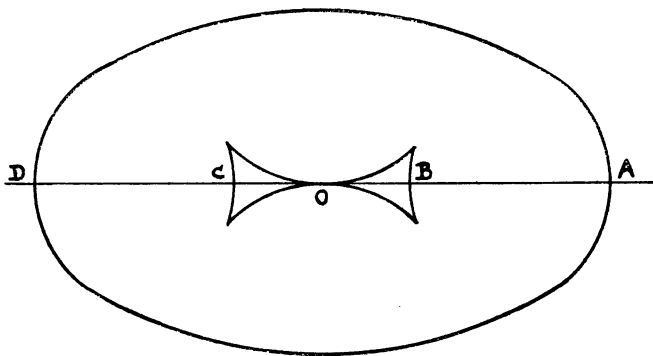


FIG. 1

De la consideración de la figura 3 de F. A. (pág. 14), se deduce la forma de la curva  $P(X, Y) = 0$ , que es la de la figura 1 del presente trabajo.

Planteemos, pues, el problema de CAUCHY dando sobre una superficie

$$\Gamma \equiv t - \psi(x, y) = 0 \quad (2,5)$$

no característica, no tangente a ninguna característica y que limite un área finita con el cono característico, las condiciones iniciales siguientes :

$$\left( \frac{\partial^i u}{\partial t^i} \right)_{t=\psi} = \varphi_i(x, y) \quad (i = 0, 1, 2, 3) \quad (2,6)$$

siendo las  $\varphi_i$  funciones continuas y derivables respecto de ambas variables hasta el orden que sea necesario para las consideraciones que siguen.

Como en F. A. (pág. 21) el problema lo descompondremos en dos: 1.º, que las condiciones iniciales sean idénticamente nulas; 2.º, que el segundo miembro de la ecuación sea idénticamente nulo, y las condiciones iniciales las (2,6). La solución en el caso general será la suma de ambas soluciones.

Introduciendo los operadores  $I, B_x, B_y$  (F. A., pág. 21), se llega a la solución del primer problema, que es

$$U = \frac{1}{Q(B_x, B_y)} I^4 f(t, x, y). \quad (2,7)$$

Llamando

$$f_n(t, x, y) = I^n f(t, x, y), \quad (2,8)$$

la indicatriz proyectiva es <sup>(1)</sup>:

$$p(t, x, y; a, b) = \int_{t_0}^t f_n[s, x + a(s-t), y + b(s-t)] ds \quad (2,9)$$

y la solución en cálculo simbólico es:

$$U = \left\{ \frac{\hat{1}}{Q(\lambda_1, \lambda_2)} \right\} p(\lambda^1, \lambda^2; t, x, y) \quad (2,10)$$

La solución del segundo problema es:

$$U = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{Q(B, B)} I \bar{g}(t, x, y) \quad (2,11)$$

donde  $\bar{g}(t, x, y)$  es la que aparece en la fórmula (6,7) de F. A. (pág. 24).

La indicatriz proyectiva es, pues:

$$p_1(a, b; t, x, y) = \int_{t_0}^t \bar{g}[s, x + a(s-t), y + b(s-t)] ds \quad (2,12)$$

y la solución

$$U = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\Delta}{Q(\lambda_1, \lambda_2)} \right\} p_1(\lambda^1, \lambda^2; t, x, y) \quad (2,13)$$

<sup>(1)</sup> Véase F. A., fórmula (5,12), pág. 22.

En las expresiones (2,10) y (2,13) podemos considerar que  $\frac{1}{Q}$  sea la indicatriz, con lo que serán funcionales abeloides de tipo normal.

3. *Estudio de los funcionales abeloides de tipo normal.* Vamos a completar algunos teoremas que aparecen en el capítulo II de F. A. (Para la comprensión de este párrafo se debe tener presente dicho capítulo). Empecemos por precisar algunos extremos del teorema 6; resulta de la consideración de la superficie reglada obtenida por la eliminación de  $\alpha, \beta$  en el sistema

$$\begin{aligned}\alpha X + \beta Y + 1 &= 0 \\ X Q_{\beta}' - Y Q_{\alpha}' - J &= 0 \\ Q(\alpha, \beta) &= 0\end{aligned}\tag{3,1}$$

que cuando una tangente simple a  $P(X, Y) = 0$  pasa por el origen, el plano que proyecta ortogonalmente esta tangente sobre el plano  $XOY$  forma parte reducible de la misma. En efecto: homogeneizando (3,1), para una tal tangente deberá ser  $\gamma = 0$  (donde  $\alpha, \beta, \gamma$  son las coordenadas homogéneas). De la fórmula de EULER

$$\alpha Q_{\alpha}' + \beta Q_{\beta}' + \gamma Q_{\gamma}' = 0$$

resulta (por ser  $\gamma = 0$ )

$$\alpha Q_{\alpha}' + \beta Q_{\beta}' = 0$$

o sea

$$\frac{Q_{\alpha}'}{\beta} = -\frac{Q_{\beta}'}{\alpha}\tag{3,2}$$

y las dos primeras expresiones (3,1) son en este caso

$$\begin{aligned}\alpha X + \beta Y &= 0 \\ X Q_{\beta}' - Y Q_{\alpha}' &= 0\end{aligned}\tag{3,3}$$

de lo que resulta que son idénticas; por tanto el plano  $\alpha X + \beta y = 0$  es una parte reducible de dicha superficie. Cuando la tangente que pasa por el origen sea múltiple, entonces la segunda expresión (3,1) es idénticamente nula, por lo que también dicho plano forma parte reducible de dicha superficie. Por tanto, a la demostración del teorema 6 de F. A.

se le puede añadir que los planos que pasan por el eje  $X = 0$ ,  $Y = 0$  y por las tangentes de  $P(X, Y) = 0$  (que pasan por el origen) forman parte reducible de dicha superficie.

El corolario del teorema 2 <sup>(1)</sup>, dice que

$$A_m(X, Y) = K Y^q r_1^{s_1} r_2^{s_2} \dots r_h^{s_h} [P(X, Y)]^q; \quad (3,4)$$

se demuestra más adelante <sup>(2)</sup> que  $q = 1$  y ahora vamos a determinar los exponentes  $s_1, s_2 \dots s_h$ . Para ello consideremos un punto de una tangente de multiplicidad  $\lambda$  ( $\lambda \geq 2$ ) distinto de los puntos de contacto, de las tangentes trazadas a la curva desde este punto, ésta absorbe  $\lambda$ , de lo que se deduce que su exponente en (3,4) ha de ser  $\lambda$ .

Para el cálculo de  $\mu$ , observemos que el determinante de SYLVESTER, que resulta al eliminar  $\alpha$  en el sistema <sup>(3)</sup>

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= 0 \\ f'(\alpha) - \eta &= 0 \end{aligned}$$

haciendo  $\eta = 0$  es de grado  $2m - 1$  en los coeficientes de  $f(\alpha)$ , y como éstos son de grado  $g$  a lo sumo en  $X, Y$  (véase F. A., pág. 27), resulta que  $A_m(X, Y)$  es de grado  $(2m - 1)g$  a lo sumo, y el grado  $n$  de  $P(X, Y)$  se deduce de la fórmula de PLÜCKER

$$n = m(m - 1) - \sum \tau(\tau - 1) - \sum i(i - 1)$$

siendo  $\tau$  el orden de multiplicidad de las tangentes múltiples, e  $i$  el orden de las ramas tangenciales; además, si  $g < m$ , significa que la recta  $Y = 0$  es tangente de multiplicidad  $m - g$ , de lo cual resulta :

$$\begin{aligned} \mu \leq (2m - 1)g - m(m - 1) + \sum \tau(\tau - 1) + \sum i(i - 1) - \sum \tau + \\ + m - g + \sum h = (2m - 2)g - m^2 + 2m + \sum \tau(\tau - 2) + \\ + \sum (i - 1) + \sum h \end{aligned} \quad (3,5)$$

siendo  $h$  el orden de multiplicidad de las tangentes satélites a  $Y = 0$  (si existen).

Y como los coeficientes de  $P(X, Y) = 0$  están determinados salvo un factor de proporcionalidad, se puede siempre considerar que  $K = 1$ .

<sup>(1)</sup> Véase F. A., pág. 28.

<sup>(2)</sup> Véase F. A., pág. 30.

<sup>(3)</sup> Véase F. A., fórmula (8,10), pág. 27.

Apliquemoslo cuando  $Q(\alpha, \beta)$  sea la (2,2), en este caso es :

$$m = 4, g = 2, \tau = 2, i = 0, h = 2$$

y resulta de (3,5),  $\mu \leq 6$ , además de ser par, por la simetría respecto al eje X.

Los coeficientes de

$$f(\alpha) = Y^2 Q\left(\alpha, \frac{1 + \alpha X}{Y}\right) = b_4 \alpha^4 + b_3 \alpha^3 + b_2 \alpha^2 + b_1 \alpha + b_0$$

son : (1)

$$\begin{aligned} b_4 &= a_0 Y^2, & b_3 &= 4 a_1 Y^2, & b_2 &= 6 a_2 Y^2 - X^2, \\ b_1 &= 4 a_3 Y^2 - 2 X, & b_0 &= Y^2 - 1 \end{aligned} \tag{3,6}$$

haciendo ahora la eliminación de  $\alpha$  entre  $f(\alpha) = 0$  y  $f'(\alpha) = 0$  para  $X = 0$ , el término de grado mínimo en Y del determinante de SYLVESTER es  $-(4a_0)^4 Y^8$ , y en  $P(0, Y)$  el grado mínimo en Y es 2, ya que la recta  $X = 0$  corta en el origen en dos puntos solamente, por consiguiente

$$\mu + 2 = 8 \quad \text{o sea} \quad \mu = 6 \tag{3,7}$$

Los coeficientes de  $\eta$  en la eliminación de  $\alpha$  entre  $f(\alpha) = 0$  y  $f'(\alpha) = 0$  son las mismas expresiones en las  $b_i$  que en (10,6) de F. A. (2), por tanto será :

$$A_0 = a_0^3 Y^6, \quad A_1 = -Y^6 \Theta(X, Y), \quad A_2 = Y^4 \Omega(X, Y) \tag{3,8}$$

donde  $\Theta(X, Y)$  y  $\Omega(X, Y)$  son expresiones algebraicas enteras de grados 2 y 6 respectivamente, cuyos desarrollos no es preciso escribir. Sustituyendo  $\eta$  por  $-YJ$  y simplificando  $Y^6$  queda :

$$\begin{aligned} \Phi(X, Y, J) &= a_0^3 Y^4 J^4 + Y^3 \Theta(X, Y) J^3 + \Omega(X, Y) J^2 + \\ &+ P(X, Y) = 0 \end{aligned} \tag{3,9}$$

4. *Estudio del producto funcional proyectivo.* El producto funcional proyectivo de indicatriz proyectiva el inverso del polinomio (2,2) es (3) :

$$\left\{ \frac{\Delta}{Q(\lambda_1, \lambda_2)} \right\} y^{\wedge}(\lambda^1, \lambda^2) = \sum_{r=1}^2 Z_r \tag{4,1}$$

(1) Cfr. F. A., fórmula (10,3), pág. 31.  
 (2) Página 31.  
 (3) Véase F. A., pág. 32.

donde 
$$Z_r = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\frac{1}{\delta_r(0)}} dY \int_{C_r} \frac{z(Y, Y)}{J_r(X, Y)} dX \quad (4,2)$$

donde  $\delta_r(0)$ ,  $z(X, Y)$  y  $C_r$  tienen el significado allí expuesto. Pero (véase (2,2)).  $Q(0, \beta) = 0$  tiene las raíces  $\beta = \pm 1$ ; por tanto,  $-\frac{1}{\delta_r(0)} = \mp 1$ , tomando el índice  $r = 1$  para  $-\frac{1}{\delta_r(0)} = 1$  (que corresponde a  $\beta = -1$ ), tendremos:

$$Z_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 dY \int_{C_1} \frac{z(X, Y)}{J_1(X, Y)} dX \quad (4,3)$$

ahora bien,

$$J_1(X, 1) = X Q_\beta'(0_1 - 1) - Q_\alpha'(0_1 - 1)$$

o sea

$$J_1(X, 1) = 2X - 4a_3 \quad (4,4)$$

El estudio de los puntos singulares de  $\frac{1}{J_r(X, Y)}$  es completamente análogo al realizado en F. A. (1) y allí lo remitimos.

5. *Descomposición en ramas de la función J.* En (3,9) haciendo  $Y = 0$  dos raíces se hacen infinitas, y las otras dos vienen dadas por

$$J = \pm \sqrt{-\frac{P(X, 0)}{\Omega(X, 0)}} \quad (5,1)$$

pero  $P(X, 0) = 0$  tiene las raíces  $X = 0$  cuádruple y las inversas cambiadas de signo de (1,2), o sea  $-\frac{1}{c}$ ,  $-\frac{1}{d}$ ,  $-\frac{1}{a}$ ,  $-\frac{1}{b}$  y del cálculo hecho en F. A. (2) se deduce fácilmente que

$$\Omega(X, 0) = -4 a_0^2 X^6$$

por consiguiente:

$$J = \pm \frac{1}{X} \sqrt{\lambda(X^4 - 4a_3 X^3 + 6a_2 X^2 - 4a_1 X + a_0)} \quad (5,2)$$

y de la consideración de la superficie reglada (3,1) resulta que  $J$  ha de ser real para  $X > -\frac{1}{b}$ , por consiguiente ha de ser  $\lambda > 0$ .

(1) Párrafo 12, pág. 33 y siguientes.

(2) Página 31.



Ya conocemos  $J_1$  para  $Y = 1, (4,4)$ , de lo que se deduce que el punto de contacto de la tangente  $Y = 1$  a  $P(X, Y) = 0$  es  $X = 2a_3$ . Para  $X > 2a_3$ ,  $J_1$  es positiva, por tanto, siguiendo un camino desde un punto  $X > 2a_3$ ,  $Y = 1$  hasta un punto  $X > -\frac{1}{b}$ ,  $Y = 0$  sin ningún punto común con la curva, a lo largo de este camino  $J_1$  es real y no se anula, por tanto debe ser positiva en este último punto, por consiguiente  $J_1$  es

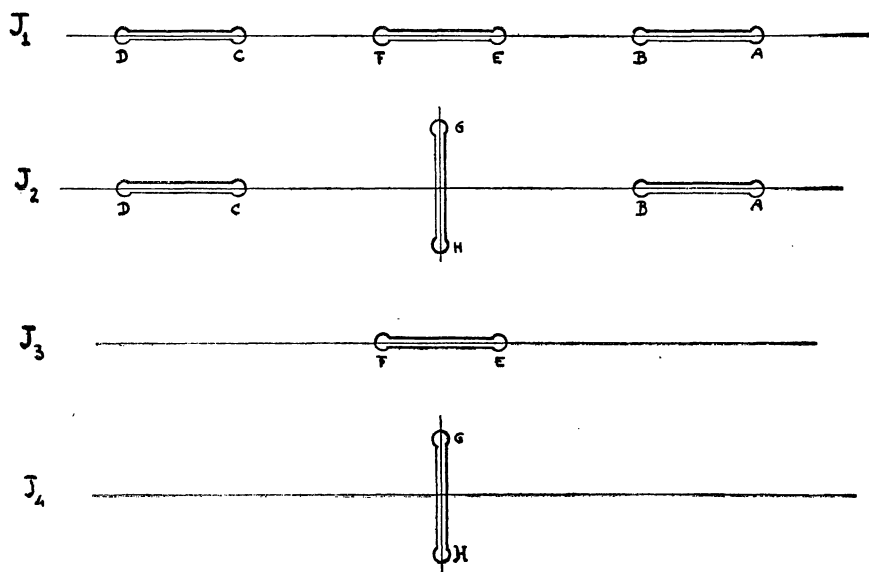


FIG. 2

la expresión (5,2) que es positiva para  $X > -\frac{1}{b}$ , y se permuta con otra determinación ( $J_2$ ) en los puntos  $A\left(-\frac{1}{b}, 0\right)$ ,  $B\left(-\frac{1}{a}, 0\right)$ ,  $C\left(-\frac{1}{d}, 0\right)$ ,  $D\left(-\frac{1}{c}, 0\right)$  (véase figura 1). Por consiguiente, los cortes a efectuar sobre la superficie de RIEMANN correspondiente, son: uno el segmento de eje real de  $B$  a  $A$  y el otro de  $D$  a  $C$ .

Al crecer  $Y$ ,  $J_1$  y  $J_2$  se permutarán en los puntos que provienen por continuidad de los  $A, B, C, D$  y  $J_1$  se permutará con otra determinación,  $J_3$  en los puntos reales que provienen del origen, y  $J_2$  y  $J_4$  en los imaginarios conjugados que provienen de la otra rama que está en contacto en el origen con  $Y = 0$ ; por tanto, los cortes en la superficie de RIEMANN de cuatro hojas (género 1) son los de la figura 2. Así hasta llegar a la

ordenada del punto cuspidal de ordenada menor, en él se permutan  $J_1, J_2, J_3$ , y al seguir creciendo  $Y$ , haremos como en F. A. <sup>(1)</sup> un cambio de cortes en la superficie de RIEMANN para evitar que  $J_1$  se permute en puntos imaginarios, y lo mismo al llegar a la ordenada del otro punto cuspidal. (El razonamiento es válido también si los dos puntos cuspidales tuvieran la misma ordenada).

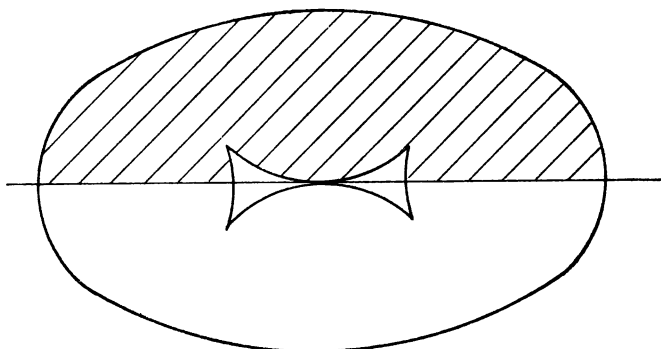


FIG. 3

En definitiva, siguiendo el mismo razonamiento que en F. A. <sup>(2)</sup>, se llega a :

$$Z_1 = \frac{1}{2\pi i} \iint_{D_1} \frac{z(X, Y)}{\bar{J}_1(X, Y)} dX dY$$

donde  $D_1$  es el dominio rayado en la figura 3, y

$$\frac{1}{\bar{J}_1(X, Y)} = \frac{1}{J_1(X, Y)} - \frac{1}{J_i(X, Y)} \quad (i = 2, 3)$$

el salto entre los dos bordes ; y como que en un punto interior no es real, su parte imaginaria será de signo constante, y como se permuta con su conjugada,  $\frac{1}{\bar{J}_1}$  será imaginario puro e igual al doble del coeficiente de  $i$  en  $\frac{1}{J_1}$ .

Ahora bien, en un punto entre  $-\frac{1}{c}$  y  $-\frac{1}{d}$  o entre  $-\frac{1}{a}$  y  $-\frac{1}{b}$  (raíces del polinomio subradical en (5,2)) y en un punto inferior del corte,

<sup>(1)</sup> Página 37.

<sup>(2)</sup> Párrafo 14, pág. 39.

se ve fácilmente que  $J_1$  es de argumento  $-\frac{\pi}{2}$ , y  $\frac{1}{J_1}$  de argumento  $\frac{\pi}{2}$ , de lo que se deduce que  $\frac{1}{J_1}$  es imaginario puro y de parte imaginaria positiva <sup>(1)</sup>. Llamando

$$\frac{1}{J_1(X, Y)} = \frac{2i}{J_1^*(X, Y)}$$

se llega a

$$Z_1 = \frac{1}{\pi} \iint_{D_1} \frac{z(X, Y)}{J_1^*(X, Y)} dX dY$$

y análogamente

$$Z_2 = -\frac{1}{\pi} \iint_{D_2} \frac{z(X, Y)}{J_2^*(X, Y)} dX dY$$

siendo  $D_2$  el dominio simétrico respecto al eje  $X$  de  $D_1$ ; y, por consiguiente

$$\left\{ \frac{1}{Q(\lambda_1, \lambda_2)} \right\}^{\Delta} y(\lambda^1, \lambda^2) = Z_1 + Z_2 = \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{z(X, Y)}{J^*(X, Y)} dX dY \quad (5,3)$$

siendo  $D$  el dominio suma de  $D_1$  y  $D_2$  y  $\frac{1}{J^*(X, Y)}$  la función que coincide con  $\frac{1}{J_1^*}$  para  $Y \geq 0$  y con  $-\frac{1}{J_2^*}$  para  $Y < 0$  (siempre positiva en el interior de  $D$ ).

Por consiguiente, siguiendo los mismos razonamientos que en F. A. <sup>(2)</sup> se llega a la solución del primer problema (condiciones iniciales nulas), que es:

$$U = \frac{1}{Q(B_x, B_y)} I^4 f(t, x, y) = \left\{ \frac{1}{Q(\lambda_1, \lambda_2)} \right\}^{\Delta} p(\lambda^1, \lambda^2, t, x, y) = \\ = \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{dX dY}{J^*(X, Y)} \int_{t_0}^t (t-s) f_2(s, x + X(s-t), y + Y(s-t)) ds \quad (5,4)$$

<sup>(1)</sup> Cfr. F. A., pág. 40.

<sup>(2)</sup> Página 42 y siguientes.

obtenida substituyendo en (5,3)  $y$  por  $p$  (2,9) y  $z(X, Y)$  por la fórmula (15,5) de F. A. (1), (se recordará que  $t_0$  es el valor de  $t$  en que la recta que pasa por  $M(t, x, y)$  y de parámetros  $1, X, Y$ , corta a  $\Gamma$  (2,5)). Y la solución del segundo problema (condiciones iniciales (2,6) y segundo miembro idénticamente nulo) es:  $U = \frac{\partial U_1}{\partial t}$

$$U_1 = \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{dX dY}{J^*(X, Y)} \int_{t_0}^t \{ (t-s) [G(s, x+X(s-t), y+Y(s-t)) - Xh'_x(x+X(s-t), y+Y(s-t)) - Yh'_y(x+X(s-t), y+Y(s-t))] + h(x+X(s-t), y+Y(s-t)) \} ds \quad (5,5)$$

obtenida substituyendo en (5,3)  $y$  por  $p_1$  (2,12) y  $z(X, Y)$  por la fórmula (15,16) de F. A. (2), siendo  $G$  y  $h$  las que vienen dadas por la fórmula (15,7) de F. A. (3)

6. *Solución de la ecuación con condiciones iniciales nulas.* La solución viene dada por (5,4), y haciendo el cambio de variables

$$\begin{aligned} \tau &= s \\ \xi &= x + X(s-t) \\ \eta &= y + Y(s-t) \end{aligned} \quad (6,1)$$

se transforma en (4)

$$U = \frac{1}{\pi} \iiint_V \frac{f_2(\tau, \xi, \eta) d\tau d\xi d\eta}{(t-\tau) J^* \left( \frac{\xi-x}{\tau-t}, \frac{\eta-y}{\tau-t} \right)} \quad (6,2)$$

donde  $V$  es el volumen limitado por el cono característico de vértice en  $M(t, x, y)$  entre el vértice y la superficie  $\Gamma$ .

Hagamos la hipótesis que las generatrices del cono característico corten en un solo punto a la superficie  $\Gamma$  sin serle tangente, y que  $t$  sea mayor que  $\psi(x, y)$  (si no cambiaríamos  $t$  en  $-t$ ).

(1) Página 43.  
 (2) Página 44.  
 (3) Página 43.  
 (4) Cfr. F. A. pág. 45.

Una recta paralela al eje  $\tau$  corta a la hoja inferior del cono característico a lo sumo en tres puntos reales. En efecto: la única generatriz paralela al eje  $\tau$  es la  $\xi = x, \eta = y$ , cuyo punto impropio es el  $X = 0, Y = 0$  de  $P(X, Y) = 0$  (véase figura 1), otra recta paralela al eje  $\tau$ ,  $\xi = \xi_1, \eta = \eta_1$ , cortará al cono en ocho puntos (éste es de octavo orden), pero su punto impropio es doble, por consiguiente sólo quedan seis intersecciones restantes. Considerando el plano determinado por esta recta y el punto  $M$ , su recta impropia será una que pasa por  $X = 0, Y = 0$ , y cada semirrecta de origen  $O$  cortará a  $P(X, Y) = 0$  a lo sumo en tres puntos reales fuera del origen <sup>(1)</sup>.

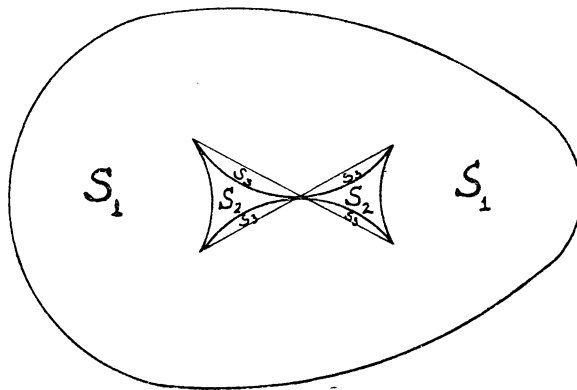


FIG. 4

Por consideraciones análogas a las hechas en F. A. <sup>(2)</sup> cabe distinguir tres regiones en el dominio del plano  $\tau = 0$  limitado por el contorno exterior de la proyección ortogonal sobre él de la curva intersección del cono característico con la superficie  $\Gamma$ . Que son las de la figura 4 (llamadas  $S_1, S_2$  y  $S_3$ ). Y con la misma nomenclatura que en F. A. <sup>(3)</sup> tendremos :

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{\pi} \iiint_V \frac{f_2(\tau, \xi, \eta) d\tau d\xi d\eta}{(t - \tau) J^* \left( \frac{\xi - x}{\tau - t}, \frac{\eta - y}{\tau - t} \right)} = \\
 &= \frac{1}{\pi} \iint_{S_1} d\xi d\eta \int_{\psi}^{\bar{t}} \frac{f_2(\tau, \xi, \eta) d\tau}{(t - \tau) J^* \left( \frac{\xi - x}{\tau - t}, \frac{\eta - y}{\tau - t} \right)} +
 \end{aligned}$$

<sup>(1)</sup> Cfr. F. A., págs. 45, 46.

<sup>(2)</sup> Pág. 46.

<sup>(3)</sup> Págs. 46, 47.

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\pi} \iint_{S_2} d\xi d\eta \int_{\bar{t}}^{\bar{t}} \frac{f_2(\tau, \xi, \eta) d\tau}{(t-\tau) J^* \left( \frac{\xi-x}{\tau-t}, \frac{\eta-y}{\tau-t} \right)} + \quad (6,3) \\
& + \frac{1}{\pi} \iint_{S_2} d\xi d\eta \left[ \int_{\psi}^{\bar{t}} \frac{f_2(\tau, \xi, \eta) d\tau}{(t-\tau) J^* \left( \frac{\xi-x}{\tau-t}, \frac{\eta-y}{\tau-t} \right)} + \int_{\bar{t}}^{\bar{t}} \frac{f_2(\tau, \xi, \eta) d\tau}{(t-\tau) J^* \left( \frac{\xi-x}{\tau-t}, \frac{\eta-y}{\tau-t} \right)} \right]
\end{aligned}$$

En la integral

$$\begin{aligned}
& \int_{\psi}^{\bar{t}} \frac{f_2(\tau, \xi, \eta) d\tau}{(t-\tau) J^* \left( \frac{\xi-x}{\tau-t}, \frac{\eta-y}{\tau-t} \right)} = \\
& = \int_{\psi}^{\bar{t}} \frac{d\tau}{(t-\tau) J^* \left( \frac{\xi-x}{\tau-t}, \frac{\eta-y}{\tau-t} \right)} \int_{\psi}^{\tau} (\tau-s) f(s, \xi, \eta) ds \quad (6,4)
\end{aligned}$$

haciendo una integración por partes, llamando

$$\begin{aligned}
U &= \int_{\psi}^{\tau} (\tau-s) f(s, \xi, \eta) ds \\
dV &= \frac{d\tau}{(t-\tau) J^* \left( \frac{\xi-x}{\tau-t}, \frac{\eta-y}{\tau-t} \right)} \quad (6,5)
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
dU &= d\tau \int_{\psi}^{\tau} f(s, \xi, \eta) ds \\
V &= \int_{\bar{t}}^{\tau} \frac{d\tau'}{(t-\tau') J^* \left( \frac{\xi-x}{\tau'-t}, \frac{\eta-y}{\tau'-t} \right)} = \varphi(\tau) \quad (6,6)
\end{aligned}$$

donde  $\varphi(\bar{t}) = 0$ . Por tanto la integral (6,4) es:

$$- \int_{\psi}^{\bar{t}} \varphi(\tau) d\tau \int_{\psi}^{\tau} f(s, \xi, \eta) ds \quad (6,7)$$

pues el término integrado es nulo. Haciendo en (6,7) otra integración por partes, llamando

$$U = \int_{\psi}^{\tau} f(s, \xi, \eta) ds \quad (6,8)$$

$$dV = \varphi(\tau) d\tau$$

de donde

$$dU = f(\tau, \xi, \eta) d\tau$$

$$V = \int_{\bar{t}}^{\tau} \varphi(\tau') d\tau' = \varphi_1(\tau) \quad (6,9)$$

$(\varphi_1(t) = 0)$ ; luego (6,4) es:

$$\int_{\psi}^{\bar{t}} \varphi_1(\tau, \xi, \eta; t, x, y) f(\tau, \xi, \eta) d\tau. \quad (6,10)$$

En la integral

$$\int_{\bar{t}}^{\bar{t}} \frac{f_2(\tau, \xi, \eta) d\tau}{(t - \tau) J^* \left( \frac{\xi - x}{\tau - t}, \frac{\eta - y}{\tau - t} \right)} \quad (6,11)$$

haciendo las mismas integraciones por partes se llega a

$$- \varphi(\bar{t}) f_2(\bar{t}, \xi, \eta) + \varphi_1(\bar{t}) f(\bar{t}, \xi, \eta) + \int_{\bar{t}}^{\bar{t}} \varphi_1(\tau) f(\tau, \xi, \eta) d\tau \quad (6,12)$$

y en las integrales

$$\int_{\psi}^{\bar{t}} \frac{f_2(\tau, \xi, \eta) d\tau}{(t - \tau) J^* \left( \frac{\xi - x}{\tau - t}, \frac{\eta - y}{\tau - t} \right)} + \int_{\bar{t}}^{\bar{t}} \frac{f_2(\tau, \xi, \eta) d\tau}{(t - \tau) J^* \left( \frac{\xi - x}{\tau - t}, \frac{\eta - y}{\tau - t} \right)} \quad (6,13)$$

donde la segunda es la misma (6,11), por tanto es igual a (6,12), y en la primera haciendo la integración por partes (6,5), pero tomando

$$\bar{\varphi}(\tau) = \int_{\bar{t}}^{\tau} \frac{d\tau'}{(t - \tau') J^* \left( \frac{\xi - x}{\tau' - t}, \frac{\eta - y}{\tau' - t} \right)} \quad (6,14)$$

(ya que  $J^*$  no está definida para los valores de  $\tau$  entre  $\bar{\bar{t}}$  y  $\bar{t}$ ), donde  $\bar{\varphi}(\bar{\bar{t}}) = 0$ , con lo que esta integral será :

$$- \int_{\psi}^{\bar{\bar{t}}} \bar{\varphi}(\tau) d\tau \int_{\psi}^{\tau} f(s, \xi, \eta) ds \quad (6,15)$$

y haciendo otra integración por partes, tomando

$$U = \int_{\psi}^{\tau} f(s, \xi, \eta) ds \quad dV = \bar{\varphi}(\tau) d\tau$$

de donde

$$dU = f(\tau, \xi, \eta) d\tau \quad V = \int_{\bar{t}}^{\tau} \bar{\varphi}(\tau') d\tau' + \int_{\bar{t}}^{\bar{\bar{t}}} \bar{\varphi}(\tau') d\tau' = \bar{\varphi}_1(\tau) \quad (6,16)$$

(pues la segunda integral es independiente de  $\tau$ ), y  $\bar{\varphi}_1(\bar{\bar{t}}) = \varphi_1(\bar{t})$  por lo cual esta integral es :

$$- \varphi_1(\bar{t}) f_1(\bar{t}, \xi, \eta) + \int_{\psi}^{\bar{\bar{t}}} \bar{\varphi}_1(\tau) f(\tau, \xi, \eta) d\tau. \quad (6,17)$$

Teniendo presente que

$$f_1(\bar{t}, \xi, \eta) = \int_{\psi}^{\bar{t}} f(s, \xi, \eta) ds$$

$$f_1(\bar{\bar{t}}, \xi, \eta) = \int_{\psi}^{\bar{\bar{t}}} f(s, \xi, \eta) ds$$

$$f_2(\bar{t}, \xi, \eta) = \int_{\psi}^{\bar{\bar{t}}} (\bar{t} - s) f(s, \xi, \eta) ds$$

y substituyendo (6,10), (6,12) y (6,17) en (6,3), tenemos :

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{\pi} \int \int \int_{V_1} \varphi_1(\tau, \xi, \eta; t, x, y) f(\tau, \xi, \eta) d\tau d\xi d\eta + \quad (6,18) \\ &+ \frac{1}{\pi} \int \int \int_{V_2} [\bar{\varphi}_1(\tau, \xi, \eta; t, x, y) - \varphi(\bar{t}, \xi, \eta; t, x, y) (\bar{t} - \tau)] f(\tau, \xi, \eta) d\tau d\xi d\eta + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int \int \int_{V_3} [\varphi_1(\bar{\bar{t}}, \xi, \eta; t, x, y) - \varphi(\bar{t}, \xi, \eta; t, x, y) (\bar{t} - \tau)] f(\tau, \xi, \eta) d\tau d\xi d\eta \end{aligned}$$



donde  $V_1$  es el volumen determinado por  $\xi, \eta$  en  $S_1$  y  $\psi \leq \tau \leq \bar{t}$ ; y  $\xi, \eta$  en  $S_2 + S_3$  y  $\bar{t} \leq \tau \leq \bar{l}$  y  $V_2$  el determinado por  $\xi, \eta$  en  $S_3$  y  $\psi \leq \tau \leq \bar{l}$  y  $V_3$  el determinado por  $\xi, \eta$  en  $S_2$  y  $\psi \leq \tau \leq \bar{l}$ ; y  $\xi, \eta$  en  $S_3$  y  $\bar{t} \leq \tau \leq \bar{l}$ .  $V_1 + V_2$  es el volumen interior a la hoja inferior del cono característico y limitado por la superficie  $\Gamma$ , y  $V_3$  es el volumen que falta para que dicho cono fuera convexo; por tanto los tres sumados forman el volumen limitado por la superficie  $\Gamma$  y la superficie exterior del cono característico.

7. *Estudio del primer núcleo resolvente  $\varphi(\tau)$ .* Tenemos (véase (6,6)).

$$\varphi(\tau) = \int_{\bar{t}}^{\tau} \frac{d\tau'}{(t - \tau') J^* \left( \frac{\xi - x}{\tau' - t}, \frac{\eta - y}{\tau' - t} \right)} \quad (7,1)$$

haciendo el cambio inverso al (6,1) poniendo  $\frac{X}{T}, \frac{Y}{T}$  en vez de  $X, Y$ , (coordenadas homogéneas), tendremos:

$$\varphi(\tau) = - \int_{\bar{T}}^T \frac{dT'}{T' J^* \left( \frac{X}{T'}, \frac{Y}{T'} \right)} \quad (7,2)$$

donde  $X, Y$  consideradas como constantes, al variar  $T', \frac{X}{T'}, \frac{Y}{T'}$  describe una recta que pasa por el origen, y  $\bar{T}$  corresponde al punto donde esta recta corta al contorno exterior de  $P(X, Y) = 0$ ; y  $T$  un punto tal (interior a  $D$ ) que para  $T'$  variando entre  $T$  y  $\bar{T}$  no encuentre ningún punto de  $P(X, Y) = 0$ .

Recordando que

$$\frac{1}{J^*} = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{J_e} - \frac{1}{J_h} \right)$$

tendremos:

$$\varphi(\tau) = - \frac{1}{2i} \int^T \frac{dT'}{T' J_e \left( \frac{X}{T'}, \frac{Y}{T'} \right)} + \frac{1}{2i} \int_{\bar{T}}^T \frac{dT'}{T' J_h \left( \frac{X}{T'}, \frac{Y}{T'} \right)} \quad (7,3)$$

ahora bien,  $J_e$  y  $J_h$  son nulas para  $T' = \bar{T}$ , y en un punto interior son imaginarias conjugadas.

Considerando la representación paramétrica (2,3) de  $Q(\alpha, \beta) = 0$ , y sea  $\alpha X + \beta Y + T = 0$  la tangente correspondiente. Tendremos:

$$T = -(\alpha X + \beta Y)$$

o sea:

$$T = -\left\{ \frac{1}{2} \frac{p'u - p'v}{pu - pv} X + \sqrt{a_0} [pu - p(u+v)] Y \right\} \quad (7,4)$$

y

$$dT = -\{ [pu - p(u+v)] X + \sqrt{a_0} [p'u - p'(u+v)] Y \} du \quad (7,5)$$

recordando que

$$\frac{1}{2} \frac{p'u - p'v}{pu - pv} = \zeta(u+v) - \zeta u - \zeta v; \quad \zeta'u = -pu \quad (1). \quad (7,6)$$

Sabemos que

$$J_e = X Q_\beta' - Y Q_\alpha'$$

puesta en homogéneas será:

$$T J_e \left( \frac{X}{T}, \frac{Y}{T} \right) = X Q_\beta' - Y Q_\alpha'$$

o sea:

$$T J_e \left( \frac{X}{T}, \frac{Y}{T} \right) = -2\beta X - (4a_0 \alpha^3 + 12a_1 \alpha^2 + 12a_2 \alpha + 4a_3) Y$$

pero

$$4a_0 \alpha^3 + 12a_1 \alpha^2 + 12a_2 \alpha + 4a_3 = 2\beta \frac{d\beta}{d\alpha} = 2a_0 [p'u - p'(u+v)]$$

por consiguiente:

$$T J_e \left( \frac{X}{T}, \frac{Y}{T} \right) = -\{ 2\sqrt{a_0} [pu - p(u+v)] X + 2a_0 [p'u - p'(u+v)] Y \} \quad (7,7)$$

(1) Véase GOURSAT, *Cours d'Analyse Mathématique*, T. II, 6.<sup>a</sup> edición, párrafos 322 y 325, págs. 184 y siguientes.

y

$$\begin{aligned} \frac{dT}{T J_e \left( \frac{X}{T}, \frac{Y}{T} \right)} &= \frac{[p u - p(u+v)] X + \sqrt{a_0} [p'u - p'(u+v)] Y}{2\sqrt{a_0} [p u - p(u+v)] X + 2a_0 [p'u - p'(u+v)] Y} du = \\ &= \frac{du}{2\sqrt{a_0}} \end{aligned} \tag{7,8}$$

Ahora bien, por ser los invariantes  $g_2$  y  $g_3$  (1,3) reales, a valores reales, de  $u$  corresponderán valores reales de  $\alpha$  y  $\beta$ , y a valores imaginarios conjugados de  $u$  valores imaginarios conjugados de  $\alpha$  y  $\beta$ .

(7,6) tiene los polos simples  $u = 0$ ,  $u = -v$  con residuos  $-1$  y  $1$  respectivamente, que son polos dobles con residuo nulo de  $\beta$ . Sabemos que  $u$  es la integral elíptica de primera especie

$$u = \sqrt{a_0} \int_{\infty_1}^{\alpha, \beta} \frac{d\alpha'}{\beta'} \tag{7,9}$$

donde

$$\beta' = \sqrt{a_0 (\alpha' - a) (\alpha' - b) (\alpha' - c) (\alpha' - d)} \quad (a < b < c < 0 < d)$$

y  $\infty_1$  el punto de la superficie de RIEMANN de dos hojas (en la que los cortes son los segmentos de eje real  $ab$  y  $cd$ ) tal que para  $\alpha = \infty$  es  $\frac{\beta}{\alpha^2} = \sqrt{a_0}$  (recuérdese que siempre tomamos para  $\sqrt{a_0}$  la determinación positiva, y obsérvese que en esta hoja a  $\alpha = 0$  corresponde  $\beta = -1$ ).

Elijamos los semiperíodos

$$\omega = \sqrt{a_0} \int_b^c \frac{d\alpha}{\beta} \quad \omega' = \sqrt{a_0} \int_a^b \frac{d\alpha}{\beta} \tag{7,10}$$

donde la primera está extendida en la hoja correspondiente a  $\infty_2$  y la segunda en la parte inferior del corte y situado en la hoja correspondiente a  $\infty_1$ . Así resulta que  $\omega$  es real y positivo, y  $\omega'$  imaginario puro de parte imaginaria positiva.

Cuando  $T'$  varía de  $\bar{T}$  a  $T$ ,  $\alpha'$  varía de un valor  $\alpha_1$  (que corresponde a la tangente en  $(\bar{T}, X, Y)$ ) a un valor  $\alpha$  (correspondiente a la tangente en  $(T, X, Y)$ , que proceda por continuidad de la anterior), y en la otra integral (7,3) de  $\alpha_1$  a  $\bar{\alpha}$ .

Teniendo en cuenta que

$$du = \sqrt{a_0} \frac{d\alpha}{\beta}$$

tendremos

$$\varphi(\tau) = -\frac{1}{4i} \int_{\bar{\alpha}}^{\alpha} \frac{d\alpha'}{\beta'} \quad (7,11)$$

siendo el camino de integración el  $\bar{\alpha} \alpha_1 \alpha$ , estando  $\alpha_1$  comprendido entre  $b$  y  $c$ , ya que de la figura 5 resulta que si la tangente corta al eje X a la izquierda del origen, debe ser  $0 < \alpha_1 < c$  y si a la derecha  $0 > \alpha_1 > b$

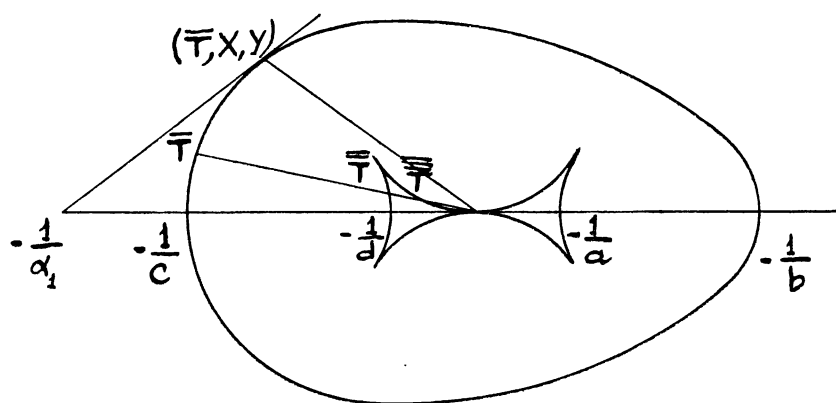


FIG. 5

y el valor  $\beta$ , debe ser negativo, pues en la parte exterior de  $P(X, Y) = 0$  sobre el eje Y es  $\beta < 0$  y en la parte inferior a dicho eje  $\beta > 0$ , pero recordando (§ 5) que en este último caso se han cambiado los extremos, resulta que siempre  $\beta_1 < 0$ , por consiguiente el camino de integración en (7,11) está situado en la hoja de la superficie de RIEMANN correspondiente a  $\infty_1$  ( $\beta$  negativo entre  $b$  y  $c$ ); y de (7,2) resulta por ser  $J^*$  positivo y  $T > T$  que  $\varphi(\tau) < 0$ , por consiguiente

$$\int_{\bar{\alpha}}^{\alpha} \frac{d\alpha'}{\beta'}$$

debe ser imaginario puro y de parte imaginaria positiva, de lo que resulta fácilmente que si  $0 < \alpha_1 < c$ ,  $\alpha$  debe ser de parte imaginaria positiva, y si  $0 > \alpha_1 > b$  de parte imaginaria negativa.

Volviendo a la representación paramétrica (2,3) de  $Q(\alpha, \beta) = 0$ , al recorrer  $u$  el eje real de  $0$  a  $2\omega$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  tomarán valores reales, y como a  $u = 0$  corresponde  $\infty_1$ , será el continuo gráfico interior de  $P(X, Y) = 0$ , por tanto también le corresponderá el  $\infty_2$ , que corresponde a  $u = -v$ , es decir,  $v$  será real, y como por (1,4) queda determinado unívocamente en un paralelogramo de períodos, podemos considerarlo entre  $0$  y  $2\omega$  (figura 6).

A valores imaginarios conjugados de  $u$  corresponden valores imaginarios conjugados de  $\alpha$  y  $\beta$ , por consiguiente, al recorrer  $u$  la paralela al eje real a distancia  $|\omega'|$  del mismo, los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  serán reales, ya

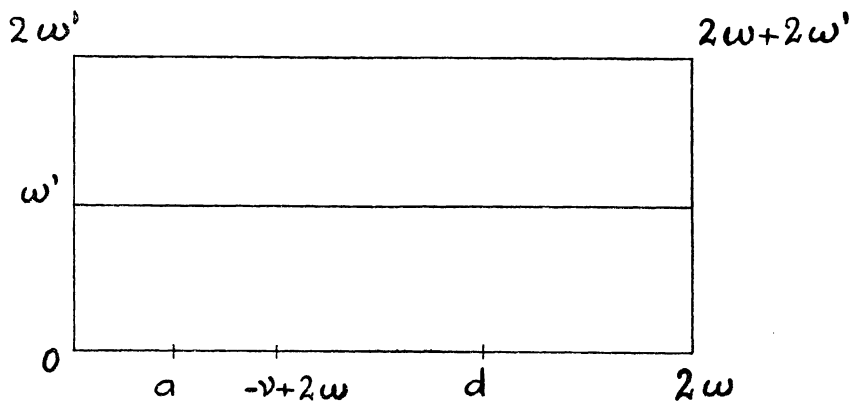


FIG. 6

que para estos valores de  $u$ ,  $u - \bar{u} = 2\omega'$  (período) y por tanto  $\alpha(u)$  y  $\alpha(\bar{u})$  serán iguales y conjugados, es decir, reales, y lo mismo  $\beta(u)$ , y no hay más valores de  $u$  en un paralelogramo de períodos a los que correspondan valores reales de  $\alpha$  y  $\beta$ , ya que si  $u_1$  fuese uno de ellos, al punto  $\bar{u}_1 + 2\omega$ , le corresponderían los mismos valores de  $\alpha$  y  $\beta$  que en el punto  $u_1$  por consiguiente estos valores de  $u$  deberían diferir en un período, y se ve fácilmente que sólo sucede cuando  $u$  toma los valores antes mencionados.

Por consiguiente, a los puntos  $\Im(u) = |\omega'|$  ( $\Im(u)$  indica parte imaginaria de  $u$ ) corresponde el contorno exterior de  $P(X, Y) = 0$ , por tanto a  $\alpha_1$  corresponde un valor de  $u$  tal que  $\Im(u) = |\omega'|$ , y a  $\alpha$  y a  $\bar{\alpha}$  valores de  $u$  simétricos respecto a la recta  $\Im(u) = |\omega'|$ , por consiguiente, de (7,8) se deduce que

$$\varphi(\tau) = -\frac{1}{4i\sqrt{a_0}}(u - \bar{u} - 2\omega')$$

y como sabemos que debe ser negativo,

$$\frac{1}{i} (u - \bar{u} - 2\omega')$$

debe ser positivo, es decir,  $\Im(u) > |\omega'|$ , por tanto el punto  $u$  debe estar por sobre de la recta  $\Im(u) = |\omega'|$  (véase figura 6). En resumen,

$$\varphi(\tau) = -\frac{\Im(u) - |\omega'|}{2\sqrt{a_0}} \quad (7,12)$$

siendo  $u$  el valor correspondiente a  $\alpha$  en el semiparalelogramo de períodos de vértices  $\omega', \omega' + 2\omega, 2\omega', 2\omega' + 2\omega$  (sólo hay uno, pues a un valor de  $\alpha$  corresponden dos de  $u$ , cuya suma debe ser  $-v + \text{período}$ , por consiguiente el otro caerá en el otro semiparalelogramo de períodos).

Determinemos ahora  $\varphi(\bar{t})$  que equivale a que en (7,11)  $\alpha$  describa en la hoja correspondiente a  $\infty_1$  un circuito en sentido negativo alrededor de  $ab$  o positivo alrededor de  $cd$ , por tanto

$$\varphi(\bar{t}) = -\frac{2\omega'}{4i\sqrt{a_0}}$$

o sea

$$\varphi(\bar{t}) = -\frac{|\omega'|}{2\sqrt{a_0}}. \quad (7,13)$$

Finalmente,  $\bar{\varphi}(\tau)$  será una expresión análoga a (7,11) pero cortando al eje real a la izquierda de  $a$  o a la derecha de  $d$  lo que equivale a cortar entre  $b$  y  $c$  más un circuito en sentido positivo alrededor de  $ab$  o negativo alrededor de  $cd$ , en ambos casos este circuito vale  $-\frac{\omega'}{2\sqrt{a_0}}$ , por tanto

$$\bar{\varphi}(\tau) = -\frac{\Im(u)}{2\sqrt{a_0}} \quad (7,14)$$

(se podía haber deducido directamente como se ha hecho para  $\varphi(\tau)$ , y como que a la izquierda de  $a$  o a la derecha de  $d$  debe ser  $\beta > 0$ , se deduce que  $\Im(u) < |\omega'|$ ).

Y de (2,4), para  $u$  en el interior del paralelogramo de períodos de la figura 6, es función uniforme de  $X, Y$ , o sea de  $\tau, \xi, \eta; t, x, y$  (6,1).

8. *Estudio del segundo núcleo resolvente*  $\varphi_1(\tau)$ . En la expresión de  $\varphi_1(\tau)$  (6,9) :

$$\varphi_1(\tau) = \int_{\bar{t}}^{\tau} \frac{(\tau - \tau') d\tau'}{(t - \tau') J^* \left( \frac{\xi - x}{\tau' - t'}, \frac{\eta - y}{\tau' - t} \right)} \quad (8,1)$$

que podemos escribirla (1)

$$\varphi_1(\tau) = (\tau - t) \int_{\bar{t}}^{\tau} \frac{d\tau'}{(t - \tau') J^* \left( \frac{\xi - x}{\tau' - t'}, \frac{\eta - y}{\tau' - t} \right)} + \int_{\bar{t}}^{\tau} \frac{d\tau'}{J^* \left( \frac{\xi - x}{\tau' - t'}, \frac{\eta - y}{\tau' - t} \right)} \quad (8,2)$$

donde la primera integral es  $\varphi(\tau)$  (7,1) y la segunda con la notación empleada en el párrafo 7, podemos escribirla

$$\frac{1}{2i} \int_{\bar{T}}^T \frac{dT'}{J_e \left( \frac{X}{T'}, \frac{Y}{T'} \right)} - \frac{1}{2i} \int_{\bar{T}}^T \frac{dT'}{J_h \left( \frac{X}{T'}, \frac{Y}{T'} \right)}$$

y de (7,4) y (7,8) tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{dT'}{J_e \left( \frac{X}{T'}, \frac{Y}{T'} \right)} = \frac{T' dT'}{T' J_e \left( \frac{X}{T'}, \frac{Y}{T'} \right)} = - \\ & = - \left\{ \frac{1}{2} \frac{p'u - p'v}{pu - pv} X + \sqrt{a_0} [pu - p(u + v)] Y \right\} \frac{du}{2\sqrt{a_0}} \quad (8,3) \end{aligned}$$

por tanto será :

$$\begin{aligned} \varphi_1(\tau) = & - T \frac{\mathfrak{J}(u) - |\omega'|}{2\sqrt{a_0}} - \frac{X}{4i\sqrt{a_0}} \int_{\bar{u}+2\omega'}^u \frac{1}{2} \frac{p'\lambda - p'v}{p\lambda - pv} d\lambda - \\ & - \frac{Y}{8i} \left[ \frac{p'\lambda - p'v}{p\lambda - pv} \right]_{\lambda=\bar{u}+2\omega'}^{\lambda=u} \quad \mathfrak{J}(u) > |\omega'| \quad (8,4) \end{aligned}$$

pero de (7,6), y recordando que  $\zeta u = \frac{\sigma'u}{\sigma u}$ , tenemos

$$\int_{\bar{u}+2\omega'}^u \frac{1}{2} \frac{p'\lambda - p'v}{p\lambda - pv} d\lambda = \lg \frac{\sigma(u+v) \sigma(\bar{u} + 2\omega')}{\sigma u \sigma(u+v+2\omega')} - 2 [i \mathfrak{J}(u) - \omega'] \zeta v. \quad (8,5)$$

(1) Véase F. A., págs. 58, 59.

El camino de integración está situado en el interior del paralelogramo de períodos (figura 6), por tanto, no hay ambigüedad en la determinación del logaritmo. Cuando  $\mathfrak{J}(u) = |\omega'|$  (8,3) debe ser nulo; por consiguiente hay que tomar la determinación del logaritmo tal que  $\lg 1 = 0$ .

Recordando que

$$\begin{aligned}\sigma(\bar{u} + 2\omega') &= -e^{2\eta'(\bar{u} + \omega')} \sigma \bar{u} \\ \sigma(\bar{u} + v + 2\omega') &= -e^{2\eta'(\bar{u} + v + \omega')} \sigma(\bar{u} + v) \\ \eta' &= \zeta \omega'\end{aligned}\quad (8,6)$$

y substituyendo en (8,5), tenemos

$$\int_{\bar{u} + 2\omega'}^u \frac{1}{2} \frac{p'\lambda - p'v}{p\lambda - pv} d\lambda = -2\eta'v + \lg \frac{\sigma(u+v)\sigma\bar{u}}{\sigma(\bar{u}+v)\sigma u} - 2i[\mathfrak{J}(u) - |\omega'|] \zeta v \quad (8,7)$$

Veamos que  $\eta'$  es imaginario puro; en efecto, entre  $\eta$ ,  $\eta'$ ,  $\omega$  y  $\omega'$  hay la relación

$$\eta\omega' - \eta'\omega = \frac{\pi}{2}i \quad (8,8)$$

y como  $\eta = \zeta\omega$  es real, debe ser  $\eta'$  imaginario puro; poniendo  $\eta' = i\mu$ , tendremos:

$$\begin{aligned}\varphi_1(\tau) &= -T \frac{\mathfrak{J}(u) - |\omega'|}{2\sqrt{a_0}} - \frac{X}{2\sqrt{a_0}} [-\mu v + \arg \sigma(u+v) - \arg \sigma u - \\ &\quad - (\mathfrak{J}(u) - |\omega'|)\zeta v] - \frac{Y}{8} \mathfrak{J} \left( \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right)\end{aligned}\quad (8,9)$$

pues  $\sigma(u+v)$  y  $\sigma(\bar{u}+v)$ , y lo mismo  $\sigma u$  y  $\sigma\bar{u}$  son conjugados. La ambigüedad de los argumentos se determina considerando que cuando  $\mathfrak{J}(u) = |\omega'|$  la diferencia de argumentos debe valer  $\mu v$  (pues el resultado debe ser nulo).

Para determinar  $\varphi_1(\bar{t})$ , por lo que se ha visto en el párrafo anterior, es la misma expresión (8,4) cuando  $u$  es *real*  $+ 2\omega'$ , y  $T$  es  $\bar{T}$ , por consiguiente, teniendo en cuenta (8,5) y las relaciones (8,6), y que  $\bar{u} + 2\omega'$  y  $\bar{u} + v + 2\omega'$  son reales, resulta

$$\varphi_1(\bar{t}) = -\bar{T} \frac{|\omega'|}{2\sqrt{a_0}} - \frac{X}{2\sqrt{a_0}} [\mu v - |\omega'| \zeta v] \quad (8,10)$$



ya que el coeficiente de  $Y$  en (8,4) es nulo, pues el extremo superior es  $2\omega'$  más el inferior.

Finalmente, vamos a determinar  $\bar{\varphi}_1(\tau)$ , que de su fórmula de definición (6,16) es la suma de dos integrales, la segunda es  $\varphi_1(\bar{l})$  (8,10) y la primera, por las consideraciones del párrafo anterior (al determinar  $\bar{\varphi}(\tau)$ ), y repitiendo los mismos razonamientos que hemos hecho al principio de este párrafo, es la suma de dos integrales, la primera es  $-T\bar{\varphi}(\tau)$ , y la segunda es la variación de la expresión (8,3) al variar  $u$  de un valor  $\bar{u}$  a  $u$ ,  $0 < \Im(u) < |\omega'|$ , por consiguiente es

$$\bar{q}_1(\tau) = \varphi_1(\bar{l}) - T \frac{\Im(u)}{2\sqrt{a_0}} - \frac{X}{4i\sqrt{a_0}} \int_{\bar{u}}^u \frac{p'\lambda - p'v}{p\lambda - pv} d\lambda - \frac{Y}{8} \Im\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right)$$

o sea :

(8,11)

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_1(\tau) = \varphi_1(\bar{l}) - T \frac{\Im(u)}{2\sqrt{a_0}} - \frac{X}{4i\sqrt{a_0}} \left\{ \left[ \lg \frac{\sigma(\lambda + v)}{\sigma\lambda} \right]_{\lambda=\bar{u}}^{\lambda=u} - \Im(u)\zeta v \right\} - \\ - \frac{Y}{8} \Im\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right). \end{aligned}$$
(8,12)

Ahora bien, para determinar el logaritmo, interesa el camino seguido por  $u$ , y a este fin, haremos las consideraciones siguientes :

a) De las representaciones paramétricas (2,3) se deduce que en un entorno sobre el eje real a la derecha de  $u = 0$  es  $\alpha$  negativa y  $\beta$  positiva, pues la parte principal de  $\alpha$  es  $-\frac{1}{u}$  y de  $\beta$ ,  $\frac{1}{u^2}$ , y en un entorno a la izquierda de dicho punto, son  $\alpha$  y  $\beta$  positivas. En un entorno del punto  $u = -v$  las partes principales son : de  $\alpha$ ,  $\frac{1}{u+v}$  y de  $\beta$ ,  $-\frac{1}{(u+v)^2}$  de lo que se deduce que en un entorno a la izquierda de dicho punto son  $\alpha$  y  $\beta$  negativas, y a la derecha  $\alpha$  positiva y  $\beta$  negativa. Por consiguiente, al variar  $u$  de  $0$  a  $-v + 2\omega$ ,  $\alpha$  crecerá de  $-\infty$  a  $a$  y luego decrecerá de  $a$  a  $-\infty$ , y al variar  $u$  de  $-v + 2\omega$  a  $2\omega$ ,  $\alpha$  decrecerá de  $+\infty$  a  $d$  y luego crecerá de  $d$  a  $+\infty$ .

b) La función  $\sigma u$  es positiva para  $u$  real entre  $0 < u < 2\omega$  y  $\sigma(u+v)$  es positiva para  $0 \leq u < -v + 2\omega$  y negativa para  $-v + 2\omega < u \leq 2\omega$ .

Por consiguiente, volviendo a (8,12), cuando el camino que va de  $\bar{u}$  a  $u$  corta al eje real en un punto  $u$ , entre  $0$  y  $-v + 2\omega$ , que corresponde a  $\alpha < 0$ , o sea  $X > 0$ , serán para este valor real  $\sigma u$  y  $\sigma(u+v)$  positivas, por consiguiente, la integral que aparece en (8,11) será

$$2i(\arg \sigma(u+v) - \arg \sigma u)$$
(8,13)

tomando el valor  $O$  para  $u = u_1$ ; y si el camino mencionado corta al eje real entre  $-v + 2\omega$  y  $2\omega$ , la integral es equivalente a cortar entre  $0$  y  $-v + 2\omega$  más un circuito en sentido positivo alrededor del punto  $-v + 2\omega$ , que es de residuo  $1$  para la función bajo el signo integral, por consiguiente, habrá que sumar  $2\pi i$  a (8,13); en definitiva, tendremos: (sustituyendo  $\varphi_1(\bar{t})$  por (8,10))

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_1(\tau) = & -\bar{T} \frac{|\omega'|}{2\sqrt{a_0}} - T \frac{\mathfrak{J}(u)}{2\sqrt{a_0}} - \\ & - \frac{X}{2\sqrt{a_0}} \left[ \mu v + \frac{X - |X|}{2X} \pi + \arg \sigma(u+v) - \arg \sigma u - [\mathfrak{J}(u) + |\omega'|] \zeta v \right] - \\ & - \frac{Y}{8} \mathfrak{J} \left( \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right) \end{aligned} \quad (8,14)$$

y  $u$  es función de  $\tau, \xi, \eta$ ;  $t, x, y$  como ha sido explicado anteriormente. Por tanto, substituyendo en (6,18), tendremos:

$$\begin{aligned} U(t, x, y) = & -\frac{1}{2\pi} \iiint_{V_1} \left\{ (\tau - t) \frac{\mathfrak{J}(u) - |\omega'|}{\sqrt{a_0}} + \right. \\ & + \frac{\xi - x}{\sqrt{a_0}} \left[ -\mu v + \arg \sigma(u+v) - \arg \sigma u - [\mathfrak{J}(u) - |\omega'|] \zeta v \right] + \\ & \left. + \frac{\eta - y}{4} \mathfrak{J} \left( \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right) \right\} f(\tau, \xi, \eta) d\tau d\xi d\eta - \\ & - \frac{1}{2\pi} \iiint_{V_2} (\tau - t) \frac{\mathfrak{J}(u)}{\sqrt{a_0}} + \quad (8,15) \\ & + \frac{\xi - x}{\sqrt{a_0}} \left[ \mu v + \frac{\xi - x - |\xi - x|}{2(\xi - x)} \pi + \arg \sigma(u+v) - \arg \sigma u - [\mathfrak{J}(u) + |\omega'|] \zeta v \right] + \\ & + \frac{\eta - y}{4} \mathfrak{J} \left( \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right) \left\} f(\tau, \xi, \eta) d\tau d\xi d\eta - \\ & - \frac{1}{2\pi} \iiint_{V_3} \frac{\xi - x}{\sqrt{a_0}} (\mu v - |\omega'| \zeta v) f(\tau, \xi, \eta) d\tau d\xi d\eta \end{aligned}$$

que es la solución de la ecuación con condiciones iniciales nulas.

9. *Solución de la ecuación con segundo miembro nulo y condiciones iniciales de tipo general.* Siguiendo el mismo método que en F. A. (1), partiendo de la fórmula (5,5), aplicándole el cambio (6,1), será

(1) Párrafo 20, págs. 63 y siguientes.

$$U_1(t, x, y) = \frac{1}{\pi} \iiint_V \frac{G(\tau, \xi, \eta) d\tau d\xi d\eta}{(t - \tau) J^* \left( \frac{\xi - x}{\tau - t}, \frac{\eta - y}{\tau - t} \right)} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \iiint_V \frac{h(\xi, \eta) + (\xi - x) h'_\xi(\xi, \eta) + (\eta - y) h'_\eta(\xi, \eta)}{(t - \tau)^2 J^* \left( \frac{\xi - x}{\tau - t}, \frac{\eta - y}{\tau - t} \right)} d\tau d\xi d\eta \quad (9,1)$$

y haciendo la descomposición, como en F. A. (4)

$$G(t, x, y) = I^2 R(x, y) + I T(x, y) + V(x, y) \quad (9,2)$$

haciendo las transformaciones como en el lugar citado, se llega a las integrales

$$\frac{1}{\pi} \iiint_V \frac{R_2(\tau, \xi, \eta) d\tau d\xi d\eta}{(t - \tau) J^* \left( \frac{\xi - x}{\tau - t}, \frac{\eta - y}{\tau - t} \right)} = -\frac{1}{2\pi} \iiint_{V_1} \left\{ (\tau - t) \frac{\mathfrak{I}(u) - |\omega'|}{\sqrt{a_0}} + \right.$$

$$+ \frac{\xi - x}{\sqrt{a_0}} [-\mu v + \arg \sigma(u + v) - \arg \sigma u - (\mathfrak{I}(u) - |\omega'|) \zeta v] +$$

$$\left. + \frac{\eta - y}{4} \mathfrak{I} \left( \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right) \right\} R(\xi, \eta) d\tau d\xi d\eta -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \iiint_{V_2} \left\{ \frac{\tau - t}{\sqrt{a_0}} \mathfrak{I}(u) + \right.$$

$$+ \frac{\xi - x}{\sqrt{a_0}} \left[ \mu v + \frac{\xi - x - |\xi - x|}{2(\xi - x)} \pi + \arg \sigma(u + v) - \arg \sigma u - (\mathfrak{I}(u) + |\omega'|) \zeta v \right] +$$

$$\left. + \frac{\eta - y}{4} \mathfrak{I} \left( \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right) \right\} R(\xi, \eta) d\tau d\xi d\eta -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \iiint_{V_3} \frac{\xi - x}{\sqrt{a_0}} (\mu v - |\omega'| \zeta v) R(\xi, \eta) d\tau d\xi d\eta \quad (9,3)$$

que es la (8,15) cambiando  $f(\tau, \xi, \eta)$  por  $R(\xi, \eta)$ .

$$\frac{1}{\pi} \iiint_V \frac{T_1(\tau, \xi, \eta) d\tau d\xi d\eta}{(t - \tau) J^* \left( \frac{\xi - x}{\tau - t}, \frac{\eta - y}{\tau - t} \right)} = -\frac{1}{2\pi} \iiint_{V_1} \left\{ \frac{\tau - t}{\sqrt{a_0}} (\mathfrak{I}(u) - |\omega'|) + \right.$$

$$\left. + \frac{\xi - x}{\sqrt{a_0}} [-\mu v + \arg \sigma(u + v) - \arg \sigma u - (\mathfrak{I}(u) - |\omega'|) \zeta v] + \right.$$

(4) § 20, pág. 63 y sgs.

$$\begin{aligned}
& + \frac{\eta - y}{4} \mathfrak{I} \left( \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right) \} T(\xi, \eta) d\xi d\eta - \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma_2} \left\{ \frac{\tau - t}{\sqrt{a_0}} \mathfrak{I}(u) + \right. \\
& + \frac{\xi - x}{\sqrt{a_0}} \left[ \mu v + \frac{\xi - x - |\xi - x|}{2(\xi - x)} \pi + \arg \sigma(u + v) - \arg \sigma u - (\mathfrak{I}(u) + |\omega'|) \zeta v \right] + \\
& \quad \left. + \frac{\eta - y}{4} \mathfrak{I} \left( \frac{p'u - p'v}{pu - pv} \right) \right\} T(\xi, \eta) d\xi d\eta - \\
& - \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma_3} \frac{\xi - x}{\sqrt{a_0}} (\mu v - |\omega'| \zeta v) T(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (9,4)
\end{aligned}$$

donde  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ , son las regiones de la cara superior de la superficie  $F$  que se proyectan en  $S_1, S_2, S_3$ , respectivamente.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} \iint_V \frac{V(\xi, \eta) d\tau d\xi d\eta}{(t - \tau) J^* \left( \frac{\xi - x}{\tau - t}, \frac{\eta - y}{\tau - t} \right)} &= \frac{1}{2\pi \sqrt{a_0}} \iint_{\Sigma_1} (\mathfrak{I}(u) - |\omega'|) V(\xi, \eta) d\xi d\eta + \\
& + \frac{|\omega'|}{2\pi \sqrt{a_0}} \iint_{\Sigma_2} V(\xi, \eta) d\xi d\eta + \frac{1}{2\pi \sqrt{a_0}} \iint_{\Sigma_3} (\mathfrak{I}(u) - |\omega'|) V(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (9,5)
\end{aligned}$$

Y, finalmente, llamando

$$H(\xi, \eta; x, y) = h(\xi, \eta) + (\xi - x) h'_\xi(\xi, \eta) + (\eta - y) h'_\eta(\xi, \eta)$$

tenemos :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\pi} \iint_V \frac{H(\xi, \eta; x, y) d\tau d\xi d\eta}{(t - \tau)^2 J^* \left( \frac{\xi - x}{\tau - t}, \frac{\eta - y}{\tau - t} \right)} = \\
& = \frac{1}{2\pi \sqrt{a_0}} \iint_{V_1} \frac{\mathfrak{I}(u) - |\omega'|}{(t - \tau)^2} H(\xi, \eta; x, y) d\tau d\xi d\eta + \\
& + \frac{1}{2\pi \sqrt{a_0}} \iint_{V_2} \frac{\mathfrak{I}(u)}{(t - \tau)^2} H(\xi, \eta; x, y) d\tau d\xi d\eta + \\
& + \frac{1}{2\pi \sqrt{a_0}} \iint_{\Sigma_1} \frac{\mathfrak{I}(u) - |\omega'|}{t - \tau} H(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta + \\
& + \frac{|\omega'|}{2\pi \sqrt{a_0}} \iint_{\sigma} \frac{H(\xi, \eta; x, y)}{t - \tau} d\xi d\eta + \frac{1}{2\pi \sqrt{a_0}} \iint_{\Sigma_3} \frac{\mathfrak{I}(u)}{t - \tau} H(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta \quad (9,6)
\end{aligned}$$

donde  $\sigma$  es la cara superior de la superficie del continuo interior del cono característico limitado entre el punto  $M$  y la superficie  $\Gamma$ . La solución en este caso es la derivada respecto de  $t$  de la suma de las expresiones (9,3), (9,4), (9,5) y (9,6). Para la solución general hay que añadir además la (8,15).

---