



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

Treball final de grau

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Universitat de Barcelona

Teoria de Grafs a Secundària i
Batxillerat.
El problema de coloració.

Autor: Patricio Díaz Garrido

Director: Sergi Múria Maldonado

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica UB

Barcelona, 1 de juliol de 2020

Abstract

In this project we study the graph coloring problem from two points of view. First, we develop the tools and concepts that allow us to discuss the problem at an undergraduate level, emphasizing situations where the problem can be solved. Secondly, we pose the viability of adapting graph theory via the coloring problem to first year of secondary education and first year of post obligatory. We make a proposal on how to carry out this adaptation in a way that the contents align with the current curriculum in Catalonia, and we analyze the obtained results.

Resum

En aquest treball estudiem el problema de coloració de grafs des de dos punts de vista. En primer lloc, desenvolupem les eines i conceptes que ens permeten discutir el problema formalment a nivell universitari, posant èmfasi en els casos on el problema es pot resoldre. En segon lloc, plantejem la viabilitat d'adaptar continguts de teoria de grafs a través d'aquest problema a Secundària, concretament primer d'ESO i primer de Batxillerat. Fem una proposta de com dur a terme aquesta adaptació de manera que es correspongui amb temes presents al currículum vigent a Catalunya i analitzem els resultats obtinguts.

Introducció

En aquest treball ens endinsem en l'aventura que suposa apropar una branca de les matemàtiques a un públic que no està familiaritzat amb aquesta. Ho fem a partir del problema de coloració de grafs, que té el seu origen al 1852 quan Francis Guthrie, alumne d'Augustus De Morgan, va plantejar la qüestió: “és possible acolorir qualsevol mapa fent servir només 4 colors, de manera que països amb frontera comuna tinguin colors diferents?”

Aquest problema va ser estudiat per matemàtics com Arthur Cayley, Alfred Kempe o George David Birkhoff, i no va ser fins el 1976 que Kenneth Appel i Wolfgang Haken van provar en una sèrie d'articles amb centenars de pàgines que, efectivament, 4 colors són suficients [1]. Aquesta demostració consistia en reduir el problema a 1834 configuracions diferents de mapes (posteriorment reduïdes a 1482) que havien de ser comprovades una a una per ordinador. No exempta de controvèrsia, aquesta esdevingué la primera demostració matemàtica feta per ordinador, aconseguint així tancar un problema obert durant més de cent anys.

Alguns dels intents (infructuosos, en la seva majoria) en demostrar el teorema dels 4 colors han donat lloc a objectes matemàtics que, eventualment, s'han convertit en motiu d'estudi en sí mateixos, com és el cas dels polinomis cromàtics desenvolupats per Birkhoff i generalitzats posteriorment per H. Whitney i W.T. Tutte. Així mateix, el problema de coloració de mapes que originalment es corresponia amb la coloració de grafs planaris, s'ha extès a altres tipus de coloracions i grafs en general, i actualment té multitud d'aplicacions al món real, especialment en ciències de la computació.

El fil conductor d'aquest treball és el problema de coloració dels vèrtexs d'un graf. Aquest problema generalitza la qüestió que va formular Guthrie al 1852: “Donat un graf simple, quin és el mínim nombre de colors necessaris per acolorir els seus vèrtexs de manera que vèrtexs adjacents no tinguin el mateix color?”

Explorarem aquesta qüestió des de dos punts de vista, el matemàtic i el didàctic. A nivell matemàtic, desenvoluparem totes les eines necessàries per abordar la qüestió amb rigor i discutirem els casos on aquest problema es pot resoldre. A nivell didàctic, fem una proposta d'adaptació d'aquests continguts a Secundària i Batxillerat.

El plantejament inicial d'aquesta proposta consistia en una exposició presencial dels continguts teòrics i un seguit d'activitats per complementar i avaluar l'assoliment d'aquests. Aquesta activitat estava programada per la tercera setmana del mes de març a l'I.E.S Vall d'Arús, a Vallirana, centre on vaig cursar ESO i Batxillerat. Malauradament, a causa dels esdeveniments relacionats amb el Covid-19, es va haver de buscar una via alternativa per dur a terme la part pràctica d'aquest treball.

Finalment es va decidir dur a terme una implementació a distància a mode de prova pilot amb dos grups reduïts de centres diferents, un de 1r d'E.S.O i un de 1r de Batxillerat. La darrera part del bloc didàctic tracta sobre com ha estat la feina darrere d'aquesta implementació i els resultats obtinguts.

Motivació i objectius

La teoria de grafs s'utilitza constantment per modelar processos i sistemes al món de la física, química, biologia, i fins i tot lingüística. La seva aplicabilitat a les xarxes socials i les ciències de la computació fa raonable suposar que aquesta branca de la matemàtica discreta serà una eina imprescindible en la formació de noves generacions d'estudiants, de la mateixa manera que la probabilitat i l'estadística han esdevingut omnipresents en la majoria de les àrees de recerca científica.

Generalment aquesta matèria no s'ensenya fins que hom arriba a la universitat, tot i el fet que moltes de les qüestions es podrien plantejar (i fins i tot resoldre) en cursos d'E.S.O. i Batxillerat. És per aquest motiu que en aquest treball no només aprofundim en un problema de teoria de grafs com és el problema de coloració, sinó que considerem la possibilitat d'adaptar part d'aquests continguts a cursos inferiors, amb la finalitat d'introduir una matèria nova i rellevant, tot i aprofitant les connexions que aquesta comparteix amb la matemàtica clàssica que forma part del currículum vigent a Catalunya.

Els objectius que ens proposem en aquest treball són:

- Aprofundir en el problema de coloració de grafs amb la intenció d'ampliar els coneixements adquirits a l'assignatura de Grafs del Grau de Matemàtiques.
- Seleccionar continguts relatius a aquest problema que puguin conviure amb el temari que figura al currículum de Secundària i Batxillerat.
- Dissenyar activitats teòriques que permetin arribar a aquests conceptes de manera natural i veure la seva aplicació al món real.
- Dissenyar activitats pràctiques que permetin assolir aquests coneixements i aconseguir, així, treballar objectes matemàtics coneguts des d'un nou punt de vista.

Agraïments

En primer lloc vull agrair al Sergi Múria, el meu tutor, per donar-me l'oportunitat de perseguir la visió que suposa aquest treball i per confiar i aconsellar-me en el procés. La seva col·laboració per dur a terme la part pràctica d'aquest projecte ha resultat essencial donades les circumstàncies actuals. Gràcies a la Júlia i els alumnes de primer d'E.S.O. de l'institut 22@ per participar en el projecte i pel seu entusiasme.

Agraeixo al Jordi Font i l'Antoni Benseny per la seva aportació i consells sobre eines com GeoGebra, Mathigon i \LaTeX que m'han ajudat a complementar els continguts i redactar la memòria de manera visualment agradable.

Vull agrair als meus amics Juanma i Miquel la seva col·laboració en el projecte, i a la Sílvia per ajudar-me a millorar la redacció de la memòria.

Finalment, agraeixo a la Lorena i els alumnes de Batxillerat de l'Escola Cingle de Terrassa per acollir la meva proposta i pel seu feedback, tant positiu com negatiu. La seva participació m'ha permès salvar la part relativa al contingut de Batxillerat d'aquest treball. En aquesta nota, també vull agrair als professors i alumnes de l'I.E.S Vall d'Arús per haver acceptat participar en la primera fase d'aquest projecte, tot i haver-ho hagut de deixar per una futura ocasió.

Índex

1	Preàmbul	2
2	Complexitat	5
2.1	Descripció del problema i nombre cromàtic	5
2.2	Intractabilitat i complexitat computacional	8
3	Algorismes	11
3.1	L'algorisme codicions (Greedy algorithm)	11
3.2	L'algorisme DSATUR	15
3.3	L'algorisme RLF	16
4	Fites per al nombre cromàtic	18
4.1	Fites inferiors	18
4.2	Fites superiors	21
5	Respostes al problema de coloració	22
5.1	Grafs planaris. Coloració de mapes i el teorema dels 4 colors	23
5.2	Grafs perfectes	26
5.3	Grafs de cordes i grafs d'interval	29
6	Polinomis cromàtics	33
7	Implementació a Secundària i Batxillerat.	40
7.1	Justificació	40
7.2	Primera fase de la implementació	41
7.3	Continguts i Objectius	42
7.4	Segona fase de la implementació	44
7.5	Produccions i fonts d'informació	45
7.6	Recursos, propostes d'ampliació i limitacions	46
7.7	Recepció de l'activitat i valoració dels resultats	48
8	Conclusions	50
	Annex 1: Figures i exemples complementaris	54
	Annex 2: Recursos digitals i material didàctic	58

Estructura de la Memòria

Organitzarem la memòria en dos blocs destacats.

El primer bloc consisteix en la part matemàtica del treball i engloba desde la secció 1 fins la secció 6. En aquesta part tractem formalment el problema de coloració de grafs. La secció 1 consisteix en un preàmbul on es resumeixen els conceptes necessaris per a la resta del treball. A la secció 2 fem una descripció del problema que ens ocupa i analitzem la seva complexitat nivell computacional. A la tercera secció parlem de 3 algorismes heurístics i les seves propietats. A la secció 4 veiem els teoremes i resultats clàssics que ens permeten fitar el nombre cromàtic d'un graf. A la secció 5 explorem sota quines condicions el problema de coloració té resposta. Finalment, a la secció 6 parlem dels polinomis cromàtics.

El segon bloc consisteix en la part didàctica del treball i es troba a la secció 7. En aquesta part fem una descripció de com ha estat l'experiència d'adaptar continguts de Grau a Secundària i Batxillerat. Parlem de les diferents fases de l'implementació, els continguts i objectius que ens hem proposat, i els recursos que hem fet servir per dur a terme aquesta implementació. Per acabar, fem un anàlisi de com es pot millorar la proposta, quines limitacions ens hem trobat, i com ha estat l'acollida.

1 Preàmbul

A continuació definim els conceptes als quals farem referència sovint. Tot i que la majoria d'aquests se suposen coneguts per algú que hagi fet un curs introductor de teoria de grafs, en farem un resum per fixar notacions i vocabulari. Addicionalment, aprofitem per comentar les consideracions particulars que s'han pres al llarg del treball i el motiu d'aquestes decisions. La majoria de les definicions les trobarem il·lustrades al llarg del treball a través d'exemples. Addicionalment, hem afegit alguns exemples a l'Annex 1.

Definició 1.1. *Un graf G és un parell ordenat $\{V, E\}$ on V és un conjunt de vèrtexs (o nodes), i E un conjunt d'arestes que connecten vèrtexs de V . Sovint també es nota $V(G)$ i $E(G)$ per referir-se als conjunts de vèrtexs i arestes de G , respectivament. Si volem especificar que una arista $e \in E$ connecta dos vèrtexs $u, v \in V$, escriurem $e = uv$.*

Sempre que el context ho permeti, parlarem indistintament de vèrtexs i arestes de G sense fer referència a V i a E .

Definició 1.2. *Sigui G un graf i $v_1 \neq v_k$ dos vèrtexs de G . Un camí (de longitud k) entre v_1 i v_k és una successió d'arestes $\{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{k-1}v_k\}$ que connecta els vèrtexs v_1 i v_k (Figura 35). Si tots els v_2, \dots, v_{k-1} són diferents, el camí es diu elemental. En el que segueix, quan parlem d'un camí suposarem que aquest és elemental.*

Definició 1.3. *Un graf G es diu connex si entre qualssevol vèrtexs u, v de G podem trobar un camí que els connecta. Altrament, direm que G no és connex (Figura 36).*

Definició 1.4. *Un graf es diu dirigit si és tal que les seves arestes tenen una direcció, és a dir, van d'un vèrtex a un altre. En un graf dirigit, les arestes uv i vu són diferents.*

Definició 1.5. *Diem que un graf G és d'ordre n si $|V(G)| = n$, i diem que és de mida m si $|E(G)| = m$.*

Definició 1.6. *Diem que dos vèrtexs u, v són adjacents si estan connectats per una arista, i diem que dues arestes e, f són adjacents si incideixen sobre un mateix vèrtex.*

Definició 1.7. *Si dues o més arestes connecten el mateix parell de vèrtexs, aquestes es diuen arestes múltiples. Si una arista connecta un vèrtex amb sí mateix, aquesta es diu un llaç.*

Definició 1.8. *Diem que un graf és simple si no conté arestes múltiples ni llaços.*

Definició 1.9. *Un subgraf d'un graf $G = \{V, E\}$ és un graf $H = \{V', E'\}$ tal que $V' \subset V$ i $E' \subset E$. El conjunt V' pot contenir vèrtexs que no estiguin connectats per cap arista de E' , però si $e \in E'$ és una arista de H , aleshores els seus extrems han de pertànyer a V' . Un subgraf H es diu trivial si $H = G$.*

Definició 1.10. Sigui $G = \{V, E\}$ un graf, i $S \subset V$. El subgraf induït per S , $G[S]$, és el graf que té per vèrtexs els de S , i té per arestes les arestes de G que incideixen en vèrtexs de S (Figura 36).

Definició 1.11. Si G és un graf i $v \in V$ és un vèrtex de G , notarem $G - v$ el subgraf induït per $V \setminus \{v\}$. És a dir, $G - v$ és el graf G sense v i les arestes incidents en v .

Definició 1.12. Diem que un conjunt $U \subset V$ de vèrtexs d'un graf G és independent si U no conté vèrtexs adjacents. De manera similar, si M és un conjunt d'arestes d'un graf G diem que $M \subset E$ és independent si no conté arestes adjacents.

Definició 1.13. Sigui λ un enter positiu, G un graf. Una λ -coloració de G és una funció $c : V(G) \rightarrow \{1, \dots, \lambda\}$ tal que si dos vèrtexs $u, v \in V(G)$ són adjacents, aleshores $c(u) \neq c(v)$. La funció c assigna colors diferents (representarem cada color amb un nombre de $\{1, \dots, \lambda\}$) a vèrtexs adjacents. Per tant podem pensar una λ -coloració com una partició $\{V_1, V_2, \dots, V_\lambda\}$ de V . Diem que G és λ -colorable si admet una λ -coloració.

Observem que una λ -coloració fa servir com a molt λ colors, però pot donar-se el cas que en faci servir menys. És a dir, λ fa referència al màxim nombre de colors dels quals disposem, però això no vol dir que els fem servir tots.

Alguns autors com [2] descriuen una coloració com “adequada” (*proper coloring*) si se satisfà la condició $\{c(u) \neq c(v) \text{ si } uv \in E\}$, i en diuen “inadequada” (*improper*) si no és així. En el nostre cas, sempre que parlem d'una λ -coloració voldrà dir que aquesta és adequada. Si cal, direm que els vèrtexs u i v estan en conflicte quan considerar $c(u) = c(v)$ significaria que la coloració deixa de ser adequada.

En aquest treball només considerarem grafs simples no dirigits, pels motius següents:

- Les arestes múltiples no aporten informació addicional en termes de connexió, per tant les eliminarem.
- Si un graf conté llaços, aleshores no pot admetre una coloració doncs si un vèrtex està connectat amb sí mateix, no es pot acolorir.
- Pel que fa a la connexió de vèrtexs, considerarem que es tracta d'una relació simètrica, per tant no té sentit considerar grafs dirigits.

Definició 1.14. El grau d'un vèrtex v de G és el nombre d'arestes que incideixen sobre v , i el denotarem $\deg(v)$. També ens referirem als vèrtexs adjacents a v com veïns, i notarem el conjunt de tots els veïns de v com $\Gamma(v)$ (Figura 35).

Observem que G és connex si, i només si, el conjunt de vèrtexs amb grau 0 és el buit.

Definició 1.15. *Diem que un graf G és regular si tots els seus vèrtexs tenen el mateix grau. Si $\deg(v) = k$ per tot v de G , es diu que G és k -regular (Figura 9).*

Definició 1.16. *Es defineix el grau màxim de G com $\Delta(G) = \max \{ \deg(v), v \in V \}$. Anàlogament, definim el grau mínim de G com $\delta(G) = \min \{ \deg(v), v \in V \}$. Notarem simplement Δ i δ si no hi ha lloc a confusió.*

Definició 1.17. *Un graf es diu bipartit (Figures 9 i 13) si existeix una partició $\{V_1, V_2\}$ de V tal que tota aresta de G només connecta vèrtexs de V_1 amb vèrtexs de V_2 . Observem que, amb la notació que hem introduït abans, dir que un graf és bipartit és equivalent a dir que admet una 2-coloració.*

Farem servir tot un seguit de notacions estàndard per parlar d'alguns tipus de grafs coneguts. Trobarem il·lustracions de totes aquestes definicions a l'Annex.

Notació.

- *Graf buit* (Figura 25): Un graf es diu buit si conté vèrtexs però no arestes. Notarem E_n el graf buit de n vèrtexs. Tots els vèrtexs de E_n tenen grau 0 i és, per tant, no connex.
- *Graf complet* (Figura 16): Un graf complet de n vèrtexs, K_n , és un graf simple on tot parell de vèrtexs està connectat per una aresta. Els vèrtexs de K_n tenen grau $n - 1$.
- *Cicle* (Figura 2): Un cicle de n vèrtexs, C_n , és un graf similar a un polígon de n costats. Les arestes de G formen un camí tancat que passa per tots els vèrtexs. Tots els vèrtexs de C_n tenen grau 2. Sovint també es parla d'un cicle de longitud n per referir-nos a C_n .
- *Arbre*: Un arbre és un graf connex sense cicles. No notarem T_n un arbre amb n vèrtexs però sí farem servir la lletra T ocasionalment. Tot arbre és un graf bipartit.
- *Camí* (Figura 26): Un camí de n vèrtexs, P_n , és un arbre on tots els vèrtexs de G tenen grau 2 exceptuant dos d'ells, anomenats extrems, que tenen grau 1.
- *Graf bipartit complet*: Notem $K_{m,n}$ el graf bipartit tal que tot vèrtex de V_1 està connectat amb tot vèrtex de V_2 , amb $|V_1| = m$ i $|V_2| = n$.
- *Roda* (Figures 2 i 13): Una roda està formada per un cicle C_n , $n \geq 3$ i un vèrtex addicional (anomenat vèrtex universal) adjacent a tots els vèrtexs d'aquest cicle. Alguns autors denoten W_n la roda amb n vèrtexs, però això suposa que el cicle associat ha de ser C_{n-1} . Tal i com l'hem definit, en el nostre cas la roda W_n tindrà $n + 1$ vèrtexs.
- *Estrella* (Figura 26): Una estrella S_n és el graf bipartit complet $K_{1,n}$. També podem pensar una estrella com un arbre amb un node central i n fulles (una fulla és un vèrtex de grau 1 en un arbre).

2 Complexitat

2.1 Descripció del problema i nombre cromàtic

Com hem comentat a la introducció, el problema que volem abordar és el de coloració de grafs. En particular, la coloració de vèrtexs. Al preàmbul hem definit què és una λ -coloració, però el nostre problema va una mica més enllà.

No només busquem una funció $c : V \rightarrow \{1, 2, \dots, \lambda\}$ tal que $c(u) \neq c(v)$ si $uv \in E$, sinó que a més volem minimitzar el valor de λ . Per exemple, a la figura següent tenim dues coloracions d'un graf. Ambdues coloracions són vàlides però la primera fa servir el nombre mínim de colors mentre que la segona no.

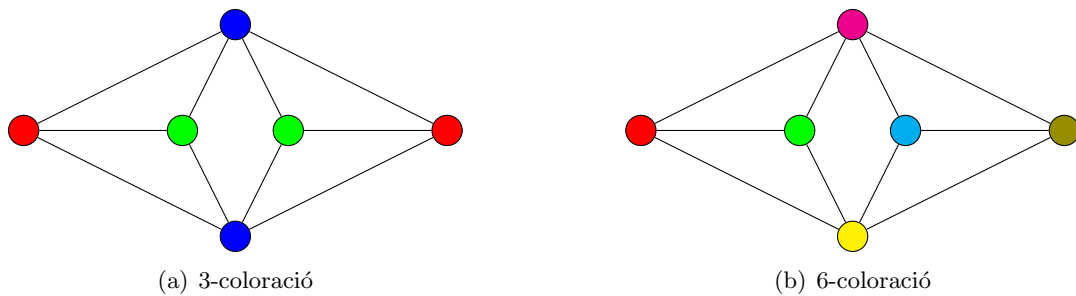


Figura 1: Coloració òptima (a) i coloració no òptima (b).

De la mateixa manera que busquem optimitzar funcions en altres branques de les matemàtiques, l'estudi del mínim valor de λ serà un dels focus principals d'aquest treball. Per tant, sense més dilació, el definirem.

Definició 2.1. Es defineix el nombre cromàtic d'un graf G i es nota $\chi(G)$ el λ més petit tal que G admet una λ -coloració. Direm que G és λ -cromàtic si $\chi(G) = \lambda$.

Exemple 2.2. Si G és un graf complet K_n , aleshores $\chi(G) = n$ doncs tots els vèrtexs són adjacents a la resta i no podem repetir color. Si G és un graf buit E_n , en canvi, $\chi(G) = 1$ per tot $n \geq 1$ doncs cap vèrtex és adjacent a cap altre.

Exemple 2.3. Si P_n és un camí, aleshores és bipartit i per tant $\chi(P_n) = 2$. També es comprova fàcilment que els cicles C_n d'ordre parell satisfan $\chi(C_n) = 2$, mentre que en el cas senar tenim $\chi(C_n) = 3$ (Figura 2 a i b). Podem estendre aquest fet per deduir que el nombre cromàtic de les rodes és $\chi(W_n) = 4$ si n senar i $\chi(W_n) = 3$ si n parell (Figura 2 c i d).

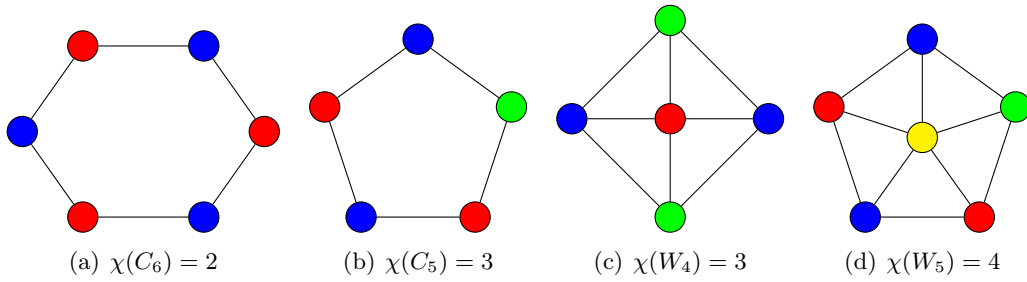


Figura 2: Exemples de coloracions i nombre cromàtic de cicles i rodes.

Observem que la Definició 2.1 no fa cap mena de referència a la funció c . És possible, de fet, trobar multitud de coloracions diferents que facin servir el mateix nombre de colors (parlarem d'aquest fet en la Secció 6). Per ara, el que ens interessa és si aquestes coloracions assoleixen el mínim valor de λ possible o no.

Hom pot pensar que trobar $\chi(G)$ no és un problema difícil doncs seria suficient anar provant amb ordinador totes les coloracions possibles i quedar-nos amb la que retorni el menor valor de λ . Veurem com un enfocament com aquest, tot i tenint en compte certes consideracions al nostre favor, resulta inviable fins i tot per a grafs relativament petits.

Considerem un graf G d'ordre n . Com a màxim, el nombre de colors necessaris serà $\lambda = n$, com és el cas dels grafs complets. Suposem que hem escrit un programa que assigna colors als vèrtexs de G i l'única cosa que hem de fer és comprovar si la coloració que ens retorna és factible o no. Com l'ordre és n , en el pitjor dels casos (quan $\chi(G) = n$) haurem de fer n^n comprovacions per decidir si acceptem aquesta coloració com a vàlida.

Suposem, per exemple, $n = 50$. Hauríem de fer $50^{50} \approx 10^{84}$ comprovacions. Com a referència, el supercomputador Summit de IBM va ser el primer en aconseguir una velocitat de càlcul ExaFLOP (10^{18} operacions per segon) al 2018 segons Wikipedia. A aquesta velocitat, Summit trigaria $\approx 3.17 \times 10^{58}$ anys en fer aquest nombre de comprovacions. Fins i tot si restringim el nombre de colors a $k < n$, obtenim k^n que pateix del mateix tipus de creixement exponencial si $k > 1$.

Feta aquesta comparació cal observar que, de fet, l'espai de solucions no és tant gran com això doncs moltes solucions són equivalents. Recordem que una λ -coloració es pot pensar com una partició de V en λ conjunts de vèrtexs independents. Vegem a l'exemple següent com dues coloracions, a simple vista diferents, resulten en la mateixa partició.

Exemple 2.4. Considerem les dues 3-coloracions del graf següent com es veu a la Figura 3. Si intercanviem els papers del colors blau i el verd sembla que obtenim dues coloracions diferents. Tanmateix, les particions de V corresponents amb aquestes coloracions és la mateixa, i per tant ambdues solucions són equivalents:

$$V = \{\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}, \{v_5, v_6\}\}$$

En canvi, si considerem una 3-coloració com a la Figura 4, la partició resultant és diferent al cas anterior:

$$V = \{\{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_5, v_6\}\}$$

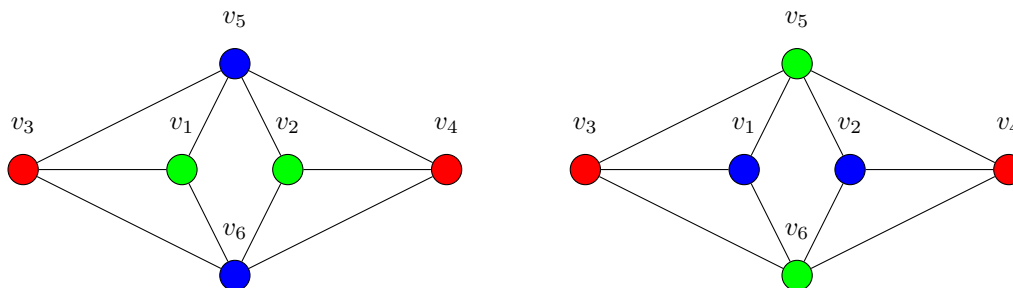


Figura 3: Solucions equivalents.

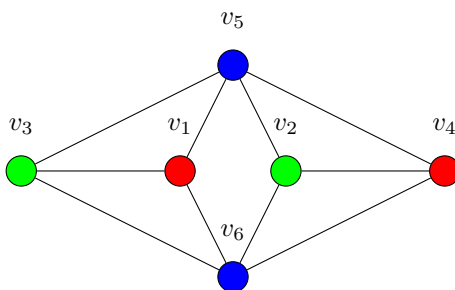


Figura 4: Solució diferent.

Situacions com la de la Figura 3 fan que si busquem una λ -coloració, el nombre de solucions que en realitat són la mateixa és igual al nombre de permutacions diferents de λ objectes, és a dir, $\lambda! = \lambda \times (\lambda - 1) \times \dots \times 1$.

Per tant l'espai de funcions que consideràvem inicialment és molt més gran del que necessitem en realitat. Podríem reduir aquest espai definint una relació de l'estil

$$c \sim c' \text{ si la partició associada a } c \text{ és la mateixa que la partició associada a } c'$$

Clarament aquesta és una relació d'equivalència i només cal considerar, doncs, classes de coloracions (de manera similar a com es defineixen classes de funcions en els espais L^p). Tot i així, encara hem de veure com de gran és aquest conjunt. Per parlar del nombre de particions d'un conjunt de n elements, necessitem introduir els conceptes següents:

Definició 2.5. Es defineix l' n -èsim nombre de Bell i es nota B_n , $n \geq 0$ el nombre de particions (en conjunts no buits) d'un conjunt de n elements (Observem que $B_0 = B_1 = 1$). Equivalentment, B_n és el nombre de relacions d'equivalència en un conjunt de n elements.

En el nostre cas, com estem parlant de λ -coloracions el que necessitem considerar són particions de n elements en λ conjunts diferents, amb $\lambda < n$.

Definició 2.6. *El nombre de maneres de dividir n elements en $k < n$ conjunts diferents (no buits) s'anomena el nombre de Stirling de segona espècie i es nota $S(n, k)$ o bé $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$.*

Per exemple, les particions de 3 elements en 2 conjunts diferents no buits són $\left\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = 3$ doncs tenim

$$\{\{1\}, \{2, 3\}\}, \{\{2\}, \{1, 3\}\} \text{ i } \{\{3\}, \{1, 2\}\}$$

De les definicions anteriors surt directament

$$B_n = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} \quad (2.1)$$

Aquests nombres ens permeten analitzar si abordar el problema de manera exhaustiva com proposàvem al començament és factible o no, tot i havent reduït considerablement l'espai inicial.

Suposem que volem fer totes aquestes comprovacions. Si comencem amb 1 color, és a dir $\lambda = 1$, l'algorisme que determina si alguna d'aquests candidats a solució és factible, necessita comprovar $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}$ particions. Si troba alguna solució, ens aturem. Altrament, augmentem λ en 1 unitat i tornem a executar l'algorisme que ara comprovarà les $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}$ particions. Com el nombre cromàtic d'un graf és el mínim nombre de colors necessaris, com a molt ens aturarem en $\lambda = \chi(G)$.

Per tant, l'algorisme necessitaria fer un total de $\sum_{k=1}^{\chi(G)} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ comprovacions.

En quina situació ens trobem si fem servir aquest enfocament? Malauradament, els nombres de Stirling encara presenten creixement exponencial.

Si continuem amb el cas $n = 50$ i suposem $\chi(G) = 10$, tenim que en el pitjor dels casos s'han de comprovar $\left\{ \begin{smallmatrix} 50 \\ 10 \end{smallmatrix} \right\} \approx 2.6 \times 10^{43}$ candidats a solució, que encara és força gran per qualsevol ordinador.

Aquest panorama convida a preguntar-se quins altres enfocaments podem considerar per resoldre el problema de coloració, suposant que n'existeixi algun, i quin és el cost d'aquests. A continuació veurem que en l'actualitat no es coneix un mètode eficient per resoldre el problema de coloració. Més endavant, a la Secció 5, parlarem de casos particulars on sí podem resoldre el problema amb exactitud.

2.2 Intractabilitat i complexitat computacional

Un *problema de decisió* és una qüestió que es pot plantejar de manera que la resposta sigui "Sí" o "No". Per exemple, donats dos nombres x i y , la pregunta "divideix x exactament a y ?" és un problema de decisió, doncs la resposta és "Sí" o "No", en funció dels nombres

x i y .

Observem que el problema de coloració de grafs es pot reformular com un problema de decisió. En comptes de preguntar “quin és el mínim λ tal que G admet una λ -coloració?” simplement podem preguntar “donat un graf G , és possible acolorir-lo amb λ colors?”.

En el camp de complexitat computacional, els problemes de decisió es classifiquen segons la dificultat de respondre “Sí” o “No” a la qüestió que es plantegi. Un *procés de decisió* és un mètode per resoldre un problema de decisió. En l'exemple anterior, la divisió llarga de y entre x és un procés de decisió que respondria “Sí” si el residu de la divisió és zero, i “No” altrament. Generalment, un procés de decisió consisteix en un algorisme que, a partir d'un conjunt d'entrades, respon afirmativa o negativament a un problema de decisió sobre aquestes. La dificultat de respondre es mesura a partir dels recursos computacionals que necessiti l'algorisme més efectiu conegut en cada cas concret (on entenem per recursos computacionals la memòria o el temps emprats per l'algorisme).

Diem que un algorisme és de *temps polinòmic* (o polinomial) si el seu temps d'execució T es pot afitar superiorment per un nombre calculat mitjançant un polinomi a partir de les n dades d'entrada, és a dir $T(n) = \mathcal{O}(n^k)$, per alguna constant $k > 0$.

Els problemes de decisió es classifiquen en classes. Descriurem només tres d'aquestes classes doncs la qüestió que estem tractant no precisa que aprofundim més en matèria de complexitat computacional. Classifiquem els problemes de la manera següent:

- Els problemes per als quals es pot trobar una solució mitjançant algorismes de temps polinòmic es diuen de classe P.
- Els problemes per als quals, donat un candidat a solució, existeix un algorisme de temps polinòmic que verifica si aquest candidat és solució o no, s'anomenen de classe NP.
- Finalment, un problema p de NP es diu NP-complet si tot problema de NP es pot reduir a p en temps polinòmic.

Què volem dir exactament per “es pot reduir a p en temps polinomial”? Suposem que D_1 i D_2 són dos problemes de decisió. Diem que D_1 es pot reduir (o transformar) en D_2 , i ho notem $D_1 \propto D_2$, si existeix un algorisme de temps polinomial que transforma qualsevol cas de D_1 en un cas de D_2 , en el sentit que la resposta a D_1 és afirmativa si, i només si, la corresponent resposta en D_2 també ho és. Aquestes transformacions són importants doncs ens permeten decidir si un problema es pot resoldre o no. Per exemple, si se sap que D_1 pertany a NP, i tenim $D_1 \propto D_2$, aleshores D_2 també ha de ser NP. Altrament, si D_2 fos de classe P, això implicaria que tots els casos de D_1 es poden resoldre en temps polinomial i tindriem que D_1 és de classe P, en comptes de NP.

La idea és que els problemes NP-complets pertanyen a NP (en el sentit que tenen potencial a ser resolubles), però encara no es coneix un algorisme efectiu o l'espai de solucions creix exponencialment en relació a la mida del problema, fent inviable la comprovació de solucions. Els problemes NP i NP-complets estan inclosos en una classe que es

diu NP-hard. En el que segueix, però, no distingirem entre NP-complet i NP-hard doncs la diferència simplement consisteix en com són les reduccions d'aquests a un problema de la classe NP.

Durant la dècada dels 70 es van publicar dos articles acadèmics que van suposar un punt de referència en el camp de complexitat computacional. Al 1971, Stephen Cook publica "The Complexity of Theorem Proving Procedures", on prova que no es coneix cap algorisme per respondre totes les variants del problema de satisfacibilitat Booleana (*satisfiability problem* o SAT), demostrant d'aquesta manera que existeix al menys un problema NP-complet [3]. Sense entrar molt en detall, SAT pregunta si existeix alguna assignació de valors a una expressió Booleana tal que evaluar en aquestes retorni "cert".

Per exemple, l'expressió $(x_1 \wedge \neg x_2)$ és satisfactòria (*satisfiable*) perquè assignar "cert" (T) a x_1 i "fals" (F) a x_2 ens retorna $(T \wedge \neg F) = (T \wedge T) = T$. En canvi, l'expressió $(x_1 \wedge \neg x_1)$ no ho és doncs totes les possibles assignacions ens retornen "fals".

Posteriorment, al 1972, Richard M. Karp va publicar "Reducibility Among Combinatorial Problems", on prova la NP-completesa de 21 problemes i la reducció d'alguns d'aquests [4]. La variant de decisió del problema de coloració de grafs és NP-complet perquè generalitza el problema de 3-satisfacibilitat (*3-satisfiability* o 3-SAT) que, en torn, generalitza SAT. A la Figura 5 es pot observar la relació entre SAT i alguns problemes coneguts de teoria de grafs, en particular el problema de coloració [2].

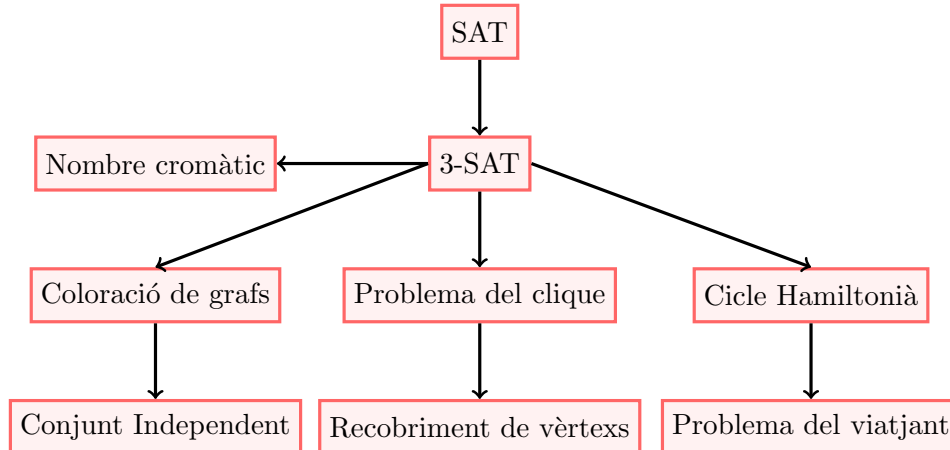


Figura 5: Reduccions polinomials d'alguns problemes de decisió

En vista d'aquesta situació, i pel fet que el problema de coloració resulta ser tant difícil, no és sorprenent que molta de la recerca sobre coloració s'hagi dedicat a buscar mètodes heurístics per acolorir un graf, així com maneres de calcular fites superiors i inferiors per al nombre cromàtic d'un graf.

3 Algorismes

En aquesta secció explicarem el funcionament i les peculiaritats de tres algorismes diferents que es fan servir per acolorir els vèrtexs d'un graf. Es tracta d'algorismes que segueixen un enfocament heurístic, amb la qual cosa sovint no arriben a una solució òptima. Tot i així, molts dels algorismes que existeixen en l'actualitat per resoldre el problema de coloració exactament (com per exemple *backtracking*), fan servir com a base algun d'aquests tres.

En el que segueix, sovint farem servir la paraula *ordre* per referir-nos a una permutació concreta dels vèrtexs d'un graf, en comptes de la connotació que hem fet servir fins ara on l'ordre denotava el cardinal de V . Per tant, el context determinarà a què ens estem referint en cada cas.

3.1 L'algorisme codiciós (Greedy algorithm)

Sigui G un graf amb n vèrtexs, i fixem un ordre (o permutació) v_1, \dots, v_n dels vèrtexs de G . Suposem que disposem de c_1, c_2, \dots colors per assignar a aquests vèrtexs. L'algorisme codiciós funciona de la manera següent:

1. Assignem c_1 a v_1 .
2. En el pas $i + 1$, assignem a v_{i+1} el color c_j amb la j més petita que no s'hagi fet servir per acolorir els vèrtexs adjacents a v_{i+1} .
3. Repetim el pas 2 fins exhaurir els vèrtexs de G .

Podem estudiar fàcilment la complexitat de l'algorisme en termes del nombre de comprovacions totals necessàries. En cada iteració s'aconsegueix acolorir un vèrtex de G , per tant necessitarem iterar n vegades. Sigui v_i el vèrtex que volem acolorir en cada iteració. En el pitjor dels casos, v_i serà adjacent a tots els anteriors (per exemple, si $G = K_n$), i per tant haurem de comprovar $i - 1$ colors abans de concloure que s'ha d'assignar c_i a v_i . Això ens dóna un total de $0 + 1 + 2 + \dots + (n - 1)$ comprovacions, amb la qual cosa tenim que el pitjor escenari és d'ordre $\mathcal{O}(n^2)$. Com hom pot intuir, la coloració resultant depèn de l'ordre triat:

Exemple 3.1. Considerem el graf de la Figura 6, amb els vèrtexs i els colors en l'ordre que s'indica. Observem que els vèrtexs $\{v_2, v_4, v_5, v_6\}$ formen un K_4 , amb la qual cosa com a mínim necessitarem 4 colors com vam comentar a l'exemple 2.2. Hom pot comprovar que si permutem v_4 i v_6 obtenim la mateixa coloració (en el sentit que hem definit a la secció anterior). En canvi, si considerem una permutació dels vèrtexs com a la Figura 7, obtenim una coloració diferent doncs ara la partició seria

$$\{\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_6\}, \{v_4\}, \{v_5\}\}.$$

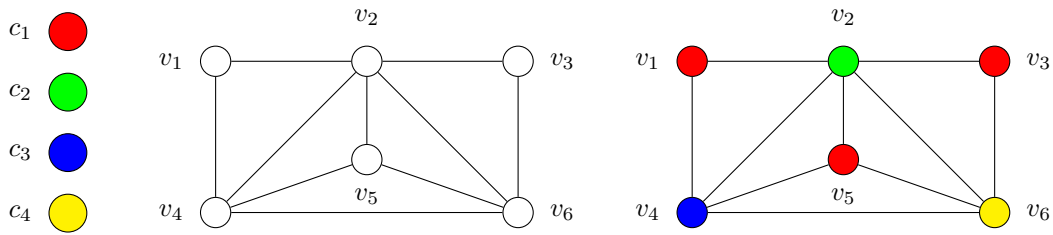


Figura 6: Coloració fent servir la permutació inicial.

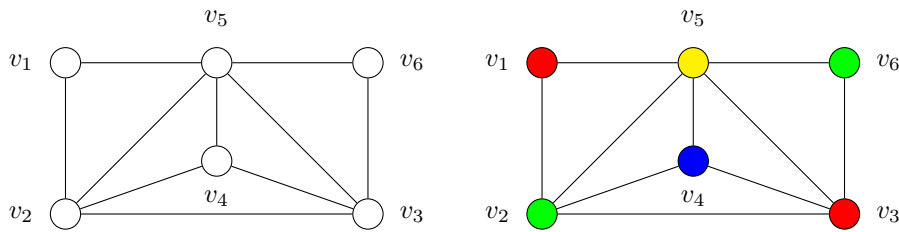


Figura 7: Coloració fent servir la nova permutació.

En aquest exemple ambdós ordres han assolit una coloració òptima, però en general no podem garantir aquest fet. Per exemple, sigui $G = P_4$. Com P_4 és un arbre i els arbres són bipartits, sabem que el nombre cromàtic és $\chi(G) = 2$. En canvi, si considerem una permutació com la de la Figura 8 i apliquem l'algorisme codiciós amb aquest ordre, obtenim una 3-coloració. Aquest és el pitjor resultat que podem obtenir fent servir aquest algorisme per aquest graf.

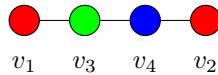


Figura 8: Permutació que no assoleix una coloració òptima

Definició 3.2. S'anomena el nombre de Grundy d'un graf G al màxim nombre de colors que pot produir l'algorisme codiciós si l'apliquem als vèrtexs de G .

Veurem a la secció 4 que en el pitjor dels casos l'algorisme codiciós produeix una $(\Delta + 1)$ -coloració.

Exemple 3.3. Considerem un graf bipartit G d'ordre n parell, tal que $V = \{V_1, V_2\}$ amb $V_1 = \{u_1, u_3, \dots, u_{n-1}\}$ i $V_2 = \{u_2, u_4, \dots, u_n\}$ i el conjunt d'arestes és $E = \{u_i u_j \mid i + 1 \neq j\}$. Per no confondre la notació que hem fet servir per definir V i E , anomenarem v_i en comptes de u_i els vèrtexs de la Figura 9. Siguin σ_1 i σ_2 les dues permutacions que tenim a la figura.

Essencialment, σ_1 considera primer tots els vèrtexs de V_1 i després els de V_2 , mentre que σ_2 alterna vèrtexs de V_1 amb vèrtexs de V_2 en ordre. Observem que σ_1 produeix una 2-coloració (òptima) mentre que σ_2 produeix una $n/2$ -coloració.

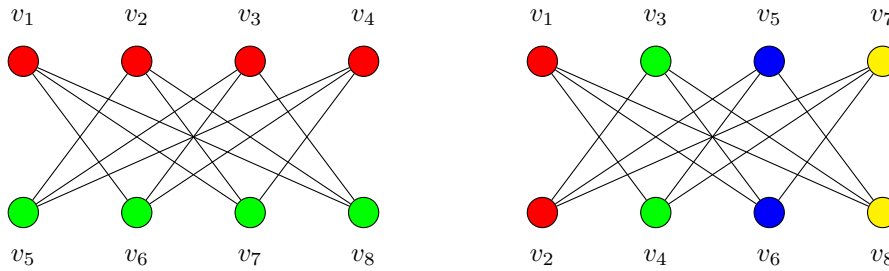


Figura 9: σ_1 (esquerra) i σ_2 (dreta)

Notem que G és 3-regular i per tant $\Delta = 3$ i $\Delta + 1 = 4$, amb la qual cosa una 4-coloració suposa el pitjor escenari possible i σ_2 fa que s'assoleixi el nombre de Grundy.

És evident, doncs, que l'ordre que subministrem a l'algorisme és molt important si volem evitar resultats poc eficients. Segons el resultat, podem classificar aquests ordres en tres categories:

1. Bons ordres

Sempre és possible trobar una permutació tal que l'algorisme codiciós produeixi una coloració òptima. Donada qualsevol coloració òptima, és suficient enumerar els vèrtexs de G seguint l'ordre dels colors. És a dir, primer tots els vèrtexs tals que $c(v) = 1$, després els vèrtexs tals que $c(v) = 2$, etc. Una permutació d'aquest tipus farà que l'algorisme produeixi automàticament una coloració òptima.

Òbviament, aquesta premissa no és realista doncs partim d'una coloració òptima, i hem vist a la secció 2.2 que resoldre aquest problema és NP-complet.

A la secció 5.3 parlarem d'un tipus de grafs per als quals existeix un ordre tal que l'algorisme codiciós produeixi una coloració òptima.

2. Ordres dolents

Diem que un ordre és dolent si en executar l'algorisme codiciós amb aquest ordre s'assoleix el nombre de Grundy, com hem pogut veure a l'exemple 3.3. De la mateixa manera que trobar una coloració òptima és NP-complet, s'ha demostrat que fixat un k , demostrar si existeix una permutació tal que l'algorisme faci servir k colors o més, també és NP-complet [5].

3. Situacions on l'ordre és irrellevant

Si tota permutació produeix el mateix nombre de colors, aleshores el nombre cromàtic i el nombre de Grundy coincideixen. Els grafs que satisfan aquesta propietat s'anomenen *grafs ben acolorits*. De nou, a [5] es demostra que determinar si un graf és

ben acolorit és co-NP-complet (el seu complementari és NP-complet).

L'algorisme codició té una propietat interessant i és el fet que una solució \mathcal{S} ens permet generar noves permutacions. Aquestes es poden introduir de nou per obtenir una nova solució \mathcal{S}' . Provarem que \mathcal{S}' fa servir tants colors com \mathcal{S} o menys.

Teorema 3.4. *Sigui $\mathcal{S} = \{V_1, \dots, V_{|\mathcal{S}|}\}$ una coloració de G . Considerem cada classe V_i una darrere l'altra, i introduïm els vèrtexs un a un a l'algorisme codició. Aleshores, la solució resultant \mathcal{S}' també és factible i satisfà $|\mathcal{S}'| \leq |\mathcal{S}|$.*

Prova. Com $\mathcal{S} = \{V_1, \dots, V_{|\mathcal{S}|}\}$ és solució, cada $V_i \in \mathcal{S}$ és un conjunt de vèrtexs independent i clarament, tot subconjunt $T \subseteq V_i$ també ho serà. Apliquem ara l'algorisme codició fent servir \mathcal{S} per construir un nou candidat a solució \mathcal{S}' . En fer-ho, considerem els $V_1, \dots, V_{|\mathcal{S}|}$ en ordre i assignarem $v \in V_i$ a un nou conjunt $V'_j \in \mathcal{S}'$ seguint les regles de l'algorisme (és a dir, considerem primer V'_1 , després V'_2 , etc.). Afirmem que es donarà una de les dues situacions següents:

1. Existirà un $V'_j \in \mathcal{S}'$ tal que $V'_j \cup \{v\}$ és independent, amb $j < i$.
2. Existirà un $V'_j \in \mathcal{S}'$ tal que $V'_j \cup \{v\}$ és independent, amb $j = i$.

Clarament en ambdós casos s'assignarà v a un conjunt de \mathcal{S}' amb índex menor o igual al $V_i \in \mathcal{S}$ original. En particular, si la condició 1 es dona per tots els elements d'algun V_i concret, aleshores \mathcal{S}' tindrà menys colors que \mathcal{S} .

Suposem que existeix algun $v \in V_i$ tal que és necessari assignar-lo a un V'_j amb $j > i$. Això vol dir que o bé en el cas 1 o en el cas 2, el conjunt $V'_j \cup \{v\}$, per $j \leq i$ no és independent. Ara bé, per com hem definit els V'_j , tenim que $V'_i \subset V_i$ és independent i $V'_i \cup \{v\} \subseteq V_i$ també. Amb la qual cosa tenim una contradicció, i no pot existir tal v . \square

Observació: Aquesta demostració pot semblar enganyosa però hem de notar que, com hem vist a la secció 2.1, podem triar l'ordre dels conjunts V_i amb total llibertat doncs constitueixen la mateixa solució. De la mateixa manera, l'ordre dels elements de cada V_i també es pot considerar com desitgem. Per tant els arguments que hem fet servir estan justificats. Vegem-ne un exemple:

Exemple 3.5. Considerem el graf de la Figura 10. La 4-coloració de l'esquerra s'ha generat fent servir l'algorisme codició, resultant $\mathcal{S} = \{\{v_1, v_4, v_8\}\{v_2, v_7\}\{v_3, v_5\}\{v_6\}\}$.

Fem servir aquesta solució per crear una nova permutació $\sigma = (v_1, v_4, v_8, v_2, v_7, v_3, v_5, v_6)$. En virtut de l'observació, podem reinterpretar aquesta permutació d'aquesta altra manera: $\sigma = (v_2, v_7, v_5, v_3, v_6, v_4, v_8, v_1)$. Si introduïm a l'algorisme els vèrtexs en aquest ordre, obtenim la 3-coloració de la dreta. Notarem el nou ordre amb u_i 's per no confondre amb el cas anterior (és a dir $u_1 = v_2, u_2 = v_7, u_3 = v_5$, etc).

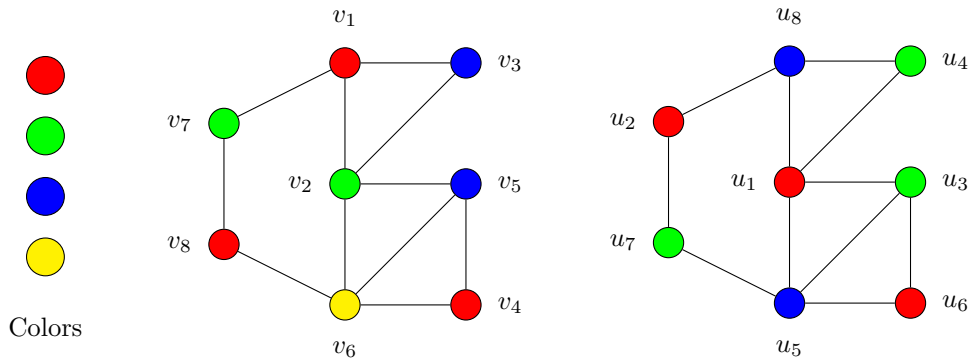


Figura 10: Solucions inicial \mathcal{S} (esquerra) i final \mathcal{S}' (dreta)

3.2 L'algorisme DSATUR

L'algorisme DSATUR (de l'anglès *degrees of saturation*) va ser proposat al 1979 per Daniel Brélaz. A diferència de l'algorisme codició, on l'ordre dels vèrtexs es decideix prèviament, DSATUR decideix quin és el següent vèrtex en funció de la coloració actual. A cada iteració assignem als vèrtexs $v \in G$ un valor $sat(v)$ (grau de saturació), que és el nombre de colors diferents en $\Gamma(v)$. Formalment, $sat(v) = |A|$, on $A = \{c(u) : u \in \Gamma(v), c(u) \neq \text{NULL}\}$ (és a dir, si $u \in \Gamma(v)$ encara no té un color assignat, llavors $u \notin A$).

L'assignació de colors segueix el mateix procediment que l'algorisme codició però ara, a cada pas, triarem el vèrtex amb major grau de saturació. Si tenim diversos vèrtexs amb el mateix grau de saturació triarem el vèrtex amb major grau ($\deg(v)$). Si tot i així tenim algun empat, triem aleatòriament entre aquests. La idea de seguir aquest ordre és triar primer els vèrtexs amb més restriccions, i d'aquesta manera deixar els vèrtexs amb més llibertat per acolorir-se al final. A l'Annex 1 trobarem un exemple detallat de com funciona l'algorisme DSATUR.

Com l'assignació de colors coincideix amb la de l'algorisme anterior, aquest també es tracta d'un algorisme amb ordre $\mathcal{O}(n^2)$, tot i que necessitarem memòria addicional per fer un seguiment del grau de saturació dels vèrtexs no acolorits.

Pel fet que l'algorisme DSATUR genera l'ordre dels vèrtexs durant l'execució, el seu rendiment és més previsible per alguns tipus de grafs. El primer exemple que veurem són els grafs bipartits, i farem servir una caracterització que s'acostuma a veure en qualsevol curs introductori de teoria de grafs:

Teorema 3.6. *Un graf és bipartit si, i només si, no conté cicles d'ordre senar.* \square

Teorema 3.7. (Brélaz, 1979) *L'algorisme DSATUR és exacte per grafs bipartits.*

Prova. Suposarem que G és connex, doncs si no ho és podem considerar cada component connexa i la demostració funciona igual. Sigui, doncs, G un graf bipartit d'ordre $n \geq 3$.

Suposem que existeix algun $v \in G$ tal que $\text{sat}(v) = 2$ (és a dir, v té dos veïns u_1, u_2 amb colors diferents). Com G és connex, podem connectar u_1 i u_2 a qualsevol altre $u \in G$, amb la qual cosa podem formar un cicle que conté els vèrtexs v, u_1, u_2, u i, potser d'altres. Com G és bipartit, aquest cicle haurà de ser d'ordre parell, amb la qual cosa u_1 i u_2 han de tenir el mateix color, contradint la hipòtesi $\text{sat}(v) = 2$. \square

Aquest fet suposa una millora considerable respecte l'algorisme codiciós, que com hem vist a l'exemple 3.3 pot resultar en $n/2$ -coloracions.

Teorema 3.8. *L'algorisme DSATUR és exacte per cicles i rodes.*

Prova. Observem primerament que els cicles d'ordre parell són bipartits, i podem aplicar el teorema anterior. Dit això, sigui C_n un cicle qualsevol. Com tots els vèrtexs de C_n tenen grau 2, el primer vèrtex que triarem serà $v \in C_n$ arbitrari. En els $n - 2$ passos següents, seguint el comportament de l'algorisme haurem construït un camí amb colors alternats que s'estén des de v en les dues direccions. Aquest camí té $n - 1$ vèrtexs i per tant resta un últim vèrtex u , que serà adjacent als extrems d'aquest camí. Si n és parell, aleshores $n - 1$ és senar i els extrems del camí tindran el mateix color, cosa que ens permet acolorir u amb el color alternatiu. Si n és senar, els extrems tindran colors diferents i haurem d'assignar a u un tercer color. En qualsevol cas, el resultat és exacte.

Si $G = W_n$ amb $n \geq 5$, DSATUR triarà primer el vèrtex central v_n doncs és el de grau més gran. Com v_n és adjacent a tots els vèrtexs restants, aquests passaran a tenir grau de saturació 1 i a partir d'aquí es raona com en el cas anterior. \square

Tot i els resultats anteriors, l'algorisme DSATUR pot resultar poc efectiu per grafs en general. A la Figura 11 tenim un graf que tot i ser 3-colorable, DSATUR produirà una 4-coloració independentment de com desfem els empats. Podem trobar més informació sobre aquest fenomen a les referències [6], [7].

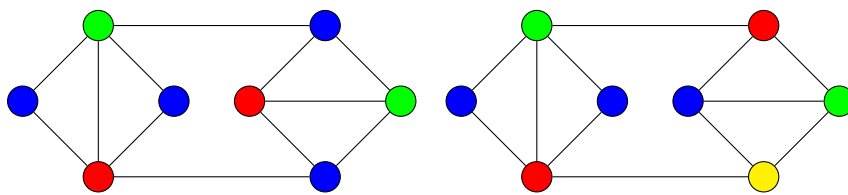


Figura 11: 3-coloració (esquerra) i coloració subòptima produïda per DSATUR (dreta).

3.3 L'algorisme RLF

L'algorisme RLF (de l'anglès *Recursive Largest First*) va ser proposat al 1979 per Frank T. Leighton, amb el propòsit de resoldre problemes d'horari. L'algorisme funciona de manera diferent als casos anteriors, en el sentit que abans acoloríem vèrtex a vèrtex, i ara ho farem color a color. La manera d'aconseguir-ho és creant conjunts de vèrtexs independents de manera heurística, acolorint vèrtexs en el procés. Considerem X, Y, \mathcal{S} , on $\mathcal{S} = \{V_1, V_2, \dots\}$ serà el conjunt de classes independents, i X i Y conjunts on emmagatzemarem vèrtexs. Comencem amb $X = V(G), Y = \emptyset$ i $\mathcal{S} = \emptyset$. Procedim de la següent manera:

1. Triem un vèrtex $v \in X$, i l'assignem a V_i
2. Assignem $\Gamma(v)$ a Y i transformem X en $X - (Y \cup \{v\})$
3. Tornem al pas 1, i repetim aquest procés fins que $X = \emptyset$
4. Un cop tinguem $X = \emptyset$, tots els vèrtexs $v \in V_i$, corresponen al color i , (és a dir, $c(v) = i$). Per tant, afegim V_i a \mathcal{S} .
5. Buidem X , bolquem Y en X i buidem Y , i tornem al pas 1 amb $i + 1$.
6. El procés acaba quan $X = \emptyset$ i $Y = \emptyset$

La tria de vèrtexs és similar a com feiem en DSATUR: triarem primer els vèrtexs amb major grau. Si ens trobem amb un empat triarem aleatòriament entre aquests. A l'Annex 1 trobarem un exemple detallat de com funciona l'algorisme RLF.

Leighton va provar que en el pitjor dels casos aquest algorisme és d'ordre $\mathcal{O}(n^3)$ [8]. Això representa un cost més gran respecte als algorismes anteriors, però tot i així encara estem parlant de temps polinòmic. De la mateixa manera que DSATUR, l'algorisme RLF també és exacte per alguns tipus de grafs.

Teorema 3.9. *L'algorisme RLF és exacte per grafs bipartits.*

Prova. Podem trobar la demostració a la pàgina 44 de [2]

Teorema 3.10. *L'algorisme RLF és exacte per cicles i rodes.*

Prova. Com abans, els cicles d'ordre parell són bipartits i es podria aplicar el teorema anterior. Sigui C_n un cicle qualsevol amb vèrtexs $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ i arestes $E = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$. Sense pèrdua de generalitat, suposarem que els empats es desfan considerant el vèrtex amb subíndex més petit.

Com tots els vèrtexs tenen grau 2, el primer en ser acolorit serà v_1 . A continuació, v_2 i v_n s'afegiran a Y i s'acolorirà v_3 . Seguidament s'afegeix v_4 a Y i s'acolorirà v_5 , i així successivament fins arribar a $V_1 = \{v_1, v_3, \dots, v_{n-1}\}$ en el cas parell i $V_1 = \{v_1, v_3, \dots, v_{n-2}\}$ en el cas senar. En el cas senar, X passa a ser el subgraf $\{v_2, v_4, \dots, v_n\}$, que no conté arestes i per tant RLF acolorirà tots aquests amb el segon color. En el cas senar, X passa a ser el subgraf $\{v_2, v_4, \dots, v_{n-1}, v_n\}$ amb una única aresta, $v_{n-1}v_n$. Seguint la heurística de l'algorisme, s'acoloriran tots els vèrtexs de subíndex parell amb el segon color i, finalment, v_n amb el tercer.

Si $G = W_n$ amb $n \geq 5$, es raona de manera similar a DSATUR. L'algorisme RLF triarà v_{n+1} (vèrtex central) primer doncs és el de major grau i l'assignarà el primer color. Com la resta de vèrtexs són adjacents a aquest, passem al següent color amb el subgraf resultant, que és un cicle C_n , i per tant apliquem el procés que acabem de veure. \square

Trobarem una comparativa empírica sobre el rendiment d'aquests tres algorismes en grafs aleatoris a la secció 2.5 de [2].

4 Fites per al nombre cromàtic

En aquest apartat ens proposem calcular aproximacions al nombre cromàtic d'una manera més teòrica. Com hem vist a la secció anterior, els algorismes que fan servir un enfocament heurístic poden donar lloc a resultats poc eficients. És interessant, doncs, tenir eines per afitar inferior i superiorment $\chi(G)$ per tal de decidir si acceptem o rebutgem el resultat obtingut o si hem de considerar altres enfocaments. Algun dels resultats que veurem està relacionat amb problemes de teoria de grafs que, per sí mateixos, pateixen del mateix tipus de complexitat computacional que el problema que ens ocupa, amb la qual cosa no suposen una millora en termes de resoldre el problema de manera exacta. Tractarem principalment els teoremes clàssics que es poden trobar a qualsevol llibre que parli sobre coloració de grafs, però existeixen multitud de resultats més específics amb exemples i contraexemples en referències com [9].

Recordem que un graf G es diu λ -cromàtic si $\chi(G) = \lambda$. En canvi, si G admet una λ -coloració a priori només tenim que $\chi(G) \leq \lambda$, doncs no sabem si el valor de λ és el menor possible.

4.1 Fites inferiors

Les fites inferiors de $\chi(G)$ més habituals tenen a veure amb el *nombre d'independència* de G i el concepte de *clique*.

Definició 4.1. *El nombre d'independència de G és el cardinal del màxim conjunt independent de vèrtexs de G , i es nota $\alpha(G)$.*

Observem que en una λ -coloració, tots els conjunts de la partició $V = \{V_1, \dots, V_\lambda\}$ són independents. Per tant tenim el resultat següent:

Proposició 4.2. *Si G un graf amb n vèrtexs. Aleshores,*

$$\frac{n}{\alpha(G)} \leq \chi(G)$$

Prova. Si χ és el nombre cromàtic de G , aleshores podem dividir $V(G)$ en χ conjunts independents $V(G) = \{V_1, \dots, V_\chi\}$ i tenim $|V_k| \leq \alpha(G)$ per cada $k = 1, \dots, \chi$. Per tant,

$$n = \sum_{k=1}^{\chi} |V_k| \leq \sum_{k=1}^{\chi} \alpha(G) = \chi \cdot \alpha(G)$$

□

Com el nombre cromàtic és un enter podem afirmar, de fet, $\lceil \frac{n}{\alpha(G)} \rceil \leq \chi(G)$, on $\lceil \cdot \rceil$ denota el *sostre* d'un nombre real.

A continuació parlem del *clique* d'un graf G . Alguns autors com [10] en diuen *colla*, però aquí farem servir la terminologia estàndard.

Definició 4.3. *Donat un graf G , un clique de G és un subgraf $H \subset G$ tal que H és complet. Notarem per $\omega(G)$ l'ordre del clique més gran contingut en G , és a dir, l'ordre del subgraf complet més gran contingut en G .*

Per provar que $\omega(G)$ és fita inferior de $\chi(G)$, primer cal demostrar el següent resultat.

Teorema 4.4. *Sigui G un graf i $H \subset G$ un subgraf de G . Aleshores, $\chi(H) \leq \chi(G)$.*

Prova. Sigui $\lambda = \chi(G)$. Aleshores existeix una λ -coloració de G , i com $H \subset G$, això vol dir que aquesta també és una λ -coloració de H . Amb la qual cosa, $\chi(H) \leq \lambda$. \square

Corol·lari 4.5. *Sigui G un graf. Aleshores, $\omega(G) \leq \chi(G)$.* \square

Com estem intentant afitar $\chi(G)$ inferiorment, ens interessa trobar la més gran de les fites inferiors, i per tant podem combinar 4.2 i 4.5 per concloure.

Corol·lari 4.6. *Sigui G un graf. Aleshores,*

$$\max\{\omega(G), \lceil \frac{n}{\alpha(G)} \rceil\} \leq \chi(G)$$

\square

El Corol·lari 4.5 essencialment ens diu que tot graf que contingui algun K_p com a subgraf ha de satisfer $p \leq \chi(G)$. Aquest fet pot semblar una victòria primerenca, però topem amb dos inconvenients.

1. Trobar subgrafs complets d'ordre petit pot resultar trivial, però el càlcul general de $\omega(G)$ es considera difícil. Donat un enter positiu k , el problema de determinar si G conté un clique d'ordre k es coneix com *el problema del clique*, i és de classe NP-complet. De fet, el problema del clique és complementari al problema de trobar el nombre d'independència, que és NP-hard. Per tant, la fita $\alpha(G) \leq \chi(G)$ tampoc ens apropa a solucionar el problema.
2. Existeixen grafs amb $\chi(G)$ arbitràriament gran i $\omega(G)$ petit, amb la qual cosa no obtenim una bona aproximació per $\chi(G)$ a partir de $\omega(G)$.

Un exemple clàssic per il·lustrar aquest darrer punt és el *graf de Grötzsch* (Figura 12), anomenat així en honor al matemàtic alemany Herbert Grötzsch. Es tracta d'un graf que no conté cap clique d'ordre 3 o superior, i en canvi el seu nombre cromàtic és $\chi(G) = 4$.

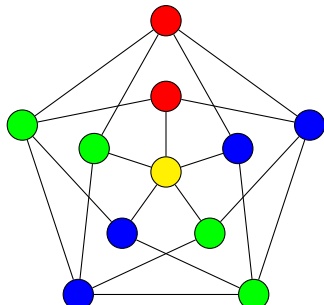


Figura 12: 4-coloració del graf de Grötzsch.

Aquest tipus de grafs van ser descoberts independentment per Jan Mycielski al 1955, i la generalització és una construcció que es coneix com el *Mycielskià*.

Teorema 4.7. *Per a tot enter $\lambda \geq 0$, existeix un graf G sense triangles tal que $\chi(G) = \lambda$.*

Prova. El resultat és cert per $\lambda = 1, 2$ doncs tot graf amb $\chi(G) = 1$ o $\chi(G) = 2$ no pot contenir triangles. Per $\lambda \geq 3$, procedirem per inducció. Si $\lambda = 3$, el resultat és cert doncs $\chi(C_5) = 3$ i C_5 no conté triangles. Suposem doncs, que existeix un graf sense triangles amb nombre cromàtic λ , per a $\lambda \geq 3$. Sigui H aquest graf, i sigui $V(H) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Construïm un graf G a partir de H afegint $n + 1$ vèrtexs, w, u_1, \dots, u_n de manera que w és adjacent a cada u_i , ($1 \leq i \leq n$) i u_i és adjacent a cada vèrtex adjacent a v_i en H . Afirmem que G és $(\lambda + 1)$ -cromàtic i sense triangles. Veiem primerament que no conté triangles. Com $S = \{u_1, \dots, u_n\}$ és un conjunt de vèrtexs independent de G i w no és adjacent a cap vèrtex de H , podem afirmar que u no pertany a cap triangle de G . Per tant si G conté algun triangle T , llavors dos dels seus vèrtexs han d'estar en H i el tercer en S . Sigui $V(T) = \{u_i, v_j, v_k\}$. Com u_i és adjacent a v_j i v_k , s'ha de tenir v_i adjacent a v_j i v_k , (per definició de u_i). Però llavors H conté el triangle $\{v_i, v_j, v_k\}$, que és una contradicció. Per tant G no conté triangles.

Veiem ara que $\chi(G) = \lambda + 1$. Com H és un subgraf de G i $\chi(H) = \lambda$, tenim que $\chi(G) \geq \lambda$. Sigui C una λ -coloració de H i assignem a u_i el mateix color que a v_i , $1 \leq i \leq n$. Assignar a w el color $\lambda + 1$ ens proporciona una $(\lambda + 1)$ -coloració, amb la qual cosa $\chi(G) \leq \lambda + 1$. Per tant, o bé $\chi(G) = \lambda$, o bé $\chi(G) = \lambda + 1$. Suposem $\chi(G) = \lambda$. Aleshores, existeix una λ -coloració de G amb colors $1, 2, \dots, \lambda$. Reordenant si cal, podem suposar que hem assignat a w el color λ . Cap dels vèrtexs u_1, \dots, u_n pot tenir assignat aquest color, doncs són adjacents a w , i per tant tot vèrtex de S té colors pertanyents a $\{1, 2, \dots, \lambda - 1\}$. Com $\chi(H) = \lambda$, al menys algun vèrtex de H ha de tenir el color λ . Ara bé, si a cada $v_i \in H$ amb color λ li assignem el color de u_i , obtindriem una $\lambda - 1$ -coloració de H . Això resulta de la definició dels u_i (doncs els vèrtexs adjacents a u_i són w i els vèrtexs adjacents a v_i en H , i els u_1, \dots, u_n necessiten $\lambda - 1$ colors). Però aquest fet contradueix $\chi(H) = \lambda$. Per tant, ha de ser $\chi(G) = \lambda + 1$. \square

Aquesta construcció prova que podem trobar grafs de manera que $\omega(G)$ ens dona una fita inferior igual a 2 mentre que $\chi(G)$ pot ser arbitràriament gran. Per altra banda, existeixen grafs on la fita $\omega(G) \leq \chi(G)$ s'assoleix i, a més, és fàcil de calcular. Aquest és el cas dels *grafs perfectes*, dels quals parlarem a la secció 5.2.

4.2 Fites superiors

Sempre podem trobar una coloració de G amb $\Delta + 1$ colors a fent servir l'algorisme codiciós. Es procediria de la manera següent:

- Considerem en G la distància habitual: si $v_i, v_j \in V(G)$, aleshores $d(v_i, v_j)$ és el nombre d'arestes del camí més curt que connecta v_i amb v_j .
- Prenem un vèrtex $v_n \in G$, i considerem l'ordre (v_1, v_2, \dots, v_n) de manera que si $d(v_i, v_n) \geq d(v_j, v_n)$, llavors $i < j$. En altres paraules, els primers vèrtexs de la permutació són els més allunyats de v_n .
- Assignem el color 1 a v_1 . Veurem que per $i < n$, podem acolorir v_i amb un dels colors $1, 2, \dots, \Delta$. Clarament és cert per v_1 .
- Si $1 < i < n$, tenim que v_i té al menys un veí que no ha estat acolorit (per exemple, un que sigui més proper a v_n). Com el grau de v_i és menor o igual a Δ , els seus veïns han fet servir com a molt $\Delta - 1$ colors, i per tant algun dels $1, 2, \dots, \Delta$ està disponible per v_i .
- Un cop hem acolorit v_1, \dots, v_{n-1} amb els colors $1, \dots, \Delta$, fem servir el color $\Delta + 1$ per acolorir v_n .

Observem que si $\deg(v_n) < \Delta$, en tindrem prou amb Δ colors. Com l'elecció de v_n ha estat arbitrària, podem triar v_n d'aquesta manera i concloure $\chi(G) \leq \Delta$. L'única instància on no podem fer això és quan G és regular, doncs en aquest cas tots els vèrtexs tenen grau Δ . En particular, aquest v_n també i llavors es manté la desigualtat $\chi(G) \leq \Delta + 1$.

Teorema 4.8. *Si G és un graf qualsevol, aleshores, $\chi(G) \leq \Delta + 1$.* □

Corol·lari 4.9. *Si G és un graf no regular, aleshores $\chi(G) \leq \Delta$.* □

Observació: Existeixen grafs amb $\chi(G) = \Delta + 1$.

- En els cicles d'ordre senar C_{2n+1} tenim $\Delta = 2$ i $\chi(G) = 3$.
- En els grafs complets K_n tenim $\Delta = n - 1$ i $\chi(G) = n$.

Notem que, en ambdós casos, es tracta de grafs regulars. El següent resultat afirma que, de fet, aquests són els únics exemples.

Teorema 4.10. (Teorema de Brooks, 1941)

Si G és un graf connex diferent de K_n i C_{2n+1} , aleshores $\chi(G) \leq \Delta$. □

De manera similar a com feiem per la fita inferior $\omega(G) \leq \chi(G)$, podem trobar exemples on $\chi(G) \leq \Delta$ resulta poc eficient.

Exemple 4.11. A la Figura 13 tenim dos exemples on el grau màxim ens proporciona poca informació sobre el nombre cromàtic. En el primer cas, la roda W_8 té nombre cromàtic 3 mentre que el vèrtex central té grau màxim $\Delta = 8$. En el segon cas, com es tracta d'un graf bipartit tenim $\chi(G) = 2$ i en canvi $\Delta = 9$. Clarament podem generalitzar als casos W_n i $K_{1,n}$ per construir grafs amb Δ arbitràriament gran i $\chi(G)$ petit.

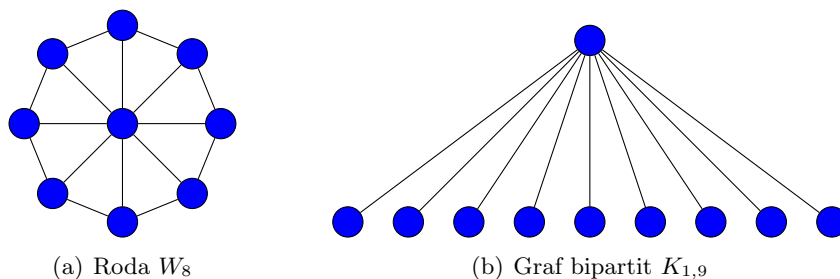


Figura 13: Grafs amb Δ gran i $\chi(G)$ petit.

5 Respostes al problema de coloració

El problema de coloració de grafs és difícil de resoldre en general. En apartats anteriors com el d'algorismes, hem vist que un mateix procediment pot produir resultats òptims per un tipus de graf i d'altres no. Per tant és natural preguntar-se si, donat un graf, existeixen propietats que millorin la tractabilitat del problema. Discutir aquests tipus de grafs i oferir, si més no, una resposta parcial, és l'objectiu d'aquesta secció.

Primerament farem un petit repàs dels grafs planaris que coneixem de l'assignatura de Grafs de 2n curs del Grau de Matemàtiques (per aquest motiu, ometrem la majoria de les demostracions). La seva relació amb el problema de coloració de mapes i el teorema dels 4 colors els converteix en un exemple idoni per adaptar aquest contingut a Secundària. A més, com veurem a la secció 6, un dels intents per demostrar del teorema dels 4 colors va donar llum a objectes matemàtics que també es poden treballar a Batxillerat.

Posteriorment estudiarem tres classes de grafs (grafs perfectes, grafs de cordes i grafs d'interval) per als quals el problema es pot resoldre en temps polinomial. Malgrat això, encara s'hauria de discutir si identificar aquests tipus de grafs és factible a nivell computacional. Comentarem breument algunes de les propietats que els caracteritzen i quins algorismes es fan servir per identificar-los, però no aprofundirem en aquests algorismes doncs aquest no és el nostre focus principal.

5.1 Grafs planaris. Coloració de mapes i el teorema dels 4 colors

La formulació “original” del teorema dels 4 colors fa servir el concepte del *dual* d’un graf G , però aquí tractarem la versió simplificada del problema. Les condicions que imposen i la manera d’assignar un graf G a un mapa seran les següents:

- Suposem que els països o regions són connexos (és a dir, no tenim situacions com la de la Figura 14).
- Identifiquem cada regió del mapa amb un vèrtex de G de manera que si dues regions tenen frontera comú, aleshores els vèrtexs corresponents són adjacents (Figura 15).

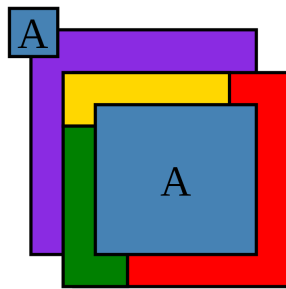


Figura 14: La regió A d’aquest mapa no és connexa

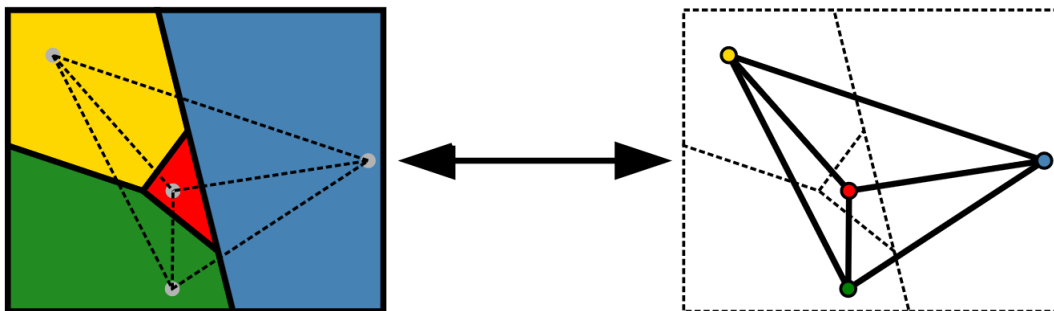


Figura 15: Construcció del graf corresponent a un mapa amb regions connexes

El graf resultant és un graf plà (Definició 5.2), i en el que segueix d’aquesta secció ens centrarem en l’estudi d’aquest tipus de grafs per tal d’estudiar el problema de coloració de mapes.

Donat un graf G , ens interessa trobar representacions de G en \mathbb{R}^2 de manera que les seves arestes no es tallin. Si no és possible trobar-ne una, volem ser capaços de justificar-ho sense haver de considerar totes les possibles configuracions.

Definició 5.1. *Dos grafs G i H són isomorfs si existeix una bijecció φ entre els seus vèrtexs que preserva arestes:*

$$\varphi : V(G) \longrightarrow V(H), \text{ tal que } uv \in E(G) \iff \varphi(u)\varphi(v) \in E(H).$$

Observem que aquesta bijecció preserva la connexió d'un vèrtex amb la resta. En particular, un isomorfisme de grafs preserva els graus. Fins ara, quan parlavem de coloració no feiem cap mena de referència a la representació de G , i és precisament pel fet que la coloració no depèn de com representem G sinó de les connexions entre els vèrtexs.

Definició 5.2. *Un graf G es diu plà si les seves arestes no es tallen. Direm que G és planari si és isomorf a un graf plà. En aquest sentit, d'ara en endavant parlarem indistintament de grafs plans o planaris. Clarament, tot subgraf d'un graf planari és planari.*

Exemple 5.3. K_4 (Figura 16 (a)) és planari com podem observar a (b). D'altra banda, K_5 no és planari (es pot demostrar que com a conseqüència del Teorema 5.8).

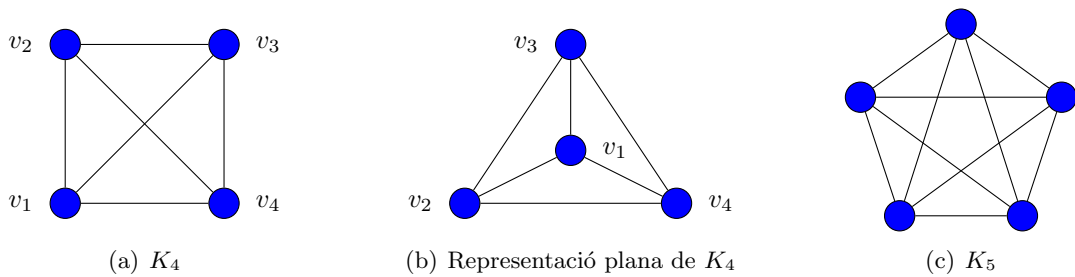


Figura 16: Grafs planaris i no planaris

Per provar que un graf és planari és suficient trobar un graf plà que sigui isomorf a aquest. En canvi, per provar que no ho és s'acostuma a fer servir algun dels teoremes que donarem a continuació, però necessitem definir abans què són les *subdivisions* i les *cares* de G .

Definició 5.4. *Un graf H és una subdivisió de G si s'obté a partir de G afegint vèrtexs a les seves arestes.*

Exemple 5.5. A la Figura 17 tenim un graf planari i dues subdivisions d'aquest. Observem que el fet d'afegir vèrtexs fa que el nombre d'arestes també augmenti, però el nombre de talls és el mateix (en aquest cas, és 0). Per tant una subdivisió serà planària si, i només si, el graf original ja ho era. També es cert que si G conté un subgraf que és subdivisió d'un graf no planari, aleshores G tampoc ho és.

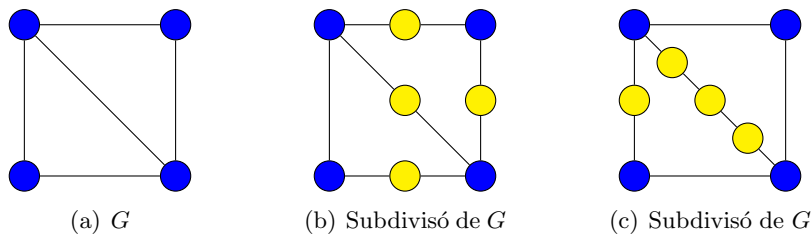


Figura 17: Subdivisió d'un graf planari

Un altre paràmetre a tenir en compte per determinar si un graf és planari o no són les cares (o regions) de G .

Definició 5.6. Si G és un graf planari, anomenem cares o regions de G a les components connexes de $\mathbb{R}^2 \setminus G$. La component connexa no fitada s'anomena cara exterior. Denotem el nombre de cares de G per $f(G)$ o simplement f .

Exemples 5.7.

1. Si G és un arbre, $f(G) = 1$ i només tenim la cara exterior.
2. Si G és un cicle d'ordre $n \geq 3$, $f(G) = 2$.
3. Si G és una roda d'ordre $n \geq 3$, $f(G) = n + 1$.

Teorema 5.8. (teorema de la característica d'Euler)

Si G és un graf planari, aleshores $n - m + f = 2$ (on $n = |V|$, $m = |E|$). □

A partir d'aquest resultat es pot demostrar que els grafs K_5 i $K_{3,3}$ no són planaris. En particular, el teorema de Kuratowski ens caracteritza els grafs planaris de la manera següent:

Teorema 5.9. (Kuratowski, 1930)

Un graf G és planari si, i només si, no conté cap subdivisió de K_5 o $K_{3,3}$. □

Si un graf conté una subdivisió de K_5 o $K_{3,3}$, sovint es diu que G conté un subgraf de Kuratowski. Fent servir *Depth First Search* es poden trobar subgrafs de Kuratowski en temps lineal d'ordre $\mathcal{O}(n)$ [12].

Com hem comentat al començament, tenim una correspondència entre mapes i grafs planaris. El següent resultat, el famós teorema dels 4 colors, ens permet parlar del nombre cromàtic d'un graf planari.

Teorema 5.10. (teorema dels 4 colors)

Si G és un graf planari, aleshores $\chi(G) \leq 4$. □

Combinant aquest resultat amb la caracterització del Teorema 5.9, podem raonar el següent. Si som capaços de provar (a partir d'algorismes basats en el teorema de Kuratowski) que un graf és planari, llavors tindrem una bona idea sobre quin serà el seu nombre cromàtic doncs el Teorema 5.10 afirma $\chi(G) \leq 4$.

El recíproc, en general, no és cert. Per exemple, $K_{3,3}$ no és planari i en canvi $\chi(K_{3,3}) = 2$. En situacions com aquesta haurem de buscar propietats que ens permetin dir quelcom sobre $\chi(G)$ o provar algun dels algorismes coneguts que pugui funcionar exactament sobre G .

5.2 Grafs perfectes

Els grafs perfectes són un tipus de graf entre els quals es troben, per exemple, els grafs bipartits. En aquests grafs, els problemes “coloració de vèrtexs”, “problema del clique” i “conjunt independent maximal” poden ser resolts en temps polinomial. Per tant és natural preguntar-se si existeix algun tipus de caracterització que ens permeti identificar aquest tipus de grafs.

Definició 5.11. *Un graf G es diu perfecte si és tal que tot subgraf induït $H \subseteq G$ satisfà $\chi(H) = \omega(H)$. Observem que es permet el cas $H = G$.*

Exemple 5.12. Si $G = \{V_1, V_2, E\}$ és un graf bipartit, sabem que el nombre cromàtic de G és $\chi(G) = 2$. Com G no conté triangles, també tenim que $\omega(G) = 2$. Si H és un subgraf induït de G , tenim dues possibilitats. Si H només conté elements d'un dels dos V_i , aleshores H és el graf buit i tenim $\chi(H) = \omega(H) = 1$. Altrament, H conté vèrtexs de V_1 i V_2 , amb la qual cosa continua sent bipartit i $\chi(H) = \omega(H) = 2$. Podem concloure, doncs, que els grafs bipartits són perfectes.

Exemple 5.13. El graf de la Figura 18 (a) és perfecte. Cal comprovar que per tot subgraf induït $H \subseteq G$ tenim $\chi(H) = \omega(H)$. No comprovarem tots els subgrafs induïts però es raona de manera similar als 3 casos que tenim a (b), (c) i (d). Remarcarem en negre gruixut les arestes d'un clique d'ordre màxim en cada cas.

- Si $H = G$, clarament $\chi(G) = 3 = \omega(G)$.
- A la Figura 18 (b) tenim $H = G - v = C_2$, amb la qual cosa $\chi(H) = 2 = \omega(H)$.
- A la Figura 18 (c) tenim $H = G - u$, que clarament satisfà $\chi(H) = 3 = \omega(H)$.
- Finalment, a la Figura 18 (d) tenim $H = G - w = P_4$ que és bipartit (i per tant perfecte), i en particular $\chi(H) = 2 = \omega(H)$.

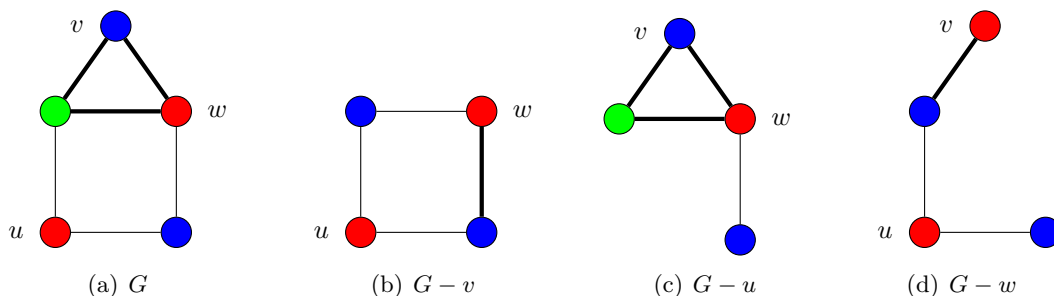


Figura 18: El graf “casa” és perfecte.

Aquest grafs van ser denominats *perfectes* per primera vegada al 1963 pel matemàtic Claude Berge, tot i que ja havien estat descrits anteriorment per Tibor Gallai al 1958 en

un resultat equivalent al teorema de König, relatiu a l'emparellament de grafs.

Els dos resultats principals d'aquesta secció es coneixen com “teorema dels grafs perfectes” i “teorema fort dels grafs perfectes”. No els demostrarem, però definirem els conceptes relacionats amb aquests.

Definició 5.14. Donat un graf G , el seu complementari es nota \overline{G} i és un graf tal que $V(\overline{G}) = V(G)$ però u i v són adjacents en \overline{G} si, i només si no ho són en G .

Observem que una aresta $uv \in \overline{G}$ si, i només si $uv \notin G$. Per tant, els vèrtexs d'un clique en \overline{G} formen un conjunt independent en G . Podem pensar, doncs, que trobar una coloració en G és equivalent a trobar una partició dels vèrtexs de G tal que cada conjunt de la partició sigui un clique en \overline{G} .

Aquest tipus de particions s'anomenen *recobriments per cliques*. Un recobriments per cliques es diu mínim si fa servir el menor nombre de cliques possible. El problema de trobar un recobriments mínim per cliques és un dels 21 problemes de [11], i per tant NP-complet. De totes maneres, s'ha demostrat a [13] que aquest problema es pot resoldre en temps polinomial per grafs perfectes.

A continuació tenim un exemple d'un graf i el seu complementari, on tots dos són perfectes. Veurem com, el teorema que segueix, caracteritza els grafs perfectes amb aquesta mateixa propietat.

Exemple 5.15. Si $G = K_n$ és un graf complet, clarament tenim $\chi(G) = \omega(G) = n$. A més, tot subgraf induït H també és complet i tenim $\chi(H) = \omega(H)$. Per tant tot graf complet és perfecte. Si considerem el complementari de G , $\overline{G} = \overline{K_n} = E_n$ és el graf buit, i clarament per tot subgraf induït H de E_n tenim $\chi(H) = \omega(H) = 1$, amb la qual cosa els grafs buits també són perfectes.

Teorema 5.16. (Teorema dels grafs perfectes)

Un graf G és perfecte si, i només si, \overline{G} és perfecte. □

Exemple 5.17. Com hem vist a l'exemple 5.12, els grafs bipartits són perfectes. En particular, aplicant el teorema anterior podem afirmar que tot graf tal que el seu complement sigui bipartit és perfecte. Podem trobar una demostració explícita d'aquest resultat que no fa servir el teorema anterior a [14].

El Teorema 5.16 va ser conjeatrat per Berge al 1961 i Lovász el va provar al 1972. El següent teorema que veurem caracteritza els grafs perfectes a partir d'un argument de prohibició, de manera similar a com el teorema de Kuratowski caracteritza els grafs planaris com tots aquells que no continguin subdivisions de $K_{3,3}$ o K_5 .

Definició 5.18. *Un cicle de longitud $n \geq 4$ s'anomena un forat. Si n és senar (resp. parell), diem que és un forat senar (resp. parell). Al complementari d'un forat li diem antiforats. Diem que G conté un forat si conté algun cicle induït que sigui un forat.*

A la Figura 19 podem veure un exemple d'un forat i antiforats parells.

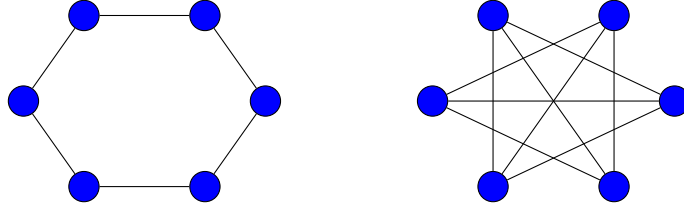


Figura 19: C_6 (esquerra) i el corresponent antiforats (dreta).

Berge va observar que si G és perfecte, G no pot contenir forats senars. En efecte, si $n \geq 5$ i H és un forat senar de G , aleshores tenim $\chi(H) = 3$ i $\omega(H) = 2$, amb la qual cosa G no seria perfecte.

De manera similar, també va observar que G no pot contenir antiforats senars. Si H és un antiforats amb $2k+1$ vèrtexs, llavors es té $\chi(H) = k+1$ i $\omega(H) = k$, i G no seria perfecte.

Definició 5.19. *Diem que un graf G és de Berge si no conté forats o antiforats senars.*

Per tant si G és perfecte, aleshores és de Berge. Aquesta definició ve motivada pel fet que Berge sospitava que el recíproc també era cert. Efectivament, aquest és el resultat que es coneix com el *teorema fort dels grafs perfectes*, la prova del qual va ser publicada al 2002 per Chudnovsky et al. [15].

Teorema 5.20. (Teorema fort dels grafs perfectes)

Un graf G és perfecte si, i només si, és de Berge. És a dir, G és perfecte si no conté forats o antiforats senars. \square

Observem que el primer teorema és conseqüència d'aquest. G conté forats si, i només si \overline{G} conté antiforats, i G conté antiforats si, i només si, \overline{G} conté forats.

Com hem comentat abans, el problema de recobriment per cliques (i com a conseqüència el problema de coloració) es pot resoldre en temps polinomial per grafs perfectes. Tanmateix, el mètode és complicat i el temps d'execució té un exponent polinòmic elevat.

A partir de la caracterització que ens proporciona el teorema 5.20, reconèixer un graf perfecte és equivalent a reconèixer un graf de Berge, cosa que Lóvasz ja va deduir al 1983 que era de classe co-NP [16]. Recentment, posterior a la demostració del teorema 5.20, Chudnovsky et al. van descobrir un algorisme millor per reconèixer grafs perfectes en temps polinomial [17].

5.3 Grafs de cordes i grafs d'interval·s

Definició 5.21. *Un graf de cordes és un graf G tal que tots els cicles d'ordre ≥ 4 de G tenen una corda. Una corda és una aresta que no pertany al cicle però que connecta vèrtexs del cicle. Equivalentment, tot cicle induït en G és un triangle. Per aquest motiu, els grafs de cordes també s'anomenen grafs triangulats.*

A la Figura 20 tenim un exemple d'un cicle induït en un graf i dues cordes. Eliminar alguna d'aquestes resultaria en un graf que no és de cordes doncs contindria un C_4 .

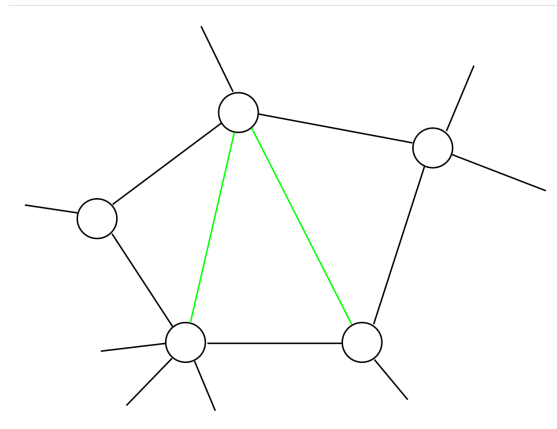


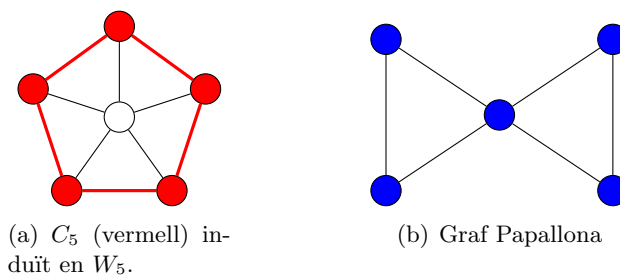
Figura 20: Cicle (negre) amb dues cordes (verd).

Exemples 5.22.

1. Tot arbre és un graf de cordes. (Com els arbres no contenen cicles, la condició “tots els cicles d'ordre ≥ 4 tenen una corda” s'efectua sobre el conjunt buit.)
2. Les rodes W_n , amb $n \geq 4$, no són grafs de cordes doncs el cicle exterior no conté cordes.

Alternativament: si considerem el subgraf induït per W_n menys el vèrtex central, aquest subgraf és un cicle induït C_n , que no és un triangle doncs $n \geq 4$ (Figura 21 (a)).

3. El graf papallona és de cordes (Figura 21 (b))



(a) C_5 (vermell) induït en W_5 .

(b) Graf Papallona

Figura 21: Exemples.

Una de les característiques que fa dels grafs de cordes un cas interessant és el fet que podem ordenar els seus vèrtexs de manera que l'algorisme codició produeix coloracions òptimes. Aquest tipus d'ordres s'anomenen *ordres perfectes per eliminació*, i ho abreuja-rem *PEO* (de l'anglès *perfect elimination ordering*).

Els grafs de cordes són exactamen els grafs que admeten un *PEO*, resultat que van provar Fulkerson & Gross al 1965 i no demostrarem aquí.

Teorema 5.23. (*Fulkerson & Gross [18]*)

Un graf G és de cordes si, i només si, admet un PEO. □

Podem trobar una demostració d'aquest teorema a la pàgina 16 de [20]. A continuació parlarem breument sobre aquest tipus d'ordres i per què resulten útils en el problema de coloració.

Definició 5.24. *Un graf G es diu perfectament ordenable si els seus vèrtexs es poden ordenar de manera que l'algorisme codició (amb aquest ordre) produeix una coloració òptima per tot subgraf induït de G .*

Reconèixer si un graf és perfectament ordenable és NP-complet. De totes maneres, és factible comprovar si un ordre concret és un ordre perfecte per algun graf [19].

Definició 5.25. *Un PEO és una permutació (v_1, \dots, v_n) dels vèrtexs de G de manera que per tot $v_i \in V$, v_i i els veïns de v_i que apareixen després de v_i en aquest ordre, formen un clique. Formalment, $v_i \cup (\Gamma(v_i) \cap \{v_{i+1}, \dots, v_n\}) = K_p$, per algun $1 \leq p \leq n$.*

Observem que invertint un *PEO* es té que per tot $v \in G$, v i els veïns que el precedeixen formen un clique, i per tant en aquest ordre (l'invers a un *PEO*) l'algorisme codició mai fa servir més colors que els necessaris per acolorir aquests cliques. Això fa que si G admet un *PEO*, aleshores G és perfectament ordenable.

Teorema 5.26. *Sigui G un graf que admet un PEO (v_1, \dots, v_n) . Una coloració òptima de G es pot obtenir subministrant a l'algorisme codició els vèrtexs en l'ordre invers d'aquest PEO. En particular, $\chi(G) = \omega(G)$.* □

Alguns autors com [2] defineixen els *PEO* al revés, és a dir tal que v i els veïns que apareixen abans de v formen un clique. Invertint l'ordre, les dues definicions són equivalents.

Exemple 5.27. A la Figura 22 tenim un exemple d'un graf de cordes amb un *PEO*. Observem que tots els vèrtexs satisfan la condició que hem comentat al començament:

- $v_1 \cup (\Gamma(v_1) \cap \{v_2, \dots, v_{10}\}) = \{v_1, v_5, v_7\}$, que indueixen un K_3
- $v_2 \cup (\Gamma(v_2) \cap \{v_3, \dots, v_{10}\}) = \{v_2, v_4, v_6, v_9\}$, que indueixen un K_4
- $v_3 \cup (\Gamma(v_3) \cap \{v_4, \dots, v_{10}\}) = \{v_3, v_8, v_9\}$, que indueixen un K_3
- $v_4 \cup (\Gamma(v_4) \cap \{v_5, \dots, v_{10}\}) = \{v_4, v_6, v_9\}$, que indueixen un K_3
- $v_5 \cup (\Gamma(v_5) \cap \{v_6, \dots, v_{10}\}) = \{v_5, v_7\}$, que indueixen un K_2
- $v_6 \cup (\Gamma(v_6) \cap \{v_7, \dots, v_{10}\}) = \{v_6, v_9, v_{10}\}$, que indueixen un K_3
- $v_7 \cup (\Gamma(v_7) \cap \{v_8, \dots, v_{10}\}) = \{v_7, v_8\}$, que indueixen un K_2
- $v_8 \cup (\Gamma(v_8) \cap \{v_9, v_{10}\}) = \{v_8, v_9, v_{10}\}$, que indueixen un K_3
- $v_9 \cup (\Gamma(v_9) \cap \{v_{10}\}) = \{v_9, v_{10}\}$, que indueixen un K_2
- $v_{10} = K_1$

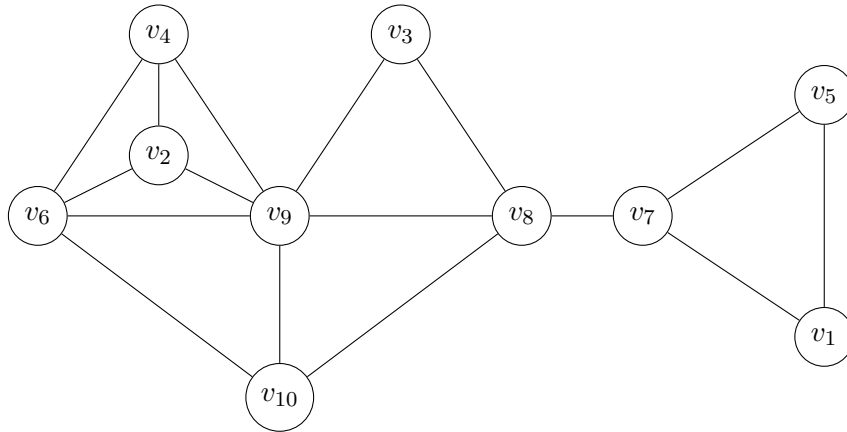


Figura 22: PEO (perfect elimination ordering).

Rose, Lueker & Tarjan (1976) i Habib et al. (2000) demostren a [21] i [22] que en un graf de cordes es pot trobar un *PEO* en temps lineal fent servir *Lexicographic Breadth First Search* (Lex-BFS), o *Maxim Cardinality Search* (MCS).

Si al fet que es pot trobar un *PEO* en temps lineal hi afegim que, en aquesta situació, l'algorisme codiciós és capaç de produir una coloració òptima simplement invertint aquest ordre, tenim que el problema de coloració es pot resoldre en temps polinòmic per als grafs de cordes.

Els grafs que considerarem a continuació són una subclasse dels grafs de cordes, es tracta dels *grafs d'intervals*. Aquest tipus de grafs s'utilitza per tractar qüestions relacionades amb horaris o l'assignació de memòria RAM, per exemple.

Definició 5.28. *Un graf d'intervals és un graf $G = \{V, E\}$ obtingut a partir d'una família d'intervals de la manera següent:*

Sigui $\{I_i\}_i$, una família d'interval·s de \mathbb{R} , $I_i = \{[a_i, b_i] : a_i < b_i\}$, $1 \leq i \leq n$. Fem correspondre un vèrtex a cada interval·l, $I_i \mapsto v_i$. El conjunt d'arestes està format per vèrtexs tals que els seus respectius interval·s tenen intersecció no buida, és a dir, $E = \{v_i v_j \mid I_i \cap I_j \neq \emptyset\}$.

Nota: Hem definit els interval·s I_i tancats, però aquesta elecció no és rígida i alguns autors els defineixen semioberts. El conveni depèn del context del problema.

Vegem dos casos amb interval·s semioberts. Al primer cas aquesta consideració és irrellevant mentre que al segon afecta el resultat.

Exemple 5.29. Una empresa d'autobusos nocturns ha de distribuir trajectes fent servir el menor nombre de vehicles possible. A la Figura 23 (a), tenim els interval·s que representen la durada d'aquests trajectes, començant a les 00:00h fins les 09:00h. Concretament, tenim els interval·s

$$I_1 = [0, 2), I_2 = [1, 5), I_3 = [3, 6), I_4 = [4, 8), I_5 = [7, 9)$$

Fem correspondre un vèrtex a cada interval·l, $I_i \mapsto v_i$ i connectem v_i amb v_j si $I_i \cap I_j \neq \emptyset$. El graf G que obtenim és el de la Figura 23 (b). Respondre a la pregunta "quin és el menor nombre d'autobusos necessaris" és equivalent a trobar el nombre cromàtic del graf G . Es comprova fàcilment que $\chi(G) = 3$, i per tant el nombre d'autobusos necessaris és 3.

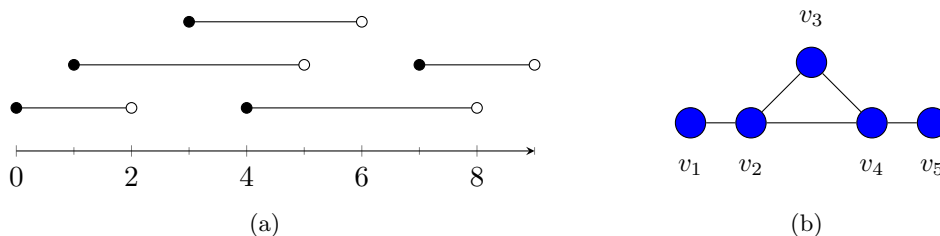


Figura 23: Escenari 1

Exemple 5.30. Considerem el mateix escenari que a l'exemple anterior, però ara els interval·s són

$$I_1 = [0, 2), I_2 = [1, 4), I_3 = [3, 6), I_4 = [4, 8), I_5 = [7, 9)$$

Hem perdut l'aresta $v_2 v_4$, amb la qual cosa ara el graf té nombre cromàtic $\chi(G) = 2$ i el nombre d'autobusos necessaris seria 2. Com podem observar, el fet de considerar interval·s tancats o semioberts pot afectar el resultat final. El context de cada problema serà el que ens ha d'ajudar a decidir a quin conveni ens acollim.

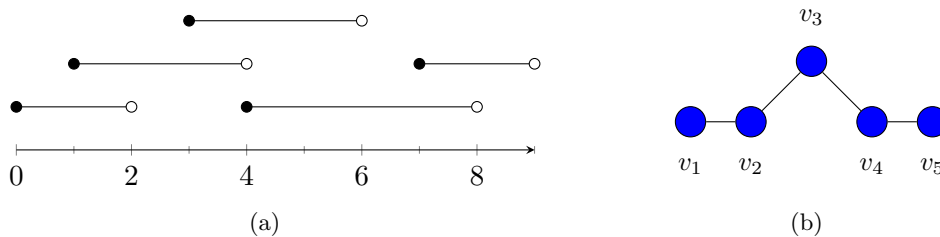


Figura 24: Escenari 2

Teorema 5.31. *Tot graf d'interval·s G admet un PEO.*

Prova. Ordenem els interval·s $\{I_i\}$ de manera ascendent respecte als seus valors inicials, és a dir tal que $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$. Ara assignem $I_i \mapsto v_i$ seguint aquest ordre que hem obtingut. Els veïns a l'esquerra de cada v_i són els vèrtexs corresponents als interval·s I_j tals que $I_i \cap I_j \neq \emptyset$. Com els interval·s estan ordenats respecte als seus valors inicials i tots aquests I_j contenen a_i , en particular tots tenen intersecció no buida entre ells i per tant v_i i tots els veïns a l'esquerra de v_i formen un clique. \square

Els següents resultats només els enunciamerem però ens serveixen per tancar aquesta secció d'una manera molt elegant, doncs ens permet classificar els grafs de cordes i els grafs d'interval·s en relació als grafs perfectes.

Teorema 5.32. *Si G admet un PEO, aleshores tot subgraf induït de G també.* \square

Teorema 5.33. *Tot graf de cordes és perfecte.* \square

Podem trobar una demostració del Teorema 5.33 a [14], on es fa servir que tot subgraf induït d'un graf de cordes és de cordes, cosa que surt com a conseqüència dels Teoremes 5.23 i 5.32. Finalment, en virtut del Teorema 5.23 concloem, que els grafs d'interval·s són grafs de cordes i, pel Teorema 5.33, perfectes.

6 Polinomis cromàtics

En l'estudi del teorema dels 4 colors, el matemàtic americà George David Birkhoff va desenvolupar al 1912 un tipus de polinomis que ens permeten tractar qüestions sobre la coloració d'un graf en termes de les seves arrels [23]. Aquests polinomis s'anomenen *polinomis cromàtics*. La pregunta que ens fem és la següent:

“Si fixem un nombre de colors λ , quin és el nombre de λ -coloracions diferents de G ?”

Recordem que en una λ -coloració es poden fer servir com a màxim λ colors, però potser en tenim prou amb menys (Def 1.13). La paraula clau de la nostra pregunta és *diferent*.

Definició 6.1. Sigui G un graf i siguin c_1, c_2 dues λ -coloracions de G . Diem que c_1 i c_2 són diferents si existeix algun vèrtex v_i de G tal que $c_1(v_i) \neq c_2(v_i)$.

Exemple 6.2. Sigui G un graf no connex amb $V(G) = \{v_1, v_2\}$, i prenem $\lambda = 2$. Considerem les coloracions c_1 i c_2 com a la Figura 25. Aquestes són dues 2-coloracions diferents. Observem que c_2 és admissible pel fet que G és no connex. Es comprova fàcilment que el nombre total de 2-coloracions diferents per aquest graf és 4.



Figura 25: Dues coloracions diferents de G

En la cerca del nombre cromàtic $\chi(G)$, buscàvem el menor valor de λ possible. Ara, en canvi, λ pot ser qualsevol enter positiu i el que ens preguntem és quin és el nombre de coloracions diferents existeixen, un cop fixat λ .

Definició 6.3. Donat un graf G i un enter $\lambda > 0$, notarem $P_G(\lambda)$ la funció que compta el nombre de λ -coloracions diferents de G i l'anomenarem polinomi cromàtic de G .

Per exemple, suposem que donat un graf G tenim que $P_G(3) = 0$. Això ens diu que el nombre de 3-coloracions de G és zero, és a dir, G no admet cap 3-coloració. A més, observem que podem afirmar que $P_G(1) = 0 = P_G(2)$, doncs si G no es pot acolorir amb 3 colors, tampoc es podrà amb 1 o 2 colors. En canvi, si $P_G(5) = 12$, no només admet G una 5-coloració sinó que ho podem fer de 12 maneres diferents. Veurem més endavant que aquestes funcions $P_G(\lambda)$ són, de fet, polinomis.

Aquestes funcions ens permeten interpretar el nombre cromàtic com el menor λ tal que $P_G(\lambda)$ és positiu. En efecte, si $\lambda = \chi(G)$, aleshores λ és el més petit tal que G admet una λ -coloració i per tant $P_G(\lambda) > 0$. D'altra banda, com $\chi(G)$ és el més petit, no tindrem cap k -coloració si $k < \chi(G)$. Per tant els zeros de $P_G(\lambda)$ són els enters positius $0 < k < \chi(G)$. Concretament,

$$\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N} : P(G, k) > 0\}$$

Aquest és precisament l'argument que Birkhoff va intentar fer servir per demostrar el teorema dels 4 colors (Teor. 5.10). Donat un graf planari G , la seva intenció era provar que si $\lambda \geq 4$, aleshores $P_G(\lambda) > 0$. En altres paraules, si $\lambda \geq 4$ aleshores el nombre de coloracions és positiu i això vol dir que G es pot acolorir amb 4 colors o més, cosa que demostraria el teorema. Malauradament, aquest enfocament va resultar infructuós, però els polinomis cromàtics encara s'utilitzen avui dia i són un dels principals objectes d'estudi de la teoria algebraica de grafes.

Vegem com es pot calcular el polinomi cromàtic d'un graf amb un parell d'exemples.

Exemple 6.4. Sigui $G = K_n$ el graf complet de n vèrtexs. Si $\lambda < n$, clarament $P_{K_n}(\lambda) = 0$. Suposem, doncs, $\lambda \geq n$.

Assignem un dels λ colors disponibles a un vèrtex v . Els $n - 1$ vèrtexs restants estan connectats a v , i per tant ara només tenim $\lambda - 1$ opcions per acolorir el següent. Anàlogament, el següent vèrtex només disposarà de $\lambda - 2$ colors, i així successivament. Al pas n tindrem $\lambda - n + 1$ colors per triar, i podem concloure doncs que

$$P_{K_n}(\lambda) = \lambda \cdot (\lambda - 1) \dots (\lambda - n + 1)$$

Exemple 6.5. Sigui $G = E_n$ el graf buit de n vèrtexs.

A diferència del cas anterior, ara disposem de λ colors per assignar a tots els vèrtexs de G doncs cap vèrtex està connectat amb els altres i per tant no entren en conflicte si fem servir un mateix color. Com tenim n vèrtexs i cadascun pot fer servir λ colors, resulta

$$P_{E_n}(\lambda) = \lambda \times \binom{n}{\cdot} \times \lambda = \lambda^n.$$

Observació: Suposem que tenim un graf G amb un vèrtex extrem v (és a dir, $\deg(v) = 1$), i sigui u l'únic veí de v . Aleshores, podem assignar a v qualsevol dels λ colors exceptuant el que hàgim assignat a u . Aquest raonament demostra el teorema següent:

Teorema 6.6. *Si G conté un vèrtex extrem v , aleshores*

$$P_G(\lambda) = (\lambda - 1)P_{G-v}(\lambda)$$

□

Aquest resultat en particular té com a corol·lari una fórmula per calcular el polinomi cromàtic de G si G és un arbre T .

Corol·lari 6.7. *Si T és un arbre d'ordre n , aleshores $P_T(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}$.*

Prova. Per inducció sobre n :

Si $n = 1$, aleshores $T = K_1$ i $P_T(\lambda) = \lambda$.

Suposem cert fins el cas $n - 1$, és a dir, si T' és un arbre d'ordre $n - 1$ aleshores $P_{T'}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-2}$.

Considerem T un arbre d'ordre n , i sigui v vèrtex extrem de T . Aleshores, $T - v$ és un arbre d'ordre $n - 1$ i pel teorema anterior i la hipòtesi d'inducció tenim

$$P_T(\lambda) = (\lambda - 1)P_{T-v}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}$$

□

Encara no hem demostrat explícitament que els polinomis cromàtics siguin, efectivament, polinomis. De totes maneres, és natural preguntar-se si aquestes funcions ens determinen el graf de manera unívoca, és a dir: donat un polinomi cromàtic, existeix un

únic graf que s'hi correspongui?

Clarament si dos grafs són isomorfs tindran el mateix polinomi cromàtic, però el recíproc no és cert en general. Podem fer servir el corollari anterior per trobar fàcilment un contraexemple.

Exemple 6.8. Considerem els arbres $T_1 = P_4$ i $T_2 = S_3$ com a la figura (recordem, S_n té ordre $n + 1$).

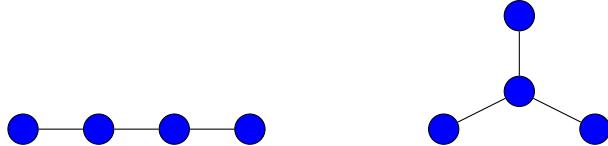


Figura 26: Camí P_4 (esquerra) i estrella S_3 (dreta)

Pel Corollari 6.7, tots dos tenen polinomi cromàtic $\lambda(\lambda - 1)^3$ però no són isomorfs doncs els isomorfismes preserven graus, i tenim que S_3 té un vèrtex de grau 3 mentre que T_4 no.

A continuació veurem un resultat que ens permetrà calcular el polinomi cromàtic d'un graf qualsevol. Abans d'això necessitem definir dues operacions sobre les arestes d'un graf.

Definició 6.9. Sigui G un graf i e una arista de G . Notarem $G - e$ el graf resultant d'eliminar a G l'arista e .

Definició 6.10. Notarem G/e el graf resultant de contraure e (és a dir, eliminar e i identificar els seus extrems). Com estem treballant amb grafs simples, si al fer G/e resulten arestes múltiples només conservarem una d'aquestes arestes.

A la Figura 27 podem veure exemples de les operacions que acabem de definir.

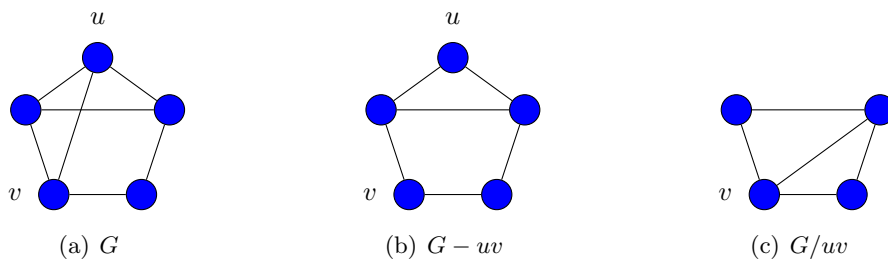


Figura 27: Operacions eliminació i contracció de l'arista uv

En l'article acadèmic [24], Birkhoff i D.C. Lewis fan un estudi exhaustiu sobre el càlcul dels polinomis cromàtics. Tot i així, podem demostrar que aquestes funcions són polinomis a partir d'un resultat molt més senzill anomenat *fórmula d'eliminació-contracció*,

abreujat *DC* (de anglès, *deletion-contraction formula*). Enunciem aquest resultat en forma de teorema:

Teorema 6.11. *Sigui G un graf i e una aresta qualsevol de G . Aleshores,*

$$P_G(\lambda) = P_{G-e}(\lambda) - P_{G/e}(\lambda). \quad (6.1)$$

Prova. Siguin u i v els extrems de e , i considerem $G - e$. Quantes λ -coloracions de $G - e$ existeixen tals que u i v comparteixen color? Si C_1 és una d'aquestes coloracions, clarament també és una coloració vàlida per a G/e , doncs en G/e u i v són el mateix vèrtex. Similarment, qualsevol coloració de G/e es pot pensar com a coloració de $G - e$ on u i v comparteixen color. Per tant la resposta a la pregunta inicial és $P_{G/e}(\lambda)$. Ara bé, quantes λ -coloracions de $G - e$ existeixen tals que u i v no comparteixen colors? Si C_2 és una d'aquestes coloracions, aleshores podem pensar C_2 com una coloració del graf G original, doncs u i v tenen colors diferents. Anàlogament, qualsevol coloració de G es pot pensar com una coloració de $G - e$ on u i v tenen colors diferents. Per tant, la resposta a la segona pregunta és $P_G(\lambda)$. Tot plegat, el nombre de λ -coloracions de $G - e$ és

$$P_{G-e}(\lambda) = P_{G/e}(\lambda) + P_G(\lambda) \quad (6.2)$$

□

Podem interpretar aquesta fórmula de dues maneres:

1. Si u i v són adjacents en G , aleshores podem calcular $P_G(\lambda)$ en termes dels polinomis cromàtics dels grafs resultants en eliminar i contraure uv :

$$P_G(\lambda) = P_{G-uv}(\lambda) - P_{G/uv}(\lambda) \quad (6.3)$$

Repetint aquest procés, arribarem a una col·lecció de grafs buits, dels quals ja en sabem calcular el polinomi cromàtic.

2. Si u i v no són adjacents, aleshores podem pensar en G com el graf resultant d'eliminar uv al graf $H = G + uv$. En altres paraules, intercanviem els papers de G i $G - uv$ i obtenim la fórmula

$$P_G(\lambda) = P_{G+uv}(\lambda) + P_{G/uv}(\lambda) \quad (6.4)$$

Al contrari del cas anterior, repetint aquest procés arribarem a una col·lecció de grafs complets, dels quals també sabem calcular el polinomi cromàtic.

A l'Annex trobarem dos exemples detallats del funcionament d'aquestes dues recurrències.

Quan treballem amb grafs dispersos (grafs amb un nombre petit d'arestes) és més adequat fer servir (6.3), mentre que (6.4) resulta més eficient per a grafs densos (grafs amb moltes arestes).

Observem també que a partir d'aquesta recurrència tenim un mètode per calcular el polinomi cromàtic d'un graf qualsevol, amb la qual cosa seria suficient estudiar les seves arrels per poder determinar el nombre cromàtic. Malauradament, el problema de trobar el polinomi cromàtic pertany a la classe de complexitat $\#P$. Aquesta classe consisteix en problemes de comptatge que es poden associar a problemes de decisió que pertanyen a la classe NP, per tant no es coneixen algorismes eficients que resolguin en temps polinòmic.

Amb el teorema 6.11 es pot raonar que, efectivament, les funcions que compten el nombre de λ -coloracions són polinomis, amb la qual cosa el nom està justificat. De totes maneres, veurem una demostració formal d'aquest fet que, a més, ens permetrà fer algunes observacions sobre els coeficients d'aquests polinomis.

Corol·lari 6.12. *Sigui G un graf d'ordre n . Aleshores $P_G(\lambda)$ és un polinomi en λ de grau n , mònic, amb coeficients enters, i terme independent 0. A més, els coeficients de $P_G(\lambda)$ alternen de signe.*

Prova. Sigui m el nombre d'arestes de G . Procedirem per inducció sobre m . El cas $m = 0$ l'hem calculat a l'Exemple 6.5 i clarament satisfà les condicions de l'enunciat. Suposem cert fins el cas $m - 1$, i sigui G un graf d'ordre n amb m d'arestes, $m \geq 1$. Sigui e una arista de G . Tant $G - e$ com G/e tenen $m - 1$ arestes, i per hipòtesi d'inducció els seus polinomis cromàtics seran de la forma

$$P_{G-e}(\lambda) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-i} a_i \lambda^i + \lambda^n$$

$$P_{G/e}(\lambda) = \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^{n-i-1} b_i \lambda^i + \lambda^{n-1}$$

per certs a_1, \dots, a_{n-1} i b_1, \dots, b_{n-2} enters no negatius.

Pel Teorema 6.11,

$$P_G(\lambda) = P_{G-e}(\lambda) - P_{G/e}(\lambda) = \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^{n-i} (a_i + b_i) \lambda^i - (a_{n-1} + 1) \lambda^{n-1} + \lambda^n$$

i podem concloure que G satisfà les condicions de l'enunciat. □

Aprofitant les notacions que acabem de fer servir, provarem una propietat addicional d'aquests polinomis:

Corol·lari 6.13. *El coeficient de grau $n-1$ de $P_G(\lambda)$ és $-m$ (on, recordem, $m = |E(G)|$).*

Prova. Procedim per inducció sobre m .

Si $m = 0$, sabem que $P_G(\lambda) = \lambda^n$ i el coeficient de λ^{n-1} és 0.

Si $m = 1$, es raona fàcilment a partir de (6.1) que $P_G(\lambda) = \lambda^n - \lambda^{n-1}$ i clarament se satisfà el resultat.

Suposem cert fins el cas $m - 1$, i sigui G un graf amb m arestes. Com hem vist abans,

$$P_G(\lambda) = \lambda^n - (a_{n-1} + 1)\lambda^{n-1} + \dots$$

i sabem que a_{n-1} (que era el coeficient de grau $n - 1$ de $G - e$, que té $m - 1$ arestes), satisfà $a_{n-1} = m - 1$ per hipòtesi d'inducció. Per tant, el coeficient de grau $n - 1$ de $P_G(\lambda)$ és $-(a_{n-1} + 1) = -m$, com volíem veure. \square

En resum, el polinomi cromàtic d'un graf G satisfà:

P.1 El grau de $P_G(\lambda)$ és $|V|$.

P.2 Els coeficients de $P_G(\lambda)$ són enters amb signes alternats.

P.3 El terme independent té coeficient 0.

P.4 El coeficient del terme λ^{n-1} és $-|E|$.

Aquesta llista de propietats fa que resulti natural plantejar-se si donat un polinomi $p(x) \in \mathbb{Z}[X]$ amb aquestes característiques existeix algun graf que s'hi correspongui. La resposta és: no necessàriament.

Exemple 6.14. Considerem el polinomi $p(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$. Segons les propietats que acabem d'enumerar, aquest hauria de ser el polinomi d'un graf amb 4 vèrtexs i 4 arestes. En canvi, els únics grafs amb aquestes dimensions són els de la Figura 28. El cicle C_4 té polinomi cromàtic $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 3x$, mentre que el graf *pota* té polinomi cromàtic $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x$. Per tant, $p(x)$ sembla el polinomi cromàtic d'un graf però no ho és.

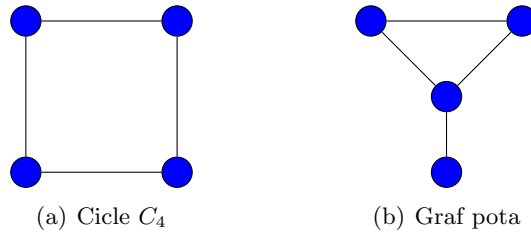


Figura 28: Candidats al graf corresponent a $p(x)$

També podem trobar un contraexemple similar al que hem vist a 6.8 que no fa ús del Corol·lari 6.7 a la referència [25]. Observem que l'exemple anterior condueix a una pregunta encara més general. Quins polinomis de $\mathbb{Z}[X]$ són el polinomi cromàtic d'algun graf?

Al 1968, Ronald C. Read es planteja aquesta pregunta i d'altres en [25], moltes de les quals encara romanen sense resposta. Amb això obrim una porta a aquelles persones que trobin aquesta matèria particularment interessant i desitgin indagar i dedicar-hi temps.

7 Implementació a Secundària i Batxillerat.

La premissa de la qual parteix aquest treball és que la teoria de grafs està destinada a formar part del nucli de la matemàtica que s'ensenyarà a futures generacions a les escoles i instituts, i és la meua consideració personal que ha arribat el moment de començar a caminar en aquesta direcció. De la mateixa manera que el càlcul, la geometria i la probabilitat són introduïts amb la finalitat d'establir una bona base matemàtica per afrontar problemes de manera analítica, també hauria de ser així per la teoria de grafs i l'algorísmica. Partint d'aquesta hipòtesi, clarament la nostra missió ha de consistir en dur a terme una implementació que confirmi o desmenteixi aquesta sospita, i en base a aquest fet hem orientat els continguts de seccions anteriors i el que segueix a continuació.

7.1 Justificació

Un dels aspectes que cal considerar quan plantegem si una adaptació a Secundària i Batxillerat està justificada és la relació entre els continguts de teoria de grafs i les competències establertes als currículums vigents a Catalunya.

Competències E.S.O [26]

1. Dimensió resolució de problemes:

- Competència 1: Traduir un problema a llenguatge matemàtic o a una representació matemàtica utilitzant variables, símbols, diagrames i models adequats.
- Competència 2: Emprar conceptes, eines i estratègies matemàtiques per resoldre problemes
- Competència 3: Mantenir una actitud de recerca davant d'un problema assajant estratègies diverses.
- Competència 4: Generar preguntes de caire matemàtic i plantejar problemes.

2. Dimensió raonament i prova:

- Competència 5: Construir, expressar i contrastar argumentacions per justificar i validar les afirmacions que es fan a matemàtiques
- Competència 6: Emprar el raonament matemàtic en entorns no matemàtics.

3. Dimensió connexions:

- Competència 7: Usar les relacions que hi ha entre les diverses parts de les matemàtiques per analitzar situacions i raonar.
- Competència 8: Identificar les matemàtiques implicades en situacions properes i acadèmiques i cercar situacions que es puguin relacionar amb idees matemàtiques concretes.

4. Dimensió comunicació i representació

- Competència 9: Representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres i usar el canvi de representació com a estratègia de treball matemàtic.
- Competència 10: Expressar idees matemàtiques amb claredat i precisió i comprendre les dels altres.

- Competència 11: Emprar la comunicació i el treball col·laboratiu per compartir i construir coneixement a partir d'idees matemàtiques.
- Competència 12: Seleccionar i usar tecnologies diverses per gestionar i mostrar informació, i visualitzar i estructurar idees o processos matemàtics.

No discutirem una a una la relació entre els continguts i objectius que proposem (veure secció 7.3) i les competències que acabem d'enumerar. La representació de grafs i els conceptes que els envolten (propietats, metodologia, mètodes de resolució algorísmica, etc) clarament cobreixen la majoria d'aquestes competències, i fins i tot podem trobar relació amb algun dels continguts clau establerts al currículum com CC5, CC9 i CC10 (veure [26] Annex 1: continguts clau de les competències).

Competències específiques de la matèria a Batxillerat [27]

- Resoldre problemes matemàtics
- Comunicar-se matemàticament
- Raonar matemàticament
- Valorar la matemàtica i la seva construcció
- Tenir confiança en la pròpia capacitat matemàtica

Els continguts i objectius que ens proposem a la secció 7.3 clarament estan en relació amb les competències específiques de la matèria. En el cas de Batxillerat podem anar una mica més enllà i trobar connexions entre els continguts que figuren al currículum i els continguts que proposem.

El càlcul dels polinomis cromàtics i les estimacions pel nombre cromàtic comparteixen elements que podem trobar a l'apartat "Aritmètica i Àlgebra" de primer curs. A més, podem plantejar alguns d'aquests conceptes de manera que segueixin un enfocament més relacionat amb la matemàtica discreta i la combinatòria per trobar relacions amb l'apartat "Probabilitat i Estadística". Els contextos històrics que trobem al currículum citen, per exemple, a Leonhard Euler en referència als nombres complexos, però és de sobres conegut que Euler és el pare de la teoria de grafs i per tant podem remarcar aquest fet per expandir i posar en contexte la teoria de grafs a la història de les matemàtiques.

Finalment, tot i que en la nostra implementació no hem pogut incloure tots els conceptes que hem desenvolupat en les primeres seccions d'aquest treball, és evident que les connexions entre el que proposem i el currículum de Batxillerat no s'acaben aquí. Els grafs d'interval es poden connectar amb l'apartat d'Anàlisi, i els mètodes algorísmics són presents durant tota l'educació Secundària, encara que no ens hi referim de manera explícita com a tals. Una implementació més extesa del que nosaltres proposem podria incloure conceptes com la matriu d'adjacència d'un graf, amb la qual cosa és fàcil fins i tot trobar connexions amb continguts de segon curs de Batxillerat.

7.2 Primera fase de la implementació

La temàtica d'aquest treball la vaig decidir quan començava a buscar continguts relatius a teoria de grafs per als quals la porta d'accés fora assequible, i alhora la seva expansió

compartís conceptes amb el temari actual. A més, era la meua intenció plantejar problemes on aquests conceptes apareguin de manera natural i començar a desenvolupar la teoria a partir d'aquí, en comptes de presentar els continguts de manera aïllada.

Vaig posar el punt de mira en la coloració de grafs i la seva implementació a 1r de Batxillerat. Aquest problema ens permet parlar de polinomis, desigualtats i intervals, i nocions relatives a teoria de conjunts, combinatòria i funcions. Addicionalment tenim l'oportunitat d'introduir el concepte d'algorisme, i ho justifiquem amb el fet que aquests ja es treballen a Secundària i Batxillerat, encara que no ens hi referim pel nom algorisme formalment. En són exemple la descomposició de nombres primers i polinomis, la resolució d'equacions i el mètode de Gauss, entre d'altres.

Amb la finalitat de dur a terme la implementació d'aquest projecte em vaig posar en contacte amb el meu antic institut, l'I.E.S Vall d'Arús, a Vallirana. La proposta va tenir bona acollida per part del departament de matemàtiques, i es va contemplar fins i tot la possibilitat de fer una adaptació de teoria de grafs amb un grup de 1r d'E.S.O. A principis de 2020 es va fixar una data per realitzar unes sessions de tipus classe magistral on jo explicaria els continguts i els alumnes haurien d'entregar un seguit d'exercicis per poder valorar si s'han assolit els objectius o no. Aquestes sessions es complementarien amb recursos online i diapositives amb el material explicat a classe per garantir que tots els participants els poguessin consultar i aprendre al seu ritme.

Les sessions estaven programades per la setmana abans de Setmana Santa però malauradament es van haver de suspendre amb motiu de l'estat d'alarma decretat pel govern espanyol el 14 de març. Es va contactar amb el centre per intentar dur a terme l'activitat a distància però no va poder ser. No obstant això, molts dels continguts i recursos online ja estaven en procés d'elaboració i per tant van passar a formar part de la segona fase de la implementació, de la qual parlarem després.

7.3 Continguts i Objectius

Com acabem de comentar, l'enfocament inicial només considerava la implementació a 1r de Batxillerat, però en vista de l'interés per expandir a un grup de 1r d'E.S.O, em vaig proposar buscar un terreny comú a partir del qual pogués orientar els continguts en més d'una direcció. Vaig triar com a punt de partida la coloració de mapes, i a partir d'aquí vaig dissenyar un guió amb temes relacionats i els vaig desenvolupar.

Tot seguit parlarem de quins són els continguts que van acabar formant part de la segona fase de la implementació, i a continuació llistarem els objectius que es van fixar relatius a aquests continguts.

Continguts 1r d'E.S.O.

- Introducció al concepte de graf. Vèrtexs, arestes i adjacència.
- Història de la teoria de grafs i el teorema dels 4 colors.
- El problema de coloració: coloració de mapes i coloració dels vèrtexs d'un graf.
- Relació entre els mapes i els grafs planaris. Graf corresponent a un mapa.
- Representacions planàries d'un graf i el problema dels tres serveis.

Continguts 1r de Batxillerat

- Introducció a la teoria de grafs i el problema de coloració.
- Coloració de mapes i teorema dels 4 colors.
- Conceptes bàsics i exemples: graf simple, ordre d'un graf, grau d'un vèrtex, grafs complets, grafs bipartits, etc.
- λ -coloracions i nombre cromàtic d'un graf.
- Fites inferiors i superiors per al nombre cromàtic. Cliques i Teorema de Brooks.
- Algorismes i estratègies per acolorir un graf.
- Polinomis cromàtics: construcció, fórmules recurrents i propietats.

Aquesta selecció de continguts ha d'estar motivada i s'ha d'alinejar amb l'assoliment d'uns certs objectius que contribueixin al creixement personal i intel·lectual de l'alumnat. Per tant, hem de formular propostes que introdueixin conceptes nous o bé ens permetin ampliar coneixements existents i fer-los servir en altres contextos. En algunes d'aquestes propostes podrem maniobrar i trobar multitud de recursos per adaptar els continguts que volem tractar. En altres situacions, on el caràcter del contingut és més clàssic o teòric, potser no tenim aquesta opció. Hem de trobar la manera d'expandir horitzons com a comunicadors i buscar alternatives per a transmetre les idees amb claredat si volem garantir que s'assoleixen els objectius que ens marquem.

Objectius 1r d'E.S.O.

- Entendre què és un graf i veure com aquests objectes apareixen de forma natural al món real.
- Veure la relació entre la coloració de mapes i la teoria de grafs.
- Entendre el problema de coloració i la seva relació amb els mapes.
- Representar un graf a partir d'un mapa.
- Identificar quin graf es correspon a un mapa a partir de les relacions d'adjacència.
- Raonar si un graf és planari o no, i trobar-ne una representació plana en cas afirmatiu.

Objectius 1r de Batxillerat

- Entendre el concepte de graf i les seves aplicacions al món real.
- Identificar propietats bàsiques d'un graf: grau d'un vèrtex, subgrafs, ordre, etc.
- Reconèixer grafs complets, bipartits, cicles, etc. i fer arguments en base a aquests.
- Entendre el problema de coloració i la seva relació amb els mapes.

- Trobar el nombre cromàtic de grafs senzills.
- Raonar correctament amb les desigualtats clàssiques $\omega \leq \chi(G)$ i $\chi(G) \leq \Delta$ (teorema de Brooks) per aproximar χ .
- Aplicar correctament l'algorisme codició i RLF per trobar coloracions d'un graf.
- Entendre la construcció dels polinomis cromàtics i notar les seves propietats.
- Entendre les operacions G/e i $G - e$ i aplicar correctament les fórmules recurrents.

7.4 Segona fase de la implementació

Amb motiu de la pandèmia per coronavirus, l'enfocament pràctic de la part didàctica d'aquest treball va canviar radicalment. En primer lloc, els grups originals amb els que s'havien programat les sessions ja no eren una opció viable degut al distanciament social i el tancament dels centres educatius a Catalunya. Això va suposar que, en cas de poder dur-se a terme, l'únic format possible pel lliurament de les xerrades hauria de ser no presencial. En segon lloc, la situació a les escoles feia pràcticament impossible aconseguir que els departaments accedissin a sacrificar hores lectives per incorporar continguts extra.

En vista d'aquesta situació, vaig decidir fer un canvi de perspectiva. El que havia començat com un TFG sobre grafs i didàctica es va haver de reajustar per donar més pes a la part de grafs, en detriment de la part didàctica. Tot i això, vaig aconseguir aprofitar la feina feta fins el moment i va començar la segona fase de la implementació.

A través d'un parell d'amics professors i el meu tutor, vam aconseguir la participació voluntària de 7 alumnes de 1r d'E.S.O. i 7 alumnes de 1r de Batxillerat de diversos centres, a mode de prova pilot. La idea era senzilla: els alumnes disposarien d'un seguit de presentacions tipus diapositives, i treballarien de manera autònoma en l'aprenentatge dels continguts. Tot seguit haurien d'aplicar el que han après per resoldre uns exercicis proposats, els quals haurien d'entregar per correu en un termini de temps d'una o dues setmanes, amb la possibilitat de consultar si algun dels exercicis o diapositives mancava de claredat. Finalment, es publicarien les solucions un cop tothom hagi entregat els problemes resolts.

Vaig triar Google Drive com a plataforma per dur a terme la prova pilot per diversos motius. En primer lloc, poder accedir als continguts simplement mitjançant un enllaç facilita el seguiment i la interacció per part meua i dels professors associats. La possibilitat d'editar els continguts a temps real sense haver d'enviar de nou cap fitxer als alumnes fa que tothom pugui accedir sempre a la versió més recent. A més, el format online té com a única barrera la connexió a internet i podem ignorar factors com la dificultat d'accedir a diversos tipus de software per part dels alumnes.

El fet d'haver implementat l'activitat a distància em va obligar a tenir molta cura en les explicacions. Atribueixo al blog "*El Tamiz*" el mantra que em va acompanyar en la preparació de tot el material. Aquest mantra és: "*antes simplista que incomprensible*". Vaig fer ús constant de diversos recursos online i TIC per experimentar i proporcionar més d'una manera d'apropar-me als continguts i exposar-los amb claredat. També vaig decidir complementar les presentacions i els problemes amb un guió per orientar als alumnes sobre quin ordre havien de seguir. Tots els detalls sobre les presentacions i els exercicis els trobarem a la propera secció.

7.5 Produccions i fonts d'informació

A continuació veurem un parell d'exemples de les produccions i els exercicis proposats que hem fet servir per implementar la teoria de grafs a Secundària i Batxillerat. Trobarem un desglossament complet amb enllaços i referències a l'Annex 2.

1. **Produccions 1r d'E.S.O:** Es van preparar un total de 4 presentacions de diapositives i un full amb 3 exercicis i 1 problema. Les dues primeres presentacions servien per introduir el concepte de graf a partir d'exemples i les altres tenen un caràcter més teòric amb explicacions pautades. Si cal, consulteu el guió de l'activitat a l'enllaç <https://bit.ly/2NetpW9> [Consulta 1 de juliol de 2020]

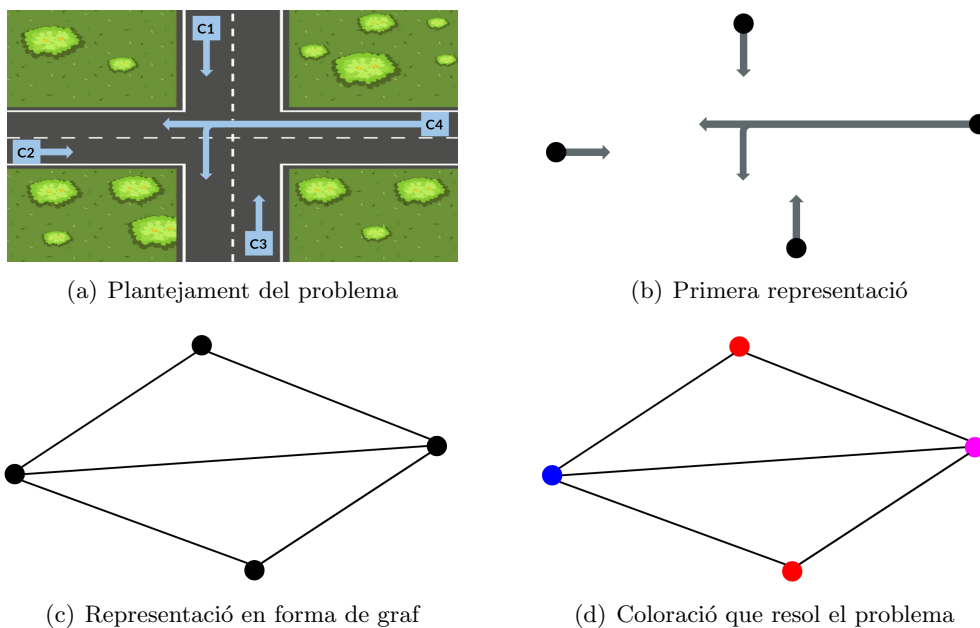


Figura 29: Exemple introductori

Exercici 3. A continuació tenim un mapa circular i tres grafs. Identifica quin dels grafs correspon al mapa, i troba una coloració òptima. Quants colors són necessaris? Pels dos altres grafs, dissenya un mapa que s'hi correspongui. Quin dels tres grafs necessita menys colors?

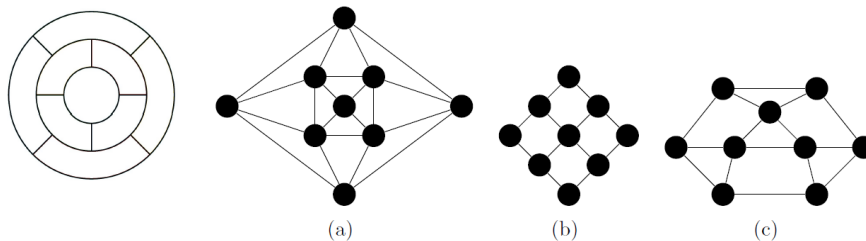


Figura 30: Exercici proposat

2. **Produccions 1r de Batxillerat:** Es van preparar un total de 7 presentacions de diapositives i un full amb 6 exercicis i 2 problemes, amb una estructura similar al cas de 1r d'E.S.O. Podem consultar el guió de l'activitat a l'enllaç <https://cutt.ly/iuP0767> [Consulta 1 de juliol de 2020]

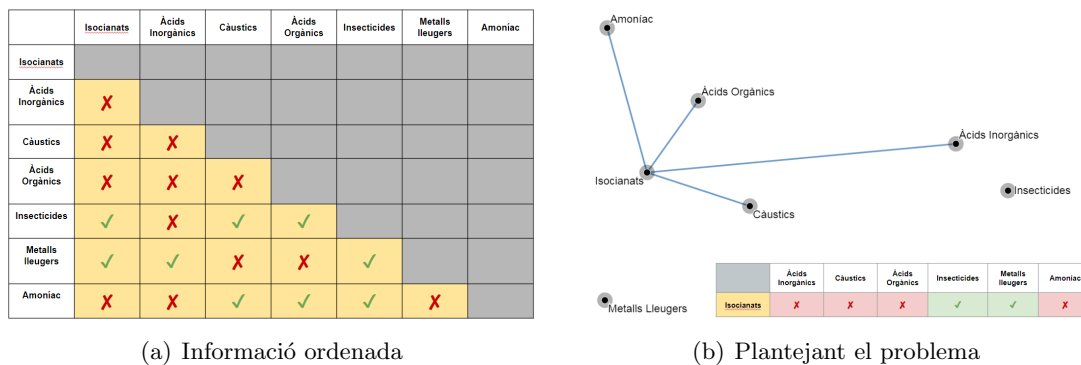


Figura 31: Exemple Introductor 1

Exercici 3. Els grafs següents tenen el nom dels matemàtics que els van construir. El graf de Birkhoff (també anomenat *diamant de Birkhoff*) conté triangles, i per tant el seu nombre cromàtic és com a mínim 3. Podem dir el mateix pels altres dos grafs? Troba el nombre cromàtic de tots.

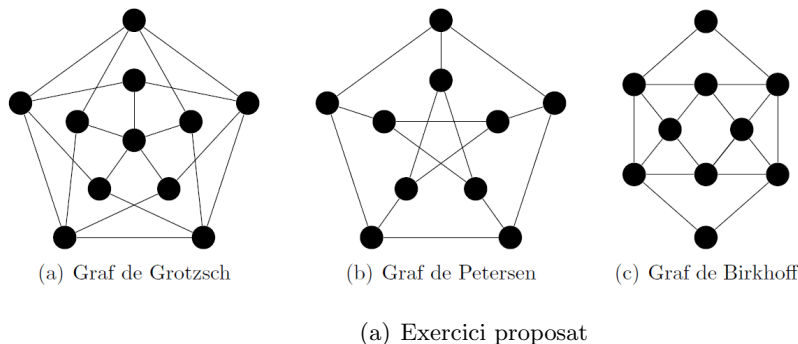


Figura 32: Exercici proposat

7.6 Recursos, propostes d'ampliació i limitacions

Molts dels conceptes que hem tractat a les primeres seccions d'aquest treball al final no han acabat formant part de la implementació a Secundària i Batxillerat. Tot i això, després de veure els resultats obtinguts, estic convençut que la gran majoria dels continguts que s'han quedat fora tenen cabuda als instituts. Les circumstàncies actuals han dificultat la posada en pràctica d'aquest projecte, però no dubto que amb una mica més de temps i ambició es pot ampliar el que he començat aquí. És per això que m'agradaria comentar quins aspectes crec que es poden ampliar o millorar, i també parlarem sobre algunes de les limitacions que m'he anat trobant en l'elaboració dels continguts que s'han adaptat.

En primer lloc, parlarem d'algorismes. A la proposta que vaig preparar per batxillerat s'expliquen l'algorisme codició i l'algorisme RLF, però en canvi als exercicis només es treballa el primer. El motiu d'això és simplement el fet que els algorismes RLF i DSATUR

gaudeixen d'una certa llibertat a l'hora de triar els vèrtexs, amb la qual cosa hauria estat més difícil valorar si els algorismes s'han aplicat correctament o no. Per altra banda, cap dels alumnes ha comès errors en l'exercici relatiu a l'algorisme codiciós, i fins i tot alguns han fet referència a RLF en altres problemes. Això em fa pensar que una introducció primerenca a l'algorísmica a les aules està justificada doncs els resultats obtinguts han estat sens dubte positius. Podem anar una mica més enllà i plantejar-nos quins altres algorismes es poden adaptar a nivells inferiors i quines altres branques de la teoria de grafs es poden explorar com a conseqüència de considerar aquesta introducció a l'algorísmica. Aquest plantejament obre la possibilitat a formular un projecte que incorpori la teoria de grafs a Secundària i Batxillerat no només puntualment, sinó com a part integral d'un futur pla d'estudis. Personalment trobo força atractiu aquest escenari i penso continuar treballant-hi.

El següent punt que vull discutir fa referència a les seccions 5 i 6. En primer lloc, m'agradaria comentar que molts dels conceptes que s'han quedat fora com els grafs de cordes i els grafs perfectes fan servir idees (com la de subgraf) que els alumnes han demostrat entendre sense cap dificultat. Fins i tot algun concepte (com el de graf complementari) ha aparegut de manera natural sense haver-lo explicat, com hem comentat a la secció anterior. També m'agradaria haver parlat dels grafs d'interval a Batxillerat, però vaig optar per no fer-ho per manca de temps. Penso que aquest tipus de grafs ens permeten treballar conceptes que formen part del currículm de Batxillerat d'una manera diferent, apropant les matemàtiques a situacions cotidianes com les de l'Exemple 5.29. De manera similar, s'ha dedicat una secció als polinomis cromàtics, no només per l'interès matemàtic d'aquests i pel seu context històric, sinó pel fet que es tracta d'objectes als quals hi podem arribar de manera natural plantejant-nos qüestions tant senzilles com “*de quantes maneres diferents es pot acolorir un mapa/graf*”. Descriure objectes matemàtics acompanyats d'un manual d'instruccions no serveix de res si no som capaços de justificar la seva utilitat i convèncer de la seva presència en el món real.

Els principals recursos que he fet servir per representar grafs a les presentacions han estat GeoGebra i Desmos Geometry. La gran majoria del software que trobem online per representar grafs requereix que coneguem algun llenguatge tipus Python, XML, TeX o Wolfram. Existeixen opcions com *Gephi* on aquest no és el cas, però es tracta de programes que no destaquen per la seva facilitat d'ús o atractiu visual. En un món ideal, hauríem de disposar d'una eina amb la riquesa geomètrica de GeoGebra o Desmos, però que a la vegada es desprenguin de les restriccions de moviment que suposa treballar amb objectes encastats en la geometria euclideana. Un altre punt que m'ha cridat l'atenció en la meua recerca sobre la representació de grafs és el format d'imatges SVG (*scalable vector graphics*), que és el que podem trobar en la majoria d'articles de teoria de grafs a la Viquipèdia. Es tracta d'un format cada vegada més present en il·lustracions i estocs d'imatges a la web. Aquest és el cas de VectorStock, d'on he tret una part de les imatges que m'han ajudat a elaborar les presentacions teòriques i d'introducció. Combinar una funcionalitat com la que comentava fa un moment amb la possibilitat d'exportar els grafs obtinguts en format SVG seria, en la meua opinió, el matrimoni perfecte.

Finalment esmentaré un parell d'aportacions per part del Jordi Font al meu treball que m'han ajudat molt. La primera es tracta d'un aplicatiu GeoGebra per construir grafs complets que podem trobar a la secció 7.5. Es va contemplar la possibilitat d'aprofitar les idees presents en aquesta eina per desenvolupar-ne d'altres. Posteriorment, amb del tancament dels centres educatius, les circumstàncies i el volum de feina van afectar les nostres prioritats i va quedar pendent expandir aquest recurs. La segona aportació del

Jordi és el web Mathigon, on es poden treballar multitud de conceptes relacionats amb les matemàtiques de manera molt interactiva. En particular, aquesta web gaudeix d'una secció de teoria de grafs que encara està en desenvolupament però on podem trobar un apartat de coloració de mapes molt ben pensat. He trobat molt interessant el fet que algú hagi dissenyat aquesta activitat sobre mapes doncs la tecnologia subjacent és exactament el que es troba a faltar en eines com GeoGebra o Desmos quan les volem fer servir per treballar amb grafs.

7.7 Recepció de l'activitat i valoració dels resultats

1r d'E.S.O (Exercicis: <https://cutt.ly/buZkc3W>) [Consulta 1 de juliol de 2020]

- Els apartats (a) i (b) de l'exercici 1 han creat una mica de confusió en els alumnes, amb la qual cosa alguna de les representacions i coloracions no s'han resolt correctament. Aquest resultat es pot atribuir en part a l'elecció de mapes triats, doncs algunes regions es toquen en un punt i això provoca ambigüitat. A l'apartat (c), on aquesta situació no es dona, tothom l'ha resolt correctament.
- L'exercici 2 ha tingut molt d'èxit. Alguns alumnes l'han fet a mà mentre que d'altres han fet ús dels recursos digitals suggerits, però tothom ha entès el concepte de planaritat i l'ha resolt correctament.
- L'exercici 3 ha estat un cas on les respostes han variat. En alguns casos, els alumnes han identificat correctament el graf A com a corresponent al mapa, i d'altres han proposat el graf B. Els alumnes que han dissenyat mapes associats als grafs ho han fet correctament.
- L'exercici 4 s'ha resolt correctament. La majoria dels alumnes ha reconegut que el graf relacionat amb el problema dels tres serveis no admet una representació plana, però les justificacions han estat breus en general.

Algunes de les respostes han estat realment encertades, com podem veure a continuació:

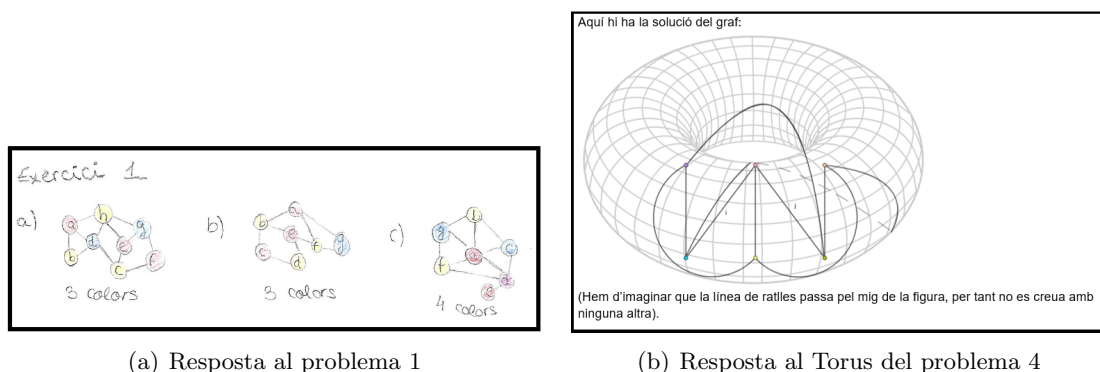


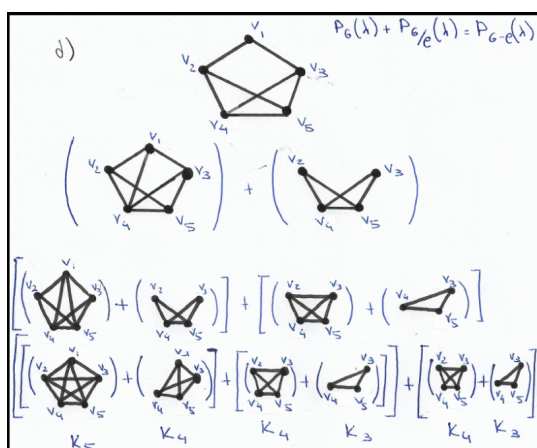
Figura 33: Respostes dels alumnes de 1r d'E.S.O

1r de Batxillerat (Exercicis: <https://cutt.ly/NuZktM0>) [Consulta 1 de juliol de 2020]

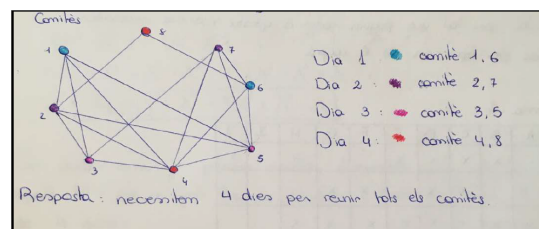
- L'exercici 1 s'ha resolt correctament en tots els casos tret d'algun petit error en la representació dels grafs (a) i (b). Com comentàvem abans, segurament la tria de les imatges ha estat un factor a tenir en compte en aquests errors i s'ha de millorar.

- L'exercici 2 s'ha resolt correctament, i en alguns casos els alumnes han fet servir arguments raonables per justificar la resposta.
- L'exercici 3 ha tingut resultats una mica variats. Generalment els alumnes han sabut trobar coloracions i raonar el nombre cromàtic correctament. En els apartats (a) i (b), potser ha faltat expandir una mica el que demanava l'enunciat, que era justificar el motiu pel qual els grafs de Grotzsch i Petersen requereixen 3 colors tot i no contenir triangles. Mirant enrere, aquest tipus d'argument no s'ha explicat suficient a les diapositives i per tant és una cosa que s'hauria de millorar.
- L'exercici 4 ha tingut molt d'èxit. Tots els alumnes han aplicat correctament l'algorisme codiciós, però en algunes situacions s'ha fet servir la notació $\chi(G)$ per referir-se al nombre de colors emprats. Això em fa pensar que tot i entendre els conceptes, l'ús correcte de notacions encara costa una mica a 1r de Batxillerat.
- Estic molt satisfet amb els resultats de l'exercici 5. La gran majoria dels alumnes ha aplicat correctament les fórmules recurrents i ha sabut distingir els casos on funciona millor una o l'altra. Tret d'un o dos casos concrets, els únics errors han estat errors de càlcul deguts a algun signe en manipular els termes dels polinomis.
- L'exercici 6 s'ha resolt correctament en general. De nou, tret de petits errors de càlcul els alumnes han aplicat les recurrències adequadament, i fins i tot alguns han aplicat resultats anteriors per estalviar-se algun pas. També hi ha hagut alumnes que han anat una mica més enllà i han fet conjectures per intentar generalitzar el fenomen que fa notar l'enunciat.
- Els problemes finals que proposàvem següien un enfocament similar a les diapositives introductòries, i la majoria els ha resolt correctament. En alguns casos s'ha arribat a la solució sense fer servir el procediment que s'esperava, però en general s'ha entès la utilitat del problema de coloració i com aplicar-ho a situacions reals.

A continuació podem veure algunes de les respostes dels alumnes de 1r de Batxillerat:



(a) Resposta a l'exercici 5 (d)



(b) Resposta al problema 2

Figura 34: Respostes dels alumnes de 1r de Batxillerat

8 Conclusions

He de confessar que no em pensava que el Treball Final de Grau em portaria a un viatge com el que he viscut. No ha estat un camí fàcil, i en cap moment penso que s'hagi acabat. S'han obert moltes portes i possibilitats, i segurament em faltarà temps per donar vida a les idees que s'han anat manifestant al meu cap conforme treballava en aquest projecte.

A nivell matemàtic, he trobat molt interessant centrar-me en un problema concret i intentar construir una narrativa amb principi, meitat i final, que permeti als lectors entendre l'abast d'aquest. Considero que el problema de coloració té una porta d'accés molt assequible però alhora ens hi podem endinsar tant que eventualment topem amb preguntes que manquen de resposta i formen part de la recerca actual. En aquesta nota, vull comentar aquest és un dels principals motius pels quals potser no hem aprofundit tant com hauria estat possible. Les matemàtiques necessàries per desenvolupar el problema de coloració exclusivament podrien ocupar, en sí mateixes, un Treball Final de Grau sencer. En la nostra situació, hem hagut de considerar un dels principals objectius d'aquest treball, que és la implementació a Secundària i Batxillerat. Per aquest motiu, hem intentat ajustar els continguts per tal que no superin excessivament el nivell de la mostra que hem triat.

Podem considerar que l'adaptació de continguts de Grau a Secundària i Batxillerat ha tingut èxit, tenint en compte les circumstàncies actuals. Els resultats indiquen que els criteris que hem seguit per ajustar els continguts han estat, en la major part, adequats. Recomanem absolutament que es consulti l'Annex 2 per valorar el temps i la dedicació per part dels alumnes que han participat en la prova pilot. El temps emprat per part meua en les produccions difícilment es pot quantificar. Haver de preparar material per una demogràfica desconexada de la teoria de grafs des de la posició d'algú que porta mesos treballant-hi és tot un repte. Com a persona amb la intenció de dedicar-se a la docència, convido a reflexionar sobre aquest escenari doncs sovint donem per fet els coneixements de la nostra audiència i aquesta és la primera barrera en la comunicació entre docents i alumnes.

La implementació del material a través de presentacions de diapositives i recursos online també ha estat força encertada i ha tingut una bona recepció per part dels alumnes. Com hem comentat a la secció 7.4 un dels avantatges del format que hem triat és la possibilitat d'actualitzar i millorar la qualitat de les produccions, i en aquest aspecte el feedback dels alumnes i els professors ha estat essencial. Les circumstàncies actuals ens han servit per posar en pràctica un experiment docent a distància molt interessant i extreure conclusions d'un sistema que possiblement es torni més cada vegada més rellevant.

El següent pas a seguir seria treballar amb grups de mida completa i estendre la proposta a diferents nivells i cursos. Organitzar aquesta expansió de manera que els continguts estiguin alineats amb el currículum actual i es pugui seguir un ordre coherent i ben estructurat és una cosa que s'ha d'estudiar més profundament. Faltaria veure fins a quin punt es pot estirar el format suposant que disposem de les eines i la infraestructura que plantejàvem a la secció 7.6, i fer una comparativa amb un enfocament convencional com els que coneixem.

Estic molt satisfet amb l'experiència que ha suposat aquest treball. Les condicions en què s'ha dut a terme m'han ajudat a valorar molts aspectes de la matemàtica i la didàctica de les matemàtiques. El projecte ha despertat interès en totes les persones involucrades, i aquest és un incentiu per continuar millorant i treballant de valent.

Referències

- [1] K.Appel, W.Haken: *Every Planar Map is Four-Colorable*. Contemporary Mathematics, (1989) Vol. 98. ISBN: 9780-8218-5103-6.
- [2] R.M.R Lewis: *A guide to graph colouring. Algorithms and applications*, Cardiff University. Springer (2016). ISBN 978-3-319-25728-0.
- [3] Stephen Cook: *The Complexity of Theorem Proving Procedures*, Proceedings of the Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing (1971), 151-158 p. Disponible a <http://4mhz.de/cook.html> [Consulta 1 de juliol de 2020]
- [4] Richard M. Karp: *Reducibility Among Combinatorial Problems*, Complexity of Computer Computations, p. 85-103 Plenum, New York (1972). Disponible a <https://people.eecs.berkeley.edu/~luca/cs172/karp.pdf> [Consulta 1 de juliol de 2020]
- [5] M.Zaker: *Results on the Grundy chromatic number of graphs*. Discrete Mathematics, Vol. 306, Issue 23, 6 Dec. 2006, 3166-3173 p. Disponible a <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X06004122> [Consulta 1 de juliol de 2020]
- [6] Janczewski, et al: *The smallest hard-to-color graph for algorithm DSATUR*, Discrete Mathematics, Vol. 236, Issues 1-3, 6 June 2001, 151-165 p. Disponible a <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X00004398> [Consulta 1 de juliol de 2020]
- [7] J. Spinrad, G. Vijayan: *Worst case analysis of a graph coloring algorithm*, Discrete Applied Mathematics, Volume 12, Issue 1, September 1985, 89-92 p. Disponible a <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0166218X85900435> [Consulta 1 de juliol de 2020]
- [8] F. Leighton: *A graph coloring algorithm for large scheduling problems*, JOURNAL OF RESEARCH of the National Bureau of Standards Vol. 84, No.6, November-December 1979. Disponible a <https://pdfs.semanticscholar.org/128d/490e1f116b410e4fd2482b54c742eb8d4371.pdf> [Consulta 1 de juliol de 2020]
- [9] M.Capobianco, J.C.Molluzzo, *Examples and Counterexamples in Graph Theory*, Elsevier North-Holland Inc. (1978). ISBN 0-444-00255-3
- [10] J.M. Basart, *Grafs. Fonaments i Algorismes. 3a edició* Manuals de la Universitat Autònoma de Barcelona; 13. ISBN: 84-490-1420-4
- [11] R.M.Karp: *Reducibility among Combinatorial Problems*. In: Miller R.E., Thatcher J.W., Bohlinger J.D. (eds) *Complexity of Computer Computations*. Springer, (1972) 85-103p. ISBN: 978-1-4684-2003-6
- [12] S.G. Williamson: *Depth-first search and Kuratowski subgraphs*, Journal of the ACM September 1984 J. ACM, 31 (4) 681-693 p. Disponible a <https://dl.acm.org/doi/10.1145/1634.322451> [Consulta 1 de juliol de 2020]
- [13] M.Grötschel, L Lovász, A.Schrijver: *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1988) 273-303 p. ISBN: 978-3-642-97883-8

- [14] G.Chartrand, P.Zhang: *Chromatic Graph Theory, Discrete Mathematics and its Applications* Chapman and Hall/CRC Press, (2009). ISBN-10: 1584888008, ISBN-13: 978-1584888000
- [15] M.Chudnovsky, et al: *The strong perfect graph theorem*, Annals of Mathematics, June 20, 2002 164 (1): 51-229 p. Disponible a <https://arxiv.org/pdf/math/0212070.pdf> [Consulta 1 de juliol de 2020]
- [16] L.Lóvasz: *Perfect graphs*, Selected Topics in Graph Theory, Vol. 2. Academic Press (1983) 55-87 p. ISBN 0-12-086202-6
- [17] Chudnovsky, M., Cornuéjols, G., Liu, X. et al. *Recognizing Berge Graphs*. *Combinatorica* 25, (2005) 143-186 p. doi: 0.1007/s00493-005-0012-8
- [18] Fulkerson, D. R.; Gross, O. A: *Incidence matrices and interval graphs*, Pacific J. Math., 15 (1965) 835-855 p. Disponible a <https://msp.org/pjm/1965/15-3/p11.xhtml> [Consulta 1 de juliol de 2020]
- [19] M.Middendorf, F.Pfeiffer: *On the complexity of recognizing perfectly orderable graphs*. *Discrete Mathematics* Vol.80, Issue 3, 15 March 1990, 327-333 p. Disponible a <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X9090251C> [Consulta 1 de juliol de 2020]
- [20] K.Suchan: *Minimal Separators in Intersection Graphs*, Universidad Diego Portales (2003). Disponible a https://www.researchgate.net/publication/249667735_Minimal_Separators_in_Intersection_Graphs [Consulta 1 de juliol de 2020]
- [21] D.J. Rose, G.S. Lueker, R. Tarjan, E.Robert: *Algorithmic aspects of vertex elimination on graphs*, SIAM Journal on Computing, 5 (1976) no. 2, 266-283 p. Disponible a <https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=0408312> [Consulta 1 de juliol de 2020]
- [22] M. Habib et. al: *Lex-BFS and partition refinement, with applications to transitive orientation, interval graph recognition, and consecutive ones testing*, Theoretical Computer Science Vol. 234, Issues 1-2, 6 March 2000, 59-84 p. Disponible a <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304397597002417> [Consulta 1 de juliol de 2020]
- [23] G.D. Birkhoff: *A determinant formula for the number of ways of coloring a map*. *Annals of Mathematics Second Series*, Vol. 14, No. 1/4 (1912-1913) 42-46 p. Disponible a https://www.jstor.org/stable/1967597?origin=crossref&seq=1#metadata_info_tab_contents [Consulta 1 de juliol de 2020]
- [24] G.D. Birkhoff and D.C Lewis: (1946), *Chromatic polynomials*, *Trans. Amer. Math. Soc.* 60 (1946), 355-451 p. Disponible a <https://www.ams.org/journals/tran/1946-060-00/S0002-9947-1946-0018401-4/S0002-9947-1946-0018401-4.pdf> [Consulta 1 de juliol de 2020]
- [25] Ronald C.Read, *An Introduction to Chromatic Polynomials*, *Journal of Combinatorial Theory* Vol. 4, Issue 1, January 1968, 52-71 p. Disponible a <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021980068800870> [Consulta 1 de juliol de 2020]

- [26] Currículum E.S.O. DECRET 187/2015, Ordre ENS/108/2018, Competències bàsiques i Orientacions: Disponible a <http://ensenyament.gencat.cat/web/.content/home/departament/publicacions/colleccions/competencies-basiques/eso/ambit-matematic.pdf> [Consulta 1 de juliol de 2020]
- [27] Currículum Batxillerat, DECRET 142/2008 - DOGC núm 5183, Competències específiques de la matèria. Disponible a <http://xtec.gencat.cat/web/.content/alfresco/d/d/workspace/SpacesStore/0082/c5fe6a2e-9a69-4acc-b723-c5d4fe75e7a0/matematiques.pdf> [Consulta 1 de juliol de 2020]
- [28] L. Lóvasz, P. József, V. Katalin, *Discrete Mathematics. Elementary and Beyond*, Springer, (2003) 199 p. ISBN 978-0-387-95584-1
- [29] J.M. Aldous, R.J. Wilson, *Graphs and Applications: An Introductory Approach*, The Open University. Springer, (2000) 277-290 p. ISBN: 978-1-85233-259-4
- [30] A.M. Vieites et.al, *Teoría de grafos : ejercicios resueltos y propuestos. Laboratorio con Sage* Madrid Paraninfo (2014), 73-75 p. ISBN: 9788428337076
- [31] J.A. Bondy, U.S.R. Murty: *Graph Theory With Applications*, Elsevier Science Ltd/North-Holland (1976). ISBN-10: 0444194517, ISBN-13: 978-0444194510

Annex 1: Figures i exemples complementaris

A continuació trobarem un seguit de figures amb alguns dels conceptes definits al preàmbul que no s'han il·lustrat durant el treball.

Exemple 8.1. A la Figura 35 (a) tenim un vèrtex v i els seus veïns, $\Gamma(v)$ en vermell. A la Figura 35 (b), tenim dos camins entre u i v . Un de longitud 3 (verd) i un de longitud 4 (vermell). A les Figures 35 (c) i (d) tenim, respectivament, un graf G i el resultat d'eliminar un vèrtex v (en vermell) per obtenir el graf $G - v$.

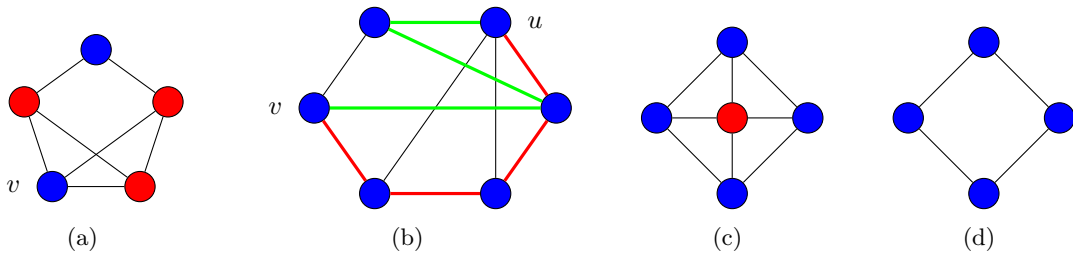


Figura 35: Exemples

Exemple 8.2. A la Figura 36 (a) tenim un graf G i un subconjunt de vèrtexs de G en vermell. A la dreta, a 36 (b), tenim el subgraf induït per aquest subconjunt. Com podem observar, el graf resultant no és connex.

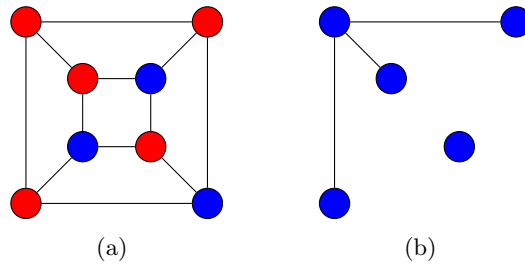
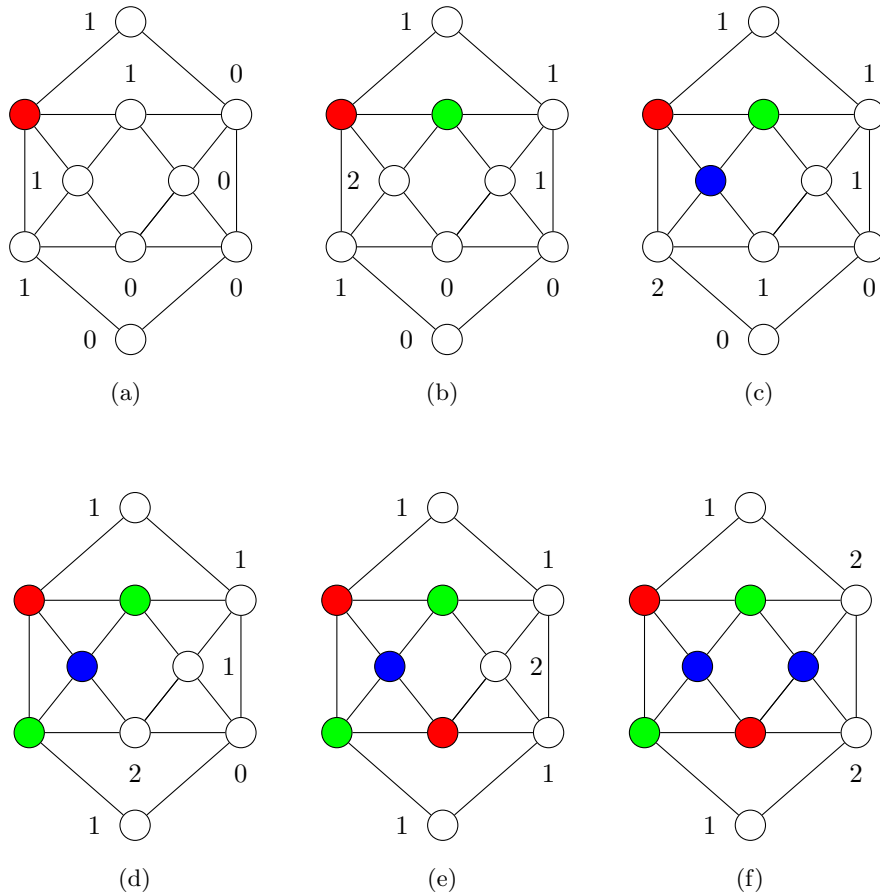


Figura 36: Exemples

Algorisme DSATUR

Exemple 8.3. Farem servir els colors en l'ordre que hem vist a la figura 6. Al pas (a), comencem per un vèrtex qualsevol de grau màxim, que en aquest cas és 4. Decidirem quin serà el següent en funció del grau de saturació dels vèrtexs restants. Si tenim empats, triem un qualsevol d'entre els de grau (d'adjacència) màxim. Per exemple, els vèrtexs que hem acolorit als passos (b), (g), (i) han seguit aquest criteri. Observem també que hem omès l'últim pas i hem acolorit dos vèrtexs alhora.



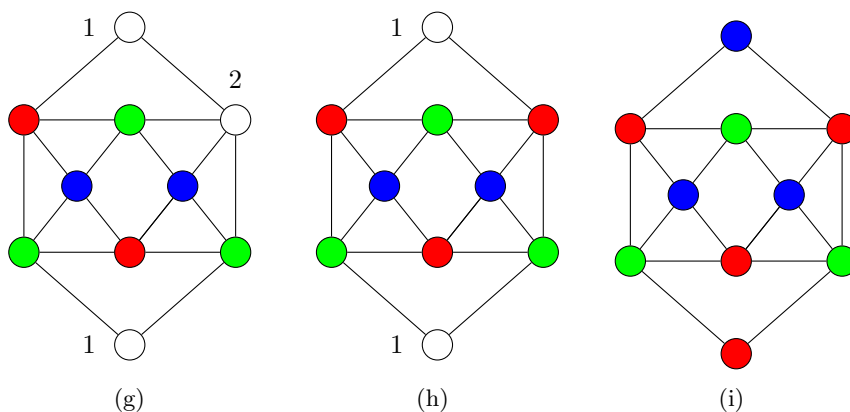


Figura 37: 3-coloració fent servir DSATUR

Algorisme RLF

Exemple 8.4. Vegem com es construeixen els conjunts V_i . Ens abstenem de parlar dels conjunts X i Y perquè la diferència $X - \{Y \cup \{v\}\}$ suposa esborrar arestes i la representació que fem a la Figura 38 és visualment més clara. A cada pas acolorim un vèrtex seguint l'ordre de colors com sempre. Els vèrtexs en blanc són candidats a ser triats al següent pas, mentre que els vèrtexs negres denoten no elegibilitat.

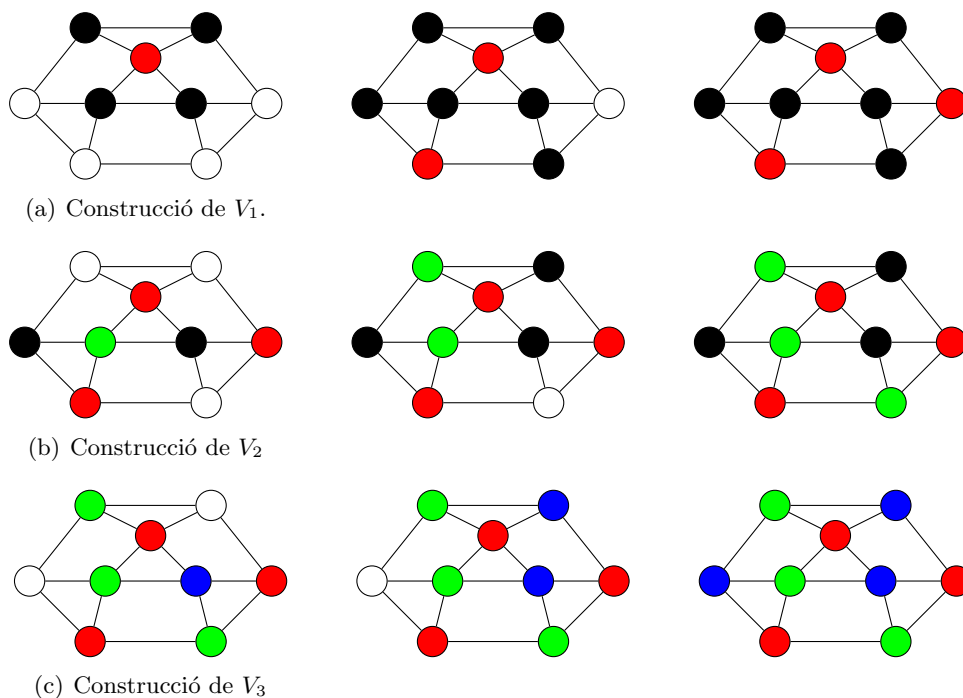


Figura 38: 3-coloració fent servir RLF.

Recurrències per al càlcul de polinomis cromàtics

A continuació tenim dues figures que es troben a [31], on podem observar detalladament el funcionament de les recurrències de les que hem parlat a (6.3) i (6.4).

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \\
 \pi_k(G) &= \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ - \circ \end{array} = \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ - \circ \\ | \\ \circ \end{array} - \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ - \circ \end{array} = \left(\begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ - \circ \\ | \\ \circ \end{array} - \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ - \circ \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ - \circ \end{array} - \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ - \circ \end{array} \right) \\
 &= \left(\begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ - \circ \\ | \\ \circ \end{array} \right) - 3 \left(\begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ - \circ \end{array} \right) + 3 \left(\begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ - \circ \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ - \circ \end{array} \right) = k^4 - 3k^3 + 3k^2 - k = k(k-1)^3
 \end{aligned}$$

Figura 39: Recurrència tipus $P_G(\lambda) = P_{G-uv}(\lambda) - P_{G/uv}(\lambda)$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \\
 \pi_k(G) &= \begin{array}{c} \circ - \circ \\ | \quad | \\ \circ - \circ \end{array} = \begin{array}{c} \circ - \circ \\ | \quad | \\ \circ - \circ \\ | \quad | \\ \circ - \circ \end{array} + \begin{array}{c} \circ - \circ \\ | \quad | \\ \circ - \circ \end{array} = \left(\begin{array}{c} \circ - \circ \\ | \quad | \\ \circ - \circ \\ | \quad | \\ \circ - \circ \end{array} + \begin{array}{c} \circ - \circ \\ | \quad | \\ \circ - \circ \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \circ - \circ \\ | \quad | \\ \circ - \circ \end{array} + \begin{array}{c} \circ - \circ \\ | \quad | \\ \circ - \circ \end{array} \right) \\
 &= \begin{array}{c} \circ - \circ \\ | \quad | \\ \circ - \circ \\ | \quad | \\ \circ - \circ \end{array} + 2 \begin{array}{c} \circ - \circ \\ | \quad | \\ \circ - \circ \end{array} + \begin{array}{c} \circ - \circ \\ | \quad | \\ \circ - \circ \end{array} = k(k-1)(k-2)(k-3) + 2k(k-1)(k-2) + k(k-1) = k(k-1)(k^2 - 3k + 3)
 \end{aligned}$$

Figura 40: Recurrència tipus $P_G(\lambda) = P_{G+uv}(\lambda) + P_{G/uv}(\lambda)$

Annex 2: Recursos digitals i material didàctic

A continuació llistarem el conjunt de presentacions de diapositives i exercicis que s'han fet servir per la implementació a Secundària i Batxillerat. Les produccions i els resultats obtinguts es trobaran de manera permanent a sengles carpetes de Google Drive que enllaçarem a continuació. També comentarem quins recursos han complementat el material i quines fonts ens han ajudat en l'elaboració d'alguns dels problemes. La temporització de les presentacions és d'una hora aproximadament en el cas de 1r d'E.S.O, i dues hores en el cas de 1r de Batxillerat.

Produccions 1r d'E.S.O

1. Guió de l'activitat: <https://cutt.ly/pu1cqmqJ> (*)
2. Full d'exercicis: <https://cutt.ly/pu1zPLD>
3. Carpeta de la prova pilot on trobarem totes les presentacions i exercicis resolts: <https://cutt.ly/ruixepv> (*)
4. Les imatges per les presentacions d'introducció s'han extret de feina pròpia o alguna de les següents fonts:
 - Mapa de França: <https://bit.ly/2YSovDI> (*)
 - Mapa d'Espanya: <https://bit.ly/30XgPTf> (*)
 - Vector Stock: <https://www.vectorstock.com/> (*)
 - Wikipedia: <https://en.wikipedia.org/wiki> (*)
 - Exemple introductori 1 “*El problema dels semàfors i les interseccions*”, inspirat en l'exemple 6.15 de [14]
 - Exemple introductori 2 “*El problema dels excursionistes*”, inspirat en la introducció a la secció 13.2 de [28]
5. Recursos addicionals:
 - Eines per per dibuixar grafs: GeoGebra (<https://www.geogebra.org/classic?lang=ca>) i Desmos Geometry (<https://www.desmos.com/geometry>) (*)
 - Grafs complets amb GeoGebra: <https://www.geogebra.org/classic/hy5kqwef> (*)
 - Coloració de mapes a Mathigon: <https://mathigon.org/course/graph-theory/map-colouring> (*)

(*) Tots els enllaços han estat consultats amb data: 1 de juliol de 2020.

Produccions 1r de Batxillerat

1. Guió de l'activitat: <https://cutt.ly/iuP0767> (*)
2. Full d'exercicis: <https://cutt.ly/NuZktM0>
3. Carpeta de la prova pilot on trobarem totes les presentacions i exercicis resolts: <https://cutt.ly/auP3ewa> (*)
4. Les imatges per les presentacions d'introducció s'han extret de feina pròpia o alguna de les següents fonts:
 - Mapa de França: <https://bit.ly/2YSovDI> (*)
 - Mapa d'Espanya: <https://bit.ly/30XgPTf> (*)
 - Vector Stock: <https://www.vectorstock.com/> (*)
 - Wikipedia: <https://en.wikipedia.org/wiki> (*)
 - Exemple introductori 1 “*Emmagatzematge de productes químics*”, extret de l'exemple 12.1 “*Storing Chemicals*”, de [29]
 - Exemple introductori 2 “*Horaris en època d'exàmens*”, extret de l'exemple 17 de [30]
 - Problema 1: Extret de l'exercici 65 de [30].
 - Problema 4 (b): Extret del problema 12.6 de [29]
5. Recursos addicionals:
 - Eines per per dibuixar grafs: GeoGebra (<https://www.geogebra.org/classic?lang=ca>) i Desmos Geometry (<https://www.desmos.com/geometry>) (*)
 - Grafs complets amb GeoGebra: <https://www.geogebra.org/classic/hy5kqwef> (*)
 - Coloració de mapes a Mathigon: <https://mathigon.org/course/graph-theory/map-colouring> (*)

(*) Tots els enllaços han estat consultats amb data: 1 de juliol de 2020.