UNIVERSITAT DE BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Corbes el·líptiques, superfícies de Riemann i tors complexos

Autor: Guillem Batlle Mallol

Director: Dr. Ignasi Mundet Riera
Realitzat a: Departament de ....
Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 21 de juny de 2020

Abstract

Elliptic curves are a mathematical object that has been studied by mathematicians since Diophantus. Even though in some cases it was in disguise, a lot of problems in number theory, analisis or geometry presented by an enormous number of mathematicians involved elliptic curves. Some names that can not be overlooked are Diophantus, Fibonacci, Fermat, Euler, Newton, Jacobi, Weierstrass or Poincaré (even though there are a lot of other names worth mentioning).

Riemann surfaces are yet another object of great interest that can be observed from a lot of different perspectives. When they were first introduced by Riemann, Klein and Weyl, it was made visible that they could be observed as one-dimensional complex manifolds or algebraic curves. Although there has been other interpretations (for exemple to see them as two-dimensional real manifolds), we will center around these first two.

If we observe a Riemann surface as an algebraic curve, an interesting question arises; is there any relation between Riemann surfaces and elliptic curves? The purpose of this project is to see that the answer is yes. Furthermore, we will see that an elliptic curve is equivalent to some kind of Riemann Surfaces and its properties.

Resum

Les corbes el·líptiques són un objecte matemàtic que ha estat estudi dels matemàtics des dels temps de Diofant. Encara que en alguns casos era de forma *encoberta*, molts problemes en teoria de nombres, anàlisi o geometria realitzats per un gran nombre de matemàtics involucraven les corbes el·líptiques. Alguns noms que podem destacar són (entre molts d'altres) Diofant, Fibonacci, Fermat,Euler, Newton, Jacobi, Weierstrass o Poincaré.

Les superfícies de Riemann són un altre objecte de gran interès que es pot veure des de múltiples perspectives. Quan van ser introduïdes per primer com per Riemann, Klein i Weyl, ja es fa fer visible la seva possible interpretació com a varietat topològica complexa i com a corba algebraica. Encara que hi han hagut altres interpretacions (com ara la d'una varietat topològica real de dues dimensions), ens centrarem en aquestes dues possibles interpretacions.

Quan observem una superfície de Riemann com a corba algebraica, ens sorgeix una pregunta molt interessant; tenen alguna relació les superfícies de Riemann i les corbes el·líptiques? El propòsit d'aquesta memòria és veure que la resposta és que sí. De fet, veurem que una corba el·líptica és equivalent a certs tipus de superfícies de Riemann i en veurem les seves propietats.

2010 Mathematics Subject Classification. 46M20, 14J80, 11F23, 14H52, 30F15, 30F30, 30F10

Agraïments

Vull agrair al Dr.Ignasi Mundet Riera per tutoritzar aquest treball, també voldria mencionar al Dr.Thomas Krämer de la *Universitat Humboldt de Berlin* per fer possible que conegués les corbes el·líptiques i inspirar aquest treball.

Finalment, també estic molt agraït a Carles Batlle, i Àlex Martorell per accedir a fer una lectura de la memòria i donar les seves opinions.

Índex

1 Introducció

1.1 Corbes el·líptiques i integrals el·líptiques

Les corbes el·líptiques van apareixer per primer cop a la història en un problema de Diofant (probablement al segle II d.C.). Encara que, òbviament, Diofant no tenia les nocions de notacions algebraiques modernes i, encara menys, de corbes el·líptiques, aquestes apareixen de manera encoberta en un problema de l'*Aritmètica*. Aquest consistia en "dividir un nombre en dos nombres tal que el seu producte és cub menys el seu costat". Diofant ho expressà de la següent manera: $y(a-y) = x^3 - x$. Diofant ho va transformar, per exemple, en el cas $a = 6$ en $y^2 = -x^3+x-9$ (que per ara direm que és una corba el·líptica).

No va ser fins molts segles més tard que van tornar a aparèixer. Fibonacci les va fer famoses al plantejar el següent problema: "trobar un nombre racional r tal que tant r^2-5 com r^2+5 són quadrats racionals". Breument, Fibonacci anomenà al nombre enter n un nombre congruent si r^2-n i r^2+n eren quadrats racionals diferents de zero per a un nombre racional r. La connexió amb les corbes el·líptiques és que, si n és un nombre congruent, el producte dels tres quadrats racionals r^2,r^2-n i r^2+n també és un quadrat racional. Si escrivim $r^2 = x$ obtenim $y^2 = x(x-n)(x+n)$ que, altre cop, podem dir de moment que és una corba el·líptica.

Més endavant, Fermat aconseguí una versió al llatí de l'*Aritmètica* de Diofant i va fer diversos estudis i congruències. Tot i així, va ser Euler que, a partir del treball iniciat per Fermat, expandí el marc de visió de les corbes el·líptiques en teoria de nombres.

Encara que Newton clarificà l'estudi de corbes el·líptiques introduint eines de geometria analítica, el nom de corba el·líptica no aparegué fins que Jacobi i Weierstrass van aconseguir connectar tots aquests resultats amb les integrals el·líptiques. Finalment, però, a principis del segle XX, Poincaré va unificar tota aquesta feina en el marc de les corbes algebraiques.

El nom de corba el·líptica prové de l'estudi de les integrals el·líptiques. Aquestes integrals sorgeixen en diversos problemes, però, per poder observar d'on prové el nom, ens quedarem amb el cas del càlcul de la longitud d'arc d'un fragment d'una el·lipse. Si intentem fer aquest càlcul, veurem que sorgeixen molts problemes i, de fet, s'obté una integral que no es pot solucionar a partir de funcions elementals. Concretament, podem plantejar el problema de la següent manera.

Siguin a i b nombres reals positius, considerem una el·lipse $\{(acos(\varphi), bsin(\varphi)) \in \mathbb{R}^2 | \varphi \in \mathbb{R}\}$ i sigui $\varphi_0, \varphi_1 \in [0, \pi]$, llavors la longitud d'arc l del segment de l'el·lipse $\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1$ és de la forma;

$$l = \tfrac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} \frac{1-cx}{\sqrt{x(x-1)(1-cx)}} dx \text{ amb } x_i = x_i(\varphi_i) \in \mathbb{R} \text{ i } c = 1 - \tfrac{a^2}{b^2},$$

on hem fet el canvi de variable $x = \sin^2(\varphi)$. Aquest resultat pot ser observat fàcilment desenvolupant la integral sobre els complexos usant la integració sobre camins, recurs usat en anàlisi complexa. Però, per si el lector vol quedar convençut que un resultat com aquest és correcte, adjuntarem el càlcul a l'**Annex**.

Una integral d'aquest tipus és anomenada integral el·líptica. Però, de fet, podem fer una definició més general.

Definició 1.1. *Una integral el·líptica és una funció que pot ser expressada de la següent manera,*

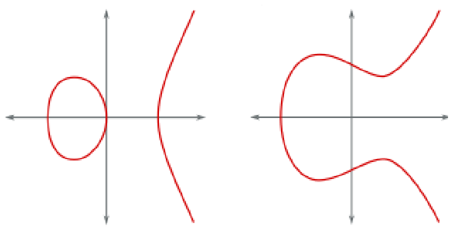
$$F(v) = \int_u^v R(x, \sqrt{f(x)})dx$$

On R és una funció racional en dues variables i f és un polinomi cúbic o quàrtic sense zeros múltiples.

Si observem la definició sobre $\mathbb{C}$, la integral requereix la tria d'un camí. És a dir, només estarà ben definida mòdul integrals sobre camins tancats (que sempre assumim que eviten els pols de l'integrand). L'integrand és ara una funció "multivaluada"ja que no hi ha una tria uniforme del signe de l'arrel, $\pm\sqrt{f(x)}$. Per tant, en comptes d'integrar al llarg de camins al pla complex, integrarem al llarg camins en el conjunt E_0, que definirem com a,

$$E_0 := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 | y^2 = f(x)\}$$

En el llenguatge de la geometria algebraica, això és *la part afí d'una corba el·líptica.* El conjunt $E_0 \cap \mathbb{R}^2$ és una *imatge* dels seus punts reals, i es tenen els següents casos;



on el primer cas es tracta de quan el polinomi f té 3 arrels reals i el segon quan el polinomi té només una arrel real (notem que si el polinomi té una arrel complexa llavors n'ha de tenir una segona).

Una corba el·líptica serà aquest conjunt unió l'infinit (com que ens trobem merament en la introducció esperem que el lector s'agafi aquesta "definició"més aviat com a una idea).
Tot i així, les propietats topològiques i analítiques de E_0 seran més visibles al treballar amb les *superfícies de Riemann.*

1.2 Introducció a les superfícies de Riemann

Les superfícies de Riemann foren introduïdes per primer cop per Riemann, Klein i Weyl. Remarcaren que podien ser observades com a varietats topològiques complexes 1-dimensionals i com a corbes algebraiques. En aquesta memòria, com que volem veure la relació amb les corbes el·líptiques, ens centrarem en aquests dos punts de vista, però, històricament, han estat analitzades des de múltiples perspectives. Gauss les estudià com a varietats topològiques reals 2-dimensionals, i, més endavant, Klein, Poincaré i Koebe mostraren a partir del teorema d'uniformització de Riemann que tota superfície de Riemann també admet una mètrica de Riemann. Tot i així, com ja hem mencionat, nosaltres ens centrarem en la visió de corba algebraica i varietat topològica 1-dimensional.

Un cop vista una breu introducció, procedim a definir formalment què és una superfície de Riemann.

Definició 1.2. *Una superfície de Riemann ve donada per la següent informació;*
- *Un espai topològic Hausdorff X.*
- *Una col·lecció de conjunts oberts de X, $\{U_\alpha\}_\alpha$ tal que cobreixen X, on α pertany a un conjunt indexat.*
- *Per a cada α, hi ha un homeomorfisme*

$$\psi_\alpha : U_\alpha \to \tilde{U_\alpha}$$

on $\tilde{U_\alpha}$ és un obert de $\mathbb{C}$, amb la propietat que $\forall \alpha, \beta$ la composició $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$ és holomorfa en el seu domini de definició.
Les aplicacions ψ_α les anomenarem cartes, cartes coordenades, o coordenades locals i tota la col·lecció d'informació $(U_\alpha, \tilde{U_\alpha}, \psi_\alpha)$ l'anomenarem atles de cartes.

En altres assignatures, com ara "Geometria diferencial de corbes i superfícies", hem treballat amb els conceptes de cartes i atles, així que no ens entretindrem gaire a debatre el concepte. Tot i així, és necessari comentar que quan es treballa amb superfícies de Riemann, rarament s'observa l'ús de la seva definició en tot el seu pes. Per contra, usarem el següent recurs. Sigui un punt $p \in X$, aquest punt es troba dins almenys un dels U_α, per tant, n'escollim un. Ara, l'aplicació ψ_α és tan sols una aplicació en valors complexos en un entorn del punt p, i denotarem aquest fet amb un símbol com ara z. Llavors, quan fem càlculs a prop de p, treballarem amb punts en funció de z, per tant, estem realitzant càlculs amb notació d'anàlisi complexa.
D'altra banda, podríem haver escollit una altra carta ψ_β, que anomenarem w. Llavors, l'aplicació composada $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$, expresa z, en la notació que ens interessa, com a funció holomofa de w.
La propietat essencial de la teoria de superfícies de Riemann és que hem d'estudiar el comportament dels nostres càlculs sobre aquests canvis de variable holomorfs, per tal d'obtenir resultats que no depenen de la nostra tria de la carta.

Observació: Si en la definició de superfície de Riemann canviem la paraula *holomorfa* per *diferenciable*, obtenim la definició de *superfície diferenciable.*

1.3 Corbes el·líptiques, superfícies de Riemann de gènere 1 i tors complexos

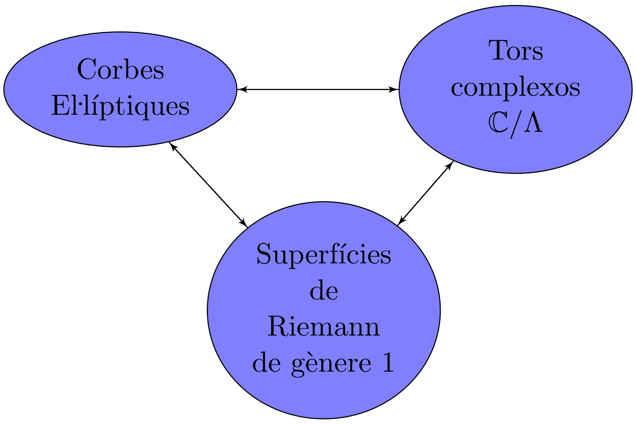
Finalment, un cop introduïda la noció de superfície de Riemann i la idea de corba el·líptica, podem explicar què pretenem estudiar i demostrar en aquest treball. El nostre objectiu és principalment estudiar la relació entre corbes el·líptiques, superfícies de Riemann de gènere 1 i superfícies de Riemann que s'originen a partir de $\mathbb{C}/\Lambda$ on Λ és un reticle.

Observació: Per ara, entendrem superfície de Riemann de gènere 1 com una superfície de Riemann que, topològicament parlant, té gènere 1. Per fer-nos-en una idea, podem pensar en el concepte de superfície topològica de gènere 1.

Definirem un *reticle* en els complexos Λ com a un subgrup discret dels complexos, amb l'operació addició, que és isomorf com a grup a $\mathbb{Z}^2$. Per tant, fixats dos generadors $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, podem construir el que anomenarem paral·lelogram fonamental; que serà el format per $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, és a dir, amb vèrtexos definits per $0, \lambda_1, \lambda_2$ i $\lambda_1 + \lambda_2$. Quan fem el quocient per un reticle, ens referim, en realitat, a la noció que tenim entesa de quocients de superfícies topològiques, on $z + \lambda_i \sim z$ per $i = 1, 2$.
En altres paraules, aquest quocient el podem veure com un *tor complex*.

1.4 Objectius i Plantejaments del treball

Volem estudiar la relació entre aquests tres objectes. De fet, volem veure que són *equivalents* com a superfícies de Riemann (definirem més endavant aquest concepte d'equivalència). En particular, volem veure les implicacions del següent diagrama;



Aquesta demostració s'allargarà gairebé tot el treball, i no farem totes sis implicacions ja que n'hi ha que les obtindrem per composició de dues altres. De tota manera, podem donar una senzilla idea o menció de les que farem.
Per tal de relacionar les corbes el·líptiques amb els tors complexos, necessitarem la introducció de *formes diferenciables* en superfícies de Riemann, mentre que pel recíproc introduirem les *funcions el·líptiques* i la *funció $\wp$ de Weierstrass*. La implicació de superfície de Riemann de gènere 1 a tor complex serà una de les més llargues, ja que requerirem desenvolupar molta teoria abans. Tot i així, la idea principal és usar les *formes meromorfes en superfícies de Riemann* i usar el *Teorema principal per a superfícies de Riemann compactes*. Veure que un tor complex és equivalent a una superfícies de Riemann de gènere 1 és un exercici quasi immediat, per tant, el mencionarem dintre d'altres implicacions. El primer que veurem serà com passar de corba el·líptica a superfície de Riemann de gènere 1. Serà la demostració que, intuitivament, ens mostrarà la idea darrere d'aquesta relació entre corbes el·líptiques, tors complexos i superfícies de Riemann de gènere 1.

Observació: Fem notar que, com a conseqüència, només hi haurà una implicació que no demostrarem pròpiament en aquesta memòria (l'obtindrem, però, per composició de les altres) que és passar de superfície de Riemann de gènere 1 a corba el·líptica. De totes maneres, mencionarem que es necessita un teorema conegut com a *Teorema de Riemann-Roch*, però no el veurem en aquesta memòria.

Observació: Un cop demostrades totes aquestes equivalències, com que el tor complex el podem observar com a un grup abelià (observat com a grup additiu), ens podriem preguntar com podem observar aquesta propietat en una corba el·líptica. Amb l'objectiu de mostrar-ho, demostrarem el que s'anomena *llei de grup* en una corba el·líptica a partir d'introduir una addició en ella que il·lustrarem de forma geomètrica.

De fet, la llei de grup no aparegué del no res, sinó que apargué en el context de les integrals abelianes. Si considerem una corba el·líptica E definida pel polinomi $P(y,x) = y^2 - f(x)$ (de la forma que ja hem mencionat), aleshores les integrals el·líptiques són de la forma

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{f(x)}} dx.$$

Al llarg dels segles XVII i XVIII, els matemàtics s'adonaren que; si s'aplicaven certes substitucions a x, es podia doblar el valor de la integral, o que, si aplicaven una substitució de la forma $x = \phi(x_1, x_2)$, la integral resultant és la suma de les integrals individuals per a x_1 i x_2.

Més endavant, els estudis d'Abel i Jacobi mostraren que, si fixem el punt base a i deixem que b varïi, llavors la integral el·líptica ens dona una aplicació *multivalorada* de E a $\mathbb{C}$ i la fórmula $\phi(x_1, x_2)$ ens dona una forma de *sumar* punts en la corba el·líptica tal que aquesta aplicació sigui, en realitat, un homomorfisme de grups (*multivalorat*). De fet, podem prendre la inversa d'aquesta aplicació ($\mathbb{C} \to E$) i, enviant (x_1, x_2) a $\phi(x_1, x_2)$, podem veure que el nucli d'aquesta aplicació resulta ser un reticle i la fórmula ϕ coincideix amb l'addició geomètrica que donarem en la corba el·líptica.

En definitiva, podem observar que hi ha una estreta relació entre tots aquests conceptes, no solament entre superfícies de Riemann, tors complexos i corbes el·líptiques, sinó també entre corbes el·líptiques i integrals el·líptiques (cosa que no ens hauria d'estranyar, ja que el nom de les corbes el·líptiques prové de les integrals el·líptiques).

2 De corba el·líptica a Superfície de Riemann de gènere 1

Per desenvolupar aquesta implicació, abans necessitarem introduir conceptes bàsics quan parlarem de superfícies de Riemann, alguns conceptes topològics i també entendre la corba el·líptica com a superfície de Riemann. Començarem per estudiar més a fons les superfícies de Riemann.

2.1 Definicions bàsiques i exemples

Definició 2.1. *Sigui X una superfície de Riemann i (U_α, $\tilde{U_\alpha}$, ψ_α) el seu atles, i sigui Y una altra superfície de Riemann i (V_i, $\tilde{V_i}$, ϕ_i) el seu atles; una aplicació $f : X \to Y$ és anomenada holomorfa si $\forall\alpha$ i $\forall i$, la composició $\phi_i \circ f \circ \psi_\alpha^{-1}$ és holomorfa en el seu domini de definició.*

Definició 2.2. *Direm que dues superfícies de Riemann X i Y són equivalents, si hi ha una bijecció holomorfa $f : X \to Y$ amb inversa holomorfa.*

Exemple 2.3. Primer de tot, podem observar que, clarament, qualsevol conjunt obert de $\mathbb{C}$ és una superfície de Riemann, com, per exemple, el disc unitat $\mathbb{D}$. Però, de moment, ens interessa més introduir i aprofundir en altres exemples de superfícies de Riemann que ens resultaran útils per a l'estudi que ens interessa.
Primer de tot, tractarem el cas de l'*esfera de Riemann*. Com a conjunt, no és altra cosa que el pla complex amb un punt addicional que anomenarem ∞. Topològicament parlant, es tracta de la compactificació d'un punt del pla complex. És a dir, els conjunts oberts en l'esfera de Riemann (que denotarem per $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$) són conjunts oberts del pla complex o unions de la forma $\{\infty\} \cap (\mathbb{C} \setminus K)$, on K és un subconjunt compacte de $\mathbb{C}$. Podem veure $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, com a una superfície de Riemann, amb un atles de dues cartes:

$$U_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}, U_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1/2\} \cup \{\infty\}$$

Prenem $\tilde{U_0} = \tilde{U_1} = U_0$ i prenem $\psi_0 : U_0 \to \tilde{U_0}$ com a l'identitat. Definim ψ_1 com a $\psi_1(\infty) = 0$ i $\psi_1(z) = 1/z$ per a $z \in \mathbb{C}$ i $|z| > 1/2$.
Llavors, les aplicacions $\psi_0 \circ \psi_1^{-1}$ i $\psi_1 \circ \psi_0^{-1}$ són, cadascuna, l'aplicació $z \mapsto 1/z$ de la corona $\{z \in \mathbb{C} : 1/2 < |z| < 2\}$ a ella mateixa, per tant totes dues són holomorfes i la condició de superfície de Riemann es compleix.

Exemple 2.4. Ara tractarem un altre exemple que serà un altre dels objectes d'interès d'aquest treball: les **corbes algebraiques** i, en concret, les corbes el·líptiques.

Començarem parlant de *corbes afins*. Sigui $P(z, w)$ un polinomi en dues variables complexes, definim l'espai topològic X com a;

$$X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : P(z, w) = 0\}$$

Suposem ara que per a tot $p \in X$, alguna de les derivades parcials P_z o P_w no s'anul·len. Llavors podem entendre X com a superfície de Riemann de la següent manera. Suposem que p és un punt on P_w no s'anul·la. Llavors, usant el teorema de la funció implícita en variable complexa, podem trobar discos D_1 i D_2 i una aplicació holomorfa $f : D_1 \to D_2$ tal que $X \cap (D_1 \times D_2)$ és la gràfica de la forma $(z, f(z))$. Per tal de fer la carta coordenada,

definirem $U_\alpha := X \cap (D_1 \times D_2)$, $\tilde{U_\alpha} := D_1$ i ψ_α com a la restricció de la projecció de $D_1 \times D_2$ a D_1. Simètricament, farem unes definicions semblants si és P_z la que no s'anul·la. D'aquesta manera, podem trobar una col·lecció de cartes de la primera forma o de la segona. Ara sols faltarà comprovar que les aplicacions de composició entre cartes són holomorfs.
Ara bé, per a dues cartes del primer tipus, aquesta aplicació serà simplement la identitat en una intersecció apropiada de discs de $\mathbb{C}$. De la mateixa manera, per a dues cartes del segon tipus.
Per al cas d'una carta del primer tipus i una del segon, l'aplicació en qüestió serà;

$$z \mapsto (z, f(z)) \mapsto f(z),$$

és a dir, l'aplicació holomorfa f. Per tant, podem veure aquest conjunt X com a una superfície de Riemann (encara que no compacte). Notem que en la idea que hem donat de corba el·líptica, estàvem treballant bàsicament amb el conjunts de zeros del polinomi $P(z,w) = w^2 - f(z)$, on $f(z)$ era un polinomi cúbic o quàrtic sense arrels múltiples. Per tant, tot i que havíem definit la corba el·líptica com aquest conjunt de zeros E_0 unió el punt de l'infinit, com que el fet que f no tingui arrels múltiples implica que P no té punts en què s'anulen les dues derivades parcials, almenys podem veure que la *part afí* d'una corba el·líptica és una superfície de Riemann. De totes maneres, abans de veure el cas de la corba el·líptica, ens interessa introduir aquest concepte de punt de l'infinit. Amb l'objectiu de veure aquesta idea, introduirem el concepte de *corbes projectives*.

L'addició del punt de l'infinit a la superfície de Riemann $\mathbb{C}$ és simplement l'esfera de Riemann (superfície de Riemann compacta). Considerem ara l'espai projectiu complex $\mathbb{CP}^n$ (es pot veure que és compacte en la seva topologia natural). Podem obtenir el subconjunt definit a partir dels zeros d'un polinomi $P(z_0, ..., z_n)$ de $\mathbb{CP}^n$. Treballar amb aquests tipus de conjunts on P és un polinomi homogeni, o amb un conjunts de polinomis homogenis, forma part de la geometria algebraica, i, tot i que necessitaríem la introducció de molts altres conceptes previs, els podríem anomenar *varietats algebraiques*. Tot i així, nosaltres ens centrarem en el cas en què $n = 2$ i considerarem un únic polinomi $p(z_0, z_1, z_2)$ de grau d. És a dir, treballarem amb el que anomenarem *corbes projectives*. Sigui P l'homogeneitzat del polinomi p, és a dir,

$$P(z,w) = p(1, z, w)$$

Anomenem $\overline{X}$ el seu conjunt de zeros en $\mathbb{CP}^2$. Per definició, la intersecció de $\overline{X}$ amb $U_0 = \mathbb{C}^2$ és el conjunt de zeros de p que hem considerat abans (l'anomenem X), és a dir, és la corba afí. Llavors tenim,

$$\overline{X} = X \cup (\overline{X} \cap L_\infty),$$

on L_∞ és la recta de l'infinit.
Excepte el cas en que P sigui el polinomi z_0^d, el conjunt $\overline{X} \cap L_\infty$ serà un conjunt finit de punts i $\overline{X}$ serà una compactificació de X afegint aquest conjunt finit de punts.
Per tant, hem construït X com a superfície de Riemann. Fent el mateix procediment substituïnt z_0 per z_1 o z_2, podem construir $\overline{X} \cap U_1$ i $\overline{X} \cap U_2$ com a superfícies de Riemann. Es pot veure fàcilment que les tres superfícies de Riemann són equivalents en les seves regions comuns de definició, per tant, hem construït $\overline{X}$ com a superfície de Riemann compacte.

Exemple 2.5. Ara veurem com podem considerar **quocients** de superfícies de Riemann. Començarem amb un cas molt senzill, el cas de $\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$ (observem que amb la seva topologia quocient és homeomorf a un cilindre).
Si el volem veure com a superfície de Riemann, per a cada punt $z \in \mathbb{C}$, considerem el disc de radi $1/2$ centrat a z, D_z. Siguin $z_1, z_2 \in D_z$, si $z_1 = z_2 + 2\pi n$, per a $n \in \mathbb{Z}$, llavors haurem de tenir $n = 0$ i $z_1 = z_2$ (Ja que $1/2 < \pi$). En altres paraules, la projecció $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$ envia bijectivament D_z al quocient.
Usem aquest fet per construir una carta local al voltant de $\pi(z) \in \mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$ agafant $U := \pi(D_z)$, $\tilde{U} := D_z$ i ψ_z la inversa local de π. Llavors cobrim $\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}$ amb una col·lecció de cartes d'aquest tipus. Les aplicacions de canvi de carta seran de la forma $z \mapsto z + 2\pi n$ per a una $n \in \mathbb{Z}$ apropiada, i aquestes són, per tant, holomorfes.

Ara volem veure un altre quocient que, com hem vist en la introducció, ens interessa més. El cas de $\mathbb{C}$ quocient amb un reticle Λ a $\mathbb{C}$ (que és un subgrup additiu discret). En particular, considerem el cas del reticle $\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_\lambda$, on λ és un nombre complex fixat amb part imaginària positiva.
Podem repetir l'argument de l'anterior exemple sense problemes. Solament hem d'escollir el radi r de D_z tal que $2r < min_{n,m}|n + \lambda m|$, on n, m són enters i no tots dos zero. Si escollim r d'aquesta manera, ja que $|n + \lambda m| \geqslant Im(\lambda)$ si $m \neq 0$ i $|n + \lambda m| \geqslant 1$ si $m = 0$ i $n \neq 0$, és suficient prendre r de la següent manera,

$$2r < min(1, Im(\lambda))$$

Així doncs, podem observar $\mathbb{C}/\Lambda$ com a superfície de Riemann, clarament homeomorfa a un tor $S^1 \times S^1$ i, en particular, compacte.
Aquest procediment es pot aplicar en un cas molt més general i més interessant que usarem en els propers capítols.
Suposem un grup Γ que actua sobre una superfície de Riemann X via automorfismes holomorfs. Suposem que per a cada $p \in X$ podem trobar un entorn obert N tal que si tenim $q_1, q_2 \in N$ i $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma(q_1) = q_2$, llavors per força $\gamma = 1$ i $q_1 = q_2$. Llavors, si es compleix aquesta condició, podem obtenir, fent servir la mateixa contrucció anterior, el quocient X/Γ com a superfície de Riemann. En realitat, la condició demanada implica que Γ actua lliurement sobre X. I recíprocament, en moltes situacions, el fet que actuï lliurement implicarà que la condició mencionada se satisfà.

2.2 Aplicacions entre superfícies de Riemann

2.2.1 Propietats generals

En aquesta secció, ens basarem principalment en dos lemes importants d'anàlisi complexa, que ens serviran més endavant per completar aquesta idea general que tenim de tornar una corba algebraica en una superfície de Riemann.

Lema 2.6. *Sigui f una funció holomorfa en un entorn obert U de $0 \in \mathbb{C}$ amb $f(0) = 0$. Suposem que la derivada $f'(0)$ no s'anul·la. Llavors, hi ha un altre entorn $U' \subset U$ de 0 tal que f és també un homeomorfisme de U' a $f(U') \subset \mathbb{C}$ i l'aplicació inversa és també holomorfa.*

Notem que aquest lema és un cas particular del teorema de la funció inversa en variable complexa. No ens centrarem en la seva demostració, però mencionarem que es pot desmotrar usant arguments estudiats a Anàlisi Complexa.

Lema 2.7. *Sigui f una funció holomorfa en un entron obert U de 0 en $\mathbb{C}$ amb $f(0) = 0$, però amb f no idèntica a zero. Llavors, hi ha un únic enter $k \geq 1$ tal que en algun entorn més petit U' de 0 podem trobar una funció holomorfa g amb $g'(0) \neq 0$ i $f(z) = g(z)^k$ en U'.*

Per tal de veure-ho, considerem la sèrie de potències de f al voltant de 0 i sigui k l'ordre del primer terme no nul

$$f(z) = a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + ..., \text{ amb } a_k \neq 0. \Rightarrow f(z) = a_k z^k (1 + b_1 z + b_2 z^2 + ...),$$

on $b_i = a_{k+i}/a_k$. Per a z suficientment petita, hi ha una funció holomorfica ben definida

$$h(z) = (1 + b_1 z + b_2 z^2 + ...)^{1/k}$$

(en concret necessitem $|\Sigma b_i z^i| < 1$). Llavors, $f(z) = g(z)^k$ on $g(z) = a_k^{1/k} z h(z)$, prenent qualsevol tria de l'arrel $a_k^{1/k}$. La derivada és $g'(0) = a_k^{1/k}$, per tant, diferent de zero. És a dir, hem demostrat l'existència. La unicitat de k també és clara.
Notem que; $n = 1 \Leftrightarrow f'(0) \neq 0$, i notem que si no fos així, la multiplicitat de 0 com a arrel de f' seria $k - 1$.

A partir d'aquests lemes, podrem obtenir finalment una descripció local completa de les aplicacions entre superfícies de Riemann.

Proposició 2.8. *Siguin X i Y superfícies de Riemann connexes i $F : X \to Y$ una aplicació holomorfa no constant. Per a tot $x \in X$, hi ha un únic enter $k = k_x \geq 1$ tal que podem trobar cartes al voltant de x a X i al voltant de $F(x)$ a Y en què F és representada per l'aplicació $z \mapsto z^k$.*

El que volem dir amb aquesta afirmació és que hi ha una carta $(U, \tilde{U}, \psi)$ al voltant de $x \in X$, amb $\psi(x) = 0 \in \tilde{U} \subset \mathbb{C}$ i una carta $(V, \tilde{V}, \phi)$ al voltant de $F(x) \in Y$, amb $\phi(F(x)) = 0 \in \tilde{V} \subset \mathbb{C}$, tal que la composició $\phi \circ F \circ \psi^{-1}$ és igual a l'aplicació $z \mapsto z^k$ en el seu domini de definició.

Per veure la demostració, començarem escollint cartes arbitràries al voltant de x i de $F(x)$. En aquestes cartes, F és representada per una funció holomorfa que denotarem com a f, i , per tant, podem expresar-la com a g^k per a una funció holomorfa g com indica en el segon lema. Llavors, la derivada a 0 no s'anul·la, per tant podem aplicar el primer lema i veiem que, després de restringir al domini de definició, g ens dona un homeomorfisme holomorf amb inversa també holomorfa. Per tant, canviant la carta al voltant de x per la carta obtinguda composant amb g. Altre cop la unicitat de k és obvia.

Definició 2.9. *Ara definirem les aplicacions holomorfes pròpies entre superfícies de Riemann. Recordem primer, però, que d'una aplicació $F : S \to T$ entre espais topològics en diem pròpia si per a tot conjunt compacte $K \subset T$, l'antiimatge $F^{-1}(K)$ també és compacta (notem que si S és compacta, llavors tota aplicació F és pròpia).*
Recordem també que un subconjunt Δ d'un espai topològic S és discret si per a tot punt $\delta \in \Delta$ hi ha un entorn U de δ a S tal que $\Delta \cap U = \{\delta\}$.

Proposició 2.10. *Sigui $F : X \to Y$ una aplicació holomorfa no constant entre superfícies de Riemann, tenim les següents implicacions;*

1. *Sigui $R \subset X$ el conjunt de punts x on $k_x > 1$, llavors R és discret com a subconjunt de X.*
2. *F pròpia $\Rightarrow$ La imatge $\Delta = F(R)$ és discreta en Y.*
3. *F és pròpia $\Rightarrow$ Per a tot $y \in Y$, l'antiimatge $F^{-1}(y)$ és un conjunt finit de X.*

Per veure la demostració de 1., podem observar que, en coordenades locals, R ve donat pel conjunt de zeros de la derivada i, fent servir el fet que els zeros d'una funció holomorfa no constant són discrets. Les altres dos són conseqüències que es poden observar fàcilment a partir de la propietat de ser aplicació pròpia.

Suposem ara que tenim una aplicació holomorfa no constant de superfícies de Riemann $F : X \to Y$, on Y és connexa. Per a cada $y \in Y$ definim l'enter $d(y)$ com a

$$d(y) = \Sigma_{x \in F^{-1}(y)} k_x$$

Usant 3. de la proposició anterior podem observar que la suma és sobre un conjunt finit, per tant, la suma és finita. Notem que si y no pertany a Δ, llavors $d(y)$ és solament el nombre de punts de $F^{-1}(y)$.
En general, ens referirem a aquest $d(y)$ com al nombre de punts de $F^{-1}(y)$ comptats amb multiplicitat.

Proposició 2.11. *L'enter $d(y)$ no depèn de $y \in Y$.*

Per veure-ho, podem observar que és cert pel cas bàsic on $X = Y = \mathbb{C}$ i F és l'aplicació $F(z) = z^n$ per algun $n \geq 1$.
El cas general podem reduir-lo a aquest de la següent manera. Sigui $y \in Y$, podem trobar cartes $U_x \subset X$ al voltant de cada punt $x \in F^{-1}(y)$ i l'entorn corresponent $V_x \subset Y$ de y, respecte al qual F és expressada localment com a $z \mapsto z^{k_x}$. Sigui $V = \cap_{x \in F^{-1}(y)} V_x$, V és un entorn obert de y (ja que només hi ha un nombre finit de x). Com que F és una aplicació pròpia, podem fer que $F^{-1}(V) \subset \bigcup U_x$. Per tant, si tenim un altre punt $y' \in V$, podem estudiar el conjunt $F^{-1}(y')$ fent servir els models locals. Mirant el cas bàsic que ja hem considerat, obtenim que $d(y) = d(y')$, per tant, $d(y)$ és localment constant en Y, i per tant és constant ja que Y és connexa.

Definició 2.12. *Gràcies a aquesta última proposició, hem aconseguit una invariant entera que anomenarem el grau d'una aplicació holomorfa pròpia de superfícies de Riemann connexes, és a dir, $d := d(y)$ per a qualsevol $y \in Y$ (en el cas d'una aplicació constant definim $d = 0$).*

Tots aquests resultats ens porten a un resultat sorprenent un cop haguem definit què és una *funció meromorfa*.

Definició 2.13. *Una funció meromorfa F en una superfície de Riemann és una aplicació holomorfa cap a l'esfera de Riemann que no és idènticament igual a ∞. En coordenades locals farem servir la notació local de la funció expressada en sèrie de Laurent vist a anàlisi complexa. Els pols de F són justament els punts de $F^{-1}(\infty)$ i si tenim un pol x, llavors el seu ordre és k_x.*

Corol·lari 2.14. *Sigui X una superfície de Riemann compacta. Si hi ha una funció meromorfa en X que té exactament un pol, i aquest pol és d'ordre 1, llavors X és equivalent a l'esfera de Riemann.*

Si $F : X \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ és aquesta funció meromorfa, podem observar que, clarament, és una aplicació pròpia (ja que X és compacta per hipòtesi). Com que F té exactament un pol d'ordre 1, obtenim que el grau $d = 1$. És a dir, que prenem cada valor de Y una sola vegada. Per tant, F és una bijecció. L'aplicació inversa és contínua, per tant, és un homeomorfisme. Pel primer lema obtenim que també és holomorfa, és a dir, obtenim que X és equivalent a l'esfera de Riemann.

2.2.2 Monodromia d'aplicacions de recobriment

Abans d'introduir el concepte de *monodromia*, que ens serà molt útil a l'hora de demostrar que una corba el·líptica és equivalent a una superfície de Riemann de génere 1, farem una breu introducció/repàs d'alguns conceptes topològics que usarem més endavant.

Sigui $F : P \to Q$ una aplicació entre espais topològics, podem establir les següents definicions.

Definició 2.15. • *F és un homeomorfisme local si, per a cada punt $x \in P$, hi ha un entorn obert $U \subseteq P$ de x, tal que $F|_U$ és un homeomorfisme amb la seva imatge en Q.*
• *F és una aplicació de recobriment si, per a cada punt $y \in Q$, $\exists V \subseteq Q$ un entron obert de y, tal que $F^{-1}(V)$ és una unió disjunta de conjunts oberts $U_\alpha \subset P$, i $F|_{U_\alpha}$ és un homeomorfisme de U_α a V.*

Clarament, una aplicació de recobriment és un homeomorfisme local, però l'invers no és cert, generalment. De totes maneres, tenim la següent proposició.

Proposició 2.16. *Un homeomorfisme local propi és una aplicació de recobriment.*

De fet, un homeomorfisme local propi és el mateix que una aplicació de recobriment *finita*, on $\sharp\{f^{-1}(y)\}$ és finit per a tot $y \in Q$.

Hem de fer un recordatori de la relació entre aquests conceptes i el grup fonamental.

Proposició 2.17. *Sigui Q una superfície connexa i q_0 un punt base a Q. Hi ha una correspondència $1:1$ entre:*
• *Classes d'equivalència de recobriments $F : P \to Q$, on P és connex;*
• *Classes de conjugació de subgrups de $\pi_1(Q, q_0)$.*
On direm que dos recobriments $F : P \to Q$ i $F' : P' \to Q$ són equivalents, si hi ha un homeomorfisme $g : P \to P'$ tal que $F = F' \circ g$.

La correspondència s'estableix de la següent manera. Qualsevol aplicació $F : P \to Q$ indueix un homomorfisme de grups:

$$F_* : \pi_1(P, p_0) \to \pi_1(Q, F(p_0))$$

El subgrup corresponent al recobriment $F : P \to Q$ és la imatge de $F_* : \pi_1(P, p_0) \to \pi_1(Q, q_0)$, per a qualsevol tria de $p_0 \in F^{-1}(q_0)$. Tries diferents de p_0 canviaran el subgrup de conjugació.
Per a construir el subgrup de $\pi_1(Q)$, podem començar en el cas del subgrup trivial. El recobriment $G : \tilde{Q} \to Q$ que correspon a aquest cas queda caracteritzat per la propietat que $\pi_1(\tilde{Q})$ és trivial. Definim ara $\tilde{Q}$ com el conjunt de parells (q, A) on q és un punt de Q

i A és una classe d'homotopia de camins a Q de q_0 a q. Aleshores, definim $G(q,A) := q$. Per tal de posar una topologia a aquest espai de forma que G sigui una aplicació de recobriment, es pot recòrrer a llibres com ara *Hatcher (2002)*, però en aquest treball no ho veurem. També tenim una acció de $\pi_1(Q,q_0)$ a $\tilde{Q}$ donada per la composició d'un camí amb un camí tancat amb base al punt q_0, i

$$Q = \tilde{Q}/\pi_1(Q,q_0).$$

Un cop establerta aquesta idea, per a tot subgrup $H \subset \pi_1(Q,q_0)$ definim l'espai de recobriment associat S_H com a $\tilde{Q}/H$. Així doncs tenim la factorització del recobriment universal com a

$$\tilde{Q} \to S_H = \tilde{Q}/H \to Q = \tilde{Q}/\pi_1(Q,q_0).$$

La demostració d'aquestes afirmacions té a veure amb les elevacions de camins. Vegem ara una proposició que ens donarà una idea de quan existeixen elevacions de camins.

Proposició 2.18. *1. Si $F : P \to Q$ és un homeomorfisme local, llavors una elevació d'un camí (amb un punt inicial determinat) serà única (si existeix). Si F és una aplicació de recobriment, llavors les elevacions de camins (amb un determinat punt inicial) sempre existeixen.*
2. Si $F : P \to Q$ és un homeomorfisme local i γ_0, γ_1 són camins a Q amb els mateixos punts final i inicial que són homòtops a través de camins elevables, i amb elevacions $\tilde{\gamma_s}$ que tenen el mateix punt inicial a P. Llavors, $\tilde{\gamma_s}(1) = \tilde{\gamma_0}(1)$, $\forall s \in [0,1]$.

Un cop definits i repassats aquests conceptes topològics podem disposar-nos a definir el concepte de monodromia.

Monodromia:
Sigui $F : X \to Y$ una aplicació holomorfa de superfícies de Riemann amb grau $d \geq 1$, pels resultats obtinguts a l'apartat **2.2.1.**, podem observar que la restricció de F a $X \setminus R$ és un homeomorfisme local. Tot i així, aquesta restricció no té perquè ser una aplicació pròpia. Però, si definim $R^+ := F^{-1}(\Delta) = F^{-1}(F(R))$, llavors la restricció de F a $X \setminus R^+$ és una aplicació pròpia. Per tant, tenim una aplicació de recobriment

$$F : X \setminus R^+ \to Y \setminus \Delta.$$

Aquesta aplicació de recobriment, com hem vist en les nostres observacions topològiques, ve classificada per un subgrup (o una classe de conjugació de subgrups) $H \subset \pi_1(Y \setminus \Delta)$. Podem observar que H té un índex finit en el grup fonamental, ja que és el nombre de *fulles* del recobriment, que és el grau d.
En general, subgrups d'índex d en un grup π corresponen a representacions de permutacions transitives

$$\rho : \pi \to S_d,$$

on S_d denota el grup simètric de permutations del conjunt $\{1, ..., d\}$.
En el nostre cas, per tant, tenim que l'aplicació de recobriment F ens dona una representació transitiva $\rho : \pi_1(Y \setminus \Delta) \to S_d$ (mòdul conjugació).

Definició 2.19. *Aquesta aplicació ρ obtinguda és la monodromia de l'aplicació de recobriment.*

Per tal de fer-nos-en una idea més clara, ho veurem més detalladament.

Sigui γ un camí tancat en $Y \setminus \Delta$ amb punt final i inicial $y_0 \in Y$. Com que el grau de l'aplicació és d, per hipòtesi, sabem que a $F^{-1}(y_0)$ hi ha d punts, que anomenarem (etiquetarem) $1, ..., d$. Ara, movent-nos al llarg del camí γ "transportem"els punts a $F^{-1}(\gamma(t))$ de forma contínua en X. Quan retornem a y_0 el conjunt de punts antiimatge serà el mateix però les etiquetes que hem anomenat $1, ..., d$ poden haver canviat. Concretament, hauran canviat seguint una permutació de S_d, que en termes de monodromia no és més que $\rho([\gamma])$.

Ara posarem un exemple concret que potser recordarà al cas que ens interessa. De fet, és el cas d'una corba el·líptica amb un polinomi quàrtic. Tot i que en aquest treball ens centrarem més en el cas del polinomi cúbic, en algunes implicacions veurem que també podem desenvolupar el mateix argument per a un polinomi quàrtic (ja que la diferència vindrà donada pel paper que juga el punt de l'infinit).
Sigui X la superfície de Riemann definida per els zeros del polinomi $w^2 = f(z)$, on $f(z) = (z - a_1)(z - a_2)(z - a_3)(z - a_4)$, i sigui $F : X \to \mathbb{C}$ la projecció al factor z, llavors, tenim que $\Delta = \{a_1, ..., a_4\}$ i també que $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \Delta)$ està generat per quatre camins tancats $\gamma_1, ..., \gamma_4$ on γ_i és un camí tancat estàndard al voltant de a_i. El grau és 2, i la monodromia ρ envia cada camí γ_i a la permutació no trivial de S_2, en aquest cas, una transposició dels dos punts de l'antiimatge. Hi ha una forma de veure aquest cas de forma més visual però la guardarem per més endavant, ja que ens interessarà per tal de dur a terme l'explicació de la demostració de que una corba el·líptica és equivalent a una superfície de Riemann de gènere 1.

Bàsicament, el que hem fet és; a partir d'una aplicació holomorfa entre les superfícies de Riemann X, Y, hem aconseguit un grau d, un conjunt discret Δ i una representació de permutació transitiva $\rho : \pi_1(Y \setminus \Delta) \to S_d$. Ara bé, podem anar en l'altre direcció? És a dir, a partir d'una superfície de Riemann Y, un subconjunt discret d'aquesta, un enter d i una representació d'una permutació transitiva ρ, podem obtenir una única superfície de Riemann X i una única aplicació holomorfa entre superfícies de Riemann $F : X \to Y$ tal que ρ sigui la seva monodromia? El *Teorema d'existència de Riemann* ens diu que sí.

2.3 Teorema d'existència de Riemann

Teorema 2.20. *Sigui Y una superfície de Riemann connexa i sigui Δ un subconjunt discret de Y. Donat $d \geq 1$ i una representació d'una permutació transitiva $\rho : \pi_1(Y \setminus \Delta) \to S_d$, llavors hi ha una única superfície de Riemann connexa X i una única aplicació holomorfa de superfícies de Riemann $F : X \to Y$ (mòdul equivalència) tal que la seva monodromia és precisament ρ.*

Anem a veure'n una demostració. Les nocions topològiques que hem repassat, ens donen una aplicació de recobriment $F_0 : X_0 \to Y \setminus \Delta$. Es pot veure que hi ha una única manera de veure X_0 com a superfície de Riemann. Al final de la demostració, aquest X_0 es correspondrà a $X \setminus R^+$, per aquest motiu, hem de veure com "afegir"els punts de R^+ que es troben sobre Δ.
Sigui $y_1 \in \Delta$, escollim un disc centrat en y_1, $D_1 \subset Y$, tal que no contingui altres punts

de Δ. La frontera del disc defineix un element de $\pi_1(Y \setminus \Delta)$. L'homomorfisme que tenim envia aquest element a una permutació σ de les etiquetes (com hem fet en l'explicació anterior). Ara bé, ja que $F_0^{-1}(\Delta \setminus \{y_1\})$ podria no ser connex, la permutació no té perquè actuar de forma transitiva en el conjunt d'etiquetes. Podem escriure la permutació com a producte de cicles disjunts, i podem veure que cada un d'aquests cicles actua sobre una de les components connexes de $F_0^{-1}(\Delta \setminus \{y_1\})$.
Sigui Z un d'aquests components connexos, que correspon al cicle de llargària d', llavors la restricció de F_0 a Z ens dona un recobriment *connex* de $\Delta \setminus \{y_1\}$, que queda determinat per l'homomorfisme que envia el generador de $\pi_1(Y \setminus \Delta)$ al cicle de llargària d' de $S_{d'}$.
Però, precisament, coneixem una aplicació de recobriment que compleix aquests requisits. Si identifiquem $D_1 \setminus \{y_1\}$ amb el disc perforat $D^* \subset \mathbb{C}$, aquesta aplicació de recobriment ve donada per l'aplicació $z \mapsto z^{d'}$ de D^* a D^*. Per tant, podem concloure que Z és equivalent com a superfície de Riemann a D^* a partir d'un isomorfisme $\phi : D^* \to Z$, per exemple.
Ara definim un conjunt X^+ com a

$$X^+ = X_0 \cup_\phi D,$$

on D és el disc unitat en els complexos. El que estem fent és identificar $z \in D^* \subset D$ amb $\phi(z) \in Z \subset X_0$. Construirem X^+ com a superfície de Riemann de la següent forma. Agafem un atles de cartes de X_0. Aquest atles de cartes serà l'atles de cartes de X^+, però en aquest últim atles hi afegirem una carta més; la inversa de l'aplicació de D a X^+.
Hi ha una única manera d'introduir una topologia a X^+, però faltaria veure que aquesta topologia és Hausdorff. De tota manera, no farem aquesta demostració a la memòria del treball ja que és més aviat de caire topològic i ens estariem desviant en excés del que ens interessa.

Per consegüent, X^+ és una superfície de Riemann. A més a més, l'aplicació F_0 es pot extendre a una aplicació holomorfa de X^+ a Y. Repetint aquest procediment per a cada punt de Δ i per a cada cicle de la corresponent monodromia obtenim una superfície de Riemann X amb una aplicació holomorfa F de X a Y i es pot comprobar que és pròpia.

2.4 De corba el·líptica a superfície de Riemann de gènere 1

Finalment, podem plantejar l'exemple que ens interessa de la corba el·líptica amb un polinomi cúbic.
Considerem el conjunt E_0 que hem introduït a la secció **2.2**. Recordem que és el conjunt de zeros del polinomi $P(w, z) = w^2 - f(z)$ on f és un polinomi cúbic sense arrels múltiples. Siguin a_i on $i = 1, 2, 3$ les arrels d'aquest polinomi, i sigui $\pi : X \to \mathbb{C}$ la projecció al factor z. Llavors, $\Delta = \{a_1, a_2, a_3\}$ i, com a l'exemple en el cas del polinomi quàrtic, $\pi_1(Y \setminus \Delta)$ està generat per tres llaços γ_i on $i = 1, 2, 3$, i on γ_i és un llaç estàndard al voltant de a_i.
Si provem de fer el procediment tradicional de fer *talls* per cada dos d'aquests punts de Δ, agafar dues còpies del pla complex *tallat*, i ajuntar-les al llarg dels *talls*, podem observar que pel fet de no ser parell el nombre de punts en Δ, no podem fer talls de forma que *continguin* tots els punts de Δ. Ens quedarà un punt, per exemple a_3, que no tindrà cap tall.
Per a poder fer un argument semblant al que hem fet en el cas d'un polinomi f quàrtic, necessitarem abans introduir i realitzar de forma explícita, com compactificar una corba algebraica (que tindrà molt a veure amb considerar la corba projectiva, i no solament

l'afí).

2.4.1 Compactificar una corba algebraica

La construcció usada en la demostració del teorema d'existència de Riemann ens serà molt útil. Considerem altre cop un polinomi $P(w,z)$ en dues variables complexes, i sigui X el seu conjunt de zeros. Considerem la projecció π al factor z. Suposem ara que P és un polinomi irreductible (no veurem criteris d'irreductibilitat ja que és particular d'altres assignatures).
Ara bé, recordem que havíem treballat amb la superfície de Riemann que venia donada pels zeros d'un polinomi d'aquest tipus, però teníem una condició que feia referència al fet que en tot punt almenys una de les derivades parcials del polinomi no s'anul·lés. Ara no considerem aquesta condició. Anomenem $S \subset X$ al conjunt de punts en què s'anul·len totes dues derivades parcials (pels propòsits d'aquest treball assumirem que sabem que, per la irreductibilitat del polinomi P, aquests punts són finits). Com havíem vist, $X \setminus S$ és una superfície de Riemann.
Sigui ara F el conjunt finit en $\mathbb{C}$ format per aquells valors de z pels quals el terme de P de grau més gran en w s'anula i sigui ara

$$S^+ = \pi^{-1}(\pi(S) \cup F) \subset X,$$

s'observa que S^+ és finit (ja que $\pi(S) \cup F$ és finit). Sigui ara E el subconjunt discret $\pi(S) \cup F \cup \infty$ de l'esfera de Riemann $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.
Obtenim una aplicació holomorfa pròpia

$$\pi : X \setminus S^+ \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus E$$

L'hem obtingut usant el teorema d'existència de Riemann, ja que tenim una superfície de Riemann $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus E$, i un conjunt de ramificació $\Delta \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus E$, podem obtenir $X \setminus S^+$ de la monodromia $\rho : \pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus (\Delta \cup E)) \to S_d$.
Per altra banda, aquesta informació defineix una superfície de Riemann compacta X^*, que conté $X \setminus S^+$ com a conjunt dens obert, que va de forma holomorfa a $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.
Recordem ara que en l'argument que havíem fet de corbes projectives, tenim un conjunt compacte $\overline{X} \subset \mathbb{CP}^2$ definida per el polinomi homogenitzat. Aquesta superfície conté X (i per tant $X \setminus S^+$) com a conjunts oberts densos.

Proposició 2.21. *La inclusió de $X \setminus S^+$ a $\overline{X}$ es pot extendre a una aplicació holomorfa de X^* a $\mathbb{CP}^2$, que té com a imatge $\overline{X}$.*

Notem que quan parlem d'aplicació holomorfa a $\mathbb{CP}^2$ ens referim a una aplicació contínua que és holomorfa respecte a les tres cartes que cobreixen $\mathbb{CP}^2$(equivalents cada una a $\mathbb{C}^2$). El que hem de veure és que quan "afegim"discos a $X \setminus S^+$, com hem fet en la demostració del teorema d'existència de Riemann, la inclusió del disc perforat D^* es pot extendre de forma meromorfa a 0. Per tant, necessitem el següent lema per veure la proposició.

Lema 2.22. *Sigui P un polinomi irreductible en dues variables complexes, n un enter positiu i sigui f una funció holomorfa en el disc perforat D^* tal que $P(z^n, f(z)) = 0$ per a tot $z \in D^*$. Llavors, f és una funció meromorfa.*

Ja que el polinomi és irreductible, només tenim un nombre finit de solucions de l'equació $P(0,w)=0$, que en direm ω_i on $i=1,...,N$ per a cert natural N. Per tant, si z és petita en mòdul, $f(z)$ és pròxima a un dels ω_i.
Recordem ara d'anàlisi complexa que que si f té una singularitat essencial en 0, llavors $\forall w \in \mathbb{C}$ i per $\epsilon, \delta > 0$, hi ha un z de mòdul més petit que δ tal que $|f(z)-w| < \epsilon$. Això no es compleix en el nostre cas si w no és un dels ω_i i ϵ i δ són suficientment petits. Per tant, f és meromorfa com volíem veure.

Un cop vist el lema, sabem que per a un m adequat, $z^m f(z)$ és holomorfa i no s'anul·la per z petits en mòdul. Per aquest motiu, l'aplicació $z \mapsto [z^n : f(z) : 1]$ del disc perforat a $\mathbb{CP}^2$, és igual a l'aplicació $z \mapsto [z^{n+m} : z^m f(z) : z^m]$ i es pot extendre de forma holomorfa a una aplicació de D a $\mathbb{CP}^2$.

És a dir, a qualsevol polinomi irreductible li hem associat una superfície compacte de Riemann X^*.

2.4.2 De corba el·líptica a superfície de Riemann de gènere 1

Un cop explicat com obtenir una superfície compacta de Riemann a partir d'una corba algebraica, podem tornar al nostre cas d'una corba el·líptica amb un polinomi cúbic. Ara ja sabem com obtenir la seva superfície de Riemann compacta, i per tant, ara sí que tenim per primera vegada definida una corba el·líptica. Fins ara treballàvem amb el que en podríem dir la corba afí E_0, que era el conjunt de zeros del polinomi $P(w,z) = w^2 - f(z)$ on f era un polinomi cúbic (sense arrels múltiples). Però ara podem obtenir la seva superfície de Riemann compacta associada E, que en direm *corba el·líptica*.
Es pot observar que el que hem fet a aquesta corba és afegir el punt de l'infinit, o en altres paraules, és equivalent a dir que mirem la corba algebraica del polinomi P homogenitzat, és a dir, la corba projectiva.

Ara bé, ens preguntem si aquesta corba el·líptica té gènere 1, és a dir, si és topològicament homeomorfa a un tor. Per tal de veure-ho, usarem el procediment tradicional que es va fer a l'introduir les superfícies de Riemann.

En qualsevol subconjunt obert simplement connex de $\mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$ podem escollir una branca del logaritme i definir

$$\sqrt{f(z)} = exp(\tfrac{\log f(z)}{2})$$

Intentar fer continuació analítica al llarg d'un camí tancat petit al voltant de qualsevol dels punts a_1, a_2, a_3 farà que el logaritme varï en $2\pi i$ i, per tant, l'arrel canviarà de signe:

$$exp(\tfrac{2\pi i + \log(f(z))}{2}) = -exp(\tfrac{\log(f(z))}{2}).$$

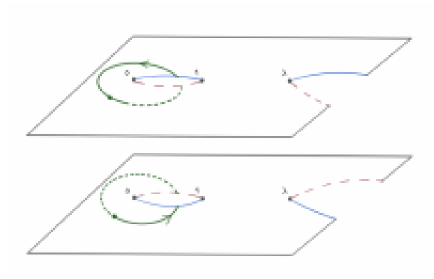
En canvi, si fem que el camí tancat sigui al voltant de dos dels zeros, els signes es cancelaran. En altres paraules, considerant la superfície de Riemann $\mathbb{C}$ i el conjunt de ramificació $\Delta = \{a_1, a_2, a_3\}$, la monodromia $\rho : \pi_1(\mathbb{C} \setminus \Delta) \to S_2$ enviarà cada generador de $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \Delta)$ (és a dir cada llaç petit al voltant de cada a_i) a l'element no trivial de S_2. Per tant, si fem un llaç que vagi al voltant de dos dels a_i, la monodromia enviarà la seva classe a l'element trivial (ja que apliquem dues vegades una transposició). Però com hem plantejat anteriorment, al ser els a_i un nombre imparell de punts, ens queda un tercer punt que, per a llaços llargs que vagin al seu voltant, l'arrel seguirà canviant de signe, és a dir, la monodromia no serà trivial. De manera que si fixem una semirecta $[a_3, +\infty) \subset \mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2\}$, llavors per a

$$S := [a_1, a_2] \cup [a_3, +\infty)$$

tenim una funció holomorfa ben definida en $U := \mathbb{C} \setminus S$,

$$h : U \to \mathbb{C} \text{ tal que } h(z)^2 = f(z), \forall z \in U$$

Però ens queda el problema dels camins tancats que travessen S. Hem vist que quan creuem S, l'arrel canvia de signe. Per tant, considerem la unió disjunta de dos còpies de U amb la funció $\sqrt{f} : U \sqcup U \longrightarrow \mathbb{C}$ definida com a $+h(z)$ en la primera còpia i $-h(z)$ en la segona. Ara unim aquestes dues còpies posant dues còpies de S i identificant com s'ensenya a la **figura 2** i anomenarem a l'espai topològic resultant X_0.

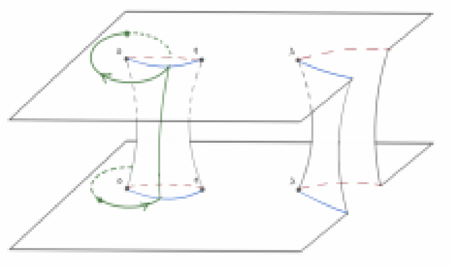


Gràcies a aquesta contrucció, veiem que, en realitat, hi ha una funció contínua a l'espai X_0 que restringida a la unió disjunta de les dues còpies de U és realment $\sqrt{f}$. Podem observar-ho en el següent diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U} \sqcup \mathcal{U} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\text{proj.}"'] & X_0 \arrow[r, dashed] \arrow[d] & \mathbb{C} \\
\mathcal{U} \arrow[r, hook] & \mathbb{C} &
\end{tikzcd}$$

On la composició de la inclusió de la unió disjunta a X_0 composada amb la funció contínua de $X_0 \dashrightarrow \mathbb{C}$ és $h \sqcup h$, per tant tal aplicació contínua existeix.

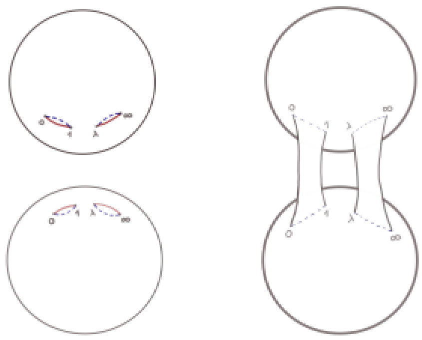
Per tal de visualitzar millor l'espai topològic X_0 podem *girar* una de les còpies de U i observar la **figura 3**. Podem veure que es poden dibuixar els camins tancats, obtenint la forma següent:



Notem que, de fet, X_0 és una superfície de Riemann, ja que és la unió identificada de dos subconjunts de $U \subset \mathbb{C}$ que són clarament superfícies de Riemann.
Ara observem que la projecció $U \sqcup U \to U$ es pot extendre a una aplicació contínua $p : X_0 \to \mathbb{C}$. De fet, es pot observar que p és una aplicació holomorfa de superfícies de Riemann a partir d'escollir un atles en X_0 i veure que el fet de fer la projecció ens dóna una funció holomorfa. De fet, aquesta aplicació ens dona una aplicació holomorfa, considerant el punt de l'infinit,

$$p : X_0 \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{\infty\},$$

on estem simplement considerant $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{\infty\}$ en comptes de $\mathbb{C}$. Ara bé, ja que ara tenim una superfície de Riemann, un conjunt de ramificació Δ, un grau $d = 2$ i una aplicació de monodromia, podem obtenir, efectivament, el nostre espai X_0 com a superfície de Riemann.
De forma similar a l'apartat de compactificació de corbes algebraiques, aquest procediment ens defineix una superfície compacta X (que no és més que la compactificació de X_0 amb el punt de l'infinit), i podem veure que l'aplicació $p : X_0 \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{\infty\}$, s'exté a una aplicació holomorfa (que seguirem anomenant p fent un abús de notació) $p : X \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.
Observant la construcció que havíem fet de X_0, podem veure en la **Figura 4** que al compactificar i obtindre X, hem aconseguit una superfície de Riemann compacte de gènere 1,



on la primera imatge és la compactificació mostrant les identificacions als talls i la segona representa la compactificació un cop realitzades aquestes identificacions.

Ara bé, donada l'esfera de Riemann, un grau $d = 2$, un conjunt de ramificació $\Delta \cup \{\infty\}$ i la monodromia $\rho : \pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus (\Delta \cup \{\infty\})) \to S_2$ en que cada generador és enviat a l'element no trivial de S_2, sabem, pel teorema d'existència de Riemann, que existeix una única superfície de Riemann i una única aplicació holomorfa d'aquesta a l'esfera de Riemann mòdul equivalència.
Però observem que tenim dues superfícies compactes de Riemann; X i la nostra corba el·líptica E, i dues aplicacions holomorfes de superfícies de Riemann $\pi : E \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, la projecció al factor z, i $p : X \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ la projecció que hem construït. Per tant, aquestes dues superfícies de Riemann X i E són equivalents com a superfícies de Riemann. És a dir, com que X és una superfície de Riemann compacte de gènere 1, llavors hem vist que la nostra corba el·líptica E, també és una superfície compacte de Riemann de gènere 1.

3 De corba el·líptica a $\mathbb{C}/\Lambda$

Un cop feta la primera demostració, procedirem a demostrar la implicació que ens porta de una corba el·líptica a la superfície de Riemann $\mathbb{C}$ mòdul un reticle Λ. Per tal de veure-ho, haurem d'introduir alguns altres conceptes sobre superfícies de Riemann com ara les *1-formes* i les *2-formes*, així com aprofitar per introduir la *cohomologia de De Rham* i altres conceptes que potser no usarem precisament en aquesta implicació però que ens seran molt útils a l'hora de fer la resta d'equivalències plantejades a la introducció.

3.1 1-formes, 2-formes i cohomologia de *De Rham*

Tot i que l'objecte d'interès en aquest treball són les superfícies de Riemann, primer de tot, volem introduir el concepte de 1-formes i 2-formes en superfícies diferenciables. Es pot fer notar que almenys el concepte de 1-forma l'hem vist a l'assignatura de geometria diferencial, però ens interessa introduir-lo a fons ja que també ens serà útil per quan traslladem aquests càlculs i conceptes a les superfícies de Riemann.

3.1.1 1-formes

Definició 3.1. *Considerem f una funció real diferenciable definida en un entorn obert U de $0 \in \mathbb{R}^2$, i $\gamma_1 : (-\epsilon_1, \epsilon_1) \to U$ i $\gamma_2 : (-\epsilon_2, \epsilon_2) \to U$ dues aplicacions diferenciables tal que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = 0$ i sigui $\chi : U \to V$ un difeomorfisme a un altre conjunt obert de $\mathbb{R}^2$ tal que $\chi(0) = 0$, si definim $\tilde{\gamma_i} = \chi \circ \gamma_i$ per $i = 1, 2$ i $\tilde{f} = f \circ \chi^{-1}$. Llavors,*
- *Si totes dues derivades parcials de f s'anul·len en 0, llavors també és cert per a $\tilde{f}$.*
- *Si les derivades de γ_i són iguals en 0 per $i = 1, 2$, llavors també és cert per a $\tilde{\gamma_i}$.*

Notem que el resultat es pot veure fàcilment usant la regla de la cadena. Ara veurem un resultat semblant per a superfícies diferenciables.

Definició 3.2. *Sigui S una superfície diferenciable, $p \in S$ un punt, f una funció diferenciable en S i $\gamma_i : (-\epsilon_i, \epsilon_i) \to S$ per $i = 1, 2$ dos camins diferenciables amb $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$. Direm que f és constant de primer ordre a p si la derivada de la funció que representa f en coordenades locals al voltant de p s'anul·la al punt que correspon a p (notem que gràcies al primer resultat del lema, aquesta definició és independent de la tria de la carta).*

Definició 3.3. *De forma similar, diem que γ_1 i γ_2 són iguals a primer ordre en p si les derivades dels camins que els representen en coordenades locals són iguals.*

Un cop fetes aquestes definicions, podem establir unes relacions d'equivalència $\sim$ i $\approx$, on $f_1 \sim f_2$ si $f_1 - f_2$ és constant a primer ordre (siguent f_1 i f_2 funcions diferenciables com les que acabem de definir) i on $\gamma_1 \approx \gamma_2$ si γ_1 i γ_2 són iguals a primer ordre. Es pot compovar que, efectivament, aquestes relacións són d'equivalència.

Definició 3.4. • *L'espai tangent TS_p de S en p és el conjunt de classes d'equivalència d'aplicacions $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ amb $\gamma(0) = p$ sota la relació d'equivalència $\approx$.*
• *L'espai cotangent (real) T^*S_p és el conjunt de classes d'equivalència de funcions diferenciables en un entorn obert de p en S sota la relació d'equivalència $\sim$.*

Es pot observar que l'espai cotangent té una estructura d'espai vectorial que prové de l'estructura de les funcions diferenciables. Gràcies a la definició feta, notem que tenim una aplicació $C^\infty(U) \to T^*S_p$ que denotarem com a $f \mapsto [df]_p$.

Analitzem-ho de forma local; siguin x_1, x_2 les coordenades locals al voltant de p, aquestes són funcions diferenciables, per tant, usant l'aplicació anterior, obtenim $[dx_1]_p, [dx_2]_p \in T^*S_p$. Sigui f una funció diferenciable en un entorn de p, podem escriure-la usant les nostres coordenades locals $f = f(x_1, x_2)$. Llavors tenim,

$$[df]_p = \frac{\partial f}{\partial x_1}[dx_1]_p + \frac{\partial f}{\partial x_2}[dx_2]_p.$$

En conseqüència, veiem que $[dx_1]_p$ i $[dx_2]_p$ formen una base de l'espai vectorial T^*S_p.

Si tenim un camí diferenciable $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ amb $\gamma(0) = 0$ i f una funció real diferenciable en un entorn de p, la composició $f \circ \gamma$ està definida com a funció real diferenciable en un interval més petit, i la derivada és idependent de la tria de f i de γ (en les classes d'quivalència de l'espai tangent i espai cotangent). Per tant, la derivada indueix una aplicació

$$TS_p \times T^*S_p \to \mathbb{R}.$$

De fet, aquesta aplicació indueix una dualitat entre TS_p i T^*S_p, és a dir, hi ha un isomorfisme canònic $T^*S_p \cong Hom(TS_p, \mathbb{R})$. En altres paraules, l'espai cotangent és el dual del tangent.

Definició 3.5. *Definim el feix cotangent T^*S com a $T^*S = \cup_{p\in S} T^*S_p$.*

Finalment, podem definir el concepte d'interès que és el de les 1-formes diferenciables.

Definició 3.6. *Definirem una 1-forma diferenciable α en S com a una aplicació $\alpha : S \to T^*S$, on $\alpha(p) \in T^*S_p$ per a tot $p \in S$, i que varia de forma diferenciable amb p en el sentit següent.*
Siguin x_1 i x_2 coordenades locals a prop d'un punt p_0, podem escriure

$$\alpha = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2,$$

On α_1, α_2 són funcions de x_1 i x_2 i on, com a recurs de notació, hem escrit dx_i en comptes de $[dx_i]_p$. Per tant, quan ens referim a que α varia de forma diferenciable amb p ens referim a que α_1 i α_2 són funcions diferenciables de les coordenades locals.

Notem que ens faltaria comprovar que aquesta definició no depèn de la tria de les coordenades locals. No ho farem en detall, però, tot i així, donarem la idea que a partir d'usar les derivades parcials de les coordenades locals en funció d'unes altres coordenades locals, obtenim que α en les segones coordenades locals vindrà determinada per,

$$\alpha_1(x_1(y_1,y_2), x_2(y_1,y_2))(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial x_1}{\partial y_2}dy_2) + \alpha_2(x_1(y_1,y_2), x_2(y_1,y_2))(\frac{\partial x_2}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial x_2}{\partial y_2}dy_2)$$

Una forma de veure les 1-formes és a partir de la derivada d'una funció: sigui f una funció en S, llavors definim la 1-forma df com a $df(p) = [df]_p$. En coordenades locals aquesta definició és equivalent a

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2$$

De totes maneres, ens interessa donar un enfoc diferent al resultat obtingut quan hem fet el canvi de coordenades locals.
Sigui $F : S \to Q$ una aplicació diferenciable entre superficies diferenciables, podem definir per a tot $p \in S$, aplicacions lineals naturals,

$$dF : TS_p \to TQ_{F(p)}$$
$$dF_p^* : T^*Q_{F(p)} \to T^*S_p$$

Definició 3.7. *Sigui α una 1-forma diferenciable en Q, definim el "pull-back"$F^*(\alpha)$ com a $F^*(\alpha)(p) = dF^*(\alpha(F(p))$.*

Notem que el "pull-back"és una 1-forma en S, i ara, si x_1, x_2 són coordenades locals a prop de $F(p)$ en Q i y_1, y_2 són coordenades locals a prop de p en S, la representació local de $F^*(\alpha)$ ve donada per l'expressió anterior de canvi de coordenades locals.

Per tant, si definim Ω_S^0 com el conjunt de funcions diferenciables en S i Ω_S^1 com el conjunt de 1-formes, podem obtenir la definició següent que ens serà molt útil per estudiar la *cohomologia de de Rham*.

Definició 3.8. *Hem obtingut l'aplicació $d : \Omega_S^0 \to \Omega_S^1$ que té les següents propietats;*
- *$d(fg) = fd(g) + gd(f)$.*
- *Si $F : S \to Q$ és diferenciable, llavors $d(F^*f) = F^*(df)$, on $f \in \Omega_Q^0$ i $F^*(f) = f \circ F$.*

Una popietat important de les 1-formes és que les podem integrar sobre conjunts 1-dimensionals. El que podem fer és treballar amb camins $\gamma : [0,1] \to S$.
Suposem que la imatge del camí es troba dins un sistema de coordenades locals x_1, x_2. Si α és una 1-forma en S, definim la integral de α sobre γ com a

$$\int_\gamma \alpha = \int_0^1 (\alpha_1 \frac{d\gamma_1}{dt} + \alpha_2 \frac{d\gamma_2}{dt}),$$

on γ_1 i γ_2 són les representacions en coordenades locals de γ i α_1 i α_2 són els coeficients de dx_1 i dx_2 en la representació local de α. Altre cop, es podria comprovar que aquesta definició no depèn de la tria de coordenades locals.
Si la imatge de γ no es troba en una única carta, podem dividir l'interval $[0,1]$ en subintervals i fer el càlcul de la integral en cada subinterval corresponent a una carta determinada.

Notem ara una propietat d'invariància. Suposem que $\psi : [0,1] \to [0,1]$ envia 0 a 0 i 1 a 1, llavors obtenim un altre camí diferenciable donat per la composició i,

$$\int_{\gamma\circ\psi} \alpha = \int_\gamma \alpha.$$

Un cop vistes aqestes propietats, podem definir finalment la integral sobre una corba C orientable inclosa en S, a partir de descompondre la corba en parts que podrem parametritzar amb camins diferenciables. De totes maneres, però, no entrarem en detalls ja que és un procediment vist en altres assignatures.

3.1.2 2-formes

En aquest apartat procedirem a definir el concepte de *2-forma diferenciable* en una superfície. Aquesta definició ve motivada per la pregunta següent: donada una 1-forma diferenciable α en una superfície S podem trobar una funció diferenciable en S tal que $\alpha = df$?

Al estudiar aquesta pregunta en el cas de $\mathbb{R}^2$, ens trobem que el problema es redueix a trobar una f tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x_1} = \alpha_1$ i $\dfrac{\partial f}{\partial x_2} = \alpha_2$, on α_1 i α_2 és la representació en coordenades locals de α, i x_1 i x_2 són les coordenades locals.

Es pot observar que una condició necessària és que $R = 0$, on $R = \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial x_1}$. Però, de fet, de l'invers (el fet que si tenim $R = 0$ llavors la nostra pregunta té resposta afirmativa) se'n diu el *criteri d'una diferencial exacta* i la seva demostració utilitza el *Teorema de Stokes* vist en altres assignatures. No en veurem la demostració en aquest treball però ens quedarem amb el resultat que, per tal de poder trobar una f desitjada, necessitem que $R = 0$, i aquesta condició és suficient.

El que podem veure és que les nocions del criteri d'una diferencial exacta, la integració sobre regions de dues dimensions, i el teorema de Stokes tenen molt en comú i estan relacionades. La nostra definició de *2-formes diferenciables* estarà motivada per a poder extendre aquestes nocions a superfícies.

Definició 3.9. *Sigui E un espai vectorial real, definim $\Lambda^2 E^*$ com el conjunt d'aplicacions bilineals $B : E \times E \to \mathbb{R}$, que són antisimètriques ($B(e, f) = -B(f, e)$). Definim el producte $\wedge$ com a,*

$$\wedge : E^* \times E^* \to \Lambda^2 E^*$$
$$(\alpha \wedge \beta)(e, f) = \alpha(e)\beta(f) - \beta(e)\alpha(f)$$

Per tant, aquest producte és lineal en cada variable i $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$.
Ara suposem que E té dimensió 2, llavors, es pot comprvar que $\Lambda^2 E^*$ és un espai vectorial de dimensió 1, i, si α_1, α_2 és una base de E^*, $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ és l'element que forma la base de $\Lambda^2 E^*$.

Aplicant aquest procediment al cas en què $E = TS_p$ sent S una superfície, per cada punt $p \in S$ tenim un espai de dimensió 1; $\Lambda^2 T^* S_p$. Si x_1, x_2 són coordenades locals, obtenim un element de la base $dx_1 \wedge dx_2$ de $\Lambda^2 T^* S_p$. Com a notació escriurem solament $dx_1 dx_2$.

Ara podem introduir la noció de *2-forma diferenciable*, i la descriurem usant una definició força semblant a la donada pel cas de les 1-formes.

Definició 3.10. *Definim una 2-forma diferenciable ρ en una superfície S com a l'aplicació $\rho : S \to \bigcup_{p \in S} \Lambda^2 T^* S_p$, tal que $\rho(p) \in \Lambda^2 T^* S_p$ i varia de forma diferenciable amb p en el següent sentit. En les coordenades locals x_1, x_2 , podem expressar ρ com $\rho = R(x_1, x_2) dx_1 dx_2$ on R és una funció diferenciable.*

Usant les definicions i un procediment com el que hem fet en el cas de les 1-formes, si tenim un altre sistema de coordenades locals y_1, y_2, ρ queda representada per,

$$\rho = R(x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2)) J(y_1, y_2) dy_1 dy_2,$$

on J és

$$J(y_1, y_2) = \frac{\partial x_1}{\partial y_1}\frac{\partial x_2}{\partial y_2} - \frac{\partial x_1}{\partial y_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_1},$$

i notem que aquesta J és el *Jacobià*.
Altre cop, com en el cas de les 1-formes, també tenim una altra manera de veure aquest resultat; donada una aplicació $F : S \to Q$, podem trobar una manera de definir la 2-forma "pull-back"$F^*(\rho)$ en S. No entrarem en detall, però el resultat és el mateix, i s'hi arriba per un raonament semblant al que hem fet en el cas de les 1-formes.

Definició 3.11. *Definim Ω_S^2 com el conjunt de 2-formes diferenciables en una superfície S.*

Lema 3.12. *Hi ha una única manera de definir una aplicació $\mathbb{R}$-lineal $d : \Omega_S^1 \to \Omega_S^2$ tal que;*
- *Si $\alpha_1 = \alpha_2$ en un obert $U \subset S$, llavors $d\alpha_1 = d\alpha_2$ sobre U.*
- *Si f és una funció en S, llavors $ddf = 0$.*
- *Si f és una funció en S i α és una 1-forma en S, llavors $d(f\alpha) = df \wedge \alpha + fd\alpha$.*

Per demostrar-ho, primer veurem la unicitat. Suposem que tenim una definició de l'aplicació lineal tal que compleixi les condicions. Per la primera condició podem calcular $d\alpha$ en coordenades locals. Llavors tenim,

$$d(\alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2) = d\alpha_1 \wedge dx_1 + d\alpha_2 \wedge dx_2$$

usant la segona i la tercera condició, i, explícitament,

$$d(\alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2) = (\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2})dx_1 dx_2.$$

Ara bé, si agafem aquesta fórmula com a la definició de $d\alpha$, podem veure que és independent de la tria de coordenades locals.

Durant la demostració del lema, el que veiem és que en coordenades locals, $d\alpha$ és Rdx_1dx_2, on R és la funció que hem comentat anteriorment que entra en el criteri d'una diferencial exacta. És a dir, reformulant el resultat obtingut al començament d'aquest apartat, podem dir que donada una 1-forma α en una superfície $S = \mathbb{R}^2$, podem trobar una funció f tal que $\alpha = df$ si i només si $d\alpha = 0$.

Abans de posar-nos a parlar d'integració en una superfície, ens interessa introduir (o recordar) un concepte que ens serà útil: el suport compacte.

Definició 3.13. *El suport d'una funció f és el subconjunt del domini que no és enviat a* 0*. En cas que el domini sigui un espai topològic, el suport és el conjunt tancat més petit que conté tots els punts que no són enviats a* 0*.*
Definim una funció amb suport compacte en un espai topològic X com a una funció que el seu suport és un subconjunt compacte de X.

Ara anem a veure la integració. Sigui S una superfície orientable i ρ una 2-forma en S amb suport compacte i suportada en el domini d'una carta coordenada a S. Escrivim $\rho = R(x_1, x_2)dx_1dx_2$ en aquestes coordenades locals.

Definició 3.14. *Definim la integral de ρ en S amb la següent fórmula,*

$$\int_S \rho = \int_{\mathbb{R}^2} R(x_1, x_2)dx_1dx_2,$$

on ens referim a la integral de Lebesgue habitual. Podem comprovar també que aquesta definició no canvia quan escollim una coordenada local diferent, ja que el Jacobià és positiu per definició, i la integral serà el mateix.

Per definir la integral de forma més general, usarem el següent lema.

Lema 3.15. *Sigui K un subconjunt compacte d'una superfície S i siguin $U_1, \cdots, U_n$ conjunts oberts de S amb $K \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n$. Llavors hi han funcions diferenciables no negatives $f_1, \cdots, f_n$ a S, cadascuna amb suport compacte i el suport de f_i contingut a U_i, tal que $f_1 + \cdots + f_n = 1$ a K.*

Un conjunt de funcions com aquestes s'anomena *partició de la unitat* subordinada al recobriment U_i. Per motius d'extensió, no veurem la demostració d'aquest lema dins la memòria. Tot i així, podem fer notar que la demostració en si és de caire topològic i no era particularment il·lustrativa pel que ens interessa aquest capítol. Per tant, ens prendrem la llibertat d'incloure-la a l'**Annex**.

Donat aquest lema i qualsevol 2-forma ρ amb suport compacte en una superfície orientable S, farem el següent procediment per tal de definir l'integració. Cobrim $K = supp(f)$ (el suport d'f) per oberts U_i, cada un el domini d'una carta coordenada. Com que K és compacte, podem recobrir-l'ho amb un conjunt finit d'oberts. Sigui ara f_i el sistema de funcions com al lema, llavors, per a cada i, el suport de $f_i\rho$ està contingut en una carta coordenada i podem definir la integral de $f_i\rho$ com hem fet anteriorment. Per tant, ara definim,

$$\int_S \rho = \sum_i \int_S f_i\rho.$$

Aquesta fórmula *ha* de ser certa si tenim una integral amb les propietats lineals bàsiques (ja que el fet que $\sum f_i = 1$ en el suport de ρ, vol dir que $\rho = \sum f_i\rho$).
De forma inversa, fem notar que la linealitat de la integral de Lebesgue implica que el valor de la integral de ρ és independent de la tria de les funcions f_i.

Podem observar que cal vigilar quan usem 2-formes i funcions i s'ha d'intentar no confondre els conceptes. Tot i així, hi ha una noció clara d'una 2-forma *positiva*, que és simplement una 2-forma que, en coordenades locals, és donada per l'expressió que coneixem i $R \geqslant 0$. Altre cop, per la definició de superfície orientable i els càlculs fets anteriorment, aquesta definició no depèn de la tria de la carta coordenada. Si ρ és una 2-forma positiva amb suport compacte, llavors la integral de ρ és també positiva.
Ara bé, si la 2-forma positiva no és de suport compacte, podem definir la integral de ρ agafant valors en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ com a,

$$\int_X \rho = \sup \int_X \chi\rho$$

on χ es mou per les funcions diferenciables amb suport compacte en X amb $0 \leqslant \chi \leqslant 1$ a tot arreu.

Notem que les 2-formes no tenen perquè ser necessàriament diferenciables, sent *contínues* (en el sentit obvi) també podem aplicar el mateix resultat. És a dir, si tenim una 2-forma ρ, podem definir una 2-forma positiva continua $|\rho|$ amb la condició que a cada punt, $|\rho| = \pm\rho$. Per tant, per a qualsevol 2-forma ρ en una superície S, podem definir la integral

$$\int_S |\rho|$$

agafant valors en $[0, \infty]$.

Definició 3.16. *A una 2-forma estrictament positiva en una superfície S l'anomenarem forma d'àrea.*

Si tenim una forma d'àrea fixada, llavors podem identificar les 2-formes en S amb funcions, i la noció d'integració anterior esdevé la integració de funcions respecte una mesura. Finalment, només ens falta introduir la forma general del *Teorema de Stokes.*

Proposició 3.17. *Sigui ρ una 1-forma amb suport compacte en una superfície orientable S amb vora, llavors*

$$\int_{\partial S} \alpha = \int_S d\alpha.$$

3.1.3 Cohomologia de *De Rham*

Resumim primer el que hem fet fins ara. Hem definit:
• Els espais de les 0-formes (funcions diferenciables), 1-formes i 2-formes en una superfície S; Ω_S^0, Ω_S^1, Ω_S^2 respectivament. També hem definit les aplicacions d_1 i d_2 (que per notació anomenarem a totes dues d) següents:

$$\Omega_S^0 \to \Omega_S^1 \to \Omega_S^2$$

• La integral $\displaystyle\int_C \alpha$ d'una 1-forma α sobre una corba C en una superfície.
• El producte $\wedge : \Omega_S^1 \times \Omega_S^1 \to \Omega_S^2$.
• Si S és orientable, hem definit la integral $\displaystyle\int_S \rho$ d'una 2-forma ρ amb suport compacte.
• La forma general del teorema de Stokes.

El que volem ara és establir una teoria de cohomologia amb els conceptes que hem obtingut fins ara, que ens permetrà aconseguir la demostració desitjada de corbes el·líptiques a $\mathbb{C}/\Lambda$.

Definició 3.18. *Sigui S una superfície diferenciable, definim els grups de cohomologia de De Rham $H^i(S)$ per $i = 0, 1, 2$, com a la cohomologia de la sequencia:*

$$\Omega_S^0 \to \Omega_S^1 \to \Omega_S^2$$

Pensant en termes de topologia algebraica, és a dir, en teories de cohomologia i homologia, es pot observar que el que tenim amb els conjunts de 0-formes, 1-formes i 2-formes, és una cadena i les aplicacions d són precisament l'operador vora (notem que hem vist, precisament, que $ddf = 0$). Per tant, té sentit fer la cohomologia d'aquesta cadena, i els grups de cohomologia seran els següents:

$$H^0(S) = \ker(d : \Omega_S^0 \to \Omega_S^1)$$
$$H^1(S) = \ker(d : \Omega_S^1 \to \Omega_S^2)/Im(d : \Omega_S^0 \to \Omega_S^1)$$
$$H^2(S) = \Omega_S^2/Im(d : \Omega_S^1 \to \Omega_S^2$$

Clarament, $H^0(S) = \mathbb{R}$, és a dir, les funcions constants (si S és connexa). El criteri d'una diferencial exacta que hem discutit a l'apartat anterior, en realitat significa que S sigui una superfície difeomorfa a $\mathbb{R}^2$, llavors $H^1(S) = 0$ i, en tal cas, es pot comprovar que $H^2(S)$ també serà 0.
Podriem fer alguns exemples de càlculs de grups de cohomologia, però no ens interessa discutir-ho en excés. Per veure'n alguns, es pot treballar pensant en altres teories de cohomologia i s'obté uns resultats semblants.

El que sí que ens interessa remarcar és que, com en moltes d'altres teories de cohomologia, per a una superfície de gènere g (orientable), el primer grup de cohomologia és $\mathbb{R}^{2g}$, és a dir que té dimensió $2g$. Per tant, podem veure que el gènere g d'una superfície orientable, és en realitat

$$g = \frac{\dim(H^1(S))}{2}$$

3.2 Càlculs en superfícies de Riemann

Un cop introduïts els conceptes de 1-formes, 2-formes i la cohomologia de De Rham en superfícies diferenciables, ara, finalment, podem treballar sobre els objectes d'interès d' aquest treball: les superfícies de Riemann.

3.2.1 Descomposició de les 1-formes

Sigui ara X una supefície de Riemann, i per tant , una superfície diferenciable orientable. Per a tot punt $p \in X$, tenim un espai tangent TX_p (espai vectorial real de dimensió 2). També tenim un espai cotangent $T^*X_p = Hom_{\mathbb{R}}(TX_p, \mathbb{R})$ tal que la derivada de tota funció real en X, ens dona un element de l'espai cotangent. Considerem ara l'espai cotangent complex,

$$T^*X_p^{\mathbb{C}} = Hom_{\mathbb{R}}(TX_p, \mathbb{C})$$

tal que la derivada de tota funció complexa en X determina un element de $T^*X_p^{\mathbb{C}}$.

Definició 3.19. *Quan parlem d'una estructura complexa en un espai vectorial real V ens referim a una aplicació $\mathbb{R}$-lineal $J : V \to V$ tal que $J^2 = -1$.*

Lema 3.20. *Hi ha una única manera de definir una estructura complexa en TX_p tal que la derivadada de tota funció holomorfa, definida en un entorn de $p \in X$, és $\mathbb{C}$-lineal.*

Per veure l'existència, escriurem $A = A' + A''$, on

$$A'(v) = \frac{1}{2}(A(v) - iA(Jv))$$
$$\text{i}$$
$$A''(v) = \frac{1}{2}(A(v) + iA(Jv))$$

i comprovem que A' i A'' són $\mathbb{C}$-lineals i antilineals respectivament. Per tal de veure la unicitat, notem que podem escriure l'espai cotangent complex com la següent suma directa

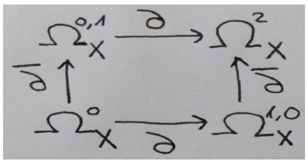
$$T^*X_p^{\mathbb{C}} = T^*X_p' \oplus T^*X_p'',$$

de tal manera que si f és una funció holomorfa local, llavors la derivada de f es troba en T^*X_p' i la derivada de $\overline{f}$ es troba en T^*X_p''.

Ara podem descompondre les 1-formes complexes en X en

$$\Omega^1_{X,\mathbb{C}} = \Omega^{1,0}_X \oplus \Omega^{0,1}_X,$$

on els elements de $\Omega^{1,0}_X$ es troben en T^*X_p', per cada p i $\Omega^{0,1}_X$ és el conjugat complex. Ara descomponem les aplicacions d, i obtenim el diagrama



Per fer-nos-en una idea més clara, ho veurem més explícitament en una coordenada local complexa $z = x + iy$. És a dir, que x i y són coordenades reals com en la secció anterior. Tenim

$$dz = dx + idy$$
$$d\overline{z} = dx - idy$$

i aquests elements formen una base de T^*X' i de T^*X'' respectivament.

Per tant, una (1,0)-forma s'expressa localment com a αdz i una (0,1)-forma s'expressa localment com a $\beta d\overline{z}$ per a funcions α i β. Si f és una funció complexa, llavors

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Escrivim

$$dx = \frac{1}{2}(dz + d\overline{z})$$
$$dy = \frac{1}{2i}(dz - d\overline{z})$$

Per tant,

$$df = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y})dz + \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y})d\overline{z}.$$

Això significa que

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial z}dz, \text{ i } ,\overline{\partial} f = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z}$$

on definim

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}) \text{ i } ,\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y})$$

L'equació $\overline{\partial} f = 0$ en coordenades locals no és més que l'equació de Cauchy- Riemann vista a anàlisi complexa, i, per tant, si tenim una funció holomorfa f, llavors, en coordenades locals, $df = \partial f = f'(z)dz$, on f' denota la derivada usual en anàlisi complexa.

Fins ara hem vist els operadors ∂ i $\overline{\partial}$ en funcions holomorfes, és a dir, aplicats sobre Ω^0. Però, com indica el diagrama, també els podem estudiar aplicats sobre $\Omega^{0,1}$ i en $\Omega^{1,0}$. Seguint les definicions, trobem que, en coordenades locals,

$$\partial(Ad\overline{z}) = \frac{\partial A}{\partial z}dzd\overline{z} = 2i\frac{\partial A}{\partial z}dxdxy$$
$$\partial(Bdz) = \frac{\partial B}{\partial \overline{z}}d\overline{z}dz = -2i\frac{\partial B}{\partial \overline{z}}dxdxy$$

Definició 3.21. *A una (1,0)-forma β en direm una 1-forma holomorfa si $\overline{\partial}\beta = 0$.*

Per tant, en coordenades locals, una 1-forma holomorfa és de la forma Bdz on B és una funció holomorfa.

Sigui $S \subset X$ una superfície compacta amb vora i α una 1-forma holomorfa en un entorn de S. Llavors, en particular, α és una 1-forma i, pel teorema de Stokes, la integral de α sobre la vora de S és 0.

Definició 3.22. *Definim una 1-forma meromorfa α en X com a una 1-forma holomorfa en $X \setminus D$, on D és un subconjunt discret de X, que pot ser escrita localment com a $f(z)dz$, on f és una funció meromorfa.*

Els punts del conjunt D són els *pols* de la 1-forma meromorfa. Sigui p un pol i γ un llaç petit al voltant de p, definim el *residu* d'α a p com a

$$Res_p(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \alpha.$$

Això és el mateix que escriure en la coordenada local z centrada a p, $\alpha = f(z)dz$, on $f(z) = \sum_{i=-k}^{i=\infty} a_i z^i$ és una funció meromorfa, i agafar el residu de f com a a_{-1}.

Proposició 3.23. *Sigui α una 1-forma meromorfa en una superfície de Riemann compacta X. Llavors, la suma dels residus d'α, al llarg de tots els pols, és zero.*

Per tal de veure la proposició, usarem el resultat vist just abans de definir les 1-formes meromorfes. Per cada pol p d'α, agafem un disc petit centrat a p. Llavors, la superfície X menys tots aquests discos és una superfície compacta amb vora, i, pel teorema de Stokes, la integral a sobre de la vora, que està formada per cada un dels llaços al voltant dels pols (que és la vora de cada un dels discs), és zero. Per tant, veient la definició que tenim del residu, la suma de tots els residus és 0.

3.3 De corba el·líptica a $\mathbb{C}/\Lambda$

Finalment, ens podem endinsar en la demostració que una corba el·líptica és equivalent a $\mathbb{C}/\Lambda$.

Recuperem ara el concepte de corba el·líptica que havíem introduït al **Capítol 2**. Recordem que estàvem tractant amb el conjunt de zeros del polinomi $P(z,w) = w^2 - f(z)$ on f és un polinomi cúbic o quàrtic en variables complexes sense arrels múltiples. El fet que f no tingui arrels múltiples, com havíem vist, implicava que en tot punt alguna de les dues derivades parcials no s'anul·la, per tant, és una superfície de Riemann. Recordem també que n'havíem definit una compactificació i que, en realitat, era a aquesta superfície de Riemann compacta a qui anomenàvem corba el·líptica.

Per construcció, tenim funcions holomorfes z i w en X amb derivades dz i dw respectivament. Com que en la nostra superfície de Riemann $w^2 - f(z) = 0$, derivant obtenim

$$2wdw = f'(z)dz.$$

Ara, però, podem observar que $\frac{dz}{w}$ és una 1-forma holomorfa lluny dels punts en què $w = 0$. En discs petits (entorns) perforats d'aquests punts, podem escriure

$$\frac{dz}{w} = \frac{2dw}{f'(z)},$$

i sabem que $f'(z)$ no s'anul·la, ja que no té arrels múltiples. Per tant, podem concloure que $\frac{dz}{w}$ es pot extendre a una 1-forma holomorfa α en X. A més a més, veiem que α no s'anul·la enlloc en X, és a dir, que quan escrivim

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{f(z)}},$$

al que en realitat ens referim és que escollim un camí γ en una superfície de Riemann X que vagi d'un punt amb $z = z_0$ a un altre amb $z = z_1$ i formem $\int_\gamma \alpha$.
Ara el que volem considerar és l'extensió de α a la compactificació X^* de X.

Tornem a la nostra construcció clàssica de les dues còpies del pla complex i les aplicacions de monodromia. Com ja hem vist, en el cas de ser f un polinomi cúbic, la monodromia del punt de l'infinit és no trivial, mentre que si f és un polinomi quàrtic, la monodromia en aquest punt és trivial (remarquem que quan diem monodromia ce l'infinit ens referim a enviar la classe de llaços grans al grup de permutacions).

Considerem primer el cas en què f és cúbic. Al compactificar, com hem vist al **Capítol 2**, el que fem és afegir un disc, que afegeix un punt extra p (en la nostra notació del capítol anterior, el punt ∞). Suposem que $f(z) = z^3 + a_1z^2 + a_2z + a_3$, llavors, en termes de la coordenada estàndard τ en el disc que afegim, $z = \tau^{-2}$, $w = \sqrt{f(z)} = \tau^{-3}\sqrt{1 + a_1\tau^2 + a_2\tau^4 + a_3\tau^6}$. On l'arrel està ben definida per τ petit. Llavors tenim

$$\frac{dz}{w} = (\frac{-2d\tau}{\tau^3})(\frac{\tau^3}{\sqrt{1 + a_1\tau^2 + a_2\tau^4 + a_3\tau^6}}) = \frac{-2d\tau}{\sqrt{1 + a_1\tau^2 + a_2\tau^4 + a_3\tau^6}}$$

Per tant, notem que α és holomorfa prop de p i no s'anul·la en p.

Ara considerem el cas d'un polinomi quàrtic. Aquest cop, ajuntem dos punts addicionals que en direm $p_{\pm}$ per tal de fer la compactificació. Usant un procediment semblant a l'anterior, obtenim que α és holomorfa vora $p_{\pm}$ i no s'anul·la en cap dels dos punts.

Nota: Per donar un resultat més general, hauríem pogut observar el cas en què f és un polinomi de grau n. Llavors, depenent de si n és parell o imparell, haguéssim obtingut la següent classificació usant els mateixos arguments.
Sigui n imparell; si $n = 1$ llavors α té un pol d'ordre 2 al punt p, si $n = 3$ és el cas mencionat, i si $n > 3$ llavors α també és holomorfa vora p però té un zero d'ordre $n - 3$ a p.
Sigui n parell; si $n = 2$ llavors α té pols simples a $p_{\pm}$, si $n = 4$ és el cas mencionat, i si $n > 4$ llavors α també és holomorfa vora $p_{\pm}$ i té zeros d'ordre $(n - 4)/2$ en $p_{\pm}$.

Notem que, en realitat, no hi ha diferència entre els casos $n = 3$ i $n = 4$, ja que, com hem fet notar al **Capítol 2**, en tots dos casos, la compactificació ens dóna una superfície de Riemann compacta de gènere 1. La única diferència és que, en el cas de $n = 3$, hem afegit un únic punt (punt de l'infinit) que és un punt crític del recobriment doble de l'esfera de Riemann, mentre que en $n = 4$, hem afegit dos punts, però, aquest cop, el punt de l'infinit no és un punt crític del recobriment.

Ara volem donar, finalment, el teorema que completarà la demostració d'aquest capítol. Com hem vist, si tenim una corba el·líptica (és a dir, tant en el cas $n = 3$ com $n = 4$), vista com a superfície de Riemann, podem trobar una 1-forma holomorfa α que no s'anul·la enlloc.

Teorema 3.24. *Sigui X una superfície compacta de Riemann i sigui α una 1-forma holomorfa en X sense zeros. Llavors, hi ha un reticle $\Lambda \subset \mathbb{C}$ i un isomorfisme $\varphi : \mathbb{C}/\Lambda \to X$ tal que $\pi^*\varphi^*(\alpha) = du$, on u és la identitat en $\mathbb{C}$ i π és la projecció $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda$.*

Primer de tot intentarem definir una integral indefinida de la 1-forma holomorfa α. Podem fer la integral al llarg d'un camí en X, però el seu valor dependrà dels punts inicials i finals del camí. Per tant, en realitat, aquesta integral indefinida no està definida com una funció avaluada en $\mathbb{C}$, sinó com una funció avaluada en $\mathbb{C}/\Lambda$ per a un Λ apropiat, i aquesta aplicació resultarà ser la inversa de l'isomorfisme desitjat.

Vegem , però, la demostració detallada. Considerem el recobriment universal $p : \tilde{X} \to X$. L'elevació $p^*(\alpha)$ és una 1-forma holomorfa en $\tilde{X}$ i, ja que la cobertura universal és simplement connexa, la integral de $p^*(\alpha)$ al voltant del camí depèn únicament dels punts finals i inicials. Per tant, obtenim una aplicació holomorfa $F : \tilde{X} \to \mathbb{C}$ amb $dF = p^*(\alpha)$. Com que α no té zeros, F és un homeomorfisme local. Afirmem, però, que F és en realitat una aplicació de recobriment.
Per a cada punt $x \in X$, podem trobar un radi $r > 0$ i una aplicació holomorfa injectiva $j_x : D_r \to X$, on D_r és el disc de radi r en $\mathbb{C}$ tal que $j_x(0) = x$ i $j_x^*(\alpha) = du$. És a dir, que j_x és la inversa d'una integral indefinida localment definida de α. Com que X és compacte, podem trobar una r tal que funcioni per a tot $x \in X$.
Suposem ara que $\tilde{x}$ és un punt de $\tilde{X}$. Ja que el disc és simplement connex, podem elevar $j_{p(\tilde{x})}$ per tal d'obtenir una aplicació injectiva

$$\tilde{j}_{\tilde{x}} : D_r \to \tilde{X}$$

amb $\tilde{j}_{\tilde{x}}(0) = \tilde{x}$ i $\tilde{j}^*_{\tilde{x}}(p^*(\alpha)) = du$. Sigui ara $\Delta_{\tilde{x}}$ la imatge sota $\tilde{j}_{\tilde{x}}$ del disc de radi $r/2$. Llavors, per construcció, $F(\Delta_{\tilde{x}})$ és el disc de radi $r/2$ centrat a $F(\tilde{x})$ en $\mathbb{C}$. Observem que per a tot $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$,

$$\tilde{y} \in \Delta_{\tilde{x}} \Leftrightarrow \tilde{x} \in \Delta_{\tilde{y}}.$$

Ja que si $\tilde{y} \in \Delta_{\tilde{x}}$, tal que $\tilde{y} = \tilde{j}_{\tilde{x}}(v)$ per alguna $|v| < r/2$, llavors tot el conjunt $\Delta_{\tilde{y}}$ pot ser descrit com a $\tilde{j}_{\tilde{x}}(\{w : |v - w| < r/2\})$ i, per tant, conté $\tilde{x}$, ja que $\tilde{j}_{\tilde{x}}(0) = \tilde{x}$.
Ara, sigui z un punt qualsevol de $\mathbb{C}$, considerem el disc de radi $r/2$ centrat a z. Suposem que $\tilde{y}$ és un punt de $F^{-1}(D_{r/2,z})$. Llavors, z es troba en el disc de radi $r/2$ centrat a $F(\tilde{y})$, en conseqüència, hi ha un punt $\tilde{x} \in \Delta_{\tilde{y}}$ amb $F(\tilde{x}) = z$. De la mateixa manera, $\tilde{y} \in \Delta_{\tilde{x}}$, on $F(\tilde{x}) = z$. Per tant, tenim que

$$F^{-1}(D_{r/2,z}) = \bigcup_{\tilde{x} \in F^{-1}(z)} \Delta_{\tilde{x}}.$$

Suposem que $\tilde{x_1}$ i $\tilde{x_2}$ són dos punts en $F^{-1}(z)$ i que $\Delta_{\tilde{x_1}} \cap \Delta_{\tilde{x_2}}$ no és buit. Llavors, hi ha un punt $\tilde{y}$ en la intersecció. De l'argument anterior, n'obtenim que $\tilde{x_1}, \tilde{x_2} \in \Delta_{\tilde{y}}$, però això és una contradicció amb el fet que F és injectiva en $\Delta_{\tilde{y}}$. Això implica que la unió anterior és en realitat una unió disjunta, i, per tant, F és una aplicació de recobriment.

Ara bé, com que $\mathbb{C}$ és simplement connex, no té recobriments connexos no trivials. Per aquest motiu, F és un isomorfisme de $\tilde{X}$ a $\mathbb{C}$. Però sabem que X és un quocient de $\tilde{X}$ per una acció de $\pi_1(X)$ a $\tilde{X}$. Per tant, concluim que X és isomorfa a un quocient de $\mathbb{C}$ per a un grup d'automorfismes holomorfs.
Per la classificació d'aquests quocients, veiem que l'única possibilitat és que X sigui isomorfa a $\mathbb{C}/\Lambda$ per algun reticle Λ. La identificació de la 1-forma α ve donada per la construcció.

Per tant, hem obtingut l'isomorfisme desitjat. També podem entendre aquest isomorfisme com una aplicació Λ-periòdica de $\mathbb{C}$ a X^*, que pot ser escrita com a $w(u)^2 = f(z(u))$.

Aquesta aplicació té la propietat que envia la "pull-back"forma holomorfa $dz/w = dz/\sqrt{f(z)}$ a la forma constant du a $\mathbb{C}$, o, en altres paraules,

$$\frac{dz}{du} = w = \sqrt{f(z)}.$$

En conclusió, arribat a aquest punt ja hem demostrat que una corba el·líptica és equivalent com a superfície de Riemann a $\mathbb{C}/\Lambda$ per a un reticle Λ com volíem.

4 De $\mathbb{C}/\Lambda$ a corba el·líptica

Un cop vist que una corba el·líptica és equivalent a una superfície de Riemann de gènere 1 i també ho és a $\mathbb{C}/\Lambda$ on Λ és un reticle, procedirem a demostrar que donat un reticle Λ, $\mathbb{C}/\Lambda$ és equivalent com a superfície de Riemann a una corba el·líptica.
Per tal de veure-ho, necessitarem la introducció de les funcions el·líptiques i la funció $\wp$ de Weierstrass.

Sigui $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un reticle. Ens preguntem si podem trobar una funció meromorfa en $\mathbb{C}/\Lambda$. Com que $\mathbb{C}/\Lambda$ és compacte, no hi haurà cap funció holomorfa no trivial, per tant, necessitem que tingui algun pol. D'altra banda, però, ja que $\mathbb{C}/\Lambda$ no és homeomorf a l'esfera de Riemann, hem de tenir més d'un pol simple o un pol múltiple (a causa del resultat vist al **Capítol 2** que afirma que si tenim una superfície de Riemann compacta i una funció meromorfa en ella amb exactament un pol d'ordre 1, llavors aquesta és equivalent a l'esfera de Riemann).

Per veure-ho, usarem alguns conceptes que ja hem estat mencionant i que, sobretot, van ser treballats amb profunditat a l'assignatura d'anàlisi complexa. Donada una funció meromorfa en un obert de $\mathbb{C}$, usarem l'ordre de la funció en un punt i també el residu. Recordem que bàsicament són definicions que venen donades gràcies a l'expansió en sèrie de Laurent. És convenient també recordar el *teorema dels residus*, que afirma que donada una funció meromorfa en un entron obert U de $\mathbb{C}$ se satisfà

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} w_{a_i}(\gamma) Res_{a_i}(f),$$

on γ és un llaç que no passa per cap dels pols, a_i són els pols i $w_{a_i}(\gamma)$ és l'index.

Definició 4.1. *Una funció el·líptica f respecte el reticle Λ és una funció meromorfa en el pla complex Λ-periòdica. És a dir que si λ_1 i λ_2 són els dos nombres complexos que defineixen el paral·lelogram fonamental del reticle Λ, llavors f és doblement periòdica respecte aquests dos nombres complexos. De manera equivalent, tenim una aplicació holomorfa de superfícies de Riemann $f : \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.*

Donada una funció el·líptica, podem suposar sense pèrdua de generalitat que, si P és el paral·lelogram fonamental associat a Λ, llavors ∂P no conté ni pols ni zeros de la funció. Aleshores, gràcies al teorema dels residus, tenim el següent teorema.

Teorema 4.2. *Sigui f una funció el·líptica, es compleixen les següents afirmacions:*
(1) Si f no té pols en ∂P, llavors $\sum_{a\in P\setminus\partial P} Res_a(f) = 0$.

(2) Si f és no constant i no té ni pols ni zeros en ∂P, llavors $\sum_{a\in P\setminus\partial P} ord_a(f) = 0$ i $\sum_{a\in P\setminus\partial P} ord_a(f)a \in \Lambda$.

(3) Les funcions el·líptiques no constants $f : \mathbb{C}/\Lambda \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, prenen cada valor $c \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ el mateix nombre de vegades comptant amb multiplicitat.

El primer resultat s'obté clarament gràcies al teorema dels residus (ja que hem assumit que no tenim pols en ∂P i, a més, la integral sobre costats oposats es cancel·la perquè aquests estan orientats oposats entre ells).

Podem veure **(2)** usant la propietat que, si f és una funció el·líptica, llavors f'/f també ho és. Per tant, el primer resultat prové d'aplicar **(1)** tenint en compte que els pols de f'/f és la unió dels zeros i els pols de f. Per veure el segon resultat, notem que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_a \frac{ord_a(f)}{z-a} + g(z)$$

on g és una funció holomorfa. Si multipliquem per la funció $z = (z-a) + a$ obtenim:

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_a \frac{ord_a(f)}{z-a} + h(z),$$

on $h(z) = g(z) + \sum_a ord_a(f)a$ és holomorfa. Ara, pel teorema dels residus, obtenim

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial P} z\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{a\in P\setminus\partial P} ord_a(f)a.$$

Només falta veure que la integral de la banda esquerra es troba dins de Λ. No ho farem en tot detall, però es tractaria de dividir la integral en la suma de les integrals sobre cada costat del paral·lelogram fonamental, tenint en compte l'orientació dels costats. Si es fan els càlculs, es pot obtenir que efectivament la integral pertany a Λ.
Finalment, per veure **(3)**, definirem $g(z) = f(z) - c$ on c és un nombre complex arbitrari. Llavors, el nombre de vegades que f pren el valor c es pot calcular com a

$$\sum_{a,g(a)=0} ord_a(g(z)) = -\sum_{a,g(a)=\infty} ord_a(g(z)) = -\sum_{a,f(a)=\infty} ord_a(f(z))$$

i pel primer resultat de **(2)** ja estem.

Definició 4.3. *Definim ara la funció $\wp$ de Weierstrass en $\mathbb{C}$ com*

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{\lambda\in\Lambda\setminus\{0\}}(\frac{1}{u-\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2})$$

Per $u \in \mathbb{C}\setminus\Lambda$, notem que la suma convergeix, ja que

$$\frac{1}{(u-\lambda)^2} - \frac{1}{u^2} = O(|\lambda|^{-3})$$

Per veure que la suma convergeix absolutament, podem comparar la suma per λ grans en el reticle amb la integral

$$\int_{|\lambda|>1} |\lambda|^{-3}dpdq$$

on $\lambda = p + iq$.

Lema 4.4. *$\wp$ és una funció el·líptica amb pols en Λ, on l'ordre del pol és 2 i el residu és zero. A més a més, és una funció parella i $\wp'$ és una funció el·líptica senar amb pols en Λ d'ordre 3 i residu zero.*

La periodicitat de $\wp'$ està clara (i també el fet que és una funció imparella), és a dir, que és una funció el·líptica, i també podem observar fàcilment que $\wp$ és una funció parella. Per tant, la derivada de l'aplicació $z \mapsto \wp(z) - \wp(z + \lambda_i)$ és 0, on λ_i són els complexos que defineixen Λ. És a dir, que l'aplicació és constant, i usant el fet que $\wp$ és parella i posant $z = \lambda_i/2$, obtenim que $\wp$ també és Λ-periòdica, és a dir, que també és una funció el·líptica.
$\deg \wp' = 3$ i podem observar que $\frac{\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_2}{2}, \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$ són tres zeros diferents mod Λ. Aleshores, com que sabem que $\wp'$ té un únic pol mod Λ i aquest pol té ordre 3, pel teorema anterior, ja que pren 3 vegades ∞, ha de prendre tres vegades el 0, per tant, té només aquests tres zeros.

Teorema 4.5. *Sigui $X = \mathbb{C}/\Lambda$ i sigui $\wp$ la funció de Weierstrass associada al reticle Λ. Llavors tenim,*
(1) *Tota funció el·líptica parella F amb pols com a màxim en Λ pot ser expressada de forma única com a $F(z) = f(\wp(z))$, on f és un polinomi de grau* $\deg(F)/2$.

(2) *De forma més general, tota funció el·líptica parella F pot ser expresada de forma única com a $F(z) = h(\wp(z))$, on h és una funció racional $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$.*

(3) *Per a tota funció el·líptica F, hi ha únics h_i funcions racionals tal que,*

$$F(z) = h_1(\wp(z)) + h_2(\wp(z))\wp'(z)$$

Per veure **(1)**, notem que podem suposar que F no és constant i que té un pol a $z = 0$. Usant l'expansió en series de Laurent, obtenim que $F(z) = \sum_{i \geq -d} c_{2i} z^{2i}$ on $d = \deg(F)/2$. Llavors la funció $\tilde{F}(z) := F(z) - c_{-2d}\wp(z)^d$ és una funció el·líptica parella amb pols com a molt en Λ. Per tant, usant inducció obtenim el polinomi de grau d.
Per tal de veure **(2)**, suposem que a no pertany a Λ però que és un pol de la funció el·líptica F. Ja que els únics pols de la funció de Weierstrass són punts del reticle, tenim que $\wp(a) \neq \infty$, per consegüent, $\wp(z) - \wp(a)$ és una funció el·líptica parella que s'anul·la en a. Llavors, per N suficientment gran, podem definir $F_1(z) := (\wp(z) - \wp(a))^N F(z)$ que no tindrà un pol en a. Si tenim més pols que no pertanyen al reticle, podem repetir el procediment i podem obtenir

$$F_n(z) = F(z) \prod_{i=1}^{n} (\wp(z) - \wp(a_i))^{N_i},$$

on els a_i són els n pols pels quals hem fet el procediment n vegades. Ara bé, podem observar que $F_n(z)$ ja no té pols que no estiguin al reticle (si ja no hem de tornar a repetir el procediment) , és a dir, per **(1)**, podem expresar $F_n(z) = f(\wp(z))$ per algun polinomi f. Dividint pel producte, obtenim $F(z)$ com a funció racional de $\wp(z)$.

Finalment, veurem **(3)** escrivint $F(z) = \frac{F(z) + F(-z)}{2} + \frac{F(z) - F(-z)}{2}$ i observant que la primera és una funció el·líptica parella (per tant, podem trobar-ne una expressió polinòmica de $\wp$) i la segona és una funció el·líptica imparella i, multiplicant per $\frac{\wp'(z)}{\wp'(z)}$, podem obtenir l'expressió desitjada.

Un cop arribats a aquest punt, podem anunciar finalment el corol·lari que ens donarà la nostra implicació de tor complex a corba el·líptica per finalitzada.

Corol·lari 4.6. *Tenim que* $(\wp(z))^2 = f(\wp(z))$ *per el polinomi cúbic* f *donat per*

$$f(x) = 4(x - \wp(\frac{\lambda_1}{2}))(x - \wp(\frac{\lambda_2}{2}))(x - \wp(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}))$$

Com a conseqüència, la superfície de Riemann $\mathbb{C}/\Lambda$ *és isomorfa a la corba el·líptica donada a partir del polinomi* f*.*

Anem a veure-ho. Com que $(\wp'(z))^2$ és una funció el·líptica parella, notem que, gràcies al teorema anterior, ha d'existir un polinomi cúbic f tal que $(\wp(z))^2 = f(\wp(z))$.
Per comprovar la forma específica del polinomi, notem que la funció el·líptica

$$h(z) = (\wp'(z))^2 - 4(z - \wp(\frac{\lambda_1}{2}))(z - \wp(\frac{\lambda_2}{2}))(z - \wp(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}))$$

només pot tenir pols a punts del reticle. Si fem l'expansió en sèries de Laurent tenim:

$$\wp(z) = z^{-2} + \dots$$
$$\wp'(z) = -2z^{-3} + \dots$$

Per tant, els pols d'ordre 6 dels dos sumands de h es cancelen. Llavors, tenim que $ord_0(h) \geq -4$ (h és parella). Com que h no té pols fora del reticle, aleshores o és constant o pren cada valor exactament 4 vegades (comptant multiplicitat), però sabem que $\frac{\lambda_1}{2}, \frac{\lambda_2}{2}$ i $\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$ són zeros de h i cada un d'ells almenys d'ordre 2 perquè h és parella. En altres paraules, la multiplicitat del valor 0 és almenys 6, per tant, $h \equiv 0$. És a dir, el polinomi cúbic és de la forma que hem afirmat.

En definitiva, hem aconseguit una aplicació holomorfa

$$\varphi_0 : X \setminus \{0\} \to E_0 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 | y^2 = f(x)\}$$
$$z \longmapsto (\wp(z), \wp'(z))$$

La composició d'aquesta aplicació amb la projecció al factor x de E_0 es pot extendre a l'aplicació holomorfa

$$\wp : X \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

Fem notar que la funció de Weiertrass agafa cada valor dues vegades i, com hem vist al **Capítol 2**, compactificant obtenim que la corba el·líptica és un recobriment de l'esfera de Riemann de grau 2. Per tant, si tenim l'esfera de Riemann, el grau 2, la monodromia definida al **Capítol 2**, obtenim, pel teorema d'existència de Riemann, que hi ha una única superfície de Riemann X' i una única aplicació holomorfa $F : X' \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ mòdul equivalència de superfícies de Riemann. Com que tenim dues superfícies de Riemann i dues aplicacions holomorfes, notem que han de ser equivalents. Per tant, $X = \mathbb{C}/\Lambda$ ha de ser equivalent com a superfície de Riemann a la corba el·líptica E.
Per tant, ja hem vist la implicació del treball que volíem en aquest capítol.

5 De superfície de Riemann de gènere 1 a $\mathbb{C}/\Lambda$

Als dos últims capítols, hem vist que una corba el·líptica és equivalent, com a superfície de Riemann, a $\mathbb{C}/\Lambda$ i viceversa. A més, també vam veure al **Capítol 2** que una corba el·líptica és equivalent a una superfície de Riemann compacta de gènere 1. Com es pot observar, per completar el *triangle* de conceptes plantejat a la introducció, només ens falta demostrar que una superfície de Riemann compacta de gènere 1 és equivalent a una corba el·líptica o a un tor complex. Podriem seguir qualsevol dels dos camins però en aquest treball demostrarem que és equivalent a un tor complex i deixarem l'altre camí per composició del resultat d'aquest **Capítol 5** i al resultat vist al **Capítol 4**. En particular, un cop vist que és un tor complex, podrem usar el **Capítol 4** i veure que és equivalent a una corba el·líptica.
Recordem que, en realitat, per fer aquest altre camí necessitaríem el *Teorema de Riemann-Roch*, però , malhauradament, no podrem veure'l en aquesta memòria.

Notem que no estem comentant, altre cop, la implicació de tor complex a superfície de Riemann de gènere 1. Aquesta implicació també surt per la combinació d'arguments anteriors (observant el triangle de conceptes), però, tot i així, podem observar que és un simple exercici: hem vist al **Capítol 2** que $\mathbb{C}/\Lambda$ és una superfície de Riemann compacta; per tant, només caldria veure que el seu gènere és 1. Podem obtenir-ho fàcilment calculant la dimensió del primer grup de cohomologia de de Rham i fer servir la fórmula obtinguda al **Capítol 3** per tal d'obtenir el gènere ($\mathbb{C}/\Lambda$ és una superfície orientable).

De tota manera, centrem-nos en el que ens interessarà en aquest capítol: com arribar de superfície de Riemann compacta de gènere 1 a tor complex. Per veure-ho, usarem principalment el que anomenarem *Teorema principal de les superfícies de Riemann compactes.* Aquest teorema té una demostració molt llarga i no en podrem donar tot el detall però, més endavant, intentarem donar el màxim d'idees possibles per tal d'intuir-ne una demostració (inclourem la demostració detallada a l'**Annex**).

Tanmateix, abans d'anunciar-lo, necessitarem la introducció d'alguns conceptes previs; l'*operador de Laplace, les funcions harmòniques* i la *norma de Dirichlet.*
Per tant, tornem enrere un moment i parlem, altre cop, de 1-formes holomorfes i els conceptes amb els quals hem treballat al **Capítol 3**.

5.1 L'operador de Laplace i funcions harmòniques

En una superfície de Riemann, tenim el següent operador diferencial de segon ordre. Aquest operador serà bàsic en l'enunciat del *Teorema Principal.*

Definició 5.1. *En una superfície de Riemann, definim l'operador de Laplace com a*

$$\Delta = 2i\overline{\partial}\partial : \Omega^0 \to \Omega^2$$

En coordenades locals,

$$\Delta f = 2i\frac{1}{4}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})f(dzd\overline{z}) = -(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2})dxdy$$

Nota: Observem que si en unes coordenades locals determinades, identifiquem una 2-forma amb una funció usant la forma d'àrea $dxdy$, Δ esdevé precisament l'operador de

Laplace conegut. Per tant té sentit el nom que hem donat a Δ encara que potser fent un abús de notació.

Definició 5.2. *D'una funció f que satisfaci l'equació diferencial $\Delta f = 0$ se'n diu funció harmònica.*

Si f és una funció harmònica, notem que les parts reals i imaginàries de f són harmòniques, ja que

$$\overline{\partial}\partial(f \pm \overline{f}) = -\partial\overline{\partial}f \pm \overline{\overline{\partial}(\overline{\partial}f)} = 0 \pm 0 = 0$$

Per veure el sentit contrari podem fer notar el següent lema.

Lema 5.3. *Si tenim una funció harmònica real ϕ en un entorn N d'un punt $p \in X$ amb X una superfície de Riemann. Llavors, hi ha un entorn obert $U \subset N$ de p i una funció holomorfa f en U amb $\phi = Re(f)$.*

Podem observar que aquest resultat és bastant similar al conegut per a funcions holomorfes en entorns oberts de $\mathbb{C}$ com vam veure en anàlisi complexa, ja que estem treballant amb coordenades locals. Tot i així, podem mostrar com funciona la demostració en la nostra notació:
Considerem A una 1-forma real $i\overline{\partial}\phi + \overline{(i\overline{\partial}\phi)}$. Aleshores, la hipòtesi que ϕ és harmònica ($\overline{\partial}\partial\phi = 0$) ens diu que $dA = 0$. Llavors, per a un entorn obert de p que anomenarem U, podem trobar una funció ψ definida en U tal que $A = d\psi$ (ja que, en parcticular, $H^1(U) = 0$ i tenim una 1-forma $A \in Ker(d)$, per tant, $A \in Im(d : \Omega^0 \to \Omega^1)$).
En altres paraules, $\partial\psi = -i\partial\phi$ i $\overline{\partial}\psi = i\overline{\partial}\phi$. Llavors,

$$\overline{\partial}(\phi + i\psi) = \overline{\partial}\phi + i\overline{\partial}\psi = 0$$

és a dir que si prenem $f = \phi + i\psi$, obtenim el resultat que buscàvem en aquest lema.

Lema 5.4. *Sigui ϕ una funció harmònica real no constant en un obert connex U d'una superfície de Riemann X. Així doncs, per a $x \in U$, hi ha un altre punt $x' \in U$ tal que $\phi(x') > \phi(x)$.*

Ho podem veure escrivint ϕ a prop de x com la part real d'una funció holomorfa i fent servir que les aplicacions holomorfes són aplicacions obertes (envien oberts a oberts).

5.2 La norma de Dirichlet

Sigui X una superfície de Riemann i sigui α una (1,0)-forma en X. Considerem la 2-forma $i\alpha \wedge \overline{\alpha}$. En una coordenada local $z = x + iy$, si l'expressió de α en la coordenada local és $\alpha = pdz$, llavors

$$i\alpha \wedge \overline{\alpha} = i|p|^2 dz d\overline{z} = 2|p|^2 dxdy$$

Per tant, la nostra 2-forma és en realitat una 2-forma positiva. És a dir, podem fer integració sobre ella i podem definir la norma,

$$||\alpha||^2 := \int_X i\alpha \wedge \overline{\alpha} \in [0, \infty]$$

Podem comprovar que, si α té suport compacte, llavors la integral és finita i, efectivament, defineix una norma en l'espai de (1,0)-formes de suport compacte.
Es pot observar que aquesta norma es deriva del producte

$$< \alpha, \beta >= \int_X i\alpha \wedge \overline{\beta}.$$

Si tenim una forma d'àrea ω en X, podem definir la nostra norma a partir de la funció

$$i\alpha \wedge \overline{\alpha} = |\alpha|^2 \omega$$

Aleshores, podem reescriure la nostra norma com

$$||\alpha||^2 = \int_X |\alpha|^2 \omega$$

Aquesta norma, llavors, ens és més familiar. Tot i així, volem remarcar que la "L^2-norma"no depèn de la tria de la forma d'àrea.
Podem identificar les 1-formes que hem vist al començament del **Capítol 3** amb les (1,0)-formes, gràcies a que podem enviar una 1-forma A al seu component (1,0): $A^{1,0}$. Per tant, notem que en realitat podem definir una norma en les 1-formes,

$$||A||^2 = 2||A^{1,0}||^2$$

Lema 5.5. *Siguin A, B 1-formes reals en una superfície de Riemann X. Llavors,*

$$\int_X |A \wedge B| \leq ||A|| \cdot ||B||$$

Aquest lema serà usat en les demostracions del *teorema principal* a l'**Annex**. Tot i així, no en veurem una demostració.

Definició 5.6. *Siguin f i g funcions reals i almenys una d'elles amb suport compacte en X, definim el producte intern de Dirichlet com a*

$$< f, g >_D = < df, dg >$$

Definició 5.7. *També podem definir la norma de Dirichlet com a*

$$||f||_D = ||df||$$

Tinguem en compte que aquesta norma segueix podent ser ∞.

Lema 5.8. *Siguin f i g funcions reals i almenys una d'elles amb suport compacte en la superfície X. Llavors,*

$$< f, g >_D = \int_X g\Delta f = \int_X f\Delta g$$

Veiem-ne la demostrció en la nostra notació de superfícies de Riemann.

$$< f, g >_D = < df, dg >= 2i \int_X \partial \wedge \overline{\partial} g = 2i \int_X \partial(f\overline{\partial} g) - f\partial\overline{\partial} g = \int_X f\Delta g,$$

on hem fet servir el teorema de Stokes per veure que $2i \displaystyle\int_X \partial(f\overline{\partial} g) = 0$.

5.3 Característica d'Euler i formes meromorfes

Abans d'endinsar-nos en la demostració principal d'aquest **Capítol 5**, ens interessa fer un petit estudi de la relació de la característica d'Euler (i per tant el gènere) amb les formes meromorfes en una superfície de Riemann.

Recordem primer de tot la definició que teníem de la característica d'Euler en altres assignatures. Donada una triangulació en una superfície, la característica d'Euler de la triangulació serà $\chi = V - A + C$ on V, A i C són el nombre de vèrtex, arestes i cares respectivament. Recordem també que hem vist en assignatures com ara *Topologia global de corbes i superfícies* que aquesta definició era independent de la triangulació i que podíem definir el gènere d'una superfície tancada i orientable com a $g = 1 - \chi(S)/2$. Aquesta definició del gènere, en realitat, coincideix amb la nostra definició del gènere d'una superfície de Riemann orientable vista al **Capítol 3**. Aquest fet resulta immediat assumint el teorema de classificació de superfícies.

Considerem S una superfície compacta orientable i sigui α una 1-forma real en S, sigui Δ el conjunt on α s'anul·la i suposem que aquest és discret. Sigui un punt $p \in \Delta$, escollim coordenades locals centrades en p, i representem α localment com a $\alpha = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2$. Per a un r petit, l'únic zero del vector (α_1, α_2) en el disc de radi r centrat a l'origen és el propi origen. Per tant, la restrició d'aquesta funció al cercle de radi r ens dóna una aplicació del cercle a $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ que té un nombre enter com a índex. Es pot comprovar que aquesta definició no depèn de la r escollida. Definim la multiplicitat $m_p(\alpha)$ del zero p de α com a aquest índex.

Proposició 5.9. *En la situació que acabem de descriure,*

$$\textstyle\sum_{p\in\Delta} m_p(\alpha) = -\chi(S).$$

Anomenarem la suma del costat esquerre la "suma del zeros de α comptats amb multiplicitats". Assumirem pel que fa a aquest treball que aquesta proposició es compleix, almenys per a qualsevol 1-forma diferenciable α amb un conjunt de zeros discret i tal que $\chi(S) = 2 - 2g$, on g és el gènere definit al **Capítol 3**.

5.3.1 Formes meromorfes i el gènere

Suposem ara que X és una superfície de Riemann compacta i que α és una 1-forma holomorfa en X que no és idènticament zero. Li associem la 1-forma real $A = \alpha + \overline{\alpha}$. En una coordenada local podem escriure α com a $\alpha = f(z)dz$. Els zeros d'A són els zeros de f, per tant, el conjunt de zeros és discret. La proposició de l'apartat anterior ens diu que el nombre de zeros comptats amb multiplicitat és $2g - 2$. En particular, notem que si $g = 0$ llavors no hi pot haver aquest α i que si $g = 1$ una forma holomorfa no trivial no s'anul·la enlloc.

Podem extendre aquesta discussió a les formes meromorfes. Fixem una forma d'àrea ω en X. Aleshores, podem definir una mètrica hermitiana en T^*X',

$$\xi \wedge \overline{\xi} = |\xi|^2 \omega$$

Sigui ara α una 1-forma meromorfa en X, escollim una funció real ρ en $\mathbb{R}$ amb $\rho(t) = 1$ per a t petits i $\rho(t) = \frac{1}{t}$ per a t grans i definim $\tilde{\alpha}$ com a,

$$\tilde{\alpha} = \rho(|\alpha|^2)\alpha$$

lluny dels pols de α i $\tilde{\alpha} = 0$ en els pols. Localment, vora un pol d'α, tenim que,

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{|f(z)|^2} f(z) R dz = \frac{1}{f(z)} R dz,$$

on R és una funció diferenciable estrictament positiva determinada per la forma d'àrea ω. Per tant, $\tilde{\alpha}$ és diferenciable i els seus zeros són la unió dels zeros i els pols de α i, clarament, la multiplicitat dels zeros d'$\tilde{\alpha}$ (que corresponen als pols d'α) és igual a menys l'ordre del pol. Aleshores, tenim la següent proposició.

Proposició 5.10. *Si α és una 1-forma meromorfa no trivial en una superfície compacta de Riemann X, el nombre de zeros d'α menys el nombre de pols (comptant amb multiplicitat) és igual a $2g - 2$.*

5.4 Teorema principal per a superfícies de Riemann compactes

En aquest apartat, podrem enunciar finalment el *Teorema principal per a superfícies de Riemann compactes* i demostrar que una superfície de Riemann de gènere 1 és equivalent com a superfície de Riemann a un tor complex.
El procediment que seguirem serà el següent. En primer lloc, demostrar que a una superfície de Riemann de gènere 1 X hi podem trobar una 1-forma holomorfa que no s'anul·la enlloc. Per tant, usant el resultat vist al **Capítol 3**, tindrem que X és equivalent a $\mathbb{C}/\Lambda$ on Λ és un reticle.
És a dir, el que ens interessa és estudiar bé l'existència de 1-formes holomorfes en una superfície de Riemann. Per tal de veure-ho, usarem el que podríem considerar un cas particular de la *cohomologia de Dolbeault.*

5.4.1 Cohomologia de Dolbeault

Recordem que al **Capítol 3** hem vist els operadors diferencials ∂ i $\overline{\partial}$ en una superfície de Riemann X, i havíem vist, mitjançant un diagrama, que aquests poden ser aplicats a funcions holomorfes (Ω^0) o a (0,1)-formes i (1,0)-formes ($\Omega^{0,1}$ i $\Omega^{1,0}$ respectivament). Usant el diagrama mencionat, podem obtenir els següents grups que anomenarem de cohomologia.

$$\begin{aligned} H_X^{0,0} &= ker\overline{\partial} : \Omega^0 \to \Omega^{0,1} \\ H_X^{1,0} &= ker\overline{\partial} : \Omega^{1,0} \to \Omega^2 \\ H_X^{0,1} &= coker\overline{\partial} : \Omega^0 \to \Omega^{0,1} \\ H_X^{1,1} &= coker\overline{\partial} : \Omega^{1,0} \to \Omega^2 \end{aligned}$$

Podem observar que els espais $H_X^{0,0}$ i $H_X^{1,0}$ són els espais de funcions holomorfes i 1-formes holomorfes respectivament. Però no tenim una idea tan clara del que representen els altres dos grups.

De fet, el grup $H_X^{0,1}$ apareix quan intentem construir funcions meromorfes. Anem a veure-ho.
Sigui p un punt de X, ens preguntem si hi ha una funció meromorfa en X amb un pol simple en p. Notem que, en realitat, ja sabem la resposta, perquè hem vist que la resposta serà afirmativa si i només si X és equivalent a l'esfera de Riemann. Així que, més aviat, el que hauríem de preguntar-nos és: donat X, com podem saber si X és equivalent a l'esfera de Riemann?

Si considerem z una coordenada local al voltant de p, llavors $\frac{1}{z}$ pot ser considerada com una funció meromorfa en un entorn de U. Introduïm una *cut-off function* β com a una funció diferenciable amb suport en U i igual a 1 prop de p. Llavors, $\beta\frac{1}{z}$ pot ser vista com una funció en $X \setminus \{p\}$, que l'extenem a 0 fora de U. Trobar una funció meromorfa amb un pol en p és equivalent a trobar una funció diferenciable g en X tal que $g + \beta\frac{1}{z}$ és holomorfa en $X \setminus \{p\}$.
Ara bé, si considerem

$$A = \overline{\partial}(\beta\frac{1}{z}) = (\overline{\partial}\beta)\frac{1}{z}$$

podem observar que té suport compacte (ja que β és igual a 1 prop de p). Per tant, podem veure A com una $(1,0)$-forma en X que s'exté en p amb 0. Per tant, el nostre problema és equivalent a solucionar l'equació

$$\overline{\partial}g = -A$$

per l'element donat $A \in \Omega_X^{0,1}$ i $g \in \Omega_X^0$ desconeguda. Per definició, la solució existeix si i només si la classe de A en el quocient $H_X^{0,1} = coker\overline{\partial} = \Omega^{0,1}/Im\overline{\partial}$ és zero (ja que serà zero si $A \in Im\overline{\partial}$). En particular, una solució sempre existirà si $H_X^{0,1} = 0$.
Encara que no existeixi una solució, la classe d'A és un element ben definit de $H_X^{0,1}$ associat a un punt p en X. Com que si ϕ és una funció diferenciable en $X \setminus \{p\}$ que restringida en un entorn de p és una funció meromorfa amb un pol en p, llavors, per a un $\lambda \in \mathbb{C}$, $\phi - \lambda\beta\frac{1}{z}$ es pot extendre a una funció diferenciable en X (holomorfa prop de p). És a dir que,

$$[\overline{\partial}\phi] = \lambda[A] \in H_X^{0,1}.$$

Suposem ara que tenim d punts diferents en X que anomenarem $p_1, \ldots, p_d$. Ens preguntem si podem trobar una funció meromorfa i no holomorfa en X amb pols solament en el conjunt de p_i. Usant el mateix procediment anterior, obtenim que podem trobar tal funció holomorfa si podem trobar escalars tal que

$$\lambda_1[A_1] + \cdots + \lambda_d[A_d] = 0 \in H_X^{0,1}$$

Aquesta afirmació és deguda a que donada aquesta relació lineal, obtenim una funció meromorfa amb pols en els punts p_i tal que $\lambda_i \neq 0$.

Usant aquests arguments, obtenim el següent resultat.

Proposició 5.11. *Si $H_X^{0,1}$ té dimensió finita h, llavors donats $h+1$ punts qualsevols en X, hi ha una funció meromorfa no holomorfa en X amb pols simples en algun subconjunt del conjunt dels $h+1$ punts.*

Es pot comprobar que efectivament és així ja que, com hem vist, es pot obtenir una relació lineal entre $h+1$ elements qualsevols de $H_X^{0,1}$, i aquesta relació serà la condició que necessitàvem.

5.4.2 Teorema principal per a superfícies de Riemann compactes

Tots els arguments que hem usat fins ara han intentat il·lustrar el significat dels grups $H_X^{0,1}$ i $H_X^{1,1}$. Fins al moment, hem pogut formular el nostre problema a partir del grup $H_X^{0,1}$, però no hem arribat gaire lluny. Per tal d'estudiar el nostre problema més a fons, necessitarem el ja mencionat *Teorema principal de superfícies compactes de Riemann* (terminologia no estàndard).

Teorema 5.12. *Sigui X una superfície de Riemann compacta i connexa i sigui ρ una 2-forma en X, llavors hi ha una solució f de l'equació $\Delta f = \rho$ si i només si la integral de ρ sobre X és zero i la solució és única (mòdul addició d'una constant).*

La demostració la farem més endavant, tal i com hem mencionat anteriorment. De moment, veiem primer uns resultats que ens ajudaran a entendre perquè necessitem demostrar aquest teorema per passar de superfícies de Riemann compactes de gènere 1 a un tor complex.

5.4.3 De superfície de Riemann de gènere 1 a tor complex i altres conseqüències del teorema principal

Al començament d'aquest capítol, hem introduït el que podríem entendre com a cohomologia de Dolbeault i hem intentat il·lustrar el significat dels seus grups. Tot i així, no hem arribat gaire lluny. Intentem ara donar una relació entre aquesta cohomologia i la cohomologia de De Rham.
Tenim les següents aplicacions naturals:
• Una aplicació $\sigma : H^{1,0} \to \overline{H^{0,1}}$ induïda per $\alpha \mapsto \overline{\alpha}$.
• Una aplicació bilineal $B : H^{1,0} \times H^{0,1} \to \mathbb{C}$ definida per $B(\alpha, [\phi]) = \displaystyle\int_X \alpha \wedge \phi$.
Notem que està ben definida ja que si canviem el representant ϕ per $\phi + \overline{\partial} f$, la integral varia pel factor $\displaystyle\int_X \alpha \wedge \overline{\partial} f = -\int_X \overline{\partial}(f\alpha)$, que s'anul·la pel teorema de Stokes. Notem també que l'aparellament és no degenerat.
• Una aplicació $i : H^{1,0} \to H^1$ que es pot definir enviant 1-formes holomorfes a la seva classe de cohomologia.
• Una aplicació $\nu : H^{1,1} \to H^2$ que definim com a l'aplicació natural induïda per la inclusió $Im(\overline{\partial} : \Omega^{1,0} \to \Omega^2) \subset Im(d : \Omega^1 \to \Omega^2)$

Teorema 5.13. *Sigui X una superfície de Riemann compacta i connexa. Llavors es compleixen les següents afirmacions:*
1. L'aplicació σ indueix un isomorfisme de $H^{1,0}$ a $\overline{H^{0,1}}$.
2. L'aparellament B indueix un isomorfisme entre $H^{0,1} \cong (H^{1,0})^*$.

3. L'aplicació $H^{1,0} \oplus H^{0,1} \to H^1$ definida com a $(\alpha, \phi) \mapsto i(\alpha) + \overline{i(\sigma^{-1}(\phi))}$ és un isomorfisme.
4. L'aplicació $\nu : H^{1,1} \to H^2$ és un isomorfisme.

La demostració d'aquest teorema són conseqüències directes del teorema principal. Per veure que σ és exhaustiva, comencem amb una classe $[\phi] \in H^{0,1}$. Volem trobar un representant $\phi' = \phi + \overline{\partial} f$ tal que $\partial\phi' = 0$, ja que això voldrà dir que $\alpha = \overline{\phi'}$ és una 1-forma holomorfa i la classe de ϕ és $-\sigma(\alpha)$. Per tant, volem trobar una solució a l'equació

$$\partial\overline{\partial} f = -\partial\phi$$

Com que $\partial\overline{\partial} = \frac{1}{2} i\Delta$, pel teorema principal, podrem trobar una solució d'aquesta equació si la integral de $\partial\phi$ s'anul·la, i ho fa pel teorema de Stokes.
La composició de σ amb l'aparellament bilineal B és,

$$< \alpha, \beta >= \int_X \alpha \wedge \overline{\beta}$$

que sabem que és definida positiva. Per aquest motiu, σ ha de ser injectiva i B una aplicació dual. Com que si σ no fos injectiva, és a dir, no fos un isomorfisme, podríem trobar un α tal que l'aparellament amb β sigui 0 per a tot β, que contradiu el fet que l'aparellament és no degenerat.

De les dues afirmacions que falten, només en demostrarem la primera (és a dir l'afirmació 3.), ja que, de fet, l'afirmació 4. no la farem servir.
Per tal de veure que l'aplicació de 3. és un isomorfisme, usarem 1., que ens diu que σ és un isomorfisme. Si tenim un $(\alpha, \phi) \in H^{1,0} \oplus H^{0,1}$ tal que és enviat al 0 de H^1, llavors, per ser σ un isomorfisme i el conjugat de 0 és 0, tenim que α i ϕ han de ser 0 (en els seus grups respectius). Per tant, l'aplicació és injectiva. Ara, usant el resultat 2., obtenim que els generadors de $H^{1,0} \oplus H^{0,1}$ són els generadors de $H^{0,1}$ i $(H^{0,1})^*$ (que sabem que tenen dimensió igual). Per tant, la dimensió de la imatge de l'aplicació és la dimensió de H^1 i obtenim l' exhaustivitat.

Del teorema en podem extreure que tant $H^{1,0}$ com $H^{0,1}$ són espais vectorials complexos de dimensió g. Per tant, veiem que aquí entra en joc altre cop el gènere g com a invariant numèrica (i no només topològica) de la geometria complexa d'una superfície de Riemann.

Finalment, podem expresar alguns corol·laris com a conseqüència del teorema.

Corołari 5.14. *Qualsevol superfície de Riemann connexa de gènere* 0 *és equivalent a l'esfera de Riemann.*

Podem veure clarament que si X té gènere 0, llavors la dimensió de H^1 és 0 (és a dir que $H^1 = 0$). Per consegüent, pel teorema, $H^{0,1} = 0$. Com hem vist anteriorment, aquesta és condició suficient per tal que existeixi una funció meromorfa amb un únic pol simple, i com a conseqüència X serà equivalent a l'esfera de Riemann.

Finalment, podem donar el corol·lari que ens permetrà demostrar el pas de superfície de Riemann de gènere 1 a tor complex.

Corol·lari 5.15. *Qualsevol superfície de Riemann compacta de gènere* 1 *és equivalent a un tor complex* $\mathbb{C}/\Lambda$ *per a cert reticle* Λ.

Notem que si el gènere és 1 llavors la dimensió del primer grup de cohomologia és 2 i, per la tercera afirmació de l'anterior teorema, la dimensió de $H^{1,0}$ és 1. Per tant, notem que tenim una 1-forma holomorfa α no trivial. Falta veure que aquesta no s'anul·la enlloc: com que la nostra superfície és compacta i orientable, pels resultats vistos al **Capítol 5.3**, obtenim que α no pot tenir zeros (ja que al ser 1-forma holomorfa no té pols i $2g-2=0$ perquè $g=1$).
Per tant, hem trobat una 1-forma holomorfa que no s'anul·la enlloc i podem aplicar el resultat final del **Capítol 3** per tal de veure que ha de ser equivalent a un tor complex.

Observem que, encara que no ens interessi pels propòsits d'aquest capítol, podem donar un resultat més general.

Corol·lari 5.16. *Sigui* X *una superfície de Riemann compacte de gènere* g *i siguin* $p_1, \cdots, p_{g+1}$ *punts diferents en* X. *Llavors hi ha una funció meromorfa no constant en* X *amb pols en algun subconjunt del conjunt de punts* p_i.

Podem observar que aquest últim corol·lari es deriva directament del teorema i de la proposició anteriors.

5.5 Demostració del teorema principal

Finalment, en aquest apartat demostrarem exclusivament el teorema principal que hem introduït anteriorment. Notem que és l'únic que ens falta per demostrar la nostra implicació de superfícies de Riemann de gènere 1 a tor complex, ja que hem vist el corol·lari de l'apartat anterior (que assumia el teorema principal).

Com hem mencionat anteriorment, la demostració d'aquest teorema és molt llarga, però en aquest apartat intentarem explicar (o almenys donar una idea) de tots els conceptes involucrats i deixar la part més analítica de la demostració per a l'annex.

Podem fer notar que el teorema consisteix en les tres afirmacions següents:
- Si hi ha una solució de l'equació $\Delta\phi = \rho$, llavors la integral de ρ és zero.
- Si hi ha una solució, llavors aquesta és única mòdul l'addició d'una constant.
- Si ρ és una forma d'integral zero, llavors podem trobar una solució.

En realitat, la complicació de la demostració d'aquest teorema es troba en la tercera afirmació, ja que les dues primeres es poden veure fàcilment.
Notem que la primera afirmació prové del teorema de Stokes, ja que per a tot ϕ,

$$\int_X \Delta\phi = 2i \int_X \overline{\partial}\partial\phi = 2i \int_X d(\partial\phi) = 0.$$

La segona afirmació és equivalent a l'afirmació que les úniques funcions harmòniques (solucions de l'equació) són les constants. Encara que podriem veure aquesta afirmació a partir del *principi del mòdul màxim*, nosaltres usarem la *integral de Dirichlet*. Escrivim

$$\int_X |df|^2 = \int_X f\Delta f = 0$$

quan $\Delta f = 0$. Per tant, df s'anul·la a tot arreu en X. És a dir, f és constant.

Aleshores, ja tenim demostrades les dues primeres afirmacions i, com hem dit, la part llarga de la demostració serà la tercera afirmació. Per veure-la necessitarem mencionar un teorema molt important i conegut anomenat el *Teorema de representació de Riesz.*

5.5.1 Teorema de representació de Riesz

Com que voldrem usar l'integral de Dirichlet per veure la demostració, ens és útil estudiar els espais de Hilbert. Recordem que hem definit la norma i el producte intern de funcions de Dirichlet en la superfície X. Tant la norma com el producte són invariants respecte a constants. Per tant, sigui $C^\infty(X)/\mathbb{R}$ l'espai vectorial que obtenim al dividir per les funcions constants, la norma i el producte descendeixen en aquest quocient.

Proposició 5.17. *La norma de Dirichlet i el producte intern fan que $C^\infty(X)/\mathbb{R}$ sigui un espai pre-hilbertià.*

Fem notar primer que a nivell notacional sovint confondrem una funció en X i la seva classe d'equivalència en $C^\infty(X)/\mathbb{R}$. Això és degut al fet que si fixem una mètrica (una forma d'àrea) en X, podem identificar $C^\infty(X)/\mathbb{R}$ amb l'espai de funcions en X d'integral zero.

Anem a veure però la demostració de la proposició. Suposem que ρ és una 2-forma en X. Per a totes funcions ϕ, ψ en X, tenim

$$\int_X \psi(\rho - \Delta\phi) = \int_X \psi\rho - \int_X \psi\Delta\phi = \int_X \psi\rho - \int_X \bigtriangledown\phi \bigtriangledown \psi = \int_X \psi\rho - < \phi, \psi >_D.$$

Notem que l'equació $\Delta\phi = \rho$ és equivalent a que per a tota funció ψ, $\displaystyle\int_X \psi(\rho - \Delta\phi) = 0$. Per tant, observant els càlculs anteriors, notem que és equivalent a,

$$\int_X \psi\rho =< \psi, \phi >_D,$$

per a tot $\psi \in C^\infty(X)$.
Podem defir $\tilde{\rho}$ com a

$$\tilde{\rho}(\psi) = \int_X \rho\psi.$$

Llavors, si la integral de ρ és 0, $\tilde{\rho}$ indueix una aplicació,

$$\tilde{\rho} : C^\infty(X)/\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

i el nostre problema és trobar un ϕ tal que $\tilde{\rho} =< \psi, \phi >_D$ per a tot ψ. Aquesta reformulació del resultat que volem aconseguir és deguda a que ara ens serà molt útil el teorema conegut com a *Teorema de representació de Riesz* de teoria d'espais de Hilbert.

Teorema 5.18. *Sigui H un espai real de Hilbert i sigui $\sigma : H \to \mathbb{R}$ una aplicació lineal acotada (és a dir que hi ha una constant C tal que $|\sigma(x)| \leq C||x||$ per a tot $x \in H$). Llavors hi ha una $z \in H$ tal que*

$$\sigma(x) =< z, x >,$$

per a tot $x \in H$.

Es notarà que ens estem endinssant en teoria d'espais de Hilbert, que no és precisament l'àrea que ens interessa aprofundir en aquest treball. Per aquest motiu, no veurem una demostració del teorema de representació de Riesz. Tot i així, la seva demostració es pot trobar en molts llibres d'anàlisi funcional.

Amb aquesta reformulació, notem que la demostració del teorema principal per a superfícies compactes de Riemann consistirà en dues parts. Primer ens interessarà poder aplicar el teorema de representació de Riesz, per tant, necessitem posar-nos en un context d'espai de Hilbert (i no solament d'espai pre-Hilbertià). Ens interessa treballar amb el que s'anomena *compleció* d'un espai pre-Hilbertià, però, altre cop, no entrarem en excessiu detall (recordem que ja hem mencionat que el nostre objectiu era donar almenys les idees principals de la demostració del teorema principal i no tant totes les parts amb tots els detalls). Sigui H la *compleció* del nostre espai pre-Hilbertià $C^\infty/\mathbb{R}$ sota la norma de Dirichlet, un punt de H és una classe d'equivalència de sèries de Cauchy (ψ_i) sota la relació d'equivalència $(\psi_i)\sim(\psi_i')$ si $||\psi_i - \psi_i'||_D \to 0$.
El que necessitem saber principalment és el següent teorema (que, almenys per ara donarem per assumit):

Teorema 5.19. *$\tilde{\rho} : C^\infty(X)/\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és acotat. És a dir, hi ha una constant C tal que $|\tilde{\rho}(\psi)| \leq C||\psi||_D$ per a tot ψ en $C^\infty(X)/\mathbb{R}$.*

D'aquest teorema n'obtenim que $\tilde{\rho}$ es pot extendre a una aplicació lineal acotada de H a $\mathbb{R}$ (que denotarem encara com a $\tilde{\rho}$). Aquest fet és degut al fet que per a tota sèrie de Cauchy (ψ_i) en $C^\infty(X)/\mathbb{R}$, la sèrie $\tilde{\rho}(\psi_i)$ és Cauchy en $\mathbb{R}$, per tant, podem definir la extensió prenent el límit.

Com que hem obtingut un espai de Hilbert H, llavors podem aplicar el teorema de representació de Riesz i obtenim que existeix un ϕ en H amb $\tilde{\rho}(\psi) =< \phi, \psi >_D$ per a tot ψ. Anomenarem un ϕ d'aquest tipus *solució feble* del nostre problema.

La segona part de la demostració del teorema principal, serà demostrar el següent teorema.

Teorema 5.20. *Si ρ és una 2-forma diferenciable en X d'integral 0, llavors una solució feble ϕ en H d'equació $\tilde{\rho} =< \psi, \phi >_D$ és diferenciable. És a dir, es troba dins del subconjunt $C^\infty(X)/\mathbb{R}$ de H.*

Per tant, com hem anat argumentant, el que ens falta per veure són les demostracions d'aquests dos últims teoremes. No les inclourem dins d'aquest capítol sinó que les inclourem en l'**Annex**, ja que la demostració és de caire fortament analític i ens desviaríem excessivament del nostre punt de mira que són les superfícies de Riemann. En definitiva, en aquest capítol donem per finalitzada la demostració del teorema principal, i, com a conseqüencia, del principal objectiu d'aquest capítol: veure que una superfície de Riemann compacta de gènere 1 és equivalent a un tor complex.

6 Llei de grup

Finalment, ja hem vist totes les equivalències entre corbes el·líptiques, superfícies de Riemann de gènere 1 i tors complexos.

Per acabar, l'última cosa que ens falta veure és la propietat mencionada a l'**Introducció** que s'anomena la *llei de grup*. Per tal de veure-la plantegem el següent problema.
Un tor complex és, additivament parlant, un grup, i, de fet, és un grup abelià. Però, com hem vist durant els últims capítols, una corba el·líptica és equivalent com a superfície de Riemann a un tor complex. Per tant, és lògic preguntar-se de quina forma podem veure una corba el·líptica com a grup abelià. Aquí és on entra en joc la llei de grup.

Abans d'endinsar-nos a veure-la, cal fer notar al lector que el nostre objectiu és donar el concepte darrere d'aquesta llei de grup (ja que sembla una pregunta natural que sorgeix al haver demostrat que tor complex i corba el·líptica són conceptes equivalents). En cap cas pretenem definir detalladament tots els conceptes que impliquen el llenguatge que usarem. Ens recolzem fortament en coneixements de corbes algebraiques, que es poden estudiar a l'assignatura *Geometria Algebraica*.

Recordem que a l'introduir les corbes el·líptiques hem parlat de corba afí i projectiva sense donar un enfoc gaire geomètric. El concepte en si de corba algebraica és similar al que vam definir per a corba el·líptica, així que ens prendrem la llibertat de tractar amb aquest vocabulari.

Definició 6.1. *Donada una corba algebraica C, direm que és una cúbica si el polinomi que la defineix és un polinomi cúbic.*

Definició 6.2. *Donada una corba algebraica C, direm que és una corba irreductible si el polinomi que la defineix és un polinomi irreductible.*

Notem que, en particular, una corba el·líptica és una cúbica irreductible. Cal fer notar, també, que havíem dit que de la irreductibilitat del polinomi f en la definició de corba el·líptica (definida per $P(w,z) = w^2 - f(z)$) n'obtenim que no hi ha cap punt on totes tres derivades parcials s'anul·lin. D'aquest fet, encara que no l'hem definit pròpiament, se'n diu que la cúbica no sigui singular (és a dir que no tingui cap punt singular).

Donades dues corbes projectives, podem obtenir els seus punts d'intersecció fàcilment a través de la resolució d'un sistema (notem que al treballar amb corbes projectives treballem amb polinomis homogenis, per tant, en el cas de la corba el·líptica, treballem amb el nostre polinomi homogeneïtzat). Tot i així, hi ha dos resultats molt importants dels quals no en veurem una demostració: el *Teorema dèbil de Bézout* i el *Teorema de Bézout.*

Teorema 6.3. *Considerem κ un cos infinit i $F, G \in \kappa[x_0, x_1, x_2]$ polinomis homogenis de graus d i e respectivament. Si F i G són coprimers, llavors $\sharp(V(F) \cap V(G)) \leq d \cdot e$ (on $V(F)$ i $V(G)$ són les corbes que defineixen els polinomis F i G respectivament).*

Aquest teorema s'anomena *Teorema dèbil de Bézout*, però, de fet, hi ha un teorema que ens diu que aquesta desigualtat és en realitat una igualtat comptant multiplicitats d'intersecció (*Teorema de Bézout*).

Recordem altre cop que no en veurem una demostració. De totes maneres, es tracta de demostracions fetes a l'assignatura de *Geometria Algebraica*, i, per a detalls més explícits, es pot trobar a diversos llibres de geometria algebraica com ara el llibre *Algebraic Curves* de *Fulton*. Pel que fa al teorema de Bézout (és a dir, no solament al dèbil), necessitariem introduir el concepte de multiplicitat d'intersecció entre corbes algebraiques i suposaria un volum de teoria que no podríem assolir en aquesta memòria. Ens prendrem la llibertat de suposar que sabem el resultat obtingut pel teorema encara que solament donem una idea del concepte de multiplicitat d'intersecció.
Per fer-nos-en almenys una idea farem una breu explicació. Podem pensar que si la multiplicitat d'intersecció entre una cúbica i una recta en un determinat punt és 2, llavors aquesta recta és tangent a la corba en aquest punt, i, si la multiplicitat és 3, llavors aquest punt és un punt d'inflexió. Per tant, si tenim dues corbes, calcular la multiplicitat d'intersecció seria com aproximar localment una corba i calcular la multiplicitat localment en cada punt (en concret, ens referim a les arrels de Puiseux). De totes maneres, no ens volem entretindre més amb aquest concepte. Notem que estem treballant amb una cúbica (la nostra corba el·líptica), per tant, no ens entretindrem a explicar altres multiplicitats més altes de 2 i 3.

Ara, però, podem observar que la intersecció de dues cúbiques serà de 9 punts (comptant multiplicitats).

Definició 6.4. *Considerem F i G corbes projectives planes de graus m i n respectivament sense components comuns (els seus polinomis no tenen components comuns). Llavors, definim el cicle d'intersecció com la "suma ponderada"*

$$F \cdot G = \sum_{p \in F \cap G} I(p, F \cap G)p,$$

on $I(p, F \cap G)$ és la multiplicitat de p en la intersecció.

Per tal de demostrar la llei de grup necessitarem el següent resultat.

Proposició 6.5. *Considerem C una cúbica irreductible i C', C'' cúbiques. Suposem ara que $C' \cdot C = \sum_{i=1}^{9} p_i$, on els p_i són punts simples (no necessàriament diferents) de C i suposem que $C'' \cdot C = \sum_{i=1}^{8} p_i + Q$. Llavors, $Q = p_9$.*

Sigui L una recta que passi per p_9 i que no passi per Q, aleshores $L \cdot C = p_9 + R + S$ per a certs punts R, S de la cúbica. Amb uns instants de reflexió, observem que el cicle d'intersecció de C amb la unió de L i C'' (que denotarem per $LC'' \cdot C$) és $LC'' \cdot C = C' \cdot C + Q + R + S$. Com que el cicle d'intersecció de C amb la unió d'una cúbica i una recta ens dona el cicle d'intersecció de C amb una cúbica i $Q + R + S$, hi ha d'haver una recta L' tal que $L' \cdot C = Q + R + S$. Però, com que L i L' tallen a la cúbica en dos punts iguals i després en un tercer punt p_9 i Q respectivament, tenim que aquests dos punts han de ser iguals. És a dir, que $p_9 = Q$.

6.1 Addició en una cúbica i llei de grup

Considerem una corba no singular, per exemple, la nostra corba el·líptica E. Per a dos punts qualsevol P i Q hi ha una única recta L tal que $L \cdot E = P + Q + R$ per a algun punt $R \in E$ (si $P = Q$, llavors L és tangent a E al punt P). Definim ara l'operació

$$\varphi : E \times E \to E,$$

on $\varphi(P,Q) = R$.

Podríem entendre φ com una *addició* en la nostra corba el·líptica, però ens falta la identitat. Per tal de solucionar aquest problema, escollim un punt que anomenarem 0 en E. Llavors, definim l'addició en la corba com a

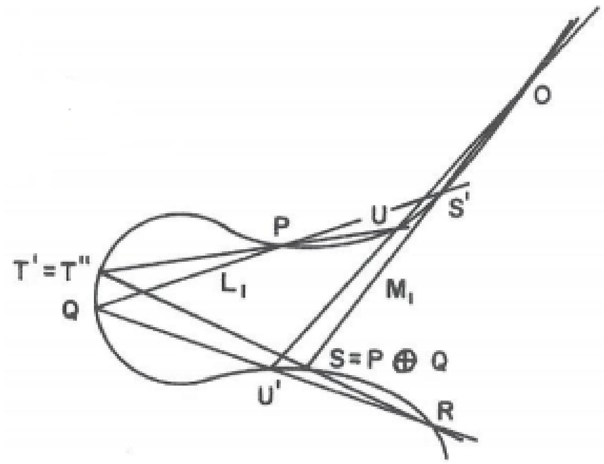
$$P \oplus Q = \varphi(0, \varphi(P,Q))$$

Finalment, ja podem anunciar la proposició que coneixerem com a *llei de grup* en el nostre cas de corba el·líptica.

Proposició 6.6. *La corba E amb l'addició $\oplus$ és un grup abelià on 0 n'és la identitat.*

Notem que, clarament, si tenim P i Q d'E, $P \oplus Q \in E$, ja que l'addició és un càlcul d'intersecció de rectes amb la corba E. La commutativitat també és clara per definició. L'element neutre és el 0 i l'element invers d'un punt P és el punt que anomenarem $-P$ tal que $\varphi(P,-P)$ sigui el punt d'intersecció entre la corba i la recta tangent al 0.

Solament ens falta l'associativitat. Fixem-nos en la següent imatge.



Considerem $L_1 \cdot E = P + Q + S'$, $M_1 \cdot E = 0 + S' + S$, $L_2 \cdot E = S + R + T'$ i considerem $M_2 \cdot E = Q + R + U'$, $L_3 \cdot E = 0 + U' + U$, $M_3 \cdot E = P + U + T''$. Observant la imatge, notem que $P \oplus (Q \oplus R) = \varphi(0, T')$ i $(P \oplus Q) \oplus R = \varphi(0, T'')$, per tant, el que hem de veure és que $T' = T''$.

Considerem les cúbiques C' i C'' on C' és la unió de les rectes L_1, L_2, L_3 i C'' és la unió de les rectes M_1, M_2, M_3. Ara podem aplicar la proposició anterior agafant la cúbica irreductible E (la nostra corba el·líptica) i les cúbiques C' i C'' i obtenim que $T' = T''$. En definitiva, hem vist la propietat d'associativitat de l'addició en la cúbica i hem demostrat la llei de grup.

7 Conclusions

En aquesta memòria hem aconseguit; introduir els conceptes de corbes el·líptiques i superfícies de Riemann i treballar amb algunes de les seves propietats, l'equivalència entre corbes el·líptiques, superfícies de Riemann de gènere 1 i tors complexos i, finalment, la llei de grup dins d'una corba el·líptica.

D'aquesta equivalència n'hem estat parlant durant tota la memòria, però, cal mencionar que, en realitat, el que hem fet és aconseguir demostrar un cas particular de teoremes importants com ara *Riemann-Roch* o el *teorema d'uniformització de Riemann*. Clarament, com que el tema central eren les corbes el·líptiques, no hem pogut parlar d'aquests teoremes més generals i amb aplicacions molt importants en l'àrea de la geometria algebraica i de les superfícies de Riemann. Tot i així, ens ha quedat una memòria molt completa que abarca l'introducció de les superfícies de Riemann i les corbes el·líptiques i en treu propietats molt interessants.

Una altra menció important a fer és que ens hem centrat en les corbes el·líptiques sobre els nombres complexos. L'estudi de les corbes el·líptiques sobre cossos no necessàriament algebraicament tancats dona lloc a resultats molt sorprenents. Com per exemple, l'estudi de les corbes el·líptiques sobre els nombres enters o racionals ens dona una demostració d'alguns primers casos del conegut *teorema de Fermat*. Per tant, com es pot observar, les corbes el·líptiques juguen un paper molt important en diverses branques de les matemàtiques i ens permeten tenir una visió panoràmica englobant diverses àrees com ara la geometria algebraica, la topologia, la teoria de nombres i l'anàlisi.

8 Annex

En aquesta secció inclourem algunes demostracions i càlculs que havíem deixat per més endavant. Primer farem el càlcul de la integral al intentar calcular la longitud d'arc d'una el·lipse i mostrarem que ens dona una integral el·líptica, com hem donat per fet a la memòria.

Llavors, demostrarem el **Lema 3.15** que parlava de la *partició de la unitat* i ens havia servit per definir la integral d'una 2-forma (recordem que havíem deixat la demostració per l'**Annex**).

Per últim, inclourem les demostracions dels dos teoremes que ens faltaven per veure en la demostració del teorema principal. D'aquesta manera, haurem, finalment, acabat la demostració de la memòria per complet.

8.1 Càlcul de la longitud d'arc d'una el·lipse

Procedirem a fer el càlcul de l'integral que havíem donat a l'**Introducció**. Recordem que teníem l'el·lipse $\{(acos(\varphi), bsin(\varphi)) \in \mathbb{R}^2 | \varphi \in \mathbb{R}\}$ i sigui $\varphi_0, \varphi_1 \in [0, \pi]$ i volíem calcular la longitud d'arc l del segment de l'el·lipse $\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1$. Havíem dit que la integral sortia de la forma

$$l = \tfrac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} \frac{1 - cx}{\sqrt{x(x-1)(1-cx)}} dx \text{ amb } x_i = x_i(\varphi_i) \in \mathbb{R} \text{ i } c = 1 - \tfrac{a^2}{b^2}.$$

Anem a comprovar-ho. Podem veure el càlcul a partir del cas bàsic on $\varphi_0 = 0$ i $\varphi_1 \in [0, \pi/2]$. La longitud d'arc l pot ser calculada com a

$$l(\varphi_1) = \int_0^{\varphi_1} \sqrt{(\frac{d}{d\varphi}(a\cos\varphi))^2 + (\frac{d}{d\varphi}(b\sin\varphi))^2 d\varphi} = \int_0^{\varphi_1} \sqrt{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi d\varphi} =$$
$$b \int_0^{\varphi_1} \sqrt{1 - (\frac{b^2 - a^2}{b^2}) \sin^2 \varphi d\varphi}.$$

Si anomenem c a $\dfrac{b^2 - a^2}{b^2}$ i fem el canvi de variable $t = \sin\varphi$, és a dir,

$$dt = \cos\varphi d\varphi$$
$$d\varphi = \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$$

tindrem que la integral serà

$$b \int_0^{\sin\varphi_1} \frac{\sqrt{1 - ct^2}}{\sqrt{1 - t^2}} dt.$$

Fent, altre cop, el canvi de variable $x = t^2$ ($dx = 2t\ dt$ i $dt = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$), tindrem la integral

$$\frac{b}{2} \int_0^{\sin^2\varphi_1} \frac{\sqrt{1 - cx}}{\sqrt{1 - x}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{b}{2} \int_0^{\sin^2\varphi_1} \frac{1 - cx}{\sqrt{x(x-1)(1-cx)}} dx,$$

que és la forma de la integral a la que volíem arribar.

8.2 Demostració del Lema 3.15

Primer recordem l'enunciat del lema en particular.

Lema 8.1. *Sigui K un subconjunt compacte d'una superfície S i siguin $U_1, \cdots, U_n$ conjunts oberts de S amb $K \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n$. Llavors hi han funcions diferenciables no negatives $f_1, \cdots, f_n$ a S, cadascuna amb suport compacte i el suport de f_i contingut a U_i, tal que $f_1 + \cdots + f_n = 1$ a K.*

Per tal de veure-ho començarem amb en cas en què $n = 1$, i, dins d'aquest cas considerem el cas especial en què $S = U_1$, aquest és el disc unitat en $\mathbb{R}^2$ i K és el disc tancat de radi $1/2$. Llavors, prenem la funció (no negativa) $f(x_1, x_2) = F(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})$, on F és una funció d'una variable amb $F(r) = 1$ per a $r \leq 1/2$ i $F(r) = 0$ per a $r \geq 3/4$, per exemple.

Considerem ara el cas general on $n = 1$. Per a cada punt $p \in K$, agafem una carta coordenada local que envia un disc D_p centrat a p al disc obert unitat en $\mathbb{R}^2$ i la clausura $\overline{D_p}$ al disc unitat tancat. Sigui $\frac{1}{2}D_p$ l'antiimatge del disc obert de radi $1/2$ en $\mathbb{R}^2$. Podem suposar (reescalant la carta coordenada) que la clausura de D_p es troba dins de U_1. El conjunt de discs oberts $\frac{1}{2}D_p$ on $p \in K$ forma un recobriment obert de K, per tant, podem trobar un subrecobriment finit (per ser K compacte) que correspon als punts $p_1, \cdots, p_N$. Per a cada $j \leq N$ tenim una funció g_j amb suport compacte a D_{p_j} i igual a 1 a la clausura de $\frac{1}{2}D_{p_j}$ (fent servir el cas especial anterior). Extenem g_j en el 0 per tal de veure-la com a una funció en S. Si definim g com a $g = \sum g_j$, aquesta té les següents propietats:
- $g \geq 1$ a K, ja que cada punt de K es troba en almenys un disc $\frac{1}{2}D_{p_j}$, al qual $g_j = 1$.
- g té suport compacte contingut a U_1, ja que el suport de g és la unió finita dels suports de g_j, que estan continguts en els discs compactes $\overline{\frac{1}{2}D_{p_j}} \subset U_1$.

Ara prenem una funció diferenciable no negativa H d'una variable tal que $H(t) = 1$ si $t \geq 1$ i tal que $H(t) = 0$ si $t \leq 1/2$. Llavors, $f_1 := H \circ g$ té la propietat desitjada ($f_1 = 1$ a K i el suport de f_1 és un conjunt compacte de U_1).

Un cop vist el cas inicial $n = 1$, considerem el cas general on $K \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n$. Fent el mateix procediment que en el primer cas, obtenim discs $\frac{1}{2}U_{p_i} \subset U_{p_i}$ per a $i = 1, \ldots, N$, on
- $K \subset \frac{1}{2}U_{p_i} \cup \cdots \cup \frac{1}{2}D_{p_N}$.
- per a cada j hi ha un $i(j)$ tal que el disc tancat (compacte) $\overline{D_{p_j}}$ està contingut a $U_{i(j)}$.

Ara, per a $i = 1, \ldots, N$, siguin

$$K_i = \bigcup_{i(j)=i} \overline{\frac{1}{2}D_{p_j}},$$
$$N_i = \bigcup_{i(j)=i} D_{p_i}$$
i
$$J_i = \bigcup_{i(j)=i} \overline{D_{p_j}},$$

llavors K_i i J_i són compactes, N_i és obert, tenim

$$K_i \subset N_i \subset J_i \subset U_i$$

i $K \subset \bigcup_i K_i$. Aplicant els arguments anteriors a cada $J_i \subset U_i$, trobem funcions diferenciables h_i en S amb $h_i = 1$ en J_i i amb h_i amb suport compacte en U_i. Per tant, si $h = \sum_{i=1}^{n} h_i$, tenim $h \geq 1$ en $J_1 \cup \cdots \cup J_n$. Sigui N el conjunt obert de S

$$N = N_1 \cup \cdots \cup N_n.$$

Aplicant, altre cop, els arguments anteriors podem trobar una funció A amb suport compacte en N i amb $A = 1$ en K. Per tant, $h \geq 1$ en el suport d'A, és a dir, la raó A/h s'exté a una funció diferenciable en S. Finalment, escrivim

$$f_i = \frac{Ah_i}{h}.$$

Aleshores, f_i té suport compacte en U_i i $\sum f_i = 1$ en K, ja que $A = 1$ allí.

8.3 Demostració del teorema principal

Abans d'endinsar-nos en la demostració, recordem, per un moment, els enunciats dels dos teoremes que volem demostrar.

Teorema 8.2. *$\tilde{\rho} : C^\infty(X)/\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és acotat. És a dir, hi ha una constant C tal que $|\tilde{\rho}(\psi)| \leq C||\psi||_D$ per a tot ψ en $C^\infty(X)/\mathbb{R}$.*

Teorema 8.3. *Si ρ és una 2-forma diferenciable en X d'integral 0, llavors una solució feble ϕ en H d'equació $\tilde{\rho} =< \psi, \phi >_D$ és diferenciable. És a dir, que es troba dins del subconjunt $C^\infty(X)/\mathbb{R}$ de H.*

Per veure el **Teorema 8.2** ens recolzarem en el càlcul de dues variables reals. Sigui Ω un conjunt acotat, convex i obert de $\mathbb{R}^2$ (considerarem un disc), sigui A l'àrea de Ω i d el seu diàmetre, llavors, tenim el següent teorema.

Teorema 8.4. *Sigui ψ una funció diferenciable real en un obert que contingui la clausura $\overline{\Omega}$ i sigui $\overline{\psi}$ la mitjana*

$$\overline{\psi} = \frac{1}{A} \int_\Omega \psi d\mu,$$

on $d\mu$ és la mesura de Lebesgue estàndard a $\mathbb{R}^2$. Aleshores, per a $x \in \Omega$, tenim

$$|\psi(x) - \overline{\psi}| \leq \frac{d^2}{2A} \int_\Omega \frac{1}{|x-y|} | \bigtriangledown \psi(y)| d\mu_y,$$

on la notació indica que la variable d'intgració és $y \in \Omega$.

Aplicant una translació, podem suposar que el punt x és l'origen de $\mathbb{R}^2$ i que $\psi(0) = 0$ (ja que podem cambiar ψ per l'addició d'una constant). Si treballem en coordenades polars (r, ϕ) estàndard al pla, podem escriure

$$\overline{\psi} = \frac{1}{A}\int_0^{2\pi}\int_0^{R(\phi)} \psi(r,\phi) r dr d\phi,$$

on $R(\phi)$ és la llargària de la part del *raig* a l'angle ϕ que cau a Ω (usem que Ω és convex). Si introduïm una altra variable radial obtenim, per a cada (r,ϕ),

$$\psi(r,\phi) = \int_0^r \frac{\partial\psi}{\partial\rho} d\rho,$$

ajudant-nos del fet que ψ s'anul·la a l'origen. Per tant, podem observar que tenim,

$$\overline{\psi} = \frac{1}{A}\int_0^{2\pi}\int_0^{R(\phi)}\int_{\rho=0}^{r} r\frac{\partial\psi}{\partial\rho} d\rho dr d\phi.$$

Intercanviant l'ordre de les integrals de r i ρ obtenim,

$$\overline{\psi} = \int_0^{2\pi}\int_{\rho=0}^{R(\phi)}(\int_{r=\rho}^{R(\phi)} r dr)\frac{\partial\psi}{\partial\rho} d\rho d\phi.$$

La integral entre parèntesi és

$$\int_{r=\rho}^{R(\phi)} r dr = \frac{1}{2}(R(\phi)^2 - \rho^2),$$

que és positiu i menor o igual que $R(\phi)^2/2$, i, per definició, $R(\phi) \leq d$. Per tant,

$$|\overline{\psi}| \leq \frac{d^2}{2A}\int_0^{2\pi}\int_0^{R(\phi)} \frac{1}{\rho}|\frac{\partial\psi}{\partial\rho}|\rho d\rho d\phi.$$

El mòdul de la derivada radial, és a dir $|\frac{\partial\psi}{\partial\rho}|$, és, com a màxim, el mòdul de la derivada $\nabla\psi$, per tant, canviant altre cop a una notació lliure de coordenades, obtenim

$$|\overline{\psi}| \leq \frac{d^2}{2A}\int_\Omega \frac{1}{|y|}|\nabla\psi_y| d\mu_y,$$

tal i com volíem veure.

Corołari 8.5. *Sota la mateixa hipòtesi que l'anterior teorema tenim,*

$$\int_\Omega |\psi(x) - \overline{\psi}|^2 d\mu_x \leq (\frac{d^3\pi}{A}^2)\int_\Omega |\nabla\psi|^2 d\mu.$$

Per tal de verure-ho, necessitarem introduir la noció de la *convulució* de funcions en $\mathbb{R}^2$. Siguin f i g funcions, definim la convulució com a

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} f(y)g(x-y) d\mu_y.$$

La convulució és commutativa i associativa i, si considerem una norma invariant per a translacions en $\mathbb{R}^2$, $\| \; \|_T$, llavors tenim

$$\|f * g\|_T \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_T,$$

on $\|f\|_{L^1}$ és la norma L^1 habitual $\|f\|_{L^1} = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} |f| d\mu$.

De fet, aquest fet és cert quan $\| \ \|_T$ és la norma L^2 següent,

$$\|g\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |g|^2 d\mu.$$

Un cop introduïda la noció de convulució, podem retornar a la prova del nostre corol·lari. Definim

$$K(x) = \frac{d^2}{2A} \frac{1}{|x|}, \text{ per a } |x| < d,$$

i definim $K(x) = 0$ per a $|x| \geq d$. Tot i que té una singularitat a l'origen, aquesta funció és integrable, i

$$\|K\|_{L^1} = 2\pi \frac{d^2}{2A} \int_0^d dr = \frac{d^3 \pi}{A}.$$

Si definim una funció g en $\mathbb{R}^2$ com a $g(y) = |\nabla \psi(y)|$ si $y \in \Omega$ i $g(y) = 0$ si no hi pertany, llavors la convulució $K * g$ és una funció positiva en el pla real i el **Teorema 8.3** ens diu que per a tot $x \in \Omega$,

$$|\psi(x) - \overline{\psi}| \leq |(K * g)(x)|.$$

Per tant,

$$\int_\Omega |\psi(x) - \overline{\psi}|^2 d\mu_x \leq \|K * g\|_{L^2}^2 \leq \|K\|_{L^1}^2 \|g\|_{L^2}^2 \leq (\frac{d^3 \pi}{A})^2 \|\nabla \psi\|_{L^2}^2,$$

tal i com volíem veure.

Un cop aconseguits aquests resultats podem demostrar el nostre **Teorema 8.2**. Començarem pel cas en què ρ té el suport en una sola carta coordenada en la nostra superfícies de Riemann , que identifiquem amb un conjunt acotat convex Ω en $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Treballant en aquest sistema de coordenades locals, usem la forma d'àrea de Lebesgue per tal d'identificar funcions amb 2-formes (recodem que podíem fer aquesta identificació si teníem una forma d'àrea). Aleshores, podem veure ρ com a una funció d'integral 0 amb suport en Ω. De la mateixa manera, una funció ψ en X pot ser vista com una funció en un entron de $\Omega \subset \mathbb{C}$ (que seguirem anomenant ψ), i, per tant, podem escriure

$$\tilde{\rho}(\psi) = \int_\Omega \rho \ \psi \ d\mu.$$

Com que la integral de ρ és zero, també tenim

$$\tilde{\rho}(\psi) = \int_\Omega \rho(\psi - \overline{\psi}) d\mu,$$

i, per la desigualtat de Cauchy-Schwartz,

$$| \int_{\Omega} \rho(\psi - \overline{\psi}) d\mu | \leq \|\rho\|_{L^2(\Omega)} \|\psi - \overline{\psi}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Fent servir el **Corol·lari 8.5**, podem obtenir que,

$$|\tilde{\rho}(\psi)| \leq C \|\nabla\psi\|_{L^2(\Omega)},$$

on $C = d^3 \pi A \|\rho\|_{L^2(\Omega)}$. Per acabar,

$$\|\nabla\psi\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla\psi\|_{L^2(X)} = \|\psi\|_D,$$

que és el que necessitàvem per acabar la demostració del **Teorema 8.2**.

Arribats a aquest punt, només ens falta demostrar el **Teorema 8.3**. Per tal de tractar amb una 2-forma en X, recordem del **Capítol 3** que la integració sobre X defineix un isomorfisme de $H^2(X)$ a $\mathbb{R}$, és a dir, podem escriure ρ com a $\rho = d\phi$ per a alguna 1-forma ϕ en X. Fixem un recobriment d'X que consisteixi en un nombre finit de cartes $U_\alpha \subset X$ del tipus considerat en aquests últims càlculs. Escollim una partició de la unitat subordinada a aquest recobriment i escrivim $\rho_\alpha = d(\chi_\alpha \phi)$. Llavors, cada ρ_α té suport en la carta coordenada corresponent U_α i

$$\int_X \rho_\alpha = \int_X d(\chi_\alpha \phi) = 0.$$

D'altra banda,

$$\rho = d\phi = d((\sum \chi_\alpha)\phi) = \sum \rho_\alpha.$$

Els arguments que hem fet anteriorment ens diuen que cada una de les aplicacions lineals $\tilde{\rho}_\alpha$ és acotat, i, per tant, $\tilde{\rho} = \sum \tilde{\rho}_\alpha$ també és acotat (ja que és una suma finita d'aplicacions lineals acotades).

8.3.1 El lema de Weyl

Sigui ϕ un element de H que és una solució feble del nostre problema (veure **Capítol 5.5.1**), llavors, en realitat, tenim una sèrie de Cauchy de funcions ϕ_i en X respecte la norma de Dirichlet i, per a qualsevol ψ,

$$< \phi, \psi > \rightarrow \tilde{\rho}(\psi) \text{ quan } i \text{ tendeix a infinit.}$$

Primer volem veure que aquest element *abstracte* ϕ pot ser idenificat amb una funció en X(mòdul una constant). Inicialment aquesta funció serà només localment L^2, és a dir, serà representada per una funció L^2 en qualsevol coordenada local.

Per tal d'aconseguir-ho, considerem una coordenada local fixada amb $\Omega \subset \mathbb{C}$ com abans. Podem suposar (després de canviar els ϕ_i per l'addició de les constants adecuades) que les integrals dels ϕ_i sobre Ω s'anul·len, i, llavors, pel **Corol·lari 8.5**, tenim

$$\|\phi_i - \phi_j\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\phi_i - \phi_j\|_D.$$

En conseqüència, els ϕ_i ens donen una sèrie de Cauchy en $L^2(\Omega)$ que convergeix a un límit L^2 (per completitud de L^2). Afirmem que aquesta sèrie convergeix localment sobre *tot* X. Anem a veure-ho. Sigui A el conjunt de punts $x \in X$ tal que hi ha una carta coordenada al voltant de x en què ϕ_i convergeix a ϕ en L^2, aleshores $A \neq \emptyset$. Aquest fet és degut als arguments fets i a que A és obert a X. Com que X és connex, el complement d'A no és obert (excepte si es el conjunt buit), per tant, tindrem que $A = X$ o hi ha un punt y que es troba en la clausura d'A però no en A. Però, en aquest segon cas, podríem trobar un entorn coordenat Ω' al voltant de y i una seqüència de nombres reals c_i' tals que $\phi_i - c_i'$ convergiria en L^2 sobre Ω'. Ara, per tant, tindríem un punt $x \in A \cap \Omega'$ i, en un entorn petit de x, tant ϕ_i com $\phi_i - c_i'$ convergirien en L^2, és a dir, que c_i' tendiria a 0 quan la $i \to \infty$. Per tant, obtenim que $y \in A$, que és una contradicció.

En definitiva, tenim una funció ϕ en X que és localment L^2 i que és una *solució feble* de l'equació $\Delta\phi = \rho$. Necessitem veure que ϕ és diferenciable. Com que la diferenciabilitat és una propietat local, podem fixar-nos en una sola carta coordenada, i, per tant, necessitarem una versió del lema conegut com a *lema de Weyl* com ens diu la següent proposició.

Proposició 8.6. *Considerem Ω un conjunt obert acotat a $\mathbb{C}$ i sigui ρ una 2-forma diferenciable en Ω. Suposem que ϕ és una funció L^2 en Ω tal que, per a qualsevol funció χ amb suport compacte en Ω,*

$$\int_\Omega \Delta\chi\phi = \int_\Omega \chi\rho.$$

Llavors, ϕ és diferenciable i satisfà l'equació $\Delta\phi = \rho$.

La demostració consistirà en diversos passos. El primer serà reduir el problema al cas en què ρ és zero. Com ja hem argumentat, ens serà suficient analitzant el problema en coordenades locals, és a dir, voldrem veure que ϕ és diferenciable sobre qualsevol conjunt interior donat Ω', on suposem que l'entorn de radi ϵ de Ω' està contingut a Ω. Llavors, podem escollir una ρ' igual a ρ en un entorn de la clausura de Ω' i de suport compacte a Ω.

Suposem que podem trobar una solució diferenciable ϕ' de l'equació $\Delta\phi' = \rho'$ sobre Ω. Llavors $\psi = \phi - \phi'$ serà una solució feble de l'equació $\Delta\psi = 0$ en Ω'. Si podem demostrar que ψ és diferenciable, aleshores ϕ també ho serà.

Per trobar una solució diferenciable ψ' farem servir el *potencial de Newton* en dues dimensions. És a dir, usarem

$$K(x) = \frac{1}{2\pi}\log|x|.$$

Clarament, aquest potencial no està definit en $x = 0$, però, tot i així, està definit com a una funció localment integrable en $\mathbb{C}$.
Per a qualsevol funció diferencibale de suport compacte en $\mathbb{C}$, la convulució

$$K * f(x) = \int K(y)f(x-y)d\mu_y$$

està definida i $K * f$ és diferenciable.

Lema 8.7. • *Si σ té suport compacte a $\mathbb{C}$, llavors $K * (\Delta\sigma) = \sigma$.*
• *Si f té suport compacte, llavors $\Delta(K * f) = f$.*

Aquest lema ens mostra el fet que la convulució amb K ens *construeix* un invers de l'operador de Laplace.

Per tal de veure la primera afirmació podem calcular al punt $x = 0$ (per invariància de translació). Aleshores,

$$(K * \Delta\sigma)(0) = \int \frac{1}{2\pi} K(y) f(x - y) d\mu_y.$$

Ara, $\Delta \log |y|$ s'anul·la a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Escrivim la integral com el límit quan δ tendeix a 0 de la integral sobre el conjunt on $|y| \geq \delta$. Podem usar la identitat de Green per escriure això com *integral de frontera* i prendre el límit quan δ tendeix a 0.

Per tal de veure la segona afirmació escriurem

$$(K * f)(x) = \int K(y) f(x - y) d\mu_y.$$

Si prenem el laplacià respecte x, podem moure l'operador diferencial dins l'integral (ja que f és diferenciable i x no apareix dins l'argument de K). Per tant,

$$\Delta(K * f) = \int K(y) \Delta_x f(x - y) d\mu_y,$$

on hem pres el laplacià respecte x. Però això és el mateix que $K * \Delta f$, que és igual a f per la primera part.

Per tant, hem reduït el problema al cas en què $\rho = 0$ i, canviant la notació, suposem que ϕ és una solució feble de $\Delta\phi = 0$ a Ω i volem demostrar que ϕ és diferenciable a l'interior del domini Ω' (amb l'entorn de radi ϵ de Ω' contingut a Ω). Ho veurem usant la propietat del valor mitjà de funcions harmòniques diferenciables; que ens diu que, si ψ és una funció harmònica diferenciable en un entorn d'un disc tancat, aleshores el valor de ψ al centre del disc és igual al valor mitjà en el cercle (la frontera del disc). Fixem una funció diferenciable β en $\mathbb{R}$ amb $\beta(r)$ constant per r petita, que s'anul·li per $r \geq \epsilon$ i tal que

$$2\pi \int_0^\infty r\beta(r)\, dr = 1.$$

Ara, si agafem B que sigui la funció tal que $B(z) = \beta(|z|)$ a $\mathbb{C}$, llavors B és diferenciable i té integral 1 sobre $\mathbb{C}$ (respecte la mesura ordinaria de Lebesgue). Primer suposarem que ψ és una funció harmònica diferenciable en un entorn del disc tancat de radi ϵ centrat a l'origen. Aleshores tindrem

$$\int_{\mathbb{C}} B(-z)\psi(z)\, d\mu_z = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r\beta(r)\psi(r,\phi) d\phi\, dr = \psi(0) \int_0^\infty r\beta(r)\, dr = \psi(0),$$

on hem canviat a coordenades polars i usat la porpietat del valor mitjà següent:

$$\int_0^{2\pi} \psi(r,\phi)d\phi = 2\pi\psi(0).$$

Però podem observar que la integral calculada és simplement la que defineix la convulució $B*\psi$ en el 0. Per tant, podem obtenir el següent resultat.

Proposició 8.8. *Considerem ψ una funció diferenciable en $\mathbb{C}$ i suposem que $\Delta\psi$ té suport en un conjunt compacte $J \subset \mathbb{C}$. Llavors, $B*\psi - \psi$ s'anul·la fora de l'entorn de radi ϵ de J.*

Arrel d'aquest resultat podem fer notar que *si* la nostra funció ϕ en Ω és diferenciable, llavors haurem de tenir que $B*\psi = \psi$ en Ω'. Recíprocament, per a qualsevol funció L^2 la convulució $B*\phi$ és diferenciable. Per tant, demostrar la diferenciabilitat de ϕ en Ω' és equivalent a establir l'identitat $B*\phi = \phi$ en Ω', i, per veure-ho, usarem el procediment següent. Serà suficient comprovar que per a tota funció *test* diferenciable χ amb suport compacte a Ω' tenim

$$< \chi, \phi - B*\phi >= 0,$$

on escrivim $< \, , >$ pel producte intern

$$< f, g >= \int fg \; d\mu.$$

Usem el fet que $\forall\ f, g, h$ funcions en una classe adequada,

$$< f, g*h >=< g*f, h >,$$

que podem comprovar fàcilment reorganitzant les integrals.

Si considerem $h = K*(\chi - B*\chi) = K*\chi - B*K*\chi$, aleshores $K*\chi$ és una funció diferenciable en $\mathbb{C}$ i $\Delta K*\chi = \chi$ pel lema anterior. Per tant, $\Delta K*\chi$ s'anul·la fora del suport de χ i, en conseqüència, per la proposició anterior, $B*K*\chi$ és igual a $K*\chi$ fora de l'entorn de radi ϵ del suport de χ. Aleshores, h té suport compacte contingut a Ω i, per tant, podem usar h com a funció *test* en la hipòtesi $\Delta\phi = 0$ dèbilment, és a dir, tenim

$$< \Delta h, \phi >= 0.$$

Però $\Delta h = \Delta K*(\chi - B*\chi) = \chi - B*\chi$ pel lema anterior (ja que χ i $B*\chi$ tenen suport compacte). Per tant, podem observar que

$$< \chi - B*\chi, \phi >= 0.$$

Però, aplicant l'identitat anterior altre cop, obtenim

$$< \chi, \phi - B*\phi >= 0,$$

tal i com volíem.

Finalment, podem donar per demostrat el **Teorema 8.3**, ja que hem vist que ϕ és diferenciable i, pels arguments que hem anat donant, això significa que hem obtingut el nostre resultat.

Per acabar, al haver ja demostrat el **Teorema 8.2** i havent acabat de demostrar el **Teorema 8.3** hem acabat definitivament la demostració del teorema principal per a superfícies compactes de Riemann.

Referències

[1] S.K. Donaldson: *Riemann Surfaces*: 29-88, 97-99, 111-113, 118-129, 2011.

[2] T. Krämer: *Lectures on Elliptic Curves*: 14-26, https://www2.mathematik.hu-berlin.de/ kraemeth/elliptic-curves/index.html, 2019/20.

[3] W. Fulton: *Algebraic Curves*: 124-125, 2008.

[4] T. Ekedahl: *One Semester of Elliptic Curves*: 12-17, 2000.

[5] C. Herbert Clemens: *A Scrapbook of Complex Curve Theory*: 42-45, 2000.

[6] Minal Wankhede Barsagade, Dr. Suchitra Meshram: *Overview of Histroy of Elliptic Curves and its use in cryptography*, International Journal of Scientific and Engineering Research, Volume 5, Issue 4, April 2014. ISSN 2229-5518, 467-468, https://www.ijser.org/researchpaper/Overview-of-History-of-Elliptic-Curves-and-its-use-in-cryptography.pdf

[7] D. Ying: *History of Riemann Surfaces*: 1-2, 2005, http://riemannsurfaces.com/ownwork/history.pdf