OBSERVABLES DE PARTÍCULAS RELATIVISTAS

por

L. M. GARRIDO y J. SESMA

Facultad de Ciencias, Barcelona, Spain

Al Prof. J. M.ª Orts con todo afecto.

SUMMARY

We study the most general unitary transformation that transforms the Hamiltonians of particles of spins 0, 1/2 or 1, into Hamiltonians containing even or odd matrices only. We present also the expressions for the position operators for each transformation that are valid for the three kinds of particles mentioned above.

INTRODUCCIÓN.

Una partícula de spin 1/2 viene representada por una función de onda ψ con cuatro componentes que satisface la ecuación de Dirac[1]

$$H^D \psi \equiv (\beta m + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}) = i\,(\partial\psi/\partial t) \tag{1}$$

Frecuentemente resulta interesante transformar esta ecuación en dos ecuaciones con dos componentes del tipo de Pauli o de Weyl. Foldy y Wouthuysen[2] encontraron, por medio de una transformación canónica, una representación en la que el Hamiltoniano contiene solamente una matriz de Dirac par

$$H^C = e^{iS}\, H^D\, e^{-iS} = \beta E \tag{2}$$

donde el operador E es $E = [\mathbf{p}^2 + m^2]^{1/2}$. Cini y Touschek[3] obtuvieron por métodos similares, una representación en la que el Hamiltoniano transformado contiene únicamente matrices impares

$$H^E = (E/p)\,(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}) \tag{3}$$

(1) A. MESSIAH, *Mécanique Quantique*. (Dunod, París, 1960), tomo II.
(2) L. L. FOLDY y S. W. WOUTHUYSEN, Phys. Rev. **78**, 29 (1950).
(3) M. CINI y B. TOUSCHEK, Nuovo Cimento **7**, 422, (1958).

La primera de estas representaciones es interesante para estudiar la partícula de Dirac en el límite clásico. La segunda nos permite estudiar el límite extremo relativista en el que puede despreciarse la masa de la partícula frente a su momento lineal. En ambos casos, la ecuación de Dirac se desdobla en dos ecuaciones cada una de las cuales tiene dos componentes únicamente. Si consideramos el Hamiltoniano de Dirac

$$H^D = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m \tag{4}$$

desde el punto de vista de estas dos clases de transformaciones, aparece como una situación intermedia entre estos dos límites extremos.

En este trabajo presentamos una generalización de las transformaciones mencionadas arriba, en dos aspectos. Primero buscaremos una transformación por medio de la cual podamos obtener un Hamiltoniano transformado de la forma.

$$H_{\lambda,\mu} = E\,(\lambda\,(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}/p) + \mu\beta) \tag{5}$$

que es una combinación prefijada de matrices pares e impares. De este modo, particularizando los valores de λ y μ, obtendremos inmediatamente las dos transformaciones particulares mencionadas antes. Y así, la transformación de Foldy-Wouthuysen aparece para $\lambda = 0$ y $\mu = 1$ mientras que la de Cini-Touschek se obtiene para $\lambda = 1$ y $\mu = 0$.

La segunda generalización introducida en este trabajo se refiere a la clase de partículas a que puede aplicarse este tipo de transformaciones, ya que realizamos la diagonalización del Hamiltoniano para partículas de spin 0, 1/2, 1 por medio de una transformación que da el Hamiltoniano $H_{\lambda,\mu}$ de un modo completamente general, i.e. válido para partículas con uno cualquiera de los tres spines mencionados.

Terminamos este trabajo estudiando la expresión de los operadores de posición para partículas de los tres spines y para distintas representaciones. Encontramos una notable semejanza entre los operadores de posición para partículas de distinto spin.

TRANSFORMACIÓN UNITARIA.

Comenzaremos dando una generalización de una transformación unitaria presentada en un trabajo precedente[4]. La ecuación de onda relativista para partículas de spin arbitrario es

$$(\beta_\mu\,\partial_\mu + m)\,\psi = 0 \tag{6}$$

donde hemos hecho $\hbar = c = 1$.

(4) L. M. GARRIDO y P. PASCUAL. Nuovo Cimento **12**, 181 (1959).

Esta ecuación puede escribirse en forma hamiltoniana como sigue

$$p_0 \psi = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m\beta)\psi \tag{7}$$

donde

$$p_0 = -\partial_4 \quad p_k = -i\,\partial_k \quad (k = 1, 2, 3)$$
$$\alpha_k = -\frac{i}{g} S_{k4} \qquad \beta = \beta_4 \tag{8}$$

y $S_{\mu\nu}$ son los generadores de las transformaciones infinitésimas de Lorentz que están definidos así

$$S_{\mu\nu} = g^2 (\beta_\mu \beta_\nu - \beta_\nu \beta_\mu) \tag{9}$$

siendo g una constante característica de cada spin.[5,6]

Intentemos ahora encontrar un operador unitario Λ que verifique

$$\Lambda^{-1} H^D \Lambda = \Lambda^{-1} (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m\beta)\Lambda = E[\lambda^2 + \mu^2]^{-\frac{1}{2}} \left[\lambda \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{p} + \mu\beta\right] \tag{10}$$

donde E es el operador

$$E = [\mathbf{p}^2 + m^2]^{\frac{1}{2}} \tag{11}$$

y $[\lambda^2 + \mu^2]^{\frac{1}{2}}$ es la constante de normalización que es igual a 1 si exigimos que los parámetros λ y μ estén relacionados por

$$\lambda^2 + \mu^2 = 1 \tag{12}$$

Para obtener Λ utilizaremos una imagen geométrica que ayudará a la solución de este problema. Damos un carácter vectorial a las matrices que entran aquí, y así, representamos β por la matriz unidad a lo largo de un eje y $(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}/p)$ por la matriz unidad a lo largo de otro eje perpendicular al anterior. Cualquier matriz v que sea una combinación lineal de estas dos

$$v = \lambda(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}/p) + \mu\beta \tag{13}$$

vendrá representada en este plano por un vector cuyas componentes son precisamente λ y μ.

La transformación que buscamos es simplemente una rotación en este plano (véase la Fig. 1) que llevará H^D sobre v, i.e., una rotación de ángulo

$$\omega = \varphi_v - \varphi_H \tag{14}$$

---

(5) H. Feshbach y F. Villars. Revs. Modern Phys, **30**, 24 (1958).

(6) H. Umezawa, *Quantum Field Theory.* (North-Holland. Publishing Company, Amsterdam, 1956).

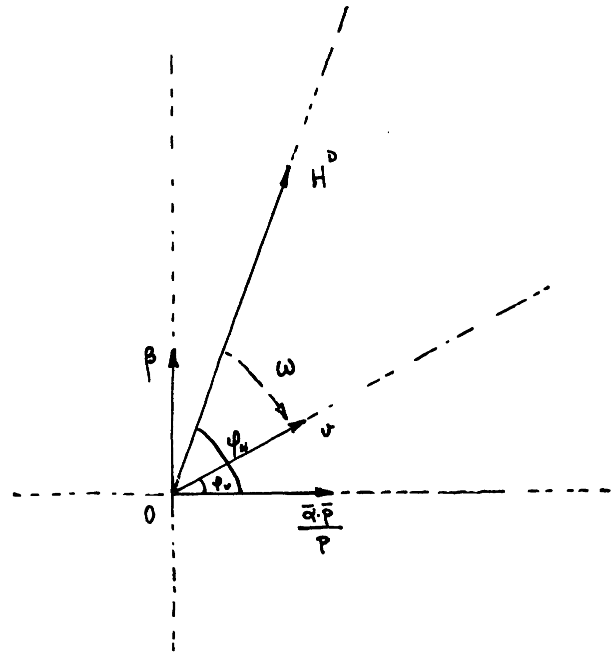

Fig. 1

que, evidentemente, está dado por

$$\omega = tg^{-1}(\mu p - \lambda m)/(\lambda p + \mu m) \tag{15}$$

Siguiendo el mismo procedimiento de rotaciones infinitésimas desarrollado en la referencia 4, el operador unitario que genera tal rotación es precisamente

$$\Lambda = \exp\left[-ig\frac{\beta\cdot\mathbf{p}}{p}\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{\mu p - \lambda m}{\lambda p + \mu m}\right] \tag{16}$$

que podemos desarrollar en la forma

$$\Lambda = I - \frac{(\beta\cdot\mathbf{p})^2}{p^2} + \frac{(\beta\cdot\mathbf{p})^2}{p^2}\cos g\omega - i\frac{\beta\cdot\mathbf{p}}{p}\,\mathrm{sen}\; g\omega \tag{17}$$

como puede comprobarse fácilmente si tenemos en cuenta las relaciones

$$(\beta\cdot\mathbf{p})^{2-n} = (p^2)^{n-1}(\beta\cdot\mathbf{p})^2 \qquad (\beta\cdot\mathbf{p})^{2n+1} = p^{2n}(\beta\cdot\mathbf{p}) \tag{18}$$

Las expresiones (16) y (17) para Λ son completamente generales. Son válidas para todos los valores de λ y μ y para partículas de spin 0, 1/2 y 1, con tal que introduzcamos en ellas los valores correspondientes de la constante g; que para partículas de spin 1/2 es $g = 1/2$, mientras que para partículas de spin 0 y 1 es $g = 1$. Obtendremos las transformaciones correspondientes a los límites extremos relativista y clásico.

Comencemos con el caso de partículas de spin 1/2, para el cual $g = 1/2$. Entonces, si $\lambda = 0$, $\mu = 1$, obtenemos para el límite clásico

$$\omega_c = tg^{-1}\, p/m \; ; \; \cos g\omega_c = [(E+m)/2E]^{\frac{1}{2}} \; ; \; \text{sen}\, g\omega_c = [(E-m)/2E]^{\frac{1}{2}} \tag{19}$$

$$\Lambda^C{}_{\frac{1}{2}} = [(E+m)/2E]^{\frac{1}{2}} - i(\beta \cdot \mathbf{p}/p)[(E-m)/2E]^{\frac{1}{2}} \tag{20}$$

que es la conocida transformación de Foldy-Wouthuysen. La transformación de Cini-Touschek aparece para $\lambda = 1$, $\mu = 0$ cuando

$$\omega_E = -tg^{-1}\, m/p \qquad \cos g\omega_E = [(E+p)/2E]^{\frac{1}{2}} \quad \text{sen}\, g\omega_E = -[(E-p)/2E]^{\frac{1}{2}} \tag{21}$$

$$\Lambda^E{}_{\frac{1}{2}} = \left[\frac{E+p}{2E}\right]^{\frac{1}{2}} + i\,\frac{\beta \cdot \mathbf{p}}{p}\left[\frac{E-p}{2E}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{22}$$

Pueden obtenerse las mismas transformaciones para spin 0 y 1, para los cuales $g = 1$. El límite clásico corresponde a

$$\Lambda^C{}_{1,0} = I - [E(E+m)]^{-1}(\beta \cdot \mathbf{p})^2 - (i/E)\,(\beta \cdot \mathbf{p}) \tag{23}$$

que fue obtenido antes.

El límite extremo relativista da para spines 0 y 1 una transformación

$$\Lambda^E{}_{1,0} = I - \frac{E-p}{p^2\, E}\,(\beta \cdot \mathbf{p})^2 + i\,\frac{m}{pE}\,(\beta \cdot \mathbf{p}). \tag{24}$$

que es una nueva transformación presentada por primera vez aquí. Corresponde a la de Cini-Touschek.

Operador posición.

Deduciremos ahora la expresión para el operador posición de partículas de spines 0, 1/2 y 1, siguiendo un método similar al utilizado por P. M. Mathews y A. Sankaranarayanan[7], para obtener el

(7) P. M. Mathews y A. Sankaranarayanan, Progr. Theoret. Phys. (Kyoto) 26, 499 (1961).

operador posición de una partícula de Dirac. Exigimos por tanto que el operador posición de cualquiera de las tres clases de partículas satisfaga las mismas propiedades enumeradas en la referencia para que tenga un significado físico. Extendemos aquí los resultados del trabajo mencionado, dada la completa generalidad de la transformación presentada antes.

Los operadores posición que buscamos pueden obtenerse de cualquier representación del Hamiltoniano. La representación más sencilla es

$$H^C = \beta E \tag{25}$$

En este caso llegaremos a la conclusión de que el operador posición de cualquiera de las tres clases de partículas tiene que ser de la forma

$$\mathbf{X}^C = \mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}^C \tag{26}$$

donde $\mathbf{x}$ es la variable que representa puntos en un espacio tridimensional, y $\boldsymbol{\xi}^c$ es un vector que conmutaría con $\mathbf{p}$. Esto significa que no depende de $\mathbf{x}$, pudiendo ser función de $\boldsymbol{\alpha}$, β y $\mathbf{p}$. Nuevas condiciones imponen que

$$[\xi^C, \beta] = 0 \tag{27}$$

Tenemos que encontrar ahora la expresión más general para ξ^c que sea una combinación lineal de vectores polares construidos con $\boldsymbol{\alpha}$, β y $\mathbf{p}$.

Sin meternos en discusiones, es fácil ver que la combinación lineal presentada en la referencia 7 es también válida para partículas de spines 0 y 1.

Por tanto escribimos

$$\boldsymbol{\xi}^C = A(\sigma \times \mathbf{p}) + \mathrm{B}(\sigma \times \mathbf{p})\beta \tag{28}$$

Pero no hemos estudiado si es ésta la expresión más general para ξ^c en el caso de bosones. Con esta elección, el operador χ^c es

$$\mathbf{X}^C = \mathbf{x} + A(\sigma \times \mathbf{p}) + \mathrm{B}(\sigma \times \mathbf{p})\beta \tag{29}$$

y el operador correspondiente en la representación de Dirac (en la que el Hamiltoniano es $H^D = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m$) para partículas de spin 1/2 es

$$\mathbf{X}^D{}_{\frac{1}{2}} = \mathbf{x} - \frac{\boldsymbol{\beta}}{2E} + \frac{(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{p})\,\mathbf{p} - (\sigma \times \mathbf{p})E}{2E^2(E + m)} + \frac{A}{E}\{m\,(\sigma \times \mathbf{p}) -$$

$$- \boldsymbol{\beta}\, p^2 + (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{p})\mathbf{p}\} + B(\sigma \times \mathbf{p})\beta, \tag{30}$$

mientras que para partículas de spin 0 y 1 es

$$\mathbf{X}^D_{0,1} = \mathbf{x} - \frac{\beta}{E} + \frac{(\beta \cdot \mathbf{p})\mathbf{p} - (\sigma \times \mathbf{p})E}{E^2(E+m)} +$$

$$+ \frac{A}{E} \{m\,(\sigma \times \mathbf{p}) + 2(\beta \cdot \mathbf{p})\mathbf{p} - \{\beta,(\beta \cdot \mathbf{p})^2\}\} \tag{31}$$

$$+ B(\sigma \times \mathbf{p})\beta + \frac{B}{E^2}(\beta \cdot \mathbf{p})[\,i\,(\beta \cdot \mathbf{p}) - m]\{(\beta \cdot \mathbf{p})\beta\beta + i(\sigma \times \mathbf{p})\beta\}$$

Estos operadores reciben el nombre de operadores posición media. Si imponemos las condiciones de que sus componentes para una misma partícula conmuten entre sí, obtenemos cuatro posibles valores, para los parámetros A y B. Estos valores son

$$\begin{array}{ll} A = 0 & B = 0 \\ A = -\,2g/p^2 & B = 0 \\ A = -\,g/p^2 & B = -\,g/p^2 \\ A = -\,g/p^2 & B = g/p^2 \end{array} \tag{32}$$

donde g es una constante peculiar para cada spin. Para partículas de Dirac ($g = 1/2$) obtenemos la funciones deducidas por Mathews y Sankaranarayanan. Las expresiones correspondientes para partículas de spin 0 y 1 salen cuando hacemos $g = 1$.

Para terminar queremos resaltar el hecho de que el operador posición media para el caso $A = B = 0$ puede escribirse para las tres clases de partículas (spines 0, 1/2, 1) formalmente del modo siguiente

$$\mathbf{X}^D_{0,1/2,1} = \mathbf{x} - g\,\frac{\beta}{E} + g\,\frac{(\beta \cdot \mathbf{p})\mathbf{p} - (\sigma \times \mathbf{p})E}{E^2(E+m)} \tag{33}$$

que contiene en una sola expresión los tres operadores posición media.

Discusión.

P. M. Mathews y A. Sankaranarayanan[8], demuestran que para partículas de spin 1/2, los cuatro operadores posición media ${}_0\mathbf{X}^c$, ${}_1\mathbf{X}^c$, ${}_2\mathbf{X}^c$, ${}_3\mathbf{X}^c$, que corresponden respectivamente a $A = B = 0$; $A = 1$, $B = 0$; $A = B = 1/2$; $A = -\,B = -\,1/2$; están relacionados del siguiente modo

$${}_1\mathbf{X}^c = u_1\,\mathbf{x}\,u_1^* \qquad {}_2\mathbf{X}^c = u_2\,\mathbf{x}\,u_2^* \qquad {}_3\mathbf{X}^c = u_3\,\mathbf{x}\,u_3^* \tag{34}$$

(8) P. M. Mathews y A. Sankaranarayanan (comunicación privada).

siendo

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \sigma \cdot \mathbf{p}/p \\
u_2 &= \frac{1}{2}\{(1-\beta) + (\sigma \cdot \mathbf{p}/p)\,(1+\beta)\} \\
u_3 &= \frac{1}{2}\{(1+\beta) + (\sigma \cdot \mathbf{p}/p)\,(1-\beta)\}
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Y, por lo tanto, para estados con una energía definida, sólo dos de estos operadores son independientes. Las funciones de onda de los otros dos operadores son una combinación lineal de las funciones de onda correspondientes a energía positiva de los operadores seleccionados.

La condición de regularidad impuesta por Newton y Wigner[9] para operadores que se refieren a estados localizados, invalida el operador ${}_1\mathbf{X}^c$ para partículas con masa en reposo no nula ya que en este caso el límite de $\sigma \cdot \mathbf{p}/p$ cuando $p \to 0$ no está definido.

Tenemos propósito de extender estas consideraciones en una publicación futura a los operadores de posición de spin 0 y 1.

(9) T. D. NEWTON y E. P. WIGNER, Revs. Modern Phys. 21, 400 (1949).