UNIVERSITAT DE BARCELONA

GRAU DE MATEMÀTIQUES I ADE

Treball final de grau

Índices de poder en sistemas de votación. Aplicación al Brexit.

Autora: Laura Del Amo Albiol

Director: Dr. Mikel Álvarez
Dr. Josep Vives

Realitzat a: Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial
Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 21 de junio de 2020

Abstract

In this project, it is shown how decision-making situations between different people can be represented mathematically. In particular, the focus is on voting systems in which voters make a decision and we will consider that they can form coalitions with each other in order to obtain the desired result. This will be represented by weighted voting games.

Next, the power indices that are measures to know the power of a voter within a voting system will be presented. Different power indices and the properties that characterize them will be studied. Also some paradoxes that occur related to these indices are mentioned.

Finally, an application of the concepts will be made to the study of the change of power in the member countries of the Council of the European Union before and after Brexit.

Resumen

En este trabajo, se muestra como las situaciones de toma de decisiones entre diferentes personas se pueden representar matemáticamente. En particular, el foco de atención son los sistemas de votación en los cuales los votantes toman una decisión y se considera que pueden formar coaliciones entre ellos con el fin de obtener el resultado deseado. Esto será representado por los juegos de mayoría ponderada.

A continuación, se presentarán los índices de poder que son medidas para saber el poder de un votante dentro de un sistema de votación. Se estudiarán diferentes índices de poder y las propiedades que los caracterizan. También se mencionarán ciertas paradojas que ocurren relacionadas con estos índices.

Finalmente, se realizará una aplicación de los conceptos al estudio del cambio de poder en los países miembros del Consejo de la Unión Europea antes y después del Brexit.

2010 Mathematics Subject Classification. 91A12, 91A06, 91A35

Agradecimientos

Quisiera dar mis agradecimientos a mis tutores Mikel Álvarez y Josep Vives, por darme la motivación con este tema y todas las ideas, consejos y seguimiento durante la realización de este trabajo.

También, quisiera agradecer a mi família y amigos no sólo por el apoyo durante este trabajo, sino por la compañía y confianza durante todo el camino que hemos compartido hasta aquí.

Índice

1. Introducción

La teoría de juegos es la teoría matemática que estudia las situaciones en que se producen decisiones interactivas. Estas situaciones estan caracterizadas por los siguientes elementos:

i) Un grupo de agentes.

ii) Cada agente toma una decisión.

iii) Resultados en función de las decisiones de todos los agentes.

iv) Cada agente tiene sus propias preferencias en el conjunto de posibles resultados.

Se usa la siguiente terminología para referirse a los diferentes elementos participantes: las situaciones en sí mismas son llamadas juegos, los agentes son llamados jugadores y las posibles decisiones son llamadas estrategias.

La teoría de juegos clásica es una teoría normativa ideal en el sentido que prescribe en cada situación cómo un jugador racional debería comportarse. Un jugador racional es aquel que sabe lo que quiere, tiene el único objetivo de obtener lo que quiere y es capaz de identificar las estrategias que mejor se ajustan a sus objetivos. Nos situaremos dentro de los límites de la teoría de juegos clásica.

Hay muchos tipos de situaciones conflictivas en las cuales intervienen diversos jugadores y, por tanto, también hay muchos tipos de juegos, aunque una primera clasificación los separa en cooperativos y no cooperativos.

La teoría de juegos no cooperativos estudia el comportamiento de los jugadores en cualquier situación donde la elección o estrategia óptima de cada jugador depende de su pronóstico sobre las elecciones de sus oponentes, y está encaminada a maximizar sus propios intereses sin preocuparse en absoluto de los intereses de los demás.

Por otro lado, si en el juego existen posibilidades de comunicación con el fin de negociar o establecer acuerdos que permitan la formación de coaliciones hablamos de juegos cooperativos. Por lo tanto, los jugadores pueden cooperar formando coaliciones que se repartirán los beneficios obtenidos conjuntamente. En este caso, es habitual considerar como información básica la utilidad (dinero o cualquier otro bien con el que se efectúen los pagos a los jugadores) que cada coalición puede obtener coordinando las estrategias de sus integrantes e independientemente de la actuación del resto de los jugadores. Éste será el tipo de juegos que consideraremos en este trabajo.

El siguiente ejemplo nos servirá para ilustrar las diferencias que surgen cuando los jugadores actuan cooperando o sin cooperar en un juego.

Ejemplo 1.1 (Intercambio). Sean dos personas que se encuentran e intercambian bolsas cerradas, con el entendimiento que una de ellas contiene dinero y la otra contiene un objeto que está siendo comprado. Cada jugador puede escoger seguir el acuerdo poniendo en su bolsa lo que acordó, o puede engañar ofreciendo una bolsa vacía. En este juego de intercambio el engaño por parte de los dos no es la mejor opción, pues si los dos anteponen su egoísmo al bien común nunca serán capaces de realizar un intercambio, ya que siempre darán la bolsa vacía. Por lo tanto, es beneficiosa la cooperación mediante un acuerdo previo en el cual los dos acordarán no engañar.

2. Juegos cooperativos

Dentro de los juegos cooperativos existe una clasificación que los distingue en juegos cooperativos de utilidad no transferible y juegos cooperativos de utilidad transferible.

Los juegos cooperativos de utilidad no transferible son el tipo más general de juegos cooperativos. La utilidad de este tipo representa preferencias personales sobre los posibles resultados del juego y las posibilidades de cada coalición deben describirse utilizando un subconjunto que contenga todas las utilidades que una coalición puede asegurar a sus miembros.

Sea $N := \{1, ..., n\}$ el conjunto de jugadores. Para cada subconjunto $S \subseteq N$, decimos que S es una coalición, siendo $|S|$ el número de jugadores de S. La coalición N se suele llamar la gran coalición que contiene a todos los jugadores.

Notación 2.1. *Nos referiremos a $\mathbb{R}^{|S|}$ como $\mathbb{R}^S$.*

Definición 2.2. *Sea $S \subseteq N$ y un conjunto $A \subset \mathbb{R}^S$. A es completo si $\forall x, y \in \mathbb{R}^S$ tal que $x \in A$ y $y \leq x$, entonces $y \in A$.*

Definición 2.3. *Un juego cooperativo de utilidad no transferible o juego NTU es un par (N, V), donde N es el conjunto de jugadores y V es una función que asigna a cada coalición $S \subseteq N$, un conjunto $V(S) \subseteq \mathbb{R}^S$. Por convenio, $V(\emptyset) := \{0\}$. Además, para cada $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$:*

i. $V(S)$ es un subconjunto no vacío y cerrado de $\mathbb{R}^S$.

ii. $V(S)$ es completo. Además, para cada $i \in N$,

$$V(\{i\}) \neq \mathbb{R}, \text{ i.e., existe } v_i \in \mathbb{R} \text{ tal que } V(\{i\}) = (-\infty, v_i].$$

Sin embargo, el tipo de juegos cooperativos más estudiado y en el que nos centraremos, son los juegos cooperativos de utilidad transferible. Este tipo supone la existencia de un bien que debe distribuirse entre los jugadores, que puede ser cuantificado numéricamente y dividido tantas veces como sea necesario, y respecto del cual las preferencias de los jugadores del juego son equiparables. Los posibles repartos de dicho bien entre los jugadores son los que dan lugar a incrementos y disminuciones de la utilidad de los mismos y, por esta razón, estos juegos cooperativos se denominan juegos con utilidad transferible. En estos casos se considera la utilidad que cada coalición puede conseguir por sus propios medios y se describe mediante un sólo número real.

Definición 2.4. *Un juego cooperativo de utilidad transferible o juego TU es un par (N, v), donde N es el conjunto de jugadores y $v : 2^N \to \mathbb{R}$ es la función característica del juego. Por convenio, $v(\emptyset) := 0$.*

Observación 2.5. Un juego TU, (N, v), puede ser interpretado como un juego NTU, (N, V), definiendo para cada coalición no vacía $S \subseteq N$,

$$\text{V(S)} := \{\text{y} \in \mathbb{R}^S \mid \sum_{i \in S} y_i \leq v(S)\}.$$

En general, interpretamos $v(S)$, como el valor o utilidad que obtiene la coalición S si coopera, con independencia de las actuaciones del resto de los jugadores.

Notación 2.6. *Denotaremos* (N, v) *por* v *y* $v(\{i\})$ *y* $v(\{i, j\})$, *por* $v(i)$ *y* $v(ij)$, *respectivamente.*

Ejemplo 2.7 (Repartir un millón)**.** Un hombre rico muere y deja un millón de euros a sus tres sobrinos, con la condición que al menos dos de ellos deben ponerse de acuerdo sobre cómo dividir esta cantidad entre ellos; de lo contrario, se quemará el millón de euros.

Por lo tanto, $N = \{1, 2, 3\}$ y esta situación puede ser modelizada como un juego TU, v, donde:

$$v(1) = v(2) = v(3) = 0 \text{ y } v(12) = v(13) = v(23) = v(N) = 1.$$

Una vez planteado el juego, surge la pregunta de cuál sería la mejor solución, es decir, cuál sería el mejor reparto del millón y qué queremos decir con el término "mejor".

Ejemplo 2.8 (El juego del guante)**.** Tres jugadores están dispuestos a repartir los beneficios derivados de la venta de un par de guantes. El jugador 1 tiene un guante izquierdo y los jugadores 2 y 3 tienen un guante derecho cada uno. Un par de guantes se puede vender por 1 euro.

En consecuencia, $N = \{1, 2, 3\}$ y podemos modelizar esta situación como un juego TU, v, donde:

$$v(1) = v(2) = v(3) = v(23) = 0 \text{ y } v(12) = v(13) = v(N) = 1.$$

Pensemos ahora cómo se tendría que repartir el euro en cuestión. Queda claro que el jugador 1 es el jugador "especial" ya que sin él no se puede realizar la venta y parece razonable que tenga un beneficio mayor. Pero surge la pregunta de en qué medida este beneficio debe ser mayor.

Ejemplo 2.9 (Reparto de costes)**.** Un distribuidor imputa un coste de 100 unidades monetarias por el suministro de su materia a 4 empresas. Por las características de distribución geográficas, el coste para el suministro conjunto a cada una de las agrupaciones de empresas es el que se expresa mediante la siguiente función c de costes:

$$\begin{array}{rrr}
c(1) = 100 & c(13) = 150 & c(123) = 210 \\
c(2) = 100 & c(14) = 160 & c(124) = 220 \\
c(3) = 100 & c(23) = 150 & c(134) = 230 \\
c(4) = 100 & c(24) = 150 & c(234) = 250 \\
c(12) = 120 & c(34) = 130 & c(1234) = 250
\end{array}$$

El juego que recoge esta situación tiene como conjunto de jugadores $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y su función característica es c, donde cada $c(S)$ es el coste del suministro a la coalición S. Si se acepta la oferta de la empresa distribuidora para el suministro conjunto, el problema que se plantea es el de repartir entre las empresas el coste global de las 250 unidades monetarias, de manera que dicho reparto pueda ser asumido por todas ellas.

Esta óptica corresponde a un problema de reparto de costes entre jugadores de un servicio común.

Desde otro punto de vista, por el hecho de actuar conjuntamente, se produce un ahorro para cada coalición que puede expresarse mediante la función:

$$v(S) = \sum_{i \in S} c(i) - c(S).$$

Ahora el juego v con $N = \{1, 2, 3, 4\}$ y función característica v recoge el ahorro que obtiene cada coalición de empresas respecto al coste del suministro individual:

$$\begin{array}{ccc} v(1) = 0 & v(13) = 50 & v(123) = 90 \\ v(2) = 0 & v(14) = 40 & v(124) = 80 \\ v(3) = 0 & v(23) = 50 & v(134) = 70 \\ v(4) = 0 & v(24) = 50 & v(234) = 50 \\ v(12) = 80 & v(34) = 70 & v(1234) = 150 \end{array}$$

Con este planteamiento, el problema que surge es el de repartir el ahorro total de 150 unidades monetarias entre las cuatro empresas.

Definamos ahora G^N como la clase de juegos TU con $n = |N|$ jugadores, en este conjunto se definen una suma y un producto por escalares del siguiente modo:

(a) Para $u, v \in G^N$, su suma $u + v$ es el juego definido por

$$(u + v)(S) = u(S) + v(S), \forall S \subseteq N.$$

(b) Para $v \in G^N$ y un número real $\lambda \in \mathbb{R}$, su producto λv es el juego definido por

$$(\lambda v)(S) = \lambda v(S), \forall S \subseteq N.$$

Con estas operaciones G^N tiene estructura de espacio vectorial y su dimensión es $2^n - 1$, ya que las funciones 1_S definidas para cada coalición no vacía $S \subseteq N$ por

$$1_S(T) := \begin{cases} 1 & \text{si } S = T, \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases},$$

forman una base de G^N.

Los juegos de unanimidad u_S definidos para cada coalición no vacía $S \subseteq N$ como

$$u_S(T) := \begin{cases} 1 & \text{si } S \subseteq T, \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases},$$

forman también una base del espacio de juegos G^N. Veámoslo:

Queremos ver que el conjunto de juegos de unanimidad $U(N) := \{u_S \mid S \in 2^N \backslash \{\emptyset\}\}$ es una base del espacio vectorial mencionado. Como hay tantos juegos de unanimidad como dimensiones, $U(N)$ es un conjunto de vectores linealmente independientes.

En efecto, sea $\{\alpha_S\}_{S \in 2^N \backslash \{\emptyset\}} \subset \mathbb{R}$ tal que $\sum_{S \in 2^N \backslash \{\emptyset\}} \alpha_S u_S = 0$ y supongamos que existe $T \in 2^N \backslash \{\emptyset\}$ con $\alpha_T \neq 0$. Podemos asumir, sin falta de generalidad, que no existe $\tilde{T} \subset T$ tal que $\alpha_{\tilde{T}} \neq 0$. Entonces,

$$\sum_{S \in 2^N \backslash \{\emptyset\}} \alpha_S u_S(T) = \alpha_T \neq 0,$$

y llegamos a una contradicción.

Proposición 2.10. *Dado un juego cualquiera $v \in G^N$, se cumple que*

$$v = \sum_{S \subseteq N} \alpha_S u_S, \text{ donde } \alpha_S = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{s-t} v(T),$$

siendo s y t los cardinales respectivos de las coaliciones S y T.

Es decir, definimos $2^n - 1$ juegos de unanimidad distintos, tantos como coaliciones no vacías se puedan tomar. Todo juego cooperativo se puede obtener como combinación lineal de juegos de unanimidad y los escalares encontrados son únicos y quedan caracterizados por los valores de la función característica. Estos escalares se les suele llamar coordenadas de unanimidad del juego. Los juegos de unanimidad son un caso particular de los juegos simples, los cuales definiremos más adelante.

Definición 2.11. *Un juego TU, $v \in G^N$, es monótono si para cada par $S, T \subseteq N$ con $S \subseteq T$, tenemos $v(S) \leq v(T)$.*

El concepto de monotonía refleja que la adhesión de nuevos jugadores a una coalición nunca empeora el resultado obtenido por la coalición.

Definición 2.12. *Un juego TU, $v \in G^N$, es superaditivo si para cada par $S, T \subseteq N$, con $S \cap T = \emptyset$, $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$.*

Denotamos por SG^N la clase de juegos TU superaditivos de n jugadores. Un juego TU es superaditivo cuando los jugadores tienen incentivos reales para la cooperación, es decir, la unión de cualquier par de coaliciones disjuntas de jugadores nunca disminuye los beneficios totales.

Observación 2.13. La propiedad de monotonía es más débil que la propiedad de superaditividad. Por lo tanto, todo juego superaditivo será monótono, pero no al revés.

2.1. Juegos simples

La teoría de juegos simples estudia juegos cooperativos de utilidad transferible en los que cualquier coalición es ganadora o perdedora, sin que existan posibilidades intermedias. Estos juegos permiten modelar distintas situaciones económicas, sociales y políticas e incluyen a los juegos de mayorías que predicen y analizan la formación de coaliciones en organizaciones estables, parlamentos y gobiernos.

En este tipo de juegos, el conjunto de jugadores tiene que tomar una decisión teniendo en cuenta que hay una regla para tomarla y es tal regla la que establece cuáles de las coaliciones formadas por los jugadores tienen suficiente fuerza para llevar a cabo la propuesta.

Definición 2.14. *Un juego TU, $v \in G^N$, es un juego simple si:*

i. *es monótono.*

ii. *para cada $S \subseteq N$, $v(S) \in \{0, 1\}$.*

iii. $v(N) = 1$.

Denotamos por S^N la clase de juegos simples con n jugadores.

Una coalición ganadora, es un subconjunto del conjunto total de jugadores N, autosuficiente para ganar una votación, es decir:

$$S \subseteq N,\ S \text{ es una coalición ganadora } \Leftrightarrow v(S) = 1.$$

Denotamos por $W(v)$ el conjunto de todas las coaliciones ganadoras y lo definimos del siguiente modo, $W(v) := \{S \subseteq N \mid v(S) = 1\}$. El conjunto $W_i(v)$ representa el conjunto de coaliciones ganadoras que contienen al jugador i, es decir, $W_i(v) := \{S \in W(v) \mid i \in S\}$. Por su parte, una coalición será perdedora, cuando no es ganadora, esto es, si y sólo si $v(S) = 0$.

El conjunto $W^m(v)$ denota el conjunto de coaliciones ganadoras minimales; siendo una coalición ganadora minimal si todo subconjunto propio es una coalición perdedora, es decir:

$$S \subseteq N,\ S \text{ es coalición ganadora minimal si cumple que, } S \in W(v) \text{ y } T \notin W(v),\ \forall T \subset S.$$

Observemos que también lo podemos expresar diciendo que S es coalición ganadora minimal si y sólo si $v(S) = 1$ y $v(T) = 0$ para todo T tal que $T \subset S$. Definimos el conjunto $W^m(v)$ como $W^m(v) := \{S \in W(v) \mid T \notin W(v), \forall T \subset S\}$. Además, definiremos el conjunto formado por las coaliciones ganadoras minimales que contienen al jugador i, al que denotaremos por $W_i^m(v) := \{S \in W^m(v) \mid i \in S\}$.

Notación 2.15. *Utilizaremos W y W^m para referirnos, respectivamente, a $W(v)$ y $W^m(v)$, y sólo se utilizará la dependencia respecto a un juego v cuando estemos tratando diferentes juegos a la vez y pueda surgir confusión.*

Observación 2.16. Además de la caracterización (N, v), un juego simple se puede caracterizar también por (N, W) y por (N, W^m).

Definición 2.17. *Sea $x \in \mathbb{R}$, definimos las siguientes funciones:*

$$\begin{aligned} \lceil\cdot\rceil : \mathbb{R} &\to \mathbb{Z} \\ x &\to \lceil x \rceil := min\{k \in \mathbb{Z} |\ x \leq k\} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lfloor\cdot\rfloor : \mathbb{R} &\to \mathbb{Z} \\ x &\to \lfloor x \rfloor := max\{k \in \mathbb{Z} |\ k \leq x\}. \end{aligned}$$

Proposición 2.18. *El conjunto de coaliciones ganadoras minimales presenta las siguientes propiedades:*

i. *W^m es no vacío.*

ii. *W^m es una anticadena del conjunto de partes 2^N, esto es, un conjunto de subconjuntos de W tal que para todo $X, Y \in W^m$, se verifica que $X \nsubseteq Y$ e $Y \nsubseteq X$.*

iii. *Todo juego simple tiene un único W^m.*

iv. *La cardinalidad de $|W^m|$ verifica*[1]*:*

$$1 \leq |W^m| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

[1] W^m es anticadena del conjunto de partes 2^N, por lo que se puede aplicar el Teorema de Sperner (1928). Ver [7] Kirsch y Langner (2009).

Definición 2.19. *Un jugador i es crítico en la coalición S si $S \in W$, pero $S \backslash \{i\} \notin W$, es decir, su presencia es esencial para que la coalición sea ganadora.*

Las coaliciones ganadoras minimales pueden describirse también como aquellas que sólo contienen jugadores críticos, formalmente $W^m := \{S \mid S \in W \text{ y } S\backslash\{i\} \notin W, \forall i \in S\}$.

La clasificación de las coaliciones en ganadoras y perdedoras puede refinarse, se obtiene una clasificación más detallada observando el carácter de la coalición complementaria.

Definición 2.20. *Sea $S \subseteq N$.*

- *Decimos que S es ganadora decisiva si $S \in W$ y $N \backslash S \notin W$.*
- *Decimos que S es de bloqueo si $S \notin W$ y $N \backslash S \notin W$.*

Por lo tanto, cualquier coalición que no contenga ningún jugador de una coalición ganadora decisiva no podrá ser ganadora. Una coalición de bloqueo es aquella que no puede ganar, pero puede impedir el triunfo de cualquier coalición ganadora.

Definición 2.21. *Sea $i \in N$ y sea $v \in S^N$.*

- *Un jugador i posee veto en v si pertenece a todas las coaliciones ganadoras, es decir, cualquier coalición que no lo contenga es perdedora.*
- *Un jugador i es dictador en v si posee veto y cualquier coalición que contenga a este jugador es ganadora, esto es, $W^m = \{\{i\}\}$.*

Un jugador con veto tal vez no puede por sí solo conseguir que se apruebe una propuesta pero puede impedirlo, ya que su presencia es indispensable para conseguir la formación de una coalición ganadora. Para comprobar que un jugador tiene veto basta con confirmar que pertenece a todas las coaliciones ganadoras minimales del juego.

Un dictador es un jugador con veto que solo por sus propios medios puede conseguir que se apruebe una propuesta sin necesitar el apoyo de nadie.

Ejemplo 2.22. Sea una junta de 4 accionistas en la cual se aprueban las decisiones cuando representan el 51 % del porcentaje de acciones. El primer accionista tiene el 46 % de las acciones, el segundo el 30 %, el tercero el 14 % y el cuarto el 10 %.

Con estos porcentajes, no hay dictador ni jugadores con veto. Sin embargo, si el primer accionista adquiere un 5 % más de acciones de los demás accionistas, entonces se convertiría en un dictador.

Por otra parte, si este mismo accionista en vez de adquirir un 5 % adquiere un 4 % se convertiría en un jugador con veto.

2.2. Juegos de mayoría ponderada

La clase de juegos simples se suele utilizar para modelar situaciones de voto lo cual permite medir el poder de los diferentes miembros de tal situación. Supongamos que N es el número de votantes y estan decidiendo si aprobar alguna acción o no. El hecho que una coalición S sea tal que $v(S) = 1$ significa que si los votantes en S votan a favor de la acción, entonces la acción es emprendida.

Según los votos que se precisen para llevar a cabo la acción sometida a votación, podemos distinguir distintas variantes de los juegos simples que clasificaremos como juegos de mayoría simple o de α-supermayoría. Estos subtipos son, a su vez, un caso particular de los llamados juegos de mayoría ponderada, que modelan elecciones en las que un jugador puede tener derecho a votar más de una vez. El número de votos que posee un jugador será su peso en una votación.

Los juegos de mayoría simple sirven para modelizar procesos de elección en los que todos los jugadores pueden votar el mismo número de veces, es decir, tienen el mismo peso. Además en dicha situación, se requiere que sean favorables más de la mitad de los votos para que una acción se lleve a cabo. Esto es lo que se conoce como mayoría simple de votos.

Definición 2.23. *Un juego de mayoría simple es un juego simple $v \in S^N$, en el que la función característica del juego v, es $v(S) = 1$, si $|S| > \frac{n}{2}$, y $v(S) = 0$, en otro caso; siendo S una coalición de N.*

Ejemplo 2.24. Una empresa, con una plantilla de 5 personas, debe decidir sobre llevar a cabo o no un nuevo proyecto. Se ha determinado que todos los integrantes de la plantilla tienen el mismo valor y que, para que el proyecto salga adelante, debe de haber más votos a favor que en contra.

Para modelizar esta situación usaremos un juego de mayoría simple $v \in S^N$, en el que $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $n = |N| = 5$ y la función característica será $v(S) = 1$, cuando $|S| > \frac{n}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$, y $v(S) = 0$, en otro caso.

La función v nos indica que una coalición será ganadora cuando tenga 3 o más elementos. Podemos entonces definir este juego simple mediante su familia de coaliciones ganadoras W, siendo

$$W = \{\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{1,3,4\}, \{1,3,5\}, \{1,4,5\}, \{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{2,4,5\}, \\ \{3,4,5\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}, \{1,2,4,5\}, \{1,3,4,5\}, \{2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5\}\}.$$

Si nos restringimos a las coaliciones de 3 elementos, obtenemos el conjunto de coaliciones ganadoras minimales y, por consiguiente, el juego simple se puede definir mediante W^m, donde

$$W^m = \{\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{1,3,4\}, \{1,3,5\}, \{1,4,5\}, \{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \\ \{2,4,5\}, \{3,4,5\}\}.$$

Un juego de α-supermayoría modela situaciones en las que cada jugador tiene derecho a un voto y en las que se necesita una cuota de $\lceil \alpha n \rceil$ para ganar la votación, con $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$.

Definición 2.25. *Un juego simple $v \in S^N$, será un juego de α-supermayoría si la función característica del juego, v, viene dada por $v(S) = 1$, si $|S| \geq \lceil \alpha n \rceil$, y $v(S) = 0$, en otro caso; siendo S una coalición de N.*

Cuando $\alpha = \frac{1}{2}$, observamos que la definición de juego de α-supermayoría equivaldría a la de juego de mayoría simple; por lo que este último es un caso particular del primero.

Ejemplo 2.26. Supongamos el ejemplo anterior, ahora teniendo en cuenta que el jefe del proyecto determina que por los riesgos del mismo, para que el proyecto salga adelante deberá contar con el apoyo del 75 % de la plantilla.

Para modelizar esta situación, usaremos un juego simple $v \in S^N$ de α-supermayoría en el que $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, con $n = |N| = 5$, y $\alpha = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$. Por otro lado, dado que para este juego tenemos una cuota de $\lceil \alpha n \rceil = \lceil \frac{15}{4} \rceil = \lceil 3.75 \rceil = 4$, podemos definir la función característica como sigue: $v(S) = 1$, si $|S| \geq 4$, y $v(S) = 0$, en otro caso.

En este ejemplo, la función característica v nos indica que una coalición será ganadora cuando tenga 4 o más elementos. Podemos entonces definir este juego simple mediante W, siendo

$$W = \{\{1,2,3,4\},\ \{1,2,3,5\},\ \{1,2,4,5\},\ \{1,3,4,5\},\ \{2,3,4,5\},\ \{1,2,3,4,5\}\}.$$

Si nos restringimos ahora a las coaliciones de 4 elementos, obtenemos el conjunto de coaliciones ganadoras minimales W^m y, por consiguiente, una nueva forma de definir el juego simple, en la que

$$W^m = \{\{1,2,3,4\},\ \{1,2,3,5\},\ \{1,2,4,5\},\ \{1,3,4,5\},\ \{2,3,4,5\}\}.$$

Los juegos de mayoría ponderada modelizan situaciones en las que cada jugador tiene derecho a votar un determinado número de veces (peso del jugador) y en las que, para llevar a cabo una acción es necesario el acuerdo entre, al menos, un número prefijado de votos (cuota).

Definición 2.27. *Sea una cuota, $q > 0$, y un sistema de pesos no-negativos, $w_1, ..., w_n$. Un juego simple, $v \in S^N$, es un juego de mayoría ponderada si y sólo si $\sum_{i \in S} w_i \geq q$, $\forall S \in W$.*

Denotaremos un juego de mayoría ponderada por $[q; (w_1, ..., w_n)]$. El par $[q; w]$ se denomina representación del juego v. Un juego de mayoría ponderada tiene muchas posibles representaciones. Decimos que una representación w es normalizada si y sólo si $\sum_{i \in N} w_i = 1$ y que es homogénea si y sólo si $\sum_{i \in S} w_i = q$, para todo $S \in W^m$.

Podemos ver que los juegos de mayoría simple y α-supermayoría son casos particulares de este tipo de juegos, en los que $w_i = 1, \forall i \in N$. También se tiene que $q = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ y $q = \lceil \alpha n \rceil$, respectivamente, según sea un juego de mayoría simple o de α-supermayoría.

Ejemplo 2.28. Volvemos al ejemplo anterior pero añadimos una pequeña variación.

Ahora tenemos, por un lado, que el jefe de proyectos determina que, por los riesgos del mismo, para que este salga adelante deberá contar con un respaldo del 75 %. Por otro lado, se ha de tener en cuenta que, en este caso, no todas las opiniones de los integrantes de la plantilla tienen el mismo valor, si no que hay expertos en el tema cuya opinión tiene más peso que la de otros.

Para modelizar esta nueva situación usaremos un juego simple de mayoría ponderada $[q; (w_1, ..., w_n)]$; en el que $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $n = |N| = 5$ y $(w_1, ..., w_n) = (6, 5, 2, 4, 2)$ será el vector de pesos del juego.

Para calcular la cuota q, utilizaremos el porcentaje de apoyo necesario, con respecto a la suma de pesos; $q = \lceil \frac{75}{100} \sum_{i \in N} w_i \rceil = \lceil \frac{3}{4}(6+5+2+4+2) \rceil = \lceil 14.25 \rceil = 15$. Entonces podemos definir el juego simple mediante W, con

$$W = \{\{1,2,4\},\, \{1,2,3,4\},\, \{1,2,4,5\},\, \{1,2,3,5\}, \{1,2,3,4,5\}\}.$$

A partir de las coaliciones ganadoras obtenemos el conjunto de coaliciones ganadoras minimales y, por consiguiente, definimos el juego simple por medio de W^m, siendo

$$W^m = \{\{1,2,4\},\, \{1,2,3,5\}\}.$$

Observación 2.29. Todo juego de mayoría ponderada es un juego simple, basta con definir $w(S) = \sum_{i \in S} w_i$ y considerar como conjunto de coaliciones ganadoras

$$W = \{S \in 2^N \mid w(S) \geq q\}.$$

Sin embargo, no todo juego simple es un juego de mayoría ponderada. Consideramos el juego de cuatro jugadores, $N = \{1,2,3,4\}$, cuyo conjunto de coaliciones ganadoras minimales es

$$W^m = \{\{1,2\}, \{3,4\}\},$$

es decir, los subconjuntos formados por los jugadores 1 y 2 por un lado, y 3 y 4 por otro.

Si existiesen w_1, w_2, w_3, w_4 y q como en la definición anterior, deberían cumplirse las desigualdades siguientes:

$$\begin{cases} w_1 + w_2 \geq q,\; w_1 + w_3 < q, \\ w_3 + w_4 \geq q,\; w_2 + w_4 < q. \end{cases}$$

Sumando las dos de la izquierda se obtiene que $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 \geq 2q$ y sumando las dos de la derecha se obtiene $w_1, w_2, w_3, w_4 < 2q$. Estas dos condiciones son incompatibles.

Definición 2.30. *Un juego simple, $v \in S^N$, es realizable si proviene de un juego de mayoría ponderada. Se suele decir entonces que v es un juego de mayoría ponderada. La observación anterior prueba que existen juegos simples no realizables.*

2.3. Concepto de solución

Se ha puesto de manifiesto que uno de los problemas que tratamos de resolver es la distribución de la cantidad $v(N)$ de una manera razonable, entre los diferentes agentes del juego. Que la distribución sea razonable significa que el dinero o cualquier otro tipo de utilidad transferible que represente $v(N)$ sea repartido entre los jugadores de forma que ese reparto pueda ser aceptado por todos, al amparo de unos criterios que se establezcan previamente como válidos.

Un concepto de solución para los juegos cooperativos es, en general, una regla que asigna a cada juego $v \in S^N$ un subconjunto de $\mathbb{R}^N$, siguiendo unas reglas predeterminadas. Por lo tanto, hablaremos tanto de solución como de regla de asignación indistintamente.

Existen soluciones de tipo conjunto o de tipo puntual dependiendo si el subconjunto de $\mathbb{R}^N$ que asignan a cada v es un conjunto de vectores o un sólo vector, respectivamente.

Definición 2.31. *Una regla de asignación tipo puntual φ para un juego TU, $v \in G^N$, de n jugadores es una función:*

$$\varphi : G^N \to \mathbb{R}^N$$

que asigna a cada $v \in G^N$ un único vector $x \in \mathbb{R}^N$.

El número $x(i)$, que por comodidad se denota simplemente x_i, es la cantidad que recibe el jugador i teniendo en cuenta la función de distribución de pagos x. Los vectores $x \in \mathbb{R}^N$ tales que $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$ se llaman vectores de pago eficientes para el juego v.

Si además, $x_i \geq v(i)$, para todo $i \in N$, se dice que $x \in \mathbb{R}^N$ satisface el principio de racionalidad individual, según el cual cada jugador debe recibir un pago al menos igual a lo que podría conseguir por sí solo en el juego v.

Definición 2.32. *El conjunto de todas las soluciones que son vectores de pago eficientes se denominan imputaciones del juego. El conjunto de todas ellas se denota por*

$$I[v] := \{x \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i \in N} x_i = v(N),\ x_i \geq v(i),\ \forall i \in N\}.$$

El conjunto de imputaciones para una función característica puede tener infinitos puntos, un solo punto o bien no tener ninguno.

Proposición 2.33. *Sea $v \in G^N$ un juego,*

$$I[v] \neq \emptyset \Leftrightarrow \sum_{i \in N} v(i) \leq v(N).$$

Demostración. Veamos cada una de las dos implicaciones:

$\Rightarrow$) Supongamos que $I[v] \neq \emptyset$. Entonces existe $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in I[v]$. Por tanto, se verifica que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N).$$

Entonces debe verificarse que

$$\sum_{i=1}^{n} v(i) \leq v(N),$$

$$\text{por ser } x_i \geq v(i), \text{ se tiene que } \sum_{i=1}^{n} x_i \geq \sum_{i=1}^{n} v(i).$$

Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{n} v(i) \leq \sum_{i=1}^{n} x_i = v(N).$$

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que

$$\sum_{i=1}^{n} v(i) \leq v(N).$$

Veamos ahora que $I[v] \neq \emptyset$. Para ello basta considerar el vector de distribución de pagos

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n), \text{ con } x_i = v(i), \forall i = 1, 2, ..., n-1, x_n = v(N) - \sum_{i=1}^{n-1} v(i).$$

Como por hipótesis se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} v(i) \leq v(N),$$

se verifica que

$$v(n) \leq v(N) - \sum_{i=1}^{n-1} v(i) = x_n.$$

Además,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n-1} x_i + x_n = \sum_{i=1}^{n-1} v(i) + v(N) - \sum_{i=1}^{n-1} v(i) = v(N).$$

Se trata de una imputación y, por tanto, $I[v] \neq \emptyset$. $\square$

Corolario 2.34. *Si $v \in SG^N$ es un juego superaditivo, entonces $I[v] \neq \emptyset$.*

El primer concepto de solución para juegos cooperativos con utilidad transferible es el de conjunto estable, introducido en 1944 por Von Neumann y Morgenstern. Los conjuntos estables se describen en términos de una relación entre imputaciones llamada dominación.

Definición 2.35. *Sea $v \in G^N$ y $x, y \in I[v]$. Decimos que x domina a y si existe una coalición no vacía $S \subseteq N$ tal que $x_i > y_i$, $\forall i \in S$ y $\sum_{k \in S} x_k \leq v(S)$.*

Definición 2.36. *Sea $v \in G^N$. Un subconjunto $A \subseteq I[v]$ es un conjunto estable para el juego v si cumple:*

i. si $x, y \in A$, entonces x no domina a y.

ii. si $x \in I[v] \backslash A$, entonces existe $y \in A$ tal que y domina a x.

Un conjunto estable satisface la condición de estabilidad interna (ninguna imputación en A domina a otra) y la condición de estabilidad externa (cualquier imputación fuera del conjunto A está dominada por alguna imputación en A).

Este tipo de solución es un concepto cuyo manejo es, en general, dificultoso; la propia determinación de los mismos conjuntos estables suele ser laboriosa, pudiendo encontrar juegos que poseen infinitos y otros que carecen de dichos conjuntos.

Otro concepto de solución, introducido por Gilles en 1953, es el núcleo de un juego.

Definición 2.37. *El núcleo del juego $v \in G^N$ está definido por*

$$C[v] := \{x \in I[v] \mid \sum_{i \in S} x_i \geq v(S),\ \forall S \subseteq N\}.$$

Las soluciones del núcleo pueden entenderse como distribuciones favorables de la utilidad total $v(N)$ en el sentido que el pago para cada coalición, entendido éste como la suma de pagos a sus integrantes, nunca es menor que la utilidad que obtendría la coalición por sí sola; en este sentido, la cooperación ha de ser vista como beneficiosa por cualquier coalición y la solución aceptable por todas ellas. Este concepto se conoce como racionalidad coalicional.

Existe una relación entre el núcleo y los conjuntos estables. En primer lugar, el núcleo de cualquier juego está incluido en el conjunto de todas las imputaciones no dominadas (entonces, el núcleo cumple la condición de estabilidad interna). En general, está inclusión es estricta, pero si el juego es superaditivo tenemos la igualdad.

Proposición 2.38. *Sea $v \in G^N$. Entonces,*

i. Si $x \in C[v]$, entonces no existe $y \in I[v]$ tal que y domina a x.

ii. Si $v \in SG^N$, entonces $C[v] = \{x \in I[v] \mid$ no existe $y \in I[v]$ tal que y domina a $x\}$.

Demostración.

i. Sea $x \in C[v]$ y supongamos que existe $y \in I[v]$ y $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$, tal que y domina a x en S. Entonces,
$$v(S) \geq \sum_{i \in S} y_i > \sum_{i \in S} x_i \geq v(S),$$
y llegamos a una contradicción.

ii. En el punto anterior se ha demostrado la inclusión $\subseteq$ y ahora se demuestra la otra inclusión $\supseteq$. Procederemos por reducción al absurdo.

Sea $x \in I[v] \backslash C[v]$. Entonces existe $S \subseteq N$ tal que $\sum_{i \in S} x_i < v(S)$.

Sea $y \in \mathbb{R}^N$ definido para cada $i \in N$, por

$$y_i := \begin{cases} x_i + \frac{v(S) - \sum_{j \in S} x_j}{|S|} & \text{si } i \in S, \\ \\ v(i) + \frac{v(N) - v(S) - \sum_{j \in N \backslash S} x_j}{|N \backslash S|} & \text{si } i \notin S. \end{cases}$$

Como v es superaditivo, $v(N) - v(S) - \sum_{j \in N \backslash S} v(j) \geq 0$ y además $y \in I[v]$. Por lo tanto, y domina x en S. $\square$

Corolario 2.39. *Sea A un conjunto estable para un juego $v \in G^N$.*

- $C[v] \subset A$.
- *Si el núcleo $C[v]$ es un conjunto estable, entonces $C[v] = A$.*

Ejemplo 2.40 (Valoración finca)**.** Una finca está valorada por su actual propietario en 350.000 euros. Un empresario le ofrece acondicionarla como polígono industrial por 700.000 euros y una empresa constructora le ofrece 775.000 para edificar parcelas en ella.

Sea $N = \{1, 2, 3\}$ donde 1 es el empresario, 2 la empresa constructora y 3 el propietario. Podemos definir este juego v del siguiente modo:

$$v(1) = v(2) = v(12) = 0,$$
$$v(3) = 350,\ v(13) = 700,\ v(23) = 775 \text{ y } v(123) = 775,$$

en donde los valores vienen expresados en miles de euros.

Ahora vamos a obtener el núcleo de este juego. Pertenecerán al núcleo los puntos (x_1, x_2, x_3) que satisfagan las siguientes restricciones:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 775 \text{ (principio de eficiencia)},$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 350 \text{ (racionalidad individual)},$$
$$x_1 + x_2 \geq 0,\ x_1 + x_3 \geq 700,\ x_2 + x_3 \geq 775 \text{ (racionalidad coalicional)}.$$

Es decir, los elementos del núcleo son los puntos que pertenecen al conjunto de imputaciones del juego y, además, verifican las restricciones correspondientes a la racionalidad coalicional.

Teniendo en cuenta la restricción $x_1 + x_2 + x_3 = 775$ (principio de eficiencia), se tiene que

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \geq 0 &\Leftrightarrow 775 - x_3 \geq 0 \Leftrightarrow x_3 \leq 775 \\ x_1 + x_3 \geq 700 &\Leftrightarrow 775 - x_2 \geq 700 \Leftrightarrow x_2 \leq 75 \\ x_2 + x_3 \geq 775 &\Leftrightarrow 775 - x_1 \geq 775 \Leftrightarrow x_1 \leq 0. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} C[v] &= \{(x_1, x_2, x_3)\} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 775, x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq 75, 350 \leq x_3 \leq 775\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq 75, 350 \leq 775 - x_2 \leq 775, x_3 = 775 - x_2\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3)\} \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq 75, 0 \leq 425, x_3 = 775 - x_2\} \\ &= \{(0, x_2, 775 - x_2) : 0 \leq x_2 \leq 75\}. \end{aligned}$$

Puede suceder que el núcleo contenga soluciones realmente dispares como pago a los diferentes jugadores. Por lo que parece conveniente establecer soluciones para juegos cooperativos que asignen a cada juego v un único vector de pagos. El primer concepto de solución puntual para juegos cooperativos con utilidad transferible es el del valor de Shapley introducido por L.S. Shapley en 1953.

El método utilizado por Shapley consiste en proponer unas determinadas propiedades que debería verificar esa solución puntual y demostrar que estas mismas propiedades la caracterizan de forma unívoca, de manera que pueden ser tomadas como axiomas.

Definición 2.41. *Sea $v \in G^N$.*

i. Un jugador $i \in N$ es un jugador nulo si, para cada $S \subseteq N \backslash \{i\}$, $v(S \cup \{i\}) - v(S) = 0$.

ii. Dos jugadores i y j son simétricos si, para cada coalición $S \subseteq N \backslash \{i, j\}$, $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$.

Sea φ una regla de asignación tipo puntual y consideramos las siguientes propiedades que podríamos imponer:

- Eficiencia (EF): La regla de asignación φ satisface EF si, para cada $v \in G^N$, $\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N)$.
- Jugador Nulo (JN): La regla de asignación φ satisface JN si, para cada $v \in G^N$ y cada jugador nulo $i \in N$, $\varphi_i(v) = 0$.
- Simetría (SIM): La regla de asignación φ satisface SIM si, para cada $v \in G^N$ y cada par $i, j \in N$ de jugadores simétricos, $\varphi_i(v) = \varphi_j(v)$.
- Aditividad (AD): La regla de asignación φ satisface AD si, para cada $v, w \in G^N$, $\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w)$.

La propiedad EF requiere que φ asigne el valor total de la gran colición, $v(N)$, entre los jugadores. La propiedad JN dice que los jugadores que contribuyan 0 a cualquier coalición, es decir, que no generen ningún beneficio adicional, no tendrían que tener pago alguno. La propiedad SIM pide a φ que trate a todos los jugadores que son iguales por igual. Finalmente, AD es la única que aunque sea un requisito natural, no está motivada por ninguna noción de equidad.

Definición 2.42. *El valor de Shapley, ϕ, está definido para cada $v \in G^N$ y para cada $i \in N$, por*

$$\phi_i(v) := \sum_{S \subseteq N \backslash \{i\}} \frac{|S|!(n - |S| - 1)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S)).$$

Por lo tanto, con el valor de Shapley, cada jugador recibe una media ponderada de las contribuciones que hace a las diferentes coaliciones. La fórmula anterior puede interpretarse del siguiente modo. Supongamos que la coalición N tiene que formarse dentro de una habitación, pero los jugadores tienen que entrar de uno en uno. Cuando un jugador i entra, obtiene su contribución a los jugadores que ya estan dentro, es decir, obtiene $v(S \cup \{i\}) - v(S)$. El orden de entrada de los jugadores es aleatorio, con n! posibilidades.

Sea $\Pi(N)$ el conjunto de todas las permutaciones de elementos en N y, para cada $\pi \in \Pi(N)$, sea $P^\pi(i)$ el conjunto de predecesores de i bajo el orden dado por π, es decir,

$$j \in P^\pi(i) \Leftrightarrow \pi(j) < \pi(i).$$

Veamos ahora cómo utilizando las permutaciones podemos construir una definición alternativa para el valor de Shapley.

Definición 2.43. *Sea $v \in G^N$. Sea $\pi \in \Pi(N)$. El vector de contribuciones marginales asociado a π, $m^\pi(v) \in \mathbb{R}^N$, está definido, para cada $i \in N$, por*

$$m_i^\pi(v) := v(P^\pi(i) \cup \{i\}) - v(P^\pi(i)).$$

Observación 2.44. Sea $\forall i \in N$ y $\forall S \subseteq N \setminus \{i\}$, entonces existen $|S|!(n-|S|-1)!$ permutaciones diferentes, $\pi \in \Pi(N)$ para las que $P^\pi(i) = S$. De este modo, obtenemos:

$$\begin{aligned}\phi_i(v) &:= \sum_{S \subseteq N\setminus\{i\}} \frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!}(v(S\cup\{i\}) - v(S)) = \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\Pi(N)}(v(P^\pi(i)\cup\{i\}) - v(P^\pi(i)) = \frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\Pi(N)} m_i^\pi(v).\end{aligned}$$

Teorema 2.45. *El valor de Shapley es la única regla de asignación en G^N que satisface EF, JN, SIM y AD.*

Demostración.

Veamos a continuación que ϕ verifica las propiedades.

- Eficiencia.

$$\begin{aligned}\sum_{i\in N}\phi_i(v) &= \sum_{i\in N}\frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\Pi(N)} m_i^\pi(v) = \sum_{i\in N}\frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\Pi(N)}(v(P^\pi(i)\cup\{i\}) - v(P^\pi(i))) \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\Pi(N)}\sum_{i\in N}(v(P^\pi(i)\cup\{i\}) - v(P^\pi(i)) = \frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\Pi(N)}(v(N) - v(\emptyset)) \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\Pi(N)} v(N) = \frac{1}{n!}\ n!\ v(N) = v(N).\end{aligned}$$

- Jugador nulo.

  Como hemos indicado antes un jugador i es nulo si $v(S\cup\{i\}) - v(S) = 0$, por lo tanto, obtenemos directamente:

$$\phi_i(v) = \sum_{S\subseteq N\setminus\{i\}}\frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!}(v(S\cup\{i\}) - v(S)) = 0.$$

- Simetría.

  Dos jugadores son simétricos si el valor añadido que aportan a la coalición es el mismo. Es decir, para toda $S \subseteq N\setminus\{i,j\}$, $v(S\cup\{i\}) = v(S\cup\{j\})$. Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
\phi_i(v) &= \sum_{S\subseteq N\backslash\{i\}} \frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!}(v(S\cup\{i\})-v(S)) \\
&= \sum_{S\subseteq N\backslash\{i,j\}} \frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!}(v(S\cup\{i\})-v(S)) \\
&+ \sum_{S\subseteq N\backslash\{i,j\}} \frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!}(v(S\cup\{i,j\})-v(S\cup\{j\})) \\
&= \sum_{S\subseteq N\backslash\{i,j\}} \frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!}(v(S\cup\{j\})-v(S)) \\
&+ \sum_{S\subseteq N\backslash\{i,j\}} \frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!}(v(S\cup\{i,j\})-v(S\cup\{i\})) \\
&= \sum_{S\subseteq N\backslash\{j\}} \frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!}(v(S\cup\{j\})-v(S)) = \phi_j(v).
\end{aligned}
$$

- Aditividad.

  Se consideran los juegos v_1 y v_2 de n jugadores. Entonces $v_1 + v_2$ es otro juego de n jugadores y se verifica que:

  $$\forall S \subseteq N,\ (v_1+v_2)(S) = v_1(S) + v_2(S).$$

  Por tanto, para cada jugador $i \in N$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
\phi_i(v_1+v_2) &= \sum_{S\subseteq N\backslash\{i\}} \frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!}((v_1+v_2)(S\cup\{i\})-(v_1+v_2)(S)) \\
&= \sum_{S\subseteq N\backslash\{i\}} \frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!}(v_1(S\cup\{i\})+v_2(S\cup\{i\})-v_1(S)-v_2(S)) \\
&= \sum_{S\subseteq N\backslash\{i\}} \frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!}(v_1(S\cup\{i\})-v_1(S)+v_2(S\cup\{i\})-v_2(S)) \\
&= \sum_{S\subseteq N\backslash\{i\}} \frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!}(v_1(S\cup\{i\})-v_1(S)) \\
&+ \sum_{S\subseteq N\backslash\{i\}} \frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!}(v_2(S\cup\{i\})-v_2(S)) \\
&= \phi_i(v_1)+\phi_i(v_2).
\end{aligned}
$$

Ahora, sea φ una regla de asignación que satisface EF, JN, SIM y AD. Observemos que cada juego $v \in G^N$ puede ser visto como el vector $\{v(S)\}_{S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} \in \mathbb{R}^{2^n-1}$ y entonces, G^N puede ser identificado como un espacio vectorial de dimensión $2^n - 1$.

Como ya hemos demostrado previamente[2] los juegos de unanimidad forman una base del espacio vectorial mencionado.

Así, para cualquier juego dado v, existen α_S únicos tales que

$$v = \sum_{S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} \alpha_S u_S$$

Dado que φ satisface EF, JN y SIM, tenemos que para cada $i \in N$, cada $\emptyset \neq S \subset N$, y para cada $\alpha_S \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_i(\alpha_S u_S) = \begin{cases} \frac{\alpha_S}{|S|} & \text{si } i \in S, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Entonces, como φ satisface AD y $U(N)$ es una base de G^N, tenemos que

$$\varphi(v) = \sum_{S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} \varphi(\alpha_S u_S)$$

y φ está unicamente determinada. □

Proposición 2.46. *Ninguno de los axiomas en la caracterización del valor de Shapley es prescindible.*

Demostración. Vamos a ver para cada axioma de la caracterización que si lo quitamos, existe una regla de asignación diferente del valor de Shapley que satisface los otros tres axiomas.

- Quitamos EF: La regla de asignación φ definida para cada $v \in G^N$, por $\varphi(v) := 2\phi(v)$, satisface JN, SIM y AD.
- Quitamos JN: La regla de asignación φ definida para cada $v \in G^N$ y para cada $i \in N$, $\varphi_i(v) = \frac{v(N)}{n}$ satisface EF, SIM y AD. Esta regla de asignación es conocida como la regla de división igual.
- Quitamos SIM: Sea φ la regla de asignación definida como sigue. Sea $v \in G^N$ y sea $\Pi^1(N)$ el conjunto de ordenaciones de los jugadores en N en el que el jugador 1 está en la primera posición, i.e., $\pi \in \Pi^1(N)$ si y sólo si $\pi(1) = 1$. Entonces, para cada $i \in N$, $\varphi_i(v) := \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\pi \in \Pi^1(N)} m_i^\pi(v)$. Esta regla de asignación satisface EF, JN y AD.
- Quitamos AD: Sea φ una regla de asignación definida del siguiente modo. Sea $v \in G^N$ y sea d el número de jugadores nulos en el juego v. Entonces, para cada $i \in N$, $\varphi_i(v) = 0$ si i es un jugador nulo y $\varphi_i(v) = \frac{v(N)}{n-d}$ en caso contrario. Esta regla de asignación satisface EF, JN y SIM. □

[2]Ver página 4.

Observación 2.47. Sea $v \in SG^N$. Entonces, para cada $i \in N$ y para cada $\pi \in \Pi(N)$, tenemos que

$$m_i^\pi(v) = v(P^\pi(i) \cup \{i\}) - v(P^\pi(i)) \geq v(P^\pi(i)) + v(i) - v(P^\pi(i)) = v(i).$$

Entonces,

$$\phi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi(N)} m_i^\pi(v) \geq \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi(N)} v(i) = v(i).$$

Por lo tanto, para la clase de juegos superaditivos, el valor de Shapley pertenece al conjunto de imputaciones.

3. Índices de poder

Los juegos simples se usan normalmente como modelos de organismos que toman decisiones mediante votaciones, por lo tanto, un concepto de solución para esta clase de juegos se llama también índice de poder, y representa una medida abstracta del poder de cada votante en el organismo que el juego describe. También puede ser interpretado como la capacidad a priori de los votantes para cambiar el resultado, por eso, cuando restringimos la atención a juegos simples, las reglas de asignación tipo puntual se suelen llamar índices de poder.

Definición 3.1. *Un índice de poder es una función no negativa $f : S^N \to \mathbb{R}^N$, que asigna a cada juego $v \in S^N$ un vector $f(v) \in \mathbb{R}^N$, cuyas componentes $f_i(v) \geq 0$ recogen la medida del poder que posee el jugador i en dicho juego.*

3.1. Índice de Shapley-Shubik

La primera propuesta de índice fue el índice de Shapley-Shubik (Shapley y Shubik, 1954), que utiliza como factor fundamental de valoración la medida en que un votante es decisivo en la toma de una decisión.

Definición 3.2. *El índice de poder de Shapley-Shubik es la restricción del valor de Shapley a la clase de juegos simples o S^N, por lo tanto, se denota también por ϕ.*

Sea $\pi = (\pi(1), ..., \pi(n))$ una permutación cualquiera. Si imaginamos que se va formando una coalición a partir de $\pi(1)$, añadiendo jugadores uno a uno en el orden indicado por la permutación, siempre llegaremos a encontrar un primer jugador i que, al integrarse, convierta en ganadora la coalición que forman con él quienes le proceden en la permutación. Este jugador se llama pivote, más formalmente:

Definición 3.3. *Diremos que existe un único jugador $i \in N$ denominado pivote si:*

i. $P^\pi(i) \notin W$.

ii. $P^\pi(i+1) \in W$.

Aunque hayamos dado una caracterización del valor de Shapley para G^N, esto no es válido cuando nos restringimos a S^N. La razón es que la suma de juegos simples no es un juego simple y, por lo tanto, la propiedad de Aditividad no tiene sentido en S^N. Se propone una caracterización reemplazando AD por la propiedad de Transferencia (TF). Esta propiedad relaciona los índices de poder del juego máximo y el juego mínimo.

Definición 3.4. *Sean $v, \tilde{v} \in G^N$. El juego máximo de v y $\tilde{v}$, $v \vee \tilde{v}$, se define para cada $S \subseteq N$, por*

$$(v \vee \tilde{v})(S) := max\{v(S), \tilde{v}(S)\}.$$

Análogamente, el juego mínimo de v y $\tilde{v}$, $v \wedge \tilde{v}$, se define, para cada $S \subseteq N$, por

$$(v \wedge \tilde{v})(S) := min\{v(S), \tilde{v}(S)\}.$$

Proposición 3.5. *Sean $v, \tilde{v} \in S^N$, entonces el juego máximo y el juego mínimo de v y $\tilde{v}$ son juegos simples y se definen del siguiente modo.*

El juego máximo $v \vee \tilde{v} \in S^N$ se define para cada $S \subseteq N$, por

$$(v \vee \tilde{v})(S) := \begin{cases} 1 & \textit{si } v(S) = 1 \textit{ o } \tilde{v}(S) = 1, \\ 0 & \textit{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

El juego mínimo $v \wedge \tilde{v} \in S^N$ se define para cada $S \subseteq N$ por

$$(v \wedge \tilde{v})(S) := \begin{cases} 1 & \textit{si } v(S) = 1 \textit{ y } \tilde{v}(S) = 1, \\ 0 & \textit{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Esta operación se extiende a cualquier conjunto finito de juegos y es asociativa.

El conjunto de coaliciones ganadoras del juego simple $v \vee \tilde{v}$ es la unión del conjunto de coaliciones ganadoras de v y $\tilde{v}$. En el juego simple $v \wedge \tilde{v}$, el conjunto de coaliciones ganadoras es la intersección del conjunto de coaliciones ganadoras de v y $\tilde{v}$.

Recordemos, que dada una coalición S, u_S denota el juego de unanimidad de S y que los juegos de unanimidad son juegos simples. Además, dado un juego simple $v \in S^N$ tal que el conjunto de coaliciones ganadoras minimales es $W^m = \{S_1, ..., S_k\}$, entonces $v = u_{S_1} \vee u_{S_2} \vee ... \vee u_{S_k}$. Presentamos ahora la propiedad de Transferencia.

- Transferencia (TF): Un índice de poder f satisface TF si, para $v, \tilde{v} \in S^N$,

$$f(v \vee \tilde{v}) + f(v \wedge \tilde{v}) = f(v) + f(\tilde{v}).$$

Teorema 3.6. *El índice de Shapley-Shubik es el único índice de poder que satisface EF, JN, SIM y TF.*

Demostración. Por el Teorema 2.45., ϕ satisface EF, JN y SIM. Además, dados dos juegos simples v y $\tilde{v}$, $v + \tilde{v} = (v \vee \tilde{v}) + (v \wedge \tilde{v})$ y como el valor de Shapley satisface AD, el índice de Shapley-Shubik satisface TF.

Sea v un juego simple y sea f un índice de poder que satisface EF, JN, SIM y TF. Probaremos la unicidad por inducción en el número de coaliciones ganadoras minimales, es decir, en $|W^m(v)|$.

Si $|W^m(v)| = 1$, entonces v es un juego de unanimidad para la coalición $S \in W^m(v)$, es decir, $v = u_S$. Por EF, JN y SIM $f(v) = \phi(v)$.

Asumimos, que para cada juego simple v tal que $|W^m(v)| \leq k - 1$, $f(v) = \phi(v)$.

Sea v un juego simple, $|W^m(v)| = k$, i.e., $W^m(v) = \{S_1, ..., S_k\}$ y

$$v = u_{S_1} \vee u_{S_2} \vee ... \vee u_{S_k}.$$

Sea $\tilde{v} = u_{S_2} \vee ... \vee u_{S_k}$. Entonces, $u_{S_1} \vee \tilde{v} = v$ y

$$u_{S_1} \wedge \tilde{v} = u_{S_2 \cup S_1} \vee u_{S_3 \cup S_1} \vee ... \vee u_{S_k \cup S_1}.$$

El número de coaliciones minimales ganadoras para cada juego simple u_{S_1}, $\tilde{v}$ y $u_{S_1} \wedge \tilde{v}$ es más pequeño que k.

Entonces, por hipótesis de inducción,

$$f(u_{S_1}) = \phi(u_{S_1}), f(\tilde{v}) = \phi(\tilde{v}) \text{ y } f(u_{S_1} \wedge \tilde{v}) = \phi(u_{S_1} \wedge \tilde{v}).$$

Por TF,

$$f(u_{S_1} \vee \tilde{v}) + f(u_{S_1} \wedge \tilde{v}) = f(u_{S_1}) + f(\tilde{v}),$$

además, como $u_{S_1} \vee \tilde{v} = v$,

$$\begin{aligned} f(v) &= f(u_{S_1}) + f(\tilde{v}) - f(u_{S_1} \wedge \tilde{v}) \\ &= \phi(u_{S_1}) + \phi(\tilde{v}) - \phi(u_{S_1} \wedge \tilde{v}) \\ &= \phi(u_{S_1} + \tilde{v} - u_{S_1} \wedge \tilde{v}) = \phi(v). \end{aligned}$$

□

Recordemos que el valor de Shapley, puede ser visto como una media ponderada de las contribuciones marginales de los jugadores a las distintas coaliciones. Además, cuando trabajamos con juegos simples, para obtener el índice de Shapley-Shubik podemos restringir la atención al par de coaliciones S, $S \cup \{i\}$ tal que S no es una coalición ganadora pero $S \cup \{i\}$ sí que lo es. Una coalición de este tipo se denomina swing para el jugador i.

Definición 3.7. *Sea $v \in S^N$ y sea $i \in N$. Un swing para el jugador i es una coalición $S \subseteq N \backslash \{i\}$ tal que $S \notin W(v)$ y $S \cup \{i\} \in W(v)$.*

Es decir, un swing para un jugador i es una coalición ganadora para la que el jugador i es un jugador crítico. Denotamos por $\mu_i(v)$ el número de swings del jugador i y por $\mu(v)$ el número total de swings, es decir,

$$\mu(v) := \sum_{i \in N} \mu_i(v).$$

Si observamos cómo el índice de Shapley-Shubik se relaciona a la idea de swing, obtenemos que este índice es una media ponderada de los swings de cada jugador, donde el peso de cada swing depende de su tamaño.

3.2. Índice de Deegan-Packel

Posteriormente al índice de Shapley-Shubik, se introdujeron índices de poder que en lugar de considerar la medida en que un votante es decisivo, se basaron en la idea de coalición ganadora minimal. Estos índices son el índice de Deegan-Packel (Deegan y Packel, 1978) y el índice de Holler-Packel o Public Good (Holler y Packel, 1983).

Definición 3.8. *Sea $v \in S^N$ un juego simple. Definimos el índice de poder de Deegan-Packel, ρ, para cada jugador $i \in N$ por*

$$\rho_i(v) = \frac{1}{|W^m(v)|} \sum_{S \in W_i^m(v)} \frac{1}{|S|}.$$

Donde la definición anterior, proviene de asumir los siguientes supuestos:

1. Sólo las coaliciones minimales serán ganadoras.

2. Cada coalición ganadora minimal tiene la misma probabilidad de formarse.

3. Los jugadores en una coalición ganadora minimal dividen el poder por igual.

Estos supuestos vienen motivados por el hecho de construir un índice de poder razonable para formular a priori una manera de medir el poder. Más concretamente, los supuestos 1 y 2 responden a la búsqueda de jugadores racionales que maximizan sus ganancias y el supuesto 3 responde a un reparto equitativo de las ganancias a los jugadores resultado de la participación en la coalición.

Observación 3.9. La definición de ρ_i es consistente con y determinada por los supuestos anteriores. En efecto, sólo coaliciones ganadoras minimales que incluyan el jugador i aparecen (supuesto 1) y cada coalición es tratada consistentemente en el sumatorio (supuesto 2). Además, para cada $S \in W_i^m(v)$, el término $\frac{1}{|S|}$ indica que el jugador i reparte su ganancia equitativamente con los otros $|S|-1$ jugadores en S. El factor $\frac{1}{|W^m(v)|}$ sirve para normalizar el poder de los jugadores de manera que la suma sea la unidad.

Como estamos interesados sólo en coaliciones ganadoras minimales en el juego $v \vee w$ será necesario restringir los pares de juegos que combinamos del siguiente modo.

Definición 3.10. *Los juegos v y w en S^N son fusionables si*

$$\forall S \in W^m(v) \text{ y } T \in W^m(w),\ S \not\subseteq T \text{ y } T \not\subseteq S.$$

Como ya hemos dicho, las coaliciones ganadoras en $v \vee w$ son precisamente la unión de las coaliciones ganadoras en v y en w, y la condición de fusionabilidad asegura que

$$|W^m(v \vee w)| = |W^m(v)| + |W^m(w)|.$$

Veamos ahora las propiedades que se pueden imponer a un índice de poder f, sea $v \in S^N$:

- Eficiencia (EF): $\sum_{i \in N} f_i(v) = 1$.

- Jugador Nulo (JN): $W_i^m(v) = \emptyset \Rightarrow f_i(v) = 0$.

- Anonimato (AN): Para cualquier $i \in N$ y cualquier permutación $\pi \in N$, $f_{\pi(i)}(\pi v) = f_i(v)$, donde el juego πv está definido por $(\pi v)(S) = v(\pi^{-1}(S))$.

- Fusionabilidad (FUS): Si $v, w \in S^N$ son fusionables, entonces

$$f(v \vee w) = \frac{1}{|W^m(v \vee w)|}(|W^m(v)|f(v) + |W^m(w)|f(w)).$$

Observación 3.11. Podemos reformular la propiedad JN como hemos hecho, ya que si nos restringimos a la clase de juegos simples, obtenemos que si un jugador es nulo no contribuye al valor de una coalición, entonces no pertenecerá a ninguna coalición ganadora minimal.

La propiedad AN nos dice que cambiando los nombres de los jugadores esto no afecta a su poder y por lo tanto, es del mismo estilo que la propiedad SIM.

Finalmente, la propiedad FUS indica que el poder en un juego fusionable es la media ponderada de los componentes del juego, con el número de coaliciones ganadoras minimales en cada componente proporcionando los pesos.

Teorema 3.12. *El índice de Deegan-Packel es el único índice de poder que satisface EF, JN, AN y FUS.*

Demostración. Veamos primero que satisface EF, JN, AN y FUS.

- Eficiencia.

  Consideramos cualquier $S \in W^m(v)$ y todos los términos del sumatorio

  $$\sum_{i\in N} \rho_i(v) = \sum_{i\in N} \sum_{S\in W_i^m(v)} \frac{1}{|W^m(v)|}\frac{1}{|S|}$$

  que resultan de S. Hay precisamente $|S|$ términos (uno para cada $i \in S$) y cada uno contribuye

  $$\frac{1}{|W^m(v)|}\frac{1}{|S|}.$$

  Así S contribuye precisamente $\frac{1}{|W^m(v)|}$ al sumatorio.

  Como hay $|W^m(v)|$ contribuyentes al sumatorio total, tenemos que $\sum_{i\in N} \rho_i(v) = 1$, como deseábamos.

- Jugador Nulo.

  $$W_i^m(v) = \emptyset \Rightarrow \nexists S \text{ tal que } S \in W_i^m(v) \Rightarrow \sum_{S\in W_i^m(v)} \frac{1}{|S|} = 0 \Rightarrow \rho_i(v) = 0.$$

- Anonimato.

  Consideramos cualquier $\pi \in N$. Entonces,

  $$\rho_i(v) = \frac{1}{|W^m(v)|} \sum_{S\in W_i^m(v)} \frac{1}{|S|} = \frac{1}{|W^m(\pi v)|} \sum_{\pi(S)\in W_{\pi(i)}^m \pi v} \frac{1}{|\pi(S)|} = \rho_{\pi(i)}(\pi v).$$

- Fusionabilidad.

  Para $\forall i \in N$,

  $$\begin{aligned}
  \rho_i(v\vee w) &= \frac{1}{|W^m(v\vee w)|} \sum_{S\in W_i^m(v\vee w)} \frac{1}{|S|} \\
  &= \frac{1}{|W^m(v\vee w)|} \left(\sum_{S\in W_i^m(v)} \frac{1}{|S|} + \sum_{S\in W_i^m(w)} \frac{1}{|S|} \right) \\
  &= \frac{1}{|W^m(v\vee w)|} (|W^m(v)|\rho_i(v) + |W^m(w)|\rho_i(w)|).
  \end{aligned}$$

Vamos a ver ahora que cualquier índice f que satisfaga EF, JN, AN y FUS será igual a ρ.

Consideramos $v \in S^N$ y sean $S_1, S_2, ..., S_m$ las coaliciones de $W^m(v)$, de manera que $|W^m(v)| = m$. Sea $v_k \in S^N$ un juego de unanimidad, entonces tenemos $|W^m(v_k)| = 1$.

Como $W^m(v_k) = \{S_k\}$, los v_k son fusionables y $v = v_1 \vee v_2 \vee ... \vee v_m$. Por lo tanto, para cualquier $i \in N$ y cualquier juego de unanimidad v_k, por las propiedades EF, JN y AN tenemos:

$$f_i(v_k) = \begin{cases} \frac{1}{|S_k|} & \text{si } i \in S_k, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Utilizamos la inducción sobre m juegos, supongamos que es cierto para m-1 y obtenemos:

$$f_i(v) = \frac{1}{|W^m(v)|}\sum_{k=1}^{m} |W^m(v_k)| f_i(v_k) = \frac{1}{|W^m(v)|}\sum_{S \in W_i^m(v)} \frac{1}{|S|} = \rho_i(v),$$

Donde hemos utilizado los valores de arriba para $f_i(v_k)$ y el hecho que todos los $|W^m(v_k)| = 1$. □

El índice de Deegan-Packel y sus propiedades pueden ser generalizados para G^N, de esta manera, se proporciona una alternativa del valor de Shapley.

Si descartamos, en este caso general, la idea de coaliciones ganadoras minimales (de hecho, como v ya no está restringido a 0 y 1, no está claro qué podría ser una coalición ganadora), podemos obtener una función valor general $\bar{\rho}$ en $v \in G^N$ del siguiente modo. Para $i \in N$, definimos

$$\bar{\rho}_i(v) = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} \frac{v(S)}{|S|}.$$

Definición 3.13. *Llamamos a $i \in N$ un jugador cero si $v(T) = 0$ siempre que $i \in T$.*

De mismo modo que para ρ, asumimos que todas las coaliciones son igual de probables y los repartos entre los jugadores son iguales.

Consideremos las siguientes propiedades que posteriormente impondremos:

- Eficiencia Modificada (EFM): $\sum_{i \in N} f_i(v) = \sum_{S \subseteq N} v(S)$.
- Jugador Cero (JC): i es un jugador cero $\Rightarrow f_i(v) = 0$.
- Anonimato (AN): Para cualquier $i \in N$ y cualquier permutación π en N, $f_{\pi(i)}(\pi v) = f_i(v)$.
- Aditividad (AD): Para cualquier $v, w \in G^N$, $f(v + w) = f(v) + f(w)$.

La propiedad de EFM, dice que la suma de los índices de poder de todos los jugadores $i \in N$ es igual a la suma del valor de todas las coaliciones $S \subseteq N$. Por otro lado, la propiedad de JC indica que el índice de poder de un jugador cero es 0, lo cual es razonable ya que el valor de todas las coaliciones a las que pertenezca este jugador será 0.

Teorema 3.14. *Existe una única regla de asignación en G^N que satisface EFM, JC, AN y AD, y está definida por* $\bar{\rho}_i(v) = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} \frac{v(S)}{|S|}$.

Demostración. Veamos en primer lugar que existe tal $\varphi : G^N \to \mathbb{R}^N$ que satisface EFM, JC, AN y AD. Definimos para cada $S \subseteq N$ y para cualquier $c \in \mathbb{R}$ el juego $v_{S,c}$ por

$$v_{S,c}(T) = \begin{cases} c & \text{si } T = S, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Entonces, EFM, JC y AN aseguran que

$$\varphi_i(v_{S,c}) = \begin{cases} \frac{c}{|S|} & \text{si } i \in S, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Como cualquier $v \in G^N$ puede ser escrito como una suma finita de juegos de la forma $v_{S,c}$

$$v = \sum_{S \subseteq N} v_{S,v(S)},$$

AD implica

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \subseteq N} \varphi_i(v_{S,v(S)}) = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} \frac{v(S)}{|S|} = \bar{\rho}_i(v).$$

Queda demostrar que $\bar{\rho}$ satisface EFM, JC y AD.

- Eficiencia Modificada.

$$\sum_{i \in N} \bar{\rho}_i = \sum_{i \in N} \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} \frac{v(S)}{|S|} = \sum_{S \subseteq N} \frac{v(S)}{|S|} |S| = \sum_{S \subseteq N} v(S).$$

- Jugador Cero.

$$i \text{ es un jugador cero} \Rightarrow v(S) = 0 \ \forall S \text{ tal que } i \in S \Rightarrow \bar{\rho}_i = 0.$$

- Anonimato.

$$\bar{\rho}_i(v) = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} \frac{v(S)}{|S|} = \sum_{\substack{\pi(S) \in \Pi(N) \\ \pi(i) \in \pi(S)}} \frac{\pi v(S)}{|\pi(S)|} = \bar{\rho}_{\pi(i)}(\pi v).$$

- Aditividad.

  Dados v y w en G^N y cualquier $i \in N$,

$$\bar{\rho}_i(v + w) = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} \frac{(v + w)(S)}{|S|} = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} \frac{(v(S) + w(S))}{|S|} = \bar{\rho}_i(v) + \bar{\rho}_i(w).$$

$\square$

3.3. Índice de Holler-Packel

Tanto el índice de Shapley-Shubik como el índice de Deegan-Packel consideran el valor de la coalición como un bien privado, ya que hacen frente al problema de distribuir o asignar el valor a priori de la coalición a sus miembros, pero puede no haber una solución a este problema si el bien es colectivo.

Por ejemplo, en el caso de la política, dividir el valor de una coalición va en contra del primer principio del análisis político que considera que la política pública es un bien (o mal) público.

Por lo tanto, Holler (1982) realiza una propuesta de índice alternativo cuyos supuestos básicos son:

1. Todo jugador de una coalición ganadora minimal es decisivo para el valor de la coalición. Dicho valor expresa (sin dividir) el poder del jugador en la coalición.

2. Un jugador no crítico, de una coalición, no influye en el carácter ganador de la misma, y por lo tanto, su poder es nulo. Es "pura" suerte cuando un resultado corresponde con sus preferencias.

3. Como los jugadores no críticos de las coaliciones no son decisivos para afectar a el carácter ganador de una coalición, no tienen incentivos a votar.

4. Sólo se formarán las coaliciones que tienen un conjunto decisivo como coalición ganadora, es decir, un conjunto decisivo ganador. Los jugadores críticos de una coalición constituyen el conjunto ganador decisivo.

5. Cada conjunto decisivo ganador corresponde a un resultado específico de una coalición.

Si consideramos el resultado de la coalición como un bien público, nos tenemos que referir a los distintos conjuntos ganadores decisivos de las coaliciones potenciales cuando medimos el poder a priori dentro de un organismo de votación.

El concepto de conjunto decisivo ganador es idéntico al de coalición ganadora minimal. Por lo tanto, no se restringe a que sólo estas coaliciones puedan formarse, pero si se sugiere que sólo éstas serán importantes para medir el poder a priori.

Definición 3.15. *Sea $v \in S^N$ un juego simple. El índice de Holler-Packel para cada jugador $i \in N$ es:*

$$\zeta_i(v) = \frac{|W_i^m(v)|}{\sum_{i \in N} |W_i^m(v)|}.$$

El índice de Holler-Packel mide el número de veces que el jugador i es miembro de una coalición ganadora minimal, dividido por el número de veces que los n jugadores del conjunto N son miembros de $S \in W^m(v)$.

Como v es un juego simple, $\forall S \subseteq N$, $v(S) \in \{0, 1\}$ entonces $\zeta_i(v)$ es proporcional al número de coaliciones ganadoras minimales que contienen al jugador i.

Veamos las siguientes propiedades que se pueden imponer a un índice de poder f.

- Eficiencia (EF): $\sum_{i\in N} f_i(v) = 1$.
- Jugador Nulo (JN): i es un jugador nulo en $v \Rightarrow f_i(v) = 0$.
- Anonimato (AN): Para cualquier $i \in N$ y cualquier permutación π en N, $f_{\pi(i)}(\pi v) = f_i(v)$.
- Fusionabilidad Modificada (FUSM): Si v_1 y v_2 son fusionables $\Rightarrow \forall i \in N$,

$$f_i(v_1 \vee v_2) = \frac{\sum_{i\in N} |W_i^m(v_1)| f_i(v_1) + \sum_{i\in N} |W_i^m(v_2)| f_i(v_2)}{\sum_{i\in N} |W_i^m(v_1)| + \sum_{i\in N} |W_i^m(v_2)|}.$$

Así, FUSM requiere que el poder en el juego fusionado sea una media ponderada de los poderes de los juegos iniciales con los ratios siguientes

$$\frac{\sum_{i\in N} |W_i^m(v_1)|}{\sum_{i\in N} |W^m(v_1)| + \sum_{i\in N} |W_i^m(v_2)|} \text{ y } \frac{\sum_{i\in N} |W_i^m(v_2)|}{\sum_{i\in N} |W_i^m(v_1)| + \sum_{i\in N} |W_i^m(v_2)|},$$

proporcionando los pesos.

Teorema 3.16. *El índice ζ es el único índice de poder que satisface EF, JN, AN y FUSM.*

Demostración. Por razonamientos similares a los teoremas de caracterización anteriores, es inmediato que ζ satisface EF, JN y AN.

Para FUSM, tenemos

$$\begin{aligned}
\zeta_i(v_1 \vee v_2) &= \frac{|W_i^m(v_1 \vee v_2)|}{\sum_{i\in N} |W_i^m(v_1 \vee v_2)|} \\
&= \frac{|W_i^m(v_1)| + |W_i^m(v_2)|}{\sum_{i\in N} |W_i^m(v_1)| + \sum_{i\in N} |W_i^m(v_2)|} \\
&= \frac{\sum_{i\in N} |W^m(v_1)|}{\sum_{i\in N} |W_i^m(v_1)| + \sum_{i\in N} |W^m(v_2)|} \frac{|W_i^m(v_1)|}{\sum_{i\in N} |W_i^m(v_1)|} \\
&+ \frac{\sum_{i\in N} |W_i^m(v_2)|}{\sum_{i\in N} |W_i^m(v_1)| + \sum_{i\in N} |W_i^m(v_2)|} \frac{|W_i^m(v_2)|}{\sum_{i\in N} |W^m(v_2)|} \\
&= \frac{\sum_{i\in N} |W_i^m(v_1)| \zeta_i(v_1) + \sum_{i\in N} |W_i^m(v_2)| \zeta_i(v_2)}{\sum_{i\in N} |W_i^m(v_1)| + \sum_{i\in N} |W_i^m(v_2)|}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, para cualquier índice ζ que satisfaga EF, JN, AN y FUSM procedemos del siguiente modo. Si v tiene una única coalición ganadora minimal, la llamamos S_v, entonces por EF, JN y AN tenemos que:

$$\zeta_i(v) = \begin{cases} \frac{1}{|S_v|} & \text{si } i \in S_v, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Ahora consideramos cualquier juego simple v con $W^m = \{S_1, S_2, ..., S_m\}$. Podemos escribir entonces $v = v_1 \vee v_2 \vee ... \vee v_m$ donde cada v_j tiene una única coalición ganadora minimal S_j y los v_j son secuencialmente fusionables en el sentido que v_{j+1} y $v_1 \vee v_2 \vee ... \vee v_m$ son fusionables para cada $j = 1, 2, ..., m-1$.

Podemos extender FUSM inductivamente a una suma de estos juegos de manera que se obtiene para cada $i \in N$:

$$\zeta_i(v) = \frac{\sum_{j=1}^{m} \sum_{i\in N} |W_i^m(v_j)| \zeta_i(v_j)}{\sum_{j=1}^{m} \sum_{i\in N} |W_i^m(v_j)|}.$$

Así, obtenemos

$$\sum_{i\in N} |W_i^m(v_j)| \zeta_i(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in S_j, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\zeta_i(v) = \sum_{\{S_j | i \in S_j\}} \frac{1}{\sum_{i\in N} |W_i^m(v)|} = \frac{|W_i^m(v)|}{\sum_{i\in N} |W_i^m(v)|}.$$

□

Observación 3.17. De manera análoga al índice de Deegan-Packel, se obtiene una generalización del índice de Holler-Packel a G^N.

3.4. Propiedades de los índices de poder

Hemos visto unas propiedades específicas para cada índice de poder, sin embargo, Allingham en 1975 estableció una lista de cuatro propiedades que deberían requerirse para cualquier índice de poder.

Las principales propiedades que deberían cumplir los índices de poder son:

1. El jugador que tiene asociado el mayor número de votos debería tener el mayor índice de poder. Sea i tal que $w_i > w_s, \forall s = 1, ..., n$ e $i \neq s \Rightarrow f_i > f_s$, $\forall s = 1, ..., n$ e $i \neq s$.

2. En caso que existan varios jugadores con el mismo número de votos, todos ellos tendrían el mismo índice de poder. Si $w_i = w_j \Rightarrow f_i = f_j, i, j = 1, ..., n$.

3. Principio de monotonía: Dados dos jugadores si un jugador tiene un mayor número de votos que otro, también deberá tener un mayor índice de poder. Sean i y j dos jugadores, si $w_i > w_j$ entonces $f_i \geq f_j$.

4. El número total de coaliciones en las que puede participar el jugador i es 2^{n-1}.

   Este último punto, más que un requerimiento para un índice de poder, debe ser considerado como un requerimiento probabilístico. Teniendo un juego de n jugadores, todas las posibles coaliciones sin el jugador i son 2^{n-1}, por lo tanto, el jugador i se puede añadir a 2^{n-1} coaliciones.

Por otro lado, hay que tener en cuenta los requisitos para la formación de coaliciones. En general, todos los índices a priori consideran que cualquier coalición es posible. Aunque a la hora de determinar el índice de poder sólo se consideran las coaliciones ganadoras.

De los tres índices explicados anteriormente, sólo el de Shapley-Shubik cumple estas cuatro propiedades; ya que los otros dos, el de Deegan-Packel y el de Holler-Packel, no cumplen, por ejemplo, el principio de monotonía.

Este hecho que se cuestionó en su momento es aceptado hoy en día como posible, ya que existen numerosos casos reales donde jugadores con un menor número de votos poseen un mayor poder. De todas formas, se estableció un criterio de probabilidad de la formación de la coalición en función del número de miembros, y de esta forma se modificaron ambos índices al considerar una probabilidad previa de formación de la coalición. Las coaliciones con menos miembros deberían ser más probables que aquellas con más miembros.

4. Paradojas del poder de voto

Como hemos visto en el apartado anterior los índices de poder se caracterizan a partir de unas propiedades que se consideran razonables y deseables para tales índices. Estrechamente relacionado con este tema de proporcionar propiedades bajo un supuesto de racionalidad, se encuentra el tema de las paradojas del poder de voto; ya que son situaciones que parecen ser absurdas o contrarias al sentido común, pero en un examen más detallado resultan ser ciertas.

Las paradojas más conocidas, entre otras, son la Paradoja de la Redistribución (Fischer y Schotter, 1978), la Paradoja de los Miembros Nuevos (Brams, 1975, Brams y Affuso, 1976) y la Paradoja del Tamaño Grande (Brams, 1975).

4.1. Paradoja de la Redistribución

La Paradoja de la Redistribución ocurre, como bien indica el nombre, cuando hay una redistribución entre el poder de voto y el peso de voto. Un índice de poder muestra esta paradoja si el peso de voto de un votante disminuye y al mismo tiempo aumenta su índice de poder, o si un votante gana en términos de peso de voto, pero pierde poder de voto.

Definición 4.1. *Sean $v = [q; (w_1, ..., w_n)]$ y $v' = [q; (w'_1, ..., w'_n)]$ dos juegos de mayoría ponderada, donde $\sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i=1}^{n} w'_i$. El votante i se dice que es un donante si $w'_i < w_i$ y el votante i se dice que es un recipiente si $w'_i > w_i$.*

Un índice de poder f muestra la Paradoja de la Redistribución si existe un donante i tal que $f_i(v') > f_i(v)$ o si existe un recipiente j tal que $f_j(v') < f_j(v)$.

Ejemplo 4.2. Consideremos el siguiente juego de mayoría ponderada

$$v = [70; (55, 35, 10)].$$

El cálculo de los índices de poder nos da el siguiente resultado:

- Shapley-Shubik : (0.5, 0.5, 0).
- Deegan-Packel : (0.5, 0.5, 0).
- Holler-Packel : (0.5, 0.5, 0).

Lo cual, es lógico ya que el votante con un peso de 10 es un jugador nulo ya que no contribuye al valor de ninguna coalición. Por lo tanto, todos los índices coinciden en darle de resultado 0 porque cumplen la propiedad de Jugador Nulo.

Ahora, redistribuimos los votos, manteniendo la misma cuota, de manera que obtenemos un nuevo juego

$$v' = [70; (50, 25, 25)].$$

En este caso, los índices correspondientes son:

- Shapley-Shubik : (0.67, 0.17, 0.17).
- Deegan-Packel : (0.5, 0.25, 0.25).
- Holler-Packel : (0.5, 0.25, 0.25).

Para el índice de S-S se muestra que el primer votante ha disminuido su peso de voto de 0.55 a 0.5 y sin embargo su poder ha aumentado de 0.5 a 0.67, por lo tanto, para este índice se da la paradoja.

Para los índices de D-P y H-P no observamos la ocurrencia de esta paradoja ya que una disminución de peso de voto implica una disminución del poder de voto y un aumento del peso de voto implica un aumento del poder de voto. Esto no nos indica nada sobre si puede o no darse la paradoja para estos índices, para saberlo se requeriría un estudio más detallado.

4.2. Paradoja de los Miembros Nuevos

El concepto de poder tiene muchos significados e implicaciones. Uno bastante generalizado de ellos es que quien tiene la proporción más grande, tiene más poder. No obstante, esto hay índices de poder que no lo cumplen, ya que en un juego de mayoría ponderada el poder de un votante puede ser superior si controla una proporción menor de votos.

La Paradoja de los Miembros Nuevos muestra que la adición de un nuevo votante a un juego de mayoría ponderada, puede aumentar el poder de voto de los miembros antiguos aunque sus votos, tanto de manera individual como colectiva, se vean disminuidos.

Definición 4.3. *Sea* $v = [q; (w_1, ..., w_n)]$ *y supongamos que un votante n+1 se une a la votación. Entonces, el nuevo juego es* $v' = [q'; (w_1, ..., w_n, w_{n+1})]$*. Un índice de poder* f *satisface la Paradoja de los Miembros Nuevos si para algún* $i \in N$*,* $f_i(v') > f_i(v)$*.*

Observación 4.4. Esta paradoja puede ocurrir tanto si se mantiene la regla de decisión como si se establece una nueva.

Ejemplo 4.5. Consideremos el siguiente juego

$$v = [4; (3, 2, 2)],$$

donde que la cuota sea 4 representa que la regla de decisión es la mayoría simple (4 de 7).

Para S-S el poder de cada jugador es 0.33, ya que el votante con un peso de voto 3 es crítico (y pivote) para las mismas coaliciones que los votantes con peso de voto 2 (es decir 2) donde cada votante con peso de voto 2 es también crítico. Por eso, el votante con un peso de 2 y el votante con un peso de 3 tienen el mismo poder de voto.

Para los índices de D-P y H-P el resultado es el mismo ya que los votantes con peso 2 y 3 participan del mismo número de coaliciones ganadoras minimales y éstas tienen todas la misma cardinalidad.

Esto es debido a que todos los votantes son jugadores simétricos, ya que el valor que obtienen al unirse a una coalición es el mismo y como los tres índices cumplen la propiedad de Simetría se les asigna el mismo resultado.

Por lo tanto, el resultado del cálculo de los índices es:

- Shapley-Shubik : (0.33, 0.33, 0.33).
- Deegan-Packel : (0.33, 0.33, 0.33).
- Holler-Packel : (0.33, 0.33, 0.33).

Supongamos ahora que añadimos un votante más y el juego pasa a ser

$$v' = [5; (3, 2, 2, 1)]$$

donde la regla de decisión sigue siendo la mayoría simple (5 de 8).

En este caso, los correspondientes índices de poder son:

- Shapley-Shubik : (0.42, 0.25, 0.25, 0.08).
- Deegan-Packel : (0.33, 0.28, 0.28, 0.11).
- Holler-Packel : (0.29, 0.29, 0.29, 0.14).

Para el índice de S-S podemos ver que los votantes que tienen un peso de voto de 2 disminuyen su índice de poder mientras que el votante con un peso de voto de 3 aumenta su poder. El aumento de poder de voto de 0.33 a 0.42 es del 25 % y su bajada en la proporción de votos de 0.43 (3/7) a 0.38 (3/8) es del 12.5 %, por lo tanto, se observa claramente la paradoja.

Se puede pensar que esto es debido al cambio de regla de asignación, imaginemos ahora que la regla es 5/7 y el juego inicial es

$$v = [5; (3, 2, 2)].$$

Los resultados para este juego son:

- Shapley-Shubik : (0.67, 0.17, 0.17).
- Deegan-Packel : (0.5, 0.25, 0.25).
- Holler-Packel : (0.5, 0.25, 0.25).

Sin embargo, ahora añadimos otro votante y mantenemos la cuota de 5, obteniendo

$$v' = [5; (3, 2, 2, 1)].$$

En este caso, los correspondientes índices son:

- Shapley-Shubik : (0.42, 0.25, 0.25, 0.08).
- Deegan-Packel : (0.33, 0.28, 0.28, 0.11).
- Holler-Packel : (0.29, 0.29, 0.29, 0.14).

Podemos observar que se da la Paradoja de los Miembros Nuevos para los tres índices de poder ya que los votantes con un peso de voto de 2, han disminuido su proporción de votos pero han aumentado su poder para los tres índices de poder.

Con esto hemos visto un ejemplo de que para el índice S-S la paradoja sucede tanto si se mantiene como si se modifica la regla de asignación.

Observación 4.6. Distinguimos tres patrones asociados a esta paradoja:

1. Uno o más jugadores nulos son empoderados.
2. Uno o más de los votantes, excluyendo al votante con el peso más grande, son favorecidos.
3. El votante con el peso de voto más grande mejora su posición dominante.

Quizá el patrón más curioso es el tercero ya que des de el punto de vista político convencional se sugiere que una estrategia para disminuir el poder del votante dominante (o de una coalición dominante) es incrementar el número de votantes, pero hemos visto que esto no siempre es cierto.

4.3. Paradoja del Tamaño Grande

Esta paradoja ocurre cuando el índice de poder de una unión de votantes es menor que la suma de los índices de poder de los votantes por separado. Esta paradoja puede ser vista como una característica sutil inherente en la relación entre el poder y el tamaño, y ayuda a que nuestra comprensión de la naturaleza del poder sea más precisa.

Definición 4.7. *Sea $I \subseteq N$ un conjunto de votantes que deciden unirse, esta unión la denominamos como U. Un índice de poder f muestra la Paradoja del Tamaño Grande si $w_U = \sum_{i \in I} w_i$ y $f_U < \sum_{i \in I} f_i$.*

Ejemplo 4.8. Recuperemos el ejemplo anterior donde el juego es

$$v = [4; (3, 2, 2)]$$

y la regla de decisión es la mayoría simple (4 de 7).

Como ya hemos visto, para los tres índices de poder el resultado es (0.33,0.33,0.33).

Ahora, imaginemos que el votante con un peso de 3 se divide en 3 votantes con un peso de voto de 1, es decir,

$$v' = [4; (1, 1, 1, 2, 2)].$$

Para este nuevo juego, los índices de poder son:

- Shapley-Shubik : (0.13, 0.13, 0.13, 0.31, 0.31).
- Deegan-Packel : (0.19, 0.19, 0.19, 0.21, 0.21).
- Holler-Packel : (0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2).

Existen 4 combinaciones en las que un votante de peso 1 es crítico y un total de 8 combinaciones en que un votante de peso 2 es crítico. Con el índice de S-S obtenemos que el poder de voto para los votantes con peso de voto 1 es 0.13 y si sumamos estos valores para los tres jugadores obtenemos un valor de 0.4 que es superior al 0.33 de la coalición que formaban.

Del mismo modo, para el índice de D-P la suma de los índices de poder de los votantes con peso 1 es 0.57, mucho más elevado que el poder de la coalición que formaban. Para el índice de H-P, la suma es 0.60 casi el doble del poder que tenían como coalición estos votantes.

5. Aplicación: cambio del poder de voto de los países de la UE después del Brexit

La salida de Reino Unido de la Unión Europea ha supuesto grandes cambios tanto a nivel económico como a nivel político. Dentro de la Unión Europea, uno de los aspectos que se ha visto modificado es la distribución del poder de voto en el órgano decisorio esencial de la UE, el Consejo de la Unión Europea.

El Consejo de la Unión Europea es la institución que representa a los gobiernos de los Estados miembros. Es el foro donde se reúnen los ministros nacionales de los países de la UE para adoptar la legislación y coordinar las políticas.

Desde el Tratado de Lisboa (2007) la salida de un país no modifica las reglas de votación, sin embargo, estas reglas dependen del porcentaje de población de cada país respecto al total. Por lo tanto, con la salida del Reino Unido el poder de voto será diferente porque la población total de la UE es menor y se verán modificados los porcentajes de población de los correspondientes países.

El sistema de votación utilizado es el de doble mayoría cualificada con el que se expresan las diferencias de tamaño de los países. Esto es, una votación es exitosa si almenos el 55 % de los países votan a favor y representan almenos el 65 % de la población de la Unión Europea.

Definimos ahora formalmente el sistema de votación de doble mayoría cualificada tanto para antes como para después del Brexit.

1. Consideramos en primer lugar la situación antes del Brexit, sea

$$N = \{\text{conjunto de países del Consejo de la UE incluyendo Reino Unido}\}$$

y $|N| = n = 28$. Definimos la doble mayoría cualificada por $v \in S^N$ tal que $v = \tilde{v} \wedge v'$, donde:

- $\tilde{v} \in S^N$ es un juego de α-supermayoría con α =0.55, de modo que la función característica del juego, $\tilde{v}$, viene dada por $\tilde{v}(S) = 1$, si $|S| \geq \lceil 0.55{\cdot}28 \rceil = 16$, y $\tilde{v}(S) = 0$, en otro caso; siendo S una coalición de N.
- $v' \in S^N$ es un juego de mayoría ponderada, donde $q = 65$, y los pesos, $w_1, ..., w_{28}$ son los porcentajes de población de cada país respecto al total. De manera que la función característica, v', viene dada por $v'(S) = 1$, si $\sum_{i \in S} w_i \geq 65$, y $v'(S) = 0$ en otro caso.

Por lo tanto, la doble mayoría cualificada es el juego mínimo de $\tilde{v}$ y v' ya que una coalición debe ser ganadora en los dos juegos, para serlo en el juego v. Esto es, $\forall S \subseteq N$,

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tilde{v}(S) = 1 \text{ y } v'(S) = 1, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

2. Consideramos ahora la situación después del Brexit, sea

$$N = \{\text{conjunto de países del Consejo de la UE excluyendo Reino Unido}\}$$

y $|N| = n = 27$. Del mismo modo, $v \in S^N$ tal que $v = \tilde{v} \wedge v'$, donde:

- $\tilde{v} \in S^N$ es un juego de α-supermayoría con α=0.55, de modo que la función característica del juego, $\tilde{v}$, viene dada por $\tilde{v}(S) = 1$, si $|S| \geq \lceil 0.55 \cdot 27 \rceil = 15$, y $\tilde{v}(S) = 0$, en otro caso; siendo S una coalición de N.
- $v' \in S^N$ es un juego de mayoría ponderada, donde $q = 65$, y los pesos, $w_1, ..., w_{27}$, son los porcentajes de población de cada país respecto al total. De manera que la función característica, v', viene dada por $v'(S) = 1$, si $\sum_{i \in S} w_i \geq 65$, y $v'(S) = 0$ en otro caso.

De esta manera, $\forall S \subseteq N$,

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tilde{v}(S) = 1 \text{ y } v'(S) = 1, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Por lo tanto, hemos definido el sistema de votación del Consejo de la UE como un juego simple. En esta sección, calcularemos los índices de poder de Shapley-Shubik, Deegan-Packel y Holler-Packel antes y después del Brexit. Posteriormente, se hará una comparativa y se analizarán estos resultados para ver la variación de poder de voto de los países; además de observar si se da alguna de las paradojas presentadas anteriormente.

5.1. Cálculo de los índices de poder y resultados

El cálculo de los índices de poder se ha realizado utilizando un algoritmo y programación de éste[3], sin embargo, aquí daremos algunas indicaciones utilizadas. Como ya hemos visto, este juego es un juego simple y por lo tanto, para $S \subseteq N$, $v(S) \in \{0, 1\}$.

Para el cálculo del índice de Shapley-Shubik, observemos lo siguiente. Sea $S \subseteq N \backslash \{i\}$. Entonces podemos tener las siguientes situaciones:

1. $S \notin W$ y $S \cup \{i\} \notin W$, obtenemos:
$$v(S \cup \{i\}) - v(S) = 0 - 0 = 0.$$
2. $S \notin W$ y $S \cup \{i\} \in W$, obtenemos:
$$v(S \cup \{i\}) - v(S) = 1 - 0 = 1.$$
3. $S \in W$ y $S \cup \{i\} \notin W$ no será posible ya que el juego que estamos considerando es monótono.
4. $S \in W$ y $S \cup \{i\} \in W$, obtenemos:
$$v(S \cup \{i\}) - v(S) = 1 - 1 = 0.$$

Por lo tanto, el único caso que nos interesa es el segundo, es decir, aquellas coaliciones que sean un swing. Para $i \in N$ y $S \subseteq N \backslash \{i\}$, utilizaremos la siguiente fórmula para el cálculo del índice de Shapley-Shubik:

$$\phi_i(v) := \sum_{S \notin W, \ S \cup \{i\} \in W} \frac{|S|!(n - |S| - 1)!}{n!}.$$

[3] Ver annexo.

Para los cálculos del índice de Deegan-Packel y de Holler-Packel se han calculado las posibles coaliciones y se han seleccionado aquellas que cumpliesen las dos condiciones del sistema de votación de mayoría cualificada y fuesen minimales. Por lo tanto, las coaliciones ganadoras minimales serán aquellas formadas por 16 o más países que superen el 65 % de la población en el caso de antes del Brexit y aquellas formadas por 15 o más países que superen el 65 % de la población en el caso de después del Brexit.

Además, si pensamos en la idea que a una coalición ganadora minimal no se le puede quitar un miembro sin que deje de ser ganadora, se observa que ninguna coalición ganadora minimal superará el 84 % de la población, ya que el porcentaje de población más alto de todos los países es 18.56.

En el siguiente cuadro, se presentan los resultados obtenidos para los tres índices.

	Antes del Brexit				**Después del Brexit**			
País	**% pob**	**S-S**	**D-P**	**H-P**	**% pob**	**S-S**	**D-P**	**H-P**
Malta	0.09	0.0087	0.0253	0.0255	0.11	0.0082	0.0263	0.0266
Luxemburgo	0.12	0.0089	0.0289	0.0291	0.14	0.0085	0.0295	0.0297
Chipre	0.23	0.0096	0.0341	0.0342	0.27	0.0094	0.0352	0.0353
Estonia	0.26	0.0099	0.0347	0.0348	0.30	0.0096	0.0357	0.0358
Letonia	0.38	0.0107	0.0355	0.0355	0.43	0.0106	0.0365	0.0366
Eslovenia	0.40	0.0108	0.0355	0.0355	0.46	0.0108	0.0366	0.0367
Lituania	0.54	0.0119	0.0356	0.0357	0.62	0.0119	0.0367	0.0368
Croacia	0.80	0.0137	0.0356	0.0357	0.92	0.0140	0.0369	0.0370
Irlanda	0.95	0.0148	0.0357	0.0358	1.09	0.0153	0.0370	0.0370
Eslovaquia	1.06	0.0155	0.0357	0.0357	1.22	0.0162	0.0370	0.0370
Finlandia	1.08	0.0157	0.0356	0.0357	1.24	0.0164	0.0369	0.0370
Dinamarca	1.13	0.0161	0.0357	0.0357	1.30	0.0168	0.0370	0.0371
Bulgaria	1.37	0.0178	0.0358	0.0358	1.57	0.0188	0.0371	0.0371
Austria	1.72	0.0204	0.0359	0.0359	1.98	0.0218	0.0372	0.0373
Hungría	1.90	0.0217	0.0357	0.0358	2.19	0.0233	0.0373	0.0373
Suecia	1.98	0.0223	0.0359	0.0359	2.28	0.0239	0.0373	0.0374
Portugal	2.00	0.0225	0.0359	0.0359	2.30	0.0240	0.0373	0.0373
Rep. Checa	2.07	0.0230	0.0358	0.0359	2.38	0.0246	0.0373	0.0374
Grecia	2.09	0.0231	0.0359	0.0359	2.40	0.0248	0.0373	0.0374
Bélgica	2.23	0.0242	0.0359	0.0359	2.56	0.0259	0.0374	0.0374
Países Bajos	3.36	0.0328	0.0363	0.0363	3.86	0.0354	0.0380	0.0379
Rumanía	3.79	0.0363	0.0361	0.0361	4.36	0.0391	0.0382	0.0381
Polonia	7.40	0.0627	0.0394	0.0395	8.50	0.0693	0.0332	0.0331
España	9.10	0.0750	0.0349	0.0349	10.46	0.0901	0.0405	0.0401
Italia	11.78	0.1003	0.0380	0.0378	13.53	0.1188	0.0414	0.0410
Reino Unido	12.96	0.1117	0.0384	0.0381	-	-	-	-
Francia	13.05	0.1126	0.0384	0.0382	15.00	0.1343	0.0432	0.0427
Alemania	16.16	0.1473	0.0436	0.0431	18.56	0.1783	0.0462	0.0458

Cuadro 1: Comparativa de los índices de poder antes y después del Brexit.

5.2. Análisis de los resultados

Como hemos visto, el índice de Shapley-Shubik muestra que si una decisión es tomada, cual es la probabilidad que un jugador en particular sea decisivo en la toma de tal decisión. Los índices de Deegan-Packel y de Holler-Packel, se basan en el concepto de coalición ganadora minimal y se calculan con la cardinalidad y el número de estas coaliciones. De este modo, el concepto de coalición ganadora minimal también hace referencia a la importancia de que un jugador sea decisivo.

En el Consejo de la UE se distribuye un presupuesto, por lo tanto, si trasladamos los índices de poder a política y sistemas de votación, estos muestran de qué manera el uso de cierta cantidad monetaria resulta acorde a los intereses particulares del jugador. Por lo tanto, se refleja el porcentaje de participación de un presupuesto dado, que los votantes acuerdan utilizar respecto a sus intereses.

Desde una visión global de los resultados y sin distinguir el índice de poder, se observa que los países con un mayor porcentaje de población son los beneficiados, mientras que los países pequeños o bien pierden poder o se mantienen estables.

Estos cambios nos vienen explicados por la Paradoja de los Miembros Nuevos, como ya hemos visto esta paradoja nos dice que añadiendo miembros nuevos aumenta el poder de voto de los miembros antiguos. Por el contrario, la salida de un país debería llevar a estos países a menos poder y esto es lo que ocurre con los países más pequeños; ya que en general la salida del Reino Unido implica para estos países un menor índice de poder.

Dentro del análisis particular de cada índice, los índices de Deegan-Packel y Holler-Packel proporcionan resultados muy parecidos en los cuales los países grandes ganan claramente poder y los demás tienen una variación también positiva, pero prácticamente insignificante. El índice de Shapley-Shubik es menos uniforme en su distribución y presenta unas diferencias más marcadas entre países, llegando a dar pequeñas variaciones negativas para los países con menos población.

Los países más pequeños pueden ser decisivos en convertir una coalición perdedora en ganadora. Con la salida del Reino Unido vemos que este poder se ha disminuido y por lo que parece ser han dejado de ser tan decisivos. Esto es debido a que los países más pequeños resultan importantes si el porcentaje de población de la coalición perdedora es suficiente y sólo se necesita la participación del país para alcanzar el número mínimo de países; sin embargo, hay pocas coaliciones de este tipo. La salida de uno de los miembros más grandes elimina esa oportunidad, de manera que los países más pequeños son complementarios a los más grandes.

Por otro lado, como el Reino Unido era un contribuyente neto al presupuesto de la Unión Europea, su salida provoca que el presupuesto a repartir sea menor. Aproximadamente, el 8.822 % del presupuesto de la Unión Europea era pagado por el Reino Unido e incluso si quitamos los beneficios que obtenía de varios programas de la UE, el presupuesto de la UE y por lo tanto, los beneficios monetarios deben ser reducidos a 96.61 %[4].

Así pues, parece conveniente hacer la comparativa entre los índices antes del Brexit y los índices después del Brexit normalizados en lugar de a 1 a 0.9661, para ajustar más la realidad del poder de voto.

[4] Ver [8] Lászlo Á. Kóczy (2016).

En el siguiente cuadro, se presentan estos índices ajustados.

	Antes del Brexit				Después del Brexit			
País	**% pob**	**S-S**	**D-P**	**H-P**	**% pob**	**S-S***	**D-P***	**H-P***
Malta	0.09	0.0087	0.0253	0.0255	0.11	0.0080	0.0254	0.0257
Luxemburgo	0.12	0.0089	0.0289	0.0291	0.14	0.0082	0.0285	0.0287
Chipre	0.23	0.0096	0.0341	0.0342	0.27	0.0091	0.0340	0.0341
Estonia	0.26	0.0099	0.0347	0.0348	0.30	0.0093	0.0345	0.0346
Letonia	0.38	0.0107	0.0355	0.0355	0.43	0.0102	0.0353	0.0354
Eslovenia	0.40	0.0108	0.0355	0.0355	0.46	0.0104	0.0354	0.0355
Lituania	0.54	0.0119	0.0356	0.0357	0.62	0.0115	0.0355	0.0355
Croacia	0.80	0.0137	0.0356	0.0357	0.92	0.0136	0.0356	0.0357
Irlanda	0.95	0.0148	0.0357	0.0358	1.09	0.0148	0.0357	0.0358
Eslovaquia	1.06	0.0155	0.0357	0.0357	1.22	0.0157	0.0357	0.0358
Finlandia	1.08	0.0157	0.0356	0.0357	1.24	0.0158	0.0357	0.0358
Dinamarca	1.13	0.0161	0.0357	0.0357	1.30	0.0162	0.0357	0.0358
Bulgaria	1.37	0.0178	0.0358	0.0358	1.57	0.0182	0.0358	0.0359
Austria	1.72	0.0204	0.0359	0.0359	1.98	0.0210	0.0360	0.0360
Hungría	1.90	0.0217	0.0357	0.0358	2.19	0.0225	0.0360	0.0360
Suecia	1.98	0.0223	0.0359	0.0359	2.28	0.0231	0.0361	0.0361
Portugal	2.00	0.0225	0.0359	0.0359	2.30	0.0232	0.0360	0.0361
Rep. Checa	2.07	0.0230	0.0358	0.0359	2.38	0.0238	0.0361	0.0361
Grecia	2.09	0.0231	0.0359	0.0359	2.40	0.0239	0.0361	0.0361
Bélgica	2.23	0.0242	0.0359	0.0359	2.56	0.0250	0.0361	0.0361
Países Bajos	3.36	0.0328	0.0363	0.0363	3.86	0.0342	0.0367	0.0367
Rumanía	3.79	0.0363	0.0361	0.0361	4.36	0.0377	0.0369	0.0368
Polonia	7.40	0.0627	0.0394	0.0395	8.50	0.0670	0.0320	0.0319
España	9.10	0.0750	0.0349	0.0349	10.46	0.0871	0.0391	0.0388
Italia	11.78	0.1003	0.0380	0.0378	13.53	0.1148	0.0400	0.0396
Reino Unido	12.96	0.1117	0.0384	0.0381	-	-	-	-
Francia	13.05	0.1126	0.0384	0.0382	15.00	0.1297	0.0417	0.0412
Alemania	16.16	0.1473	0.0436	0.0431	18.56	0.1722	0.0446	0.0443

Cuadro 2: Comparativa de los índices de poder antes y después del Brexit ajustados.

Con este ajuste, las diferencias que antes se habían mostrado entre los resultados de los diferentes índices respecto a las variaciones de poder, se minimizan. Esto es, para los índices de Deegan-Packel y de Holler-Packel que antes no mostraban variaciones negativas para los países más pequeños ahora si lo hacen y todos los índices indican una pérdida de poder para los países con una población menor de 5 millones (excepto el caso puntual de Malta que se mantiene estable).

Para los países con una población entre 5 y 20 millones se observa un aumento de poder moderado y como ya hemos comentado, los países más grandes, destacando sobretodo España, Italia, Francia y Alemania son los claros ganadores.

Para entender esto, tenemos que fijarnos en las reglas de la doble mayoría cualificada. El sistema de votación como ya hemos visto consta de dos condiciones para que una votación sea exitosa: el apoyo de un número de países y también de un porcentaje concreto de población.

Un país grande convertirá una coalición perdedora en ganadora si la coalición sólo necesita un miembro para alcanzar la participación necesaria y/o la coalición tiene la participación requerida, pero los países contribuyentes son demasiado pequeños para tener el porcentaje de población. Cuando estamos en la primera situación, cualquier país puede ser útil; sin embargo, en el segundo caso son los países grandes normalmente más útiles.

Para los países pequeños, cuando se necesita un miembro más para la coalición si que pueden ser útiles, pero cuando se necesita un porcentaje de población no resultan tan interesantes, ya que el porcentaje de población del país en cuestión puede ser insuficiente.

El Reino Unido era uno de los miembros más grandes, esto implica que su salida disminuye el número de coaliciones incompletas debido a insuficiente participación más que aquellas incompletas debido a insuficiente población. De esta manera, los países pequeños resultan útiles menos veces, mientras que el cambio es menos pronunciado para los países más grandes.

Así, podemos observar que los países pequeños aumentan su peso ya que tienen más porcentaje de población pero esto no se ve reflejado en su poder, sino todo lo contrario. De esta manera, se produce una redistribución del poder hacia los países grandes y son los pequeños los que sufren. En otras palabras, el Reino Unido es un sustituto para los países grandes, pero un complemento para los países pequeños.

Dentro de esta separación entre el tamaño de los países, cabe destacar el caso de Polonia que es un país con un porcentaje de población aproximado del 8 % del total y por lo tanto, no es de lo más grandes pero tampoco es pequeño. Se ha observado que para los índices de Deegan-Packel y de Holler-Packel, Polonia es el país con gran diferencia más perjudicado. Esto es debido a que Polonia tiene un porcentaje de población que resultaba muy complementario al del Reino Unido y formaban ambos parte de muchas coaliciones ganadoras minimales. Con la salida del Reino Unido, Polonia es el país que más ha disminuido el número de coaliciones ganadoras minimales de las que forma parte y esto se ha visto reflejado en una disminución de poder.

6. Conclusión

En este trabajo hemos utilizado la Teoría de Juegos para analizar las situaciones decisorias dentro de un sistema de votación y para cuantificar el impacto del Brexit en el poder del resto de países de la UE.

En primer lugar, se ha presentado la teoría de juegos cooperativos para enfocarnos luego en los juegos simples y los juegos de mayoría ponderada, que son los que no resultan útiles para modelar sistemas de votación.

A continuación, hemos presentado los índices de poder que son soluciones para estos juegos ya que nos indican el poder de voto que tendría un votante. Se han analizado tres índices diferentes y se ha observado que la caracterización y definición de éstos condiciona los resultados obtenidos. El índice de Shapley-Shubik se basa en la idea de jugador crítico y los índices de Deegan-Packel y Holler-Packel se basan en la idea de coalición ganadora minimal; este motivo hace que los resultados de los dos últimos índices sean muy parecidos y difieran del primero. Se ha presentado también para cada índice una serie de propiedades que lo caracterizan y se ha demostrado que los índices son los únicos que las cumplen en su conjunto.

La aplicación de estos conceptos al estudio del cambio del poder de voto de los países de la Unión Europea con la salida de Reino Unido ha mostrado que los países más grandes ganan poder de voto a costa de los países más pequeños, aunque hay algunos matices muy curiosos de observar en un examen más detallado.

7. Annexo

El código de Python utilizado para el cálculo de los índices es el presentado más abajo, está hecho para el cálculo después del Brexit.

Para antes del Brexit, se tendría que modificar la primera lista con los correspondientes porcentajes de países y utilizar la siguiente:

paises=[0.09, 0.12, 0.23, 0.26, 0.38, 0.40, 0.54, 0.80, 0.95, 1.06, 1.08, 1.13, 1.37, 1.72, 1.90, 1.98, 2.00, 2.07, 2.09, 2.23, 3.36, 3.79, 7.40, 9.10, 11.78, 12.96, 13.05, 16.16]

```python
from math import ceil
import itertools
import random

#Lista con el porcentaje de poblacion de cada pais

paises = [0.11, 0.14, 0.27, 0.30, 0.43, 0.46, 0.62, 0.92, 1.09,
    1.22, 1.24, 1.30, 1.57, 1.98, 2.19, 2.28, 2.30, 2.38, 2.40,
    2.56, 3.86, 4.36, 8.50, 10.46, 13.53, 15.00, 18.56]

def combi(lista_s, n):
    return list(itertools.combinations(lista_s, n))

def coalsort(n):
    sortedlista_n=[]
    lista_n=[]
    coal = combi(paises, n)
    for x in coal:
        if sum(x)>=65 and sum(x)<84:
            lista_n.append(x)
    for x in lista_n:
        sortedlista_n.append(sorted(x))
    return sortedlista_n

def factorial(a):
    if a > 0:
        a = a * factorial(a - 1)
    else:
        a = 1
    return a

n=len(paises)
n2=ceil(0.55*n)

#Shapley-Shubik

indice_ss=[]
for i in range (0,n):
```

```
    valorshapley=0
    elem=paises[0]
    paises.pop(0)
    for iteracion in range(n2-1,n):
        for x in combi(paises, iteracion):
            if len(x)<n2 or sum(x)<65:
                x=list(x)
                x.append(elem)
                if len(x)>= n2 and sum(x)>= 65:
                    y=len(x)-1
                    valorshapley= valorshapley + (factorial(y)*
                        factorial(n-y-1))/factorial(n)
    indice_ss.append(valorshapley)
    paises.append(elem)

print("Los indices de Shapley-Shubik son:")
print(indice_ss)

#Calculamos el conjunto de coaliciones minimales

totalcoal=[]
suma_totalcoal=0

for i in range(n2, n):
    for x in coalsort(i):
        cont=0
        for z in x:
            if sum(x)-z<65:
                cont=cont+1
        if cont==len(x):
            totalcoal.append(x)
            suma_totalcoal = suma_totalcoal + len(x)

numcoal_i=[]
for z in paises:
    cont=0
    for x in totalcoal:
        if z in x:
            cont=cont+1
    numcoal_i.append(cont)

tamcoal_i=[]
for z in paises:
    suma=0
    for x in totalcoal:
        if z in x:
            suma=(1/len(x))+suma
    tamcoal_i.append(suma)
```

```python
#Deegan-Packel

indice_dp=[]
for z in tamcoal_i:
    indice=z/len(totalcoal)
    indice_dp.append(indice)

print("Los indices de Deegan-Packel son:")
print(indice_dp)

#Holler-Packel

indice_hp=[]
for z in numcoal_i:
    indice=z/suma_totalcoal
    indice_hp.append(indice)

print("Los indices de Holler-Packel son:")
print(indice_hp)
```

Referencias

[1] Brams, S.J. Voting Power. A: *Game theory and politics*, Dover Publications, 2004.

[2] Cerdá, E.; Pérez, J.; Jimeno, J.L. Juegos Cooperativos. A: *Teoría de Juegos*, Pearson Educación, 2004.

[3] Deegan, J.; Packel, E. W. A new index of power for simple n-person games. A: *International Journal of Game Theory*, 1978.

[4] Giménez-Pradales, J.M. Preliminares. A: *Aportaciones al estudio de soluciones para juegos cooperativos*, Programa de Doctorado de Matemática Aplicada UPC, 2005.

[5] González-Díaz, J.; García-Jurado, I.; Fiestras-Janeiro, M. G. Cooperative Games. A: *An Introductory Course on Mathematical Game Theory*, American Mathematical Society, 2010.

[6] Holler, M.; Packel, E. W. Power, luck and the right index. A: *Journal of Economics*, 1983.

[7] Kirsch, W.; Langner J. Power indices and minimal winning coalitions. A: *Social Choice and Welfare*, 2009.

[8] László Á. Kóczy. How Brexit affects European Union power distribution. A: *SSRN Electronic Journal*, 2016.

[9] Van Deemen, A., Rusinowska, A. Paradoxes of Voting Power in Dutch politics. A: *Public Choice*, 2003.