Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

ESPAIS DE FOCK: MESURES DE CARLESON I CONJUNTS DE ZEROS

Autora: Lídia de Frutos Manzanares

Directora: Dra. Carme Cascante

Realitzat a: Departament de Matemàtica aplicada i Ànalisi

Barcelona, 19 de gener de 2020

Abstract

The aim of this work is to study Fock spaces F^p_α. These spaces were introduced by Vladimir Fock, a soviet physicist. Among the properties that we will see are the boundary of projection P_α for $p \geq 1$, the characterization of Carleson mesures for F^p_α spaces and the study sets of zeros of these spaces.

Resum

L'objectiu d'aquest treball és estudiar els espais de Fock F^p_α. Aquests espais van ser introduïts per Vladímir Fock, un físic soviètic. Entre les propietats que veurem estan l'acotació de la projecció P_α per a $p \geq 1$, la caracterització de la mesura de Carleson per als espais F^p_α i l'estudi dels conjunts de zeros d'aquest espai.

2010 Mathematics Subject Classification. 30H20, 30C40, 30C15, 30D20.

Agraïments

Vull agrair infinitament a la meva tutora de TFG, la Dra. Carme Cascante, per dedicar-me el seu temps setmana rere setmana, per la seva paciència i les seves correccions.
Ha sigut un plaer aprendre amb tu.

També vull donar les gràcies:

Al meu Pare, la meva Mare, la Laia i la Laura, per ser d'aquelles famílies que mostren un suport incondicional

A l'Adrià, per ser-hi sempre.

A l'Ada, una gran artista; a l'Héctor, l'Hortènsia, l'Irene, la Laura, la Li, en Marc, la Reyes i la Solange, futures matemàtiques que han fet de la meva vida universitària una experiència inoblidable.

Índex

1 Introducció

En aquest treball considerarem diferents problemes de la Teoria de funcions en els espais de Fock F^p_α, també coneguts com espais de Bargmann o espais de Segal-Bargmann, que tot seguit introduirem.

El projecte

Siguin $0 < p < +\infty$ i $\alpha > 0$, denotarem $L^p_\alpha = L^p\left(\mathbb{C}, d\lambda_{\frac{p\alpha}{2}}\right)$ on $d\lambda_{\frac{p\alpha}{2}}$ és la mesura probabilística donada per

$$d\lambda_{\frac{p\alpha}{2}} = e^{-\frac{p\alpha}{2}|z|^2} dA(z)$$

i on dA és la mesura d'àrea euclidea en el pla complex. Aleshores, si $H(\mathbb{C})$ és l'espai de funcions enteres, definim l'espai de Fock $F^p_\alpha = H(\mathbb{C}) \cap L^p_\alpha$.

Per a $p = 2$, veurem que F^p_α és un espai de Hilbert. També veurem que el funcional lineal $\phi_w : F^2_\alpha \to \mathbb{C}$ donat per $\phi_w(f) = f(w)$ és acotat i, conseqüentment, pel Teorema de Representació de Riesz existeix una única funció $K_w \in F^2_\alpha$ complint que

$$f(w) = \langle f, K_w \rangle_\alpha = \int_{\mathbb{C}} f(z)\overline{K_w(z)} d\lambda_\alpha(z).$$

Seguidament, definint el nucli reproductor $K_\alpha(z, w) = K_w(z)$, podrem comprovar que $K_\alpha(z, w) = e^{\alpha z \overline{w}}$ i que

$$P_\alpha(f) = \int_{\mathbb{C}} K_\alpha(z, w) f(w) d\lambda_\alpha(w)$$

és la projecció ortogonal i, per tant, és un operador lineal acotat de L^2_α en F^2_α.

El primer resultat que veurem en aquest treball és l'acotació de l'operador P_α, que inicialment definit en L^2_α, en l'espai L^p_α per a $1 \leq p < +\infty$. Més concretament, provarem:

Teorema. *Siguin $1 \leq p < +\infty$, $\alpha > 0$ i $\beta > 0$. Aleshores, $P_\alpha : L^p_\alpha \to F^p_\beta$ és acotada si i només si $\alpha = \beta$.*

El següent problema que considerarem en la memòria és la caracterització de les mesures de Carleson per als espais de Fock F^p_α.

Direm que una mesura de Borel positiva en $\mathbb{C}$ és una mesura de Carleson per a F^p_α si $F^p_\alpha \subset L^p(e^{-\frac{p\alpha}{2}} d\mu)$, és a dir, si existeix una constant $C > 0$ tal que per a tota $f \in F^p_\alpha$

$$\int_{\mathbb{C}} \left| f(w) e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} \right|^p d\mu(w) \leq C ||f||^p_{F^p_\alpha}.$$

Llavors demostrarem el següent Teorema:

Teorema. *Siguin μ una mesura de Borel positiva en $\mathbb{C}$, $0 < p < +\infty$ i $0 < r < +\infty$. Aleshores, les condicions següents són equivalents:*

(a) μ és una mesura de Carleson per a F^p_α;

(b) Existeix una constant $C > 0$ tal que $\displaystyle\int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{p\alpha}{2}|z-w|^2} d\mu(w) \leq C$ per a tota $z \in \mathbb{C}$;

(c) Existeix una constant $C = C(p, r) > 0$ tal que $\mu(B(z, r)) \leq C$ per a tota $z \in \mathbb{C}$ on $B(z, r) = \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < r\}$.

En particular, deduïrem que les mesures de Carleson són les mateixes per a tots els $p, \alpha > 0$. A partir de la seva caracterització n'obtindrem un parell d'exemples.

Finalment, ens centrarem en estudiar els conjunts de zeros per a F^p_α. Recordem que si $f \not\equiv 0$ és una funció holomorfa en una regió Ω, aleshores el seu conjunt de zeros $Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$ és un conjunt finit o numerable.

Un problema clàssic en Teoria de funcions és el següent: Donat un espai de funcions holomorfes en una regió Ω, es poden caracteritzar els seus conjunts de zeros?

Per a l'espai $H^\infty(\mathbb{D})$ de funcions holomorfes i acotades en el disc $\mathbb{D}$ es compleix que si $(z_n)_n \subset \mathbb{D}$ és una successió de punts, llavors aquesta successió és el conjunt de zeros d'una funció $f \in H^\infty(\mathbb{D})$ si i només si es satisfà l'anomenada condició de Blaschke

$$\sum_{n \geq 1} (1 - |z_n|) < +\infty.$$

Això és conseqüència de la Fórmula de Jensen i de les propietats dels productes de Blaschke.

Per a altres espais de funcions holomorfes no sempre existeix una caracterització dels seus conjunts de zeros. Aquest és el cas dels espais de Fock F^p_α que estem estudiant.

Així doncs, acabarem el treball provant els tres Teoremes següents sobre la caracterització dels conjunts de zeros per a F^p_α. El primer ens proporciona una condició necessària i una altra de suficient.

Teorema. *(a) Sigui $0 < p < +\infty$. Suposem que $(z_n)_n$ és una successió de zeros infinita d'una funció $f \in F^p_\alpha$ amb $f(0) \neq 0$. Suposem també que els zeros d'aquesta successió estan repetits segons la seva multiplicitat i ordenats de forma que $0 \leq |z_1| \leq |z_2| \leq \ldots$ Aleshores, existeix una constant $c > 0$ tal que $|z_n| \geq c\sqrt{n}$ per a tota $n \in \mathbb{N}$.*

(b) Sigui $(z_n)_n \subset \mathbb{C}$ una successió que satisfà $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{|z_n|^2} < +\infty$. Aleshores, per a tota $0 < p \leq +\infty$, existeix $f \in F^p_\alpha$ no nul·la tal que $Z(f) = \displaystyle\bigcup_{n \geq 1} \{z_n\}$.

Teorema. *Siguin $0 < p \leq +\infty$ i $\alpha > 0$. Aleshores, existeixen dues successions de zeros en F^p_α diferents tals que la seva unió no és una successió de zeros en F^p_α.*

Teorema. *Siguin $0 < p \leq +\infty$ i $\alpha > 0$. Aleshores, existeix una successió de zeros de F^p_α tal que una subsuccessió seva no és una successió de zeros de F^p_α.*

Estructura de la Memòria

Aquesta memòria està organitzada de la manera següent:

En el capítol 3 introduirem els espais de Fock F^p_α i en veurem algunes de les seves propietats com ara l'estimació puntual, la completitut, el càlcul del nucli reproductor i les inclusions entre els diferents espais F^p_α.

En el següent capítol parlarem de l'acotació de l'operador projecció P_α per a $\alpha > 0$.

Al cinquè capítol veurem com es caracteritzen les mesures de Caleson per a F^p_α i n'obtindrem un parell d'exemples.

Finalment, en el darrer capítol, parlarem de la caracterització dels conjunts de zeros de les funcions d'aquest espai.

2 Preliminars

El propòsit d'aquest capítol inicial és recollir una sèrie de definicions i enunciats que utilitzarem en les demostracions dels resultats d'aquest treball. Aprofitarem per fixar notació i parlarem dels espais $L^p(\mu)$ per a $p > 0$ on μ és una mesura positiva, els espais de Hilbert, les funcions holomorfes i les funcions enteres.

Els espais L^p

En primer lloc, definirem les σ-àlgebres de Borel, les mesures positives i els espais de mesura.

Definició 2.1. *Sigui X un conjunt no buit. Direm que una col·lecció de subconjunts $\mathcal{M}$ de X és una **σ-àlgebra en** X si té les següents propietats:*

(a) $\phi \in \mathcal{M}$;

(b) Si $A \in \mathcal{M}$, llavors $A^c \in \mathcal{M}$ on A^c és el complementari de A respecte X;

(c) Si $A_n \in \mathcal{M}$ per a tota $n \geq 1$, llavors $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{M}$.

*En particular, direm que $\mathcal{M}$ és una **σ-àlgebra de Borel en** X si és la σ-àlgebra en X més petita que conté tots els oberts de X, és a dir, si és la σ-àlgebra generada pels conjunts oberts de X.*

Definició 2.2. *Una **mesura positiva** μ és una funció definida sobre una σ-àlgebra $\mathcal{M}$ que dóna valors en l'interval $[0, +\infty]$ de manera que satisfà les dues propietats següents:*

(a) $\mu(\phi) = 0$.

(b) Si $(A_n)_n \in \mathcal{M}$ són conjunts disjunts dos a dos, llavors $\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$.

Totes les mesures μ que considerarem seran σ-finites i positives, és a dir, compliran que $\mu(X_n) < +\infty$ i que $X = \bigcup_{n\geq 1} X_n$.

Definició 2.3. *Un **espai de mesura** (X, μ) és un espai mesurable en el qual hi ha definida una mesura positiva sobre la σ-àlgebra dels seus conjunts mesurables.*

A partir d'aquí suposarem que (X, μ) és un espai de mesura arbitrari amb una mesura positiva μ. Seguidament, enunciarem tres teoremes sobre espais mesurables: la convergència dominada de Lebesgue, la desigualtat de Jensen i la de Hölder.

Teorema 2.4. ***(Convergència dominada de Lebesgue)*** *Sigui (X, μ) un espai de mesura. Suposem que $(f_n)_n$ és una successió de funcions mesurables complexes sobre X tals que existeix g.p.t $x \in X$*

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

Si també existeix una funció $g \in L^1(\mu)$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ per a tota $n \in \mathbb{N}$ i g.p.t $x \in X$, aleshores

(a) $f \in L^1(\mu)$;

(b) $\lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$;

(c) $\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$

Teorema 2.5. ***(Desigualtat de Jensen)*** *Sigui (X, μ) un espai de mesura tal que $\mu(X) = 1$. Sigui també una mesura positiva μ sobre una σ-àlgebra $\mathcal{M}$ en X. Si f és una funció real de $L^1(\mu)$, si $a < f(x) < b$ per a tota $x \in X$ i si φ és convexa en l'interval (a, b), aleshores*

$$\varphi\left(\int_X f d\mu\right) \leq \int_X (\varphi \circ f) d\mu.$$

Definició 2.6. *Direm que p i q són un **parell d'exponents conjugats** si es tracta de dos nombres reals positius tals que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Notem que necessàriament $1 \leq p \leq +\infty$ i $1 \leq q \leq +\infty$.

Teorema 2.7. ***(Desigualtat de Hölder)*** *Siguin p i q un parell d'exponents conjugats. Sigui (X, μ) un espai de mesura. Si f i g són funcions mesurables en X amb recorregut en $[0, +\infty]$, aleshores*

$$\int_X |fg| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

*En particular, si $p = q = 2$, l'anomenem **Desigualtat de Schwarz**.*

Seguidament, veurem alguns aspectes de la teoria dels espais L^p.

Definició 2.8. *Sigui $0 < p < +\infty$. Es defineix l'**espai** $L^p(\mu)$ com el conjunt de totes les classes d'equivalència de funcions f complexes i mesurables en X tals que*

$$||f||_{L^p}^p = \int_X |f|^p d\mu < +\infty.$$

Notem que per a $0 < p < 1$, els espais $L^p(\mu)$ són quasi mètrics. En canvi, per a $p \geq 1$ els espais $L^p(\mu)$ són mètrics complets.

Teorema 2.9. *Sigui $1 \leq p \leq +\infty$. Si $(f_n)_n$ és una successió de Cauchy en $L^p(\mu)$ amb límit f, llavors $(f_n)_n$ té una subsuccessió que convergeix puntualment en gairebé tot punt a $f(x)$.*

Proposició 2.10. *Suposem que $(g_n)_n$ i g són funcions de $L^p(X, \mu)$ tals que $g_n \to g(x)$ quan $n \to +\infty$ gairebé per a tot $x \in X$. Aleshores,*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X |g_n - g|^p d\mu = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \int_X |g_n|^p d\mu = \int_X |g|^p d\mu.$$

Si p i q són un parell d'exponents conjugats, denotem $L^q(X,\mu)$ l'espai dual de $L^p(X,\mu)$.

Teorema 2.11. *Siguin $1 \leq p < +\infty$ i Φ un funcional lineal acotat en $L^p(\mu)$. Aleshores, existeix una única $g \in L^q(\mu)$, on q és l'exponent conjugat de p, tal que*

$$\Phi(f) = \int_X fg d\mu, f \in L^p(\mu).$$

A més, es verifica que $||\Phi|| \leq ||g||_{L^q(\mu)}$.

Lema 2.12. *Siguin p i q un parell d'exponents conjugats. Si un operador integral*

$$Tf(x) = \int_X G(x,y)f(y)d\mu(y)$$

està acotat en $L^p(X,d\mu)$, aleshores el seu adjunt $T^* : L^q(X,d\mu) \to L^q(X,d\mu)$ és l'operador integral donat per

$$T^*f(y) = \int_X \overline{G(y,x)}f(x)d\mu(x).$$

Per acabar, enunciem el Teorema de l'Aplicació Oberta.

Teorema 2.13. ***(Aplicació oberta)*** *Siguin X i Y dos espais de Banach. Si Λ és un operador lineal continu i bijectiu de X sobre Y, llavors existeix $\delta > 0$ tal que*

$$\delta||x|| \leq ||\Lambda x|| \leq \frac{1}{\delta}||x||, \quad x \in X.$$

Espais de Hilbert

En aquesta secció definirem els espais de Hilbert, enunciarem el teorema de representació de Riesz i parlarem sobre les bases ortonormals d'aquests espais.

Definició 2.14. *Un espai vectorial complex H es diu que és un **espai amb producte interior** si per a cada parell ordenat de vectors $x, y \in H$ hi ha associat un nombre complex $\langle x, y\rangle$ anomenat producte interior (o escalar) de x i y tal que es verifica:*

(a) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$.

(b) $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$ *si* $x,y,z \in H$.

(c) $\langle \alpha x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$ *si* $x,y \in H$ *i* $\alpha \in \mathbb{C}$.

(d) $\langle x,x\rangle \geq 0$ *per a tota* $x \in H$.

(e) $\langle x,x\rangle = 0$ *si i només si* $x = 0$.

Observem que si definim la distància entre $x, y \in H$ com $||x-y|| = \langle x-y, x-y\rangle^{\frac{1}{2}}$, aleshores tindrem que H és un espai mètric.

Definició 2.15. *Direm que H és un **espai de Hilbert** si és complet, és a dir, si tota successió de Cauchy convergeix en H.*

A continuació, enunciarem el teorema de representació de Riesz el qual ens donarà l'existència del nucli reproductor dels espais de Fock F^p_α més endavant. Per acabar aquesta secció, definirem les bases ortonormals dels espais de Hilbert.

Teorema 2.16. ***(Representació de Riesz)*** *Sigui $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producte escalar sobre l'espai de Hilbert H. Per a tota forma lineal acotada L, existeix una única $\tau_L \in H$ tal que per a tota $v \in H$ tenim que $L(v) = \langle v, \tau_L \rangle$.*

Definició 2.17. *Direm que una successió $(e_n)_n \subset H$ és una* ***base ortonormal de*** *H si*

(a) és ortonormal, és a dir, si $\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{nm} = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{array} \right\}$;

(b) és total, és a dir, si $\langle x, e_n \rangle = 0$ per a tota $x \in H$ implica que $x = 0$.

En altres paraules, si $\mathscr{F} = \left\{ \sum_{n=1}^{N} \gamma_n e_n : \gamma_n \in \mathbb{C}, N \geq 1 \right\}$ *és dens en H, direm que $(e_n)_n$ és una base ortonormal de H.*

Funcions holomorfes

Definició 2.18. *Sigui una funció $f : U \to \mathbb{C}$ on $U \subset \mathbb{C}$ és un conjunt obert. Direm que f és holomorfa en $z_0 \in U$ si existeix*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

En general, direm que una funció f és ***holomorfa*** *en U si és holomorfa en tota $z \in U$.*

Seguidament, enunciarem dos teoremes molt coneguts dins l'ànalisi complexa.

Teorema 2.19. ***(Fórmula integral de Cauchy)*** *Sigui Ω un domini acotat del pla amb frontera regular a trossos i orientat positivament. Si f és holomorfa en un entorn de $\overline{\Omega}$, llavors*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Omega} \frac{f(w)}{w - z} dw, \quad z \in \Omega.$$

Teorema 2.20. ***(Morera)*** *Sigui un obert $U \subset \mathbb{C}$. Aleshores, una funció $f \in \mathscr{C}(U)$ és holomorfa en U si i només si per a tot triangle $\triangle \subset U$ tenim que*

$$\int_{\partial \triangle} f(z) dz = 0.$$

També necessitem donar alguns resultats sobre subharmonicitat de funcions.

Definició 2.21. *Direm que una funció contínua f en un conjunt obert U té la* ***propietat del valor mig*** *si per a tota $z \in U$ i per a tota $r > 0$ tal que $\overline{D(z, r)} \subset U$, llavors*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z + re^{it}) dt.$$

Teorema 2.22. *Sigui U un conjunt obert. Si una funció f és contínua i té la propietat del valor mig en U, llavors és harmònica en U.*

Definició 2.23. *Sigui U un conjunt obert. Direm que una funció f contínua en U és* ***subharmònica*** *en U si per a tota $z_0 \in U$ i per a tota $r > 0$ tals que $\overline{D(z_0, r)} \subset U$ tenim que*

$$f(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Teorema 2.24. *Sigui Ω un domini. Si $f \in H(\Omega)$ és una funció no nul·la, aleshores $\log|f|$ és subharmònica en Ω. En particular, també ho són $\log^+|f| = \max(\log|f|, 0)$ i $|f|^p$ per a $0 < p < +\infty$.*

Un problema clàssic en la teoria de les funcions holomorfes és l'estudi de la caracterització dels zeros de les funcions en els diferents espais i una de les eines més utilitzades en aquests estudis és la Fórmula de Jensen.

Teorema 2.25. ***(Fórmula de Jensen)*** *Siguin $R > 0$ i $N \in \mathbb{N}$. Suposem que f una funció holomorfa en un entorn del disc $\overline{D(0, R)}$ amb $f(0) \neq 0$. Si $z_1, ..., z_N$ són els zeros de f a $D(0, R)$ amb multiplicitats $m_1, ..., m_N$ respectivament, llavors es satisfà que*

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(Re^{it})| dt + \sum_{n=1}^{N} m_n \log\left(\frac{|z_n|}{R}\right).$$

Funcions enteres

Recordem que una funció f és entera si és holomorfa en tot el pla complex. Com a conseqüència de la definició de subharmonicitat tenim el següent Teorema.

Teorema 2.26. *Sigui $0 < p < +\infty$. Si f és una funció entera, aleshores per a tota $a \in \mathbb{C}$ i per a tota $r \in [0, +\infty)$*

$$|f(a)|^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{i\theta})|^p d\theta.$$

Un altre resultat important que necessitarem és el Teorema de Weierstrass.

Teorema 2.27. ***(Weierstrass)*** *Sigui $U \subset \mathbb{C}$ un conjunt obert i sigui $\mathscr{C}(U)$ l'espai de funcions contínues en U. Aleshores, es compleix que*

(a) $H(U)$ és un subespai tancat de $\mathscr{C}(U)$. En altres paraules, si $(f_n)_n \subset H(U)$ convergeix uniformement sobre compactes de U en $\mathscr{C}(U)$ cap a f, llavors $f \in H(U)$;

(b) Si $l > 1$, l'aplicació $\varphi : H(U) \to H(U)$ tal que $\varphi(f) = f^{(l)}$ és contínua. És a dir, si $(f_n)_n \subset H(U)$ convergeix uniformement sobre compactes de U cap a $f \in H(U)$, llavors $\left(f_n^{(l)}\right)_n$ convergeix uniformement sobre compactes a $f^{(l)} \in H(U)$.

Per a qualsevol espai $X \subset \mathbb{C}$, denotarem per $Z(f) = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = 0\}$ el conjunt de zeros de f en X. El següent Teorema ens permetrà construir funcions enteres amb zeros i multiplicitats prefixades. Aquestes funcions vindran donades per productes infinits.

Sigui f una funció entera. Definim els factors elementals de Weierstrass com

$$E_0(z) = 1 - z,$$

i per a cada $n > 0$,

$$E_n(z) = (1 - z)e^{z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^n}{n}}.$$

Teorema 2.28. ***(Factorització de Weierstrass)*** *Sigui $(z_n)_n \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ una successió tal que $|z_n| \to +\infty$ quan $n \to +\infty$. Suposem que existeix $(p_n)_n \in \mathbb{N}$ tal que per a tota $r > 0$ es compleix que*

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{r}{|z_n|}\right)^{p_n+1} < +\infty.$$

Aleshores, tenim que el producte infinit

$$P(z) = \prod_{n\geq 1} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right) \tag{2.1}$$

convergeix incondicionalment en $H(\mathbb{C})$ cap a una funció entera f tal que $Z(f) = \bigcup_{n\geq 1}\{z_n\}$. A més, per a tota $z \in Z(f)$ escrivim $m(f,z) = cardinal\{n \geq 1 : z_n = z\}$.

Definició 2.29. *Sigui f una funció entera. Per a qualsevol $r > 0$, denotem el suprem de f a la vora del disc $|z| = r$ com*

$$M(r) = M_f(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|.$$

*Aleshores, direm que f és d'**ordre** ρ si*

$$\rho = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log M(r)}{\log r}.$$

*És clar que $0 \leq \rho \leq +\infty$. A més, si $0 < \rho < +\infty$, direm que f és de **tipus** σ si*

$$\sigma = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log M(r)}{r^\rho}.$$

Sigui $(z_n)_n$ la successió de zeros de d'una funció entera f. Suposant que $f(0) \neq 0$, denotarem per $\rho_1 = \rho_1(f)$ a l'ínfim de tots els nombres $s > 0$ tals que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{|z_n|^s} < +\infty. \tag{2.2}$$

En particular, l'enter $s > 0$ més petit que satisfà la condició de convergència esmentada el denotarem per $m + 1$.

Teorema 2.30. *Per a qualsevol funció entera f no nul·la tenim que*

(a) $\rho_1 - 1 \leq m \leq \rho$.

(b) si ρ no és enter, llavors $\rho = \rho_1$.

(c) si ρ_1 no és enter, llavors $m = [\rho_1]$ on $[\rho_1]$ és la part entera de ρ_1.

L'últim Teorema que usarem en la memòria és l'anomenat Teorema de Lindelöf i ens serà útil quan estudiem els conjunts de zeros dels espais de Fock F^p_α al capítol 6.

Teorema 2.31. ***(Lindelöf)*** *Sigui f una funció entera d'ordre ρ. Suposem que $f(0) \neq 0$ i que $(z_n)_n$ és la successió de zeros de f. Aleshores, f és de tipus finit σ si i només si es satisfan les dues condicions següents:*

(a) $n(r) = O(r^\rho)$ quan $r \to +\infty$, on $n(r)$ és el nombre de zeros de f en $|z| \leq r$ (comptant multiplicitats);

(b) Les sumes parcials $S(r) = \displaystyle\sum_{|z_n| \leq r} \frac{1}{|z_n|^\rho}$ estan acotades en r.

Per acabar aquest capítol, donarem la definició de la Funció Gamma.

Definició 2.32. *Per a $x \in (0, +\infty)$, definirem la **Funció Gamma** com*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

En particular, tenim que la Funció Gamma verifica les següents propietats:

(a) Per a tota $x \in (0, +\infty)$, es compleix que $\Gamma(x+1) = x!$;

*(b) $\Gamma(x+1) \simeq e^{-x} x^x \sqrt{2\pi x}$ quan $x \to +\infty$, **(Fórmula de Stirling)**.*

3 Els espais de Fock F^p_α

Començarem el capítol parlant de l'espai de Fock F^2_α, que és un espai de Hilbert.

3.1 L'espai de Fock F^2_α

Definició 3.1. *Per a tot paràmetre $\alpha > 0$, considerem la mesura Gaussiana definida per*

$$d\lambda_\alpha(z) = \frac{\alpha}{\pi} e^{-\alpha|z|^2} dA(z),$$

on dA és la mesura d'àrea euclidea en el pla complex.

Observació 3.2. La mesura Gaussiana és una mesura de probabilitat.

És fàcil provar-ho fent un canvi a coordenades polars. Efectivament,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}} d\lambda_\alpha(z) &= \int_{\mathbb{C}} \frac{\alpha}{\pi} e^{-\alpha|z|^2} dA(z) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-\alpha r^2} r d\theta dr \\ &= \int_0^{+\infty} 2\alpha r e^{-\alpha r^2} dr = \left[-e^{-\alpha r^2}\right]_0^{+\infty} = 1.\end{aligned}$$

Definició 3.3. *Si $L^2_\alpha := L^2(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$, l'**espai de Fock** F^2_α és el subespai de les funcions enteres f de L^2_α, és a dir, $f \in F^2_\alpha$ si i només si $f \in H(\mathbb{C})$ i*

$$||f||^2_{F^2_\alpha} = \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-\alpha|z|^2} dA(z) < +\infty. \tag{3.1}$$

A continuació, veurem exemples de funcions de F^p_α i algunes propietats que seran utilitzades en les demostracions dels principals resultats d'aquest treball.

Exemples 3.4. (1) Tot polinomi holomorf pertany a F^2_α.

(2) Per a tota $w \in \mathbb{C}$, es compleix que $f_w(z) = e^{\alpha z \overline{w}} \in F^2_\alpha$. En particular, també tenim que $f(z) = e^{\alpha z} \in F^2_\alpha$.

Demostració. Comencem provant (1). Degut al fet que L^2_α és un espai vectorial, només cal comprovar que els monomis $z^n \in F^2_\alpha$, per a tota $n \in \mathbb{N}$. En efecte, utilitzant el canvi a coordenades polars

$$\begin{aligned}||z^n||^2_{F^2_\alpha} &= \int_{\mathbb{C}} |z^n|^2 d\lambda_\alpha(z) = \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} |z|^{2n} e^{-\alpha r^2} dA(z) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} r^{2n} e^{-\alpha r^2} r d\theta dr \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} 2\pi r^{2n+1} e^{-\alpha r^2} dr = \int_0^{+\infty} 2\alpha r^{2n+1} e^{-\alpha r^2} dr,\end{aligned}$$

i aplicant el canvi $u = \alpha r^2$ obtenim que l'última integral és igual a

$$\frac{1}{\alpha^n} \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du = \frac{1}{\alpha^n} \Gamma(n+1) = \frac{n!}{\alpha^n} < +\infty.$$

Amb això queda provat el primer exemple. Provem el segon: usant la traslació $z \to z+w$ i el fet que $d\lambda_\alpha(z)$ és una mesura de probabilitat deduïm que

$$
\begin{aligned}
||f||_{F^2_\alpha}^2 &= \int_{\mathbb{C}} |e^{\alpha z\overline{w}}|^2 d\lambda_\alpha(z) = \frac{\alpha}{\pi}\int_{\mathbb{C}} e^{2\alpha Rez\overline{w}} e^{-\alpha|z|^2} dA(z) \\
= \frac{\alpha}{\pi}\int_{\mathbb{C}} e^{2\alpha Rez - \alpha|z|^2 - \alpha|w|^2} e^{\alpha|w|^2} dA(z) &= \frac{\alpha}{\pi}\int_{\mathbb{C}} e^{-\alpha|z-w|^2} e^{\alpha|w|^2} dA(z) \\
= \frac{\alpha}{\pi}\int_{\mathbb{C}} e^{-\alpha|z|^2} e^{\alpha|w|^2} dA(z) &= e^{\alpha|w|^2}\int_{\mathbb{C}} d\lambda_\alpha(z) = e^{\alpha|w|^2} < +\infty.
\end{aligned}
$$

□

Lema 3.5. *(a) Per a tota $f \in F^2_\alpha$ i per a tota $w \in \mathbb{C}$, sigui $F(z) = f(w-z)e^{\alpha z\overline{w} - \frac{\alpha}{2}|w|^2}$. Aleshores, $F \in F^2_\alpha$ i $||F||^2_{F^2_\alpha} = ||f||^2_{F^2_\alpha}$.*

(b) Sigui $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Aleshores, l'operador dilatació $f(z) \mapsto f(\zeta z)$ és una isometria de F^2_α a $F^2_{|\zeta|^2\alpha}$. És a dir, si $f \in F^2_\alpha$ i $F(z) = f(\zeta z)$, llavors tenim que $||F||_{F^2_{|\zeta|^2\alpha}} = ||f||_{F^2_\alpha}$.

Demostració. Provem (a). Fixada $w \in \mathbb{C}$, i tornant a fer servir la mateixa traslació que abans és senzill veure que

$$
\begin{aligned}
||F||^2_{F^2_\alpha} &= \int_{\mathbb{C}} \left| f(w-z)e^{\alpha z\overline{w} - \frac{\alpha}{2}|w|^2}\right|^2 d\lambda_\alpha(z) = \frac{\alpha}{\pi}\int_{\mathbb{C}} |f(w-z)|^2 e^{2\alpha z\overline{w} - \alpha|w|^2} e^{-\alpha|z|^2} dA(z) \\
&= \frac{\alpha}{\pi}\int_{\mathbb{C}} |f(w-z)|^2 e^{-\alpha|w-z|^2} dA(z) = \frac{\alpha}{\pi}\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-\alpha|z|^2} dA(z) = ||f||^2_{F^2_\alpha} < +\infty.
\end{aligned}
$$

Provem (b). Sigui $f \in F^2_\alpha$. Donat $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, apliquem el canvi $w = \zeta z$ amb jacobià $|\zeta|^2$ de manera que

$$
\begin{aligned}
||F||_{F^2_{|\zeta|^2\alpha}} &= \int_{\mathbb{C}} |f(\zeta z)|^2 d\lambda_{|\zeta|^2\alpha}(z) = \frac{|\zeta|^2\alpha}{\pi}\int_{\mathbb{C}} |f(\zeta z)|^2 e^{-|\zeta|^2\alpha|z|^2} dA(z) \\
&= \frac{|\zeta|^2\alpha}{\pi}\int_{\mathbb{C}} |f(w)|^2 e^{-\alpha|w|^2}\frac{1}{|\zeta|^2} dA(w) = \int_{\mathbb{C}} |f(w)|^2 d\lambda_\alpha(w) = ||f||_{F^2_\alpha}.
\end{aligned}
$$

□

El següent Teorema estableix el creixement de les funcions dins l'espai de Fock F^2_α, resultat que ens permetrà provar la seva completitut entre d'altres.

Teorema 3.6. ***(Estimació puntual)*** *Si $f \in F^2_\alpha$, aleshores*

$$
|f(z)| \le ||f||_{F^2_\alpha} e^{\frac{\alpha}{2}|z|^2}. \tag{3.2}
$$

Demostració. Siguin $r > 0$ i $f \in F^2_\alpha$. Per la Fórmula Integral de Cauchy 2.19, sabem que

$$
f^2(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,r)} \frac{f^2(w)}{w} dw.
$$

Aplicant el valor absolut i parametritzant $\partial D(0,r)$ tenim que

$$
|f^2(0)| \le \left|\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f^2(re^{i\theta})}{re^{i\theta}} rie^{i\theta} d\theta\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(re^{i\theta}) d\theta\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta.
$$

Multiplicant per $re^{-\alpha r^2}$ i integrant respecte r en l'interval $(0, +\infty)$,

$$|f^2(0)| \int_0^{+\infty} re^{-\alpha r^2} dr \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 re^{-\alpha r^2} d\theta dr.$$

Així doncs,

$$\frac{-|f(0)|^2}{2\alpha} \left[e^{-\alpha r^2} \right]_0^{+\infty} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-\alpha |z|^2} dA(z),$$

i per tant,

$$|f^2(0)| \leq \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-\alpha |z|^2} dA(z) = \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 d\lambda_\alpha(z) = ||f||^2_{F^2_\alpha}.$$

Amb això queda provada l'estimació puntual a l'origen. Pel cas general, utilitzarem l'apartat (a) del Lema 3.5. Considerem la traslació $F(w) = f(z-w)e^{\alpha z\overline{w} - \frac{\alpha}{2}|z|^2} \in F^2_\alpha$ que compleix $||F||_{F^2_\alpha} = ||f||_{F^2_\alpha}$. Aleshores, com que $F \in F^2_\alpha$, pel que acabem de provar es satisfà la desigualtat $|F(0)| \leq ||F||_{F^2_\alpha} = ||f||_{F^2_\alpha}$. I finalment,

$$|F(0)| \leq ||F||_{F^2_\alpha} \iff \left| f(z)e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} \right| \leq ||f||_{F^2_\alpha} \iff |f(z)| \leq ||f||_{F^2_\alpha} e^{\frac{\alpha}{2}|z|^2}.$$

□

Corol·lari 3.7. *F^2_α és un subespai tancat de L^2_α.*

Demostració. Sigui $(f_n)_n \subset F^2_\alpha$ tal que $f_n \to f$ en L^2_α i volem veure que $f \in F^2_\alpha$. De fet, tan sols hem de provar que $f \in H(\mathbb{C})$, ja que $f \in L^2_\alpha$ per hipòtesi.

Com que $(f_n)_n$ és de Cauchy en L^2_α, tenim que donades $z \in \mathbb{C}$ i $\epsilon < 0$, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $||f_n - f_m||_{L^2_\alpha} < \epsilon$ per a tota $n \geq n_0$ i per a tota $m \geq n_0$. En particular, si $(f_n)_n \subset F^2_\alpha$, pel Teorema 3.6 deduïm que

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq ||f_n - f_m||_{F^2_\alpha} e^{\frac{\alpha}{2}|z|^2} = ||f_n - f_m||_{L^2_\alpha} e^{\frac{\alpha}{2}|z|^2} < \epsilon e^{\frac{\alpha}{2}|z|^2}.$$

Així doncs, per a tota $R > 0$,

$$\sup_{|z| \leq R} |f_n(z) - f_m(z)| \leq \sup_{|z| \leq R} \epsilon e^{\frac{\alpha}{2}|z|^2} \to 0,$$

i per tant $f_n - f_m \to 0$ uniformement en $|z| \leq R$. En altres paraules, $(f_n)_n$ és una successió de Cauchy en $H(\mathbb{C})$. Aleshores, pel Teorema de Weierstrass 2.27, existeix $g \in H(\mathbb{C})$ tal que $f_n \to g$ uniformement sobre compactes de $H(\mathbb{C})$.

D'altra banda, si $f_n \to f$ en L^2_α, pel Teorema 2.9, existeix $(f_{n_k})_k$ parcial de $(f_n)_n$ puntualment convergent cap a f, és a dir, $f_{n_k}(z) \to f(z)$ g.p.t. $z \in \mathbb{C}$. Això implica que $f = g$ g.p.t. $z \in \mathbb{C}$ de manera que $f_n \to g$ en L^2_α. I com que $g \in H(\mathbb{C}) \cap L^2_\alpha$, llavors $g \in F^2_\alpha$. □

Corol·lari 3.8. *F^2_α és un espai de Hilbert amb el producte escalar*

$$\langle f, g \rangle_\alpha = \int_{\mathbb{C}} f(z)\overline{g(z)} d\lambda_\alpha(z) = \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} f(z)\overline{g(z)} e^{-\alpha|z|^2} dA(z), \quad f, g \in F^2_\alpha.$$

Seguidament, calcularem el nucli reproductor de l'espai de Hilbert F^2_α, que sabem que existeix pel Teorema de representació de Riesz 2.16. Per poder-lo calcular, primer necessitem trobar una base ortonormal de l'espai.

Proposició 3.9. *Sigui* $e_n = \sqrt{\frac{\alpha^n}{n!}} z^n$ *per a tota* $n \geq 0$*. Aleshores,* $\{e_n\}_n$ *és una base ortonormal de* F^2_α*.*

Demostració. Comencem veient que $\{e_n\}_n$ és un conjunt ortonormal. Fixades $n, m \geq 0$ i fent servir un canvi a coordenades polars tenim que

$$\begin{aligned}
\langle e_n, e_m \rangle_\alpha &= \int_{\mathbb{C}} \sqrt{\frac{\alpha^n}{n!}} z^n \sqrt{\frac{\alpha^m}{m!}} \overline{z^m} d\lambda_\alpha(z) = \frac{\alpha}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha^{n+m}}{n!m!}} \int_{\mathbb{C}} z^n \overline{z^m} e^{-\alpha|z|^2} dA(z) \\
&= \frac{\alpha}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha^{n+m}}{n!m!}} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} r^n e^{in\theta} r^m \overline{e^{im\theta}} e^{-\alpha r^2} r d\theta dr \\
&= \frac{\alpha}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha^{n+m}}{n!m!}} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} r^{n+m+1} e^{in\theta - im\theta} e^{-\alpha r^2} d\theta dr \\
&= \frac{\alpha}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha^{n+m}}{n!m!}} \int_0^{+\infty} r^{n+m+1} e^{-\alpha r^2} \int_0^{2\pi} e^{in\theta - im\theta} d\theta dr.
\end{aligned}$$

En particular, notem que si $n \neq m$, per la periodicitat de les funcions obtenim que $\langle e_n, e_m \rangle_\alpha = 0$. Però, si $n = m$, llavors fent el canvi $u = \alpha r^2$ veiem que

$$\begin{aligned}
\langle e_n, e_n \rangle_\alpha &= \frac{\alpha}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha^{2n}}{n!n!}} \int_0^{+\infty} r^{2n+1} e^{-\alpha r^2} \int_0^{2\pi} d\theta dr = 2\alpha \frac{\alpha^n}{n!} \int_0^{+\infty} (r^2)^n r e^{-\alpha r^2} dr \\
&= \frac{\alpha^n}{n!} \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{\alpha}\right)^n e^{-u} du = \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du = \frac{\Gamma(n+1)}{n!} = 1.
\end{aligned}$$

Així doncs, $\{e_n\}_n$ és un conjunt ortonormal. Ara per a que sigui base de F^2_α, per la Definició 2.17 n'hi ha prou que comprovem que per a tota $f \in F^2_\alpha$ i per a tota $n \geq 0$, si $\langle f, e_n \rangle_\alpha = 0$, llavors $f \equiv 0$.

Donada $n \geq 0$, escrivim $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$ ja que $f \in H(\mathbb{C})$. Aleshores,

$$\begin{aligned}
\langle f, e_n \rangle_\alpha &= \int_{\mathbb{C}} \left(\sum_{k \geq 0} a_k z^k \right) \sqrt{\frac{\alpha^n}{n!}} \overline{z^n} d\lambda_\alpha(z) = \frac{\alpha}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha^n}{n!}} \int_{\mathbb{C}} \left(\sum_{k \geq 0} a_k z^k \right) \overline{z^n} e^{-\alpha|z|^2} dA(z) \\
&= \frac{\alpha}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha^n}{n!}} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k \geq 0} a_k r^k e^{ik\theta} \right) r^n e^{-in\theta} e^{-\alpha r^2} r d\theta dr \\
&= \frac{\alpha}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha^n}{n!}} \int_0^{+\infty} \sum_{k \geq 0} a_k r^{k+n+1} e^{-\alpha r^2} \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta} d\theta dr.
\end{aligned}$$

Observem que la integral només és diferent de zero quan $k = n$. Tenint en compte això i fent el canvi $u = \alpha r^2$

$$\begin{aligned}
\langle f, e_n \rangle_\alpha &= \frac{\alpha}{\pi} \sqrt{\frac{\alpha^n}{n!}} a_n \int_0^{+\infty} r^{2n+1} e^{-\alpha r^2} \int_0^{2\pi} d\theta dr = 2\alpha \sqrt{\frac{\alpha^n}{n!}} a_n \int_0^{+\infty} (r^2)^n r e^{-\alpha r^2} dr \\
&= \frac{1}{\alpha^n} \sqrt{\frac{\alpha^n}{n!}} a_n \int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du = \frac{1}{\alpha^n} \sqrt{\frac{\alpha^n}{n!}} a_n \Gamma(n+1) = \frac{n!}{\alpha^n} \sqrt{\frac{\alpha^n}{n!}} a_n = \sqrt{\frac{n!}{\alpha^n}} a_n.
\end{aligned}$$

Finalment, com que estem suposant que $\langle f, e_n \rangle_\alpha = 0$, obtenim que $a_n = 0$. I degut al fet que això passa per a qualsevol $n \geq 0$, resulta que $f \equiv 0$. $\square$

Corol·lari 3.10. *Les sumes parcials de la sèrie de Taylor de cada funció $f \in F^2_\alpha$ convergeixen a f en la norma de F^2_α. En particular, els polinomis són densos en F^2_α.*

Demostració. Sigui $f(z) = \sum_{n\geq 1} a_n z^n$. A la Proposició 3.9 hem vist que $\langle f, e_n \rangle_\alpha = \sqrt{\frac{n!}{\alpha^n}} a_n$ i que $\{e_n\}_n$ és base ortonormal de manera que per a qualsevol $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{N} \langle f, e_n \rangle_\alpha e_n(z) = \sum_{n=1}^{N} a_n z^n \to f \in F^2_\alpha.$$

$\square$

Càlcul del nucli reproductor

Fixada $w \in \mathbb{C}$, considerem el funcional lineal $\phi_w : F^2_\alpha \to \mathbb{C}$ definit per $\phi_w(f) = f(w)$. En particular, l'estimació puntual calculada anteriorment ens diu que ϕ_w és acotat en F^2_α. Aleshores, pel Teorema de Representació de Riesz 2.16, existeix una única funció $K_w \in F^2_\alpha$ tal que verifica

$$f(w) = \langle f, K_w \rangle_\alpha, \quad f \in F^2_\alpha.$$

Definició 3.11. *Anomenarem a la funció $K_\alpha(z, w) = K_w(z)$ **nucli reproductor** de F^2_α.*

Lema 3.12. *Per a totes $\zeta, w \in \mathbb{C}$, tenim que $\overline{K_\alpha(w, \zeta)} = K_\alpha(\zeta, w)$.*

Demostració. Donada $w \in \mathbb{C}$, considerem $f(\zeta) = K_\alpha(\zeta, w)$ de manera que

$$\begin{aligned} K_\alpha(\zeta, w) = f(\zeta) = \langle f, K_\zeta \rangle_\alpha = \langle K_w, K_\zeta \rangle_\alpha &= \int_{\mathbb{C}} K_\alpha(z, w)\overline{K_\alpha(z, \zeta)} d\lambda_\alpha(z) \\ = \overline{\int_{\mathbb{C}} \overline{K_\alpha(z, w)} K_\alpha(z, \zeta) d\lambda_\alpha(z)} &= \overline{\int_{\mathbb{C}} K_\alpha(z, \zeta)\overline{K_\alpha(z, w)} d\lambda_\alpha(z)} \\ = \overline{\int_{\mathbb{C}} K_\zeta(z)\overline{K_w(z)} d\lambda_\alpha(z)} &= \overline{\langle K_\zeta, K_w \rangle_\alpha} = \overline{K_\zeta(w)} = \overline{K(w, \zeta)}. \end{aligned}$$

$\square$

La següent Proposició calcula el nucli reproductor que busquem.

Proposició 3.13. *El nucli reproductor de F^2_α és*

$$K_\alpha(z, w) = e^{\alpha z \overline{w}}, \quad z, w \in \mathbb{C}. \tag{3.3}$$

Demostració. Sabent que $\{e_n\}_n$ és una base ortonormal de F^2_α, aleshores podem escriure $K_\alpha(z, \zeta) = \sum_{n\geq 0} c_n e_n(z)$ i pel Lema 3.12 tenim que

$$\begin{aligned} \overline{c_n} = \overline{\langle K_\alpha(\cdot, \zeta), e_n \rangle_\alpha} = \overline{\int_{\mathbb{C}} K_\alpha(z, \zeta)\overline{e_n(z)} d\lambda_\alpha(z)} &= \int_{\mathbb{C}} \overline{K_\alpha(z, \zeta)} e_n(z) d\lambda_\alpha(z) \\ &= \int_{\mathbb{C}} e_n(z) K_\alpha(\zeta, z) d\lambda_\alpha(z) = e_n(\zeta), \end{aligned}$$

en altres paraules, $c_n = \overline{e_n(\zeta)}$. Així doncs, substituint en K_α obtenim

$$\begin{aligned} K_\alpha(z,\zeta) = \sum_{n\geq 0} c_n e_n(z) = \sum_{n\geq 0} \overline{e_n(\zeta)} e_n(z) &= \sum_{n\geq 0} \sqrt{\frac{\alpha^n}{n!}} \overline{\zeta^n} \sqrt{\frac{\alpha^n}{n!}} z^n \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha^n}{n!} (\overline{\zeta} z)^n = \sum_{n\geq 0} \frac{(\alpha \overline{\zeta} z)^n}{n!} = e^{\alpha z \overline{\zeta}}. \end{aligned}$$

Per tant $K_\alpha(z,\zeta) = e^{\alpha z \overline{\zeta}}$, com volíem demostrar. □

Recordem que tot subespai tancat X d'un espai de Hilbert H té una única projecció ortogonal $P : X \to H$. En particular, com que F^2_α és un subespai tancat de L^2_α, aleshores existeix una única $P_\alpha : L^2_\alpha \to F^2_\alpha$ tal que per a tota $f \in F^2_\alpha$,

(a) $P_\alpha f = f$;

(b) $f = P_\alpha(f) + Q(f)$ on $\langle P_\alpha(f), Q(f) \rangle_\alpha = 0$;

(c) P_α és **autoadjunt**: $\langle P_\alpha f, g \rangle_\alpha = \langle f, P_\alpha g \rangle_\alpha$.

A continuació, veurem que P_α és un operador integral donat pel nucli reproductor K_α definit anteriorment.

Proposició 3.14. *Per a tota $f \in L^2_\alpha$ i per a tota $z \in \mathbb{C}$, tenim que*

$$P_\alpha f(z) = \int_{\mathbb{C}} K_\alpha(z,w) f(w) d\lambda_\alpha(w). \tag{3.4}$$

Demostració. Fixem $f \in L^2_\alpha$ i $z \in \mathbb{C}$. Aleshores, donat que P_α és una projecció autoadjunta i aplicant el Lema 3.12 deduïm que

$$\begin{aligned} P_\alpha f(z) = \langle P_\alpha f, K_z \rangle_\alpha = \langle f, P_\alpha K_z \rangle_\alpha &= \int_{\mathbb{C}} f(w) \overline{K_z(w)} d\lambda_\alpha(w) \\ = \int_{\mathbb{C}} f(w) \overline{K_\alpha(w,z)} d\lambda_\alpha(w) = \int_{\mathbb{C}} f(w) K_\alpha(z,w) d\lambda_\alpha(w) &= \int_{\mathbb{C}} K_\alpha(z,w) f(w) d\lambda_\alpha(w). \end{aligned}$$

□

Observació 3.15. Per a tota $z \in \mathbb{C}$, definim el nucli reproductor normalitzat en z com

$$k_z(w) = \frac{K_\alpha(w,z)}{\sqrt{K_\alpha(z,z)}} = e^{\alpha \overline{z} w - \frac{\alpha}{2}|z|^2}. \tag{3.5}$$

En particular, cada k_z és un vector unitari de F^2_α.

Acabem la secció amb un Corol·lari que ens serà útil al capítol quatre.

Corol·lari 3.16. *Siguin $\alpha > 0$ i $\beta \in \mathbb{R}$. Aleshores,*

$$\int_{\mathbb{C}} \left| e^{\beta z \overline{a}} \right| d\lambda_\alpha(z) = e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}|a|^2}, \quad a \in \mathbb{C}.$$

Demostració. Considerem $b \in \mathbb{C}$. Per la definició del nucli reproductor, és fàcil veure que

$$K_\alpha(b,b) = \int_{\mathbb{C}} |K_\alpha(b,z)|^2 \, d\lambda_\alpha(z) \Longleftrightarrow e^{\alpha b \overline{b}} = \int_{\mathbb{C}} \left| e^{\alpha b \overline{z}} \right|^2 d\lambda_\alpha(z),$$

i fent el canvi $b = \frac{\beta a}{2\alpha}$ obtindrem el que volem. En efecte,

$$e^{\frac{\beta a}{2} \frac{\beta}{2\alpha} \overline{a}} = \int_{\mathbb{C}} \left| e^{\frac{\beta a}{2} \overline{z}} \right|^2 d\lambda_\alpha(z) \Longleftrightarrow e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}|a|^2} = \int_{\mathbb{C}} \left| e^{\beta a \overline{z}} \right| d\lambda_\alpha(z).$$

□

3.2 L'espai de Fock F^p_α

En aquesta secció definirem els espais de Fock F^p_α per a tota $p > 0$. Si $\alpha > 0$ i $0 < p < +\infty$, denotem L^p_α l'espai de funcions mesurables de Lebesgue f en $\mathbb{C}$ tals que

$$||f||^p_{L^p_\alpha} = \frac{p\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} \left|f(z)e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}\right|^p dA(z) < +\infty. \tag{3.6}$$

Observem que $L^p_\alpha = L^p(\mathbb{C}, d\lambda_{\frac{p\alpha}{2}}) \neq L^p(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$ si $p \neq 2$.

Definició 3.17. *Si $\alpha > 0$ i $0 < p < +\infty$, anomenarem **espai de Fock** F^p_α a l'espai de funcions enteres de L^p_α. A més, si $p = +\infty$, F^∞_α és l'espai de funcions enteres f tals que*

$$||f||_{F^\infty_\alpha} = \sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} < +\infty. \tag{3.7}$$

A continuació, donarem exemples de funcions de F^p_α per a $0 < p < +\infty$. Els tres primers es demostren de manera anàloga al cas $p = 2$, i els altres dos els farem servir més endavant per estudiar els conjunts de zeros de F^p_α.

Exemples 3.18. (1) Tot polinomi holomorf pertany a F^p_α.

(2) Per a tota $w \in \mathbb{C}$, tenim que $f(z) = e^{\alpha z\overline{w}} \in F^p_\alpha$.

(3) Donades $w \in \mathbb{C}$ i $f \in F^p_\alpha$, llavors $F(z) = f(z-w)e^{\alpha w\overline{z} - \frac{\alpha}{2}|z|^2} \in F^p_\alpha$.

(4) Per a tota $\delta < \frac{\alpha}{2}$, es compleix que $f(z) = e^{\delta z^2} \in F^p_\alpha$.

(5) Per a tota $\delta < \frac{\alpha}{2}$, es satisfà que $f(z) = \frac{\sin \delta z^2}{\delta z^2} \in F^p_\alpha$.

Demostració. Provem (4). Donat que estem considerant $\delta < \frac{\alpha}{2}$, és fàcil veure que

$$\begin{aligned} ||f||^p_{F^p_\alpha} = \frac{p\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} \left|e^{\delta z^2}\right|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}|z|^2} dA(z) &\leq \frac{p\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} e^{p\delta|z|^2} e^{-\frac{p\alpha}{2}|z|^2} dA(z) \\ &\leq \frac{p\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} e^{p(\delta-\frac{\alpha}{2})|z|^2} dA(z) < +\infty. \end{aligned}$$

Ara provem (5). Notem que es tracta d'una funció entera perquè $sinz$ té un zero simple en $z = 0$. Aleshores, com que per a tot compacte $f(z)e^{-\alpha|z|^2}$ està acotada, només cal comprovar que la integral convergeix en $|z| \geq 1$. En efecte,

$$\begin{aligned} &\int_{|z|\geq 1} \left|\frac{\sin \delta z^2}{\delta z^2}\right|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}|z|^2} dA(z) = \int_{|z|\geq 1} \left|\frac{e^{i\delta z^2} - e^{-i\delta z^2}}{2\delta z^2}\right|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}|z|^2} dA(z) \\ &\leq \frac{2}{(2\delta)^p}\int_{|z|\geq 1} \frac{e^{p\delta|z|^2}}{|z|^2} e^{-\frac{p\alpha}{2}|z|^2} dA(z) \leq \frac{2}{(2\delta)^p}\int_{|z|\geq 1} e^{p\left(\delta-\frac{\alpha}{2}\right)|z|^2} dA(z) < +\infty, \end{aligned}$$

ja que en aquest cas també estem considerant que $\delta < \frac{\alpha}{2}$. □

De manera anàloga a la demostració de l'exemple (5) tenim el Lema següent.

Lema 3.19. *Sigui $f \in F^p_\alpha$ i suposem que $z_0 = 0$ és un zero de f amb multiplicitat $m > 0$. Aleshores, $\frac{f(z)}{z^m} \in F^p_\alpha$ i no s'anul·la a l'origen.*

Demostració. Si posem $F(z) = \frac{f(z)}{z^m}$, llavors

$$\begin{aligned}||F||^p_{F^p_\alpha} &= \frac{p\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}}\left|\frac{f(z)}{z^m}\right|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}|z|^2}dA(z) = \frac{p\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}}\frac{|f(z)|^p}{|z|^{mp}}e^{-\frac{p\alpha}{2}|z|^2}dA(z)\\ &= \frac{p\alpha}{2\pi}\int_{|z|<1}\frac{|f(z)|^p}{|z|^{mp}}e^{-\frac{p\alpha}{2}|z|^2}dA(z) + \frac{p\alpha}{2\pi}\int_{|z|>1}\frac{|f(z)|^p}{|z|^{mp}}e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}dA(z).\end{aligned}$$

Notem que la integral de l'esquerra és finita donat que $F(z)$ és una funció entera. D'altra banda, també és fàcil veure que per la integral de la dreta tenim que

$$\int_{|z|>1}\frac{|f(z)|^p}{|z|^{mp}}e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}dA(z) \le \int_{|z|>1}|f(z)|^p e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}dA(z) \le ||f||^p_{F^p_\alpha} < +\infty$$

degut al fet que $f \in F^p_\alpha$. □

Seguidament, obtenim una estimació puntual per a les funcions de F^p_α anàloga al cas $p = 2$ que hem vist a l'anterior secció.

Teorema 3.20. ***(Estimació puntual)*** *Sigui $0 < p \le +\infty$. Aleshores, per a tota $f \in F^p_\alpha$*

$$|f(z)| \le ||f||_{F^p_\alpha} e^{\frac{\alpha}{2}|z|^2}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{3.8}$$

Demostració. Estudiem primer el cas en el qual $0 < p < +\infty$. Pel Teorema 2.24 tenim que $|f|^p$ és subharmònica, de manera que per $z = 0$ i $r > 0$ obtenim

$$|f(0)|^p \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta.$$

Multiplicant per $re^{-\frac{p\alpha}{2}r^2}$ en ambdós costats

$$|f(0)|^p re^{-\frac{p\alpha}{2}r^2} \le \frac{1}{2\pi}re^{-\frac{p\alpha}{2}r^2}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta,$$

integrant respecte r en l'interval $(0, +\infty)$

$$|f(0)|^p\int_0^{+\infty}re^{-\frac{p\alpha}{2}r^2}dr \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p re^{-\frac{p\alpha}{2}r^2}d\theta dr,$$

i fent el canvi $w = re^{i\theta}$ obtenim que

$$|f(0)|^p\frac{1}{p\alpha} \le \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{C}}|f(w)|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}|z|^2}dA(w).$$

Per tant,

$$|f(0)|^p \le ||f||^p_{F^p_\alpha}.$$

Ara volem veure què passa a la resta de punts i per veure-ho considerarem la funció $F(w) = f(z-w)e^{\alpha w\bar{z} - \frac{\alpha}{2}|z|^2}$ per a tota $z \in \mathbb{C}$ i per a tota $f \in F^p_\alpha$. Acabem de provar que $|F(0)|^p \le ||F||^p_{F^p_\alpha}$ i pel Lema 3.5 sabem que $||F||_{F^p_\alpha} = ||f||_{F^p_\alpha}$, de manera que

$$||f||^p_{F^p_\alpha} = ||F||^p_{F^p_\alpha} \ge |F(0)|^p = \left|f(z-0)e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}\right|^p = |f(z)|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}|z|^2},$$

i deduïm que $|f(z)| \leq ||f||_{F^p_\alpha} e^{\frac{\alpha}{2}|z|^2}$, com volíem demostrar.

Finalment, per la definició de la norma de F^∞_α, és clar que també es compleix aquesta l'estimació puntual quan $p = +\infty$. $\square$

Proposició 3.21. *(a) Si $0 < p < 1$, F^p_α és un espai mètric complet.*

(b) Si $1 \leq p \leq +\infty$, F^p_α és un espai de Banach.

La demostració d'aquesta proposició també és anàloga a la feta per a $p = 2$.

Ara, provarem la densitat dels polinomis holomorfs en F^p_α per a $0 < p < +\infty$. En el capítol següent, n'obtindrem una demostració alternativa per a $1 \leq p < +\infty$ com a conseqüència de l'acotació de l'operador P_α.

Proposició 3.22. *Sigui $0 < p < +\infty$. Llavors, els polinomis holomorfs són densos en F^p_α, és a dir, per a tota $f \in F^p_\alpha$, existeix una successió de polinomis holomorfs tals que*

$$||p_n - f||_{F^p_\alpha} \to 0, \quad n \to +\infty.$$

Demostració. La demostració d'aquesta proposició es basa en els següents dos passos:

(a) $||f_r - f||_{F^p_\alpha} \to 0$, si $r \to 1^-$ i $f_r(z) = f(rz)$.

(b) Per a cada $0 < r < 1$, existeix $(p_n)_n$ successió de polinomis tal que $||p_n - f_r||_{F^p_\alpha} \to 0$ quan $n \to +\infty$.

Comencem provant (a). Fixem $f \in F^p_\alpha$ i observem que

$$\begin{aligned} ||f_r||^p_{F^p_\alpha} = \frac{p\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} |f(rz)|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}|z|^2} dA(z) &= \frac{p\alpha}{2\pi r^2}\int_{\mathbb{C}} |f(w)|^p e^{-\frac{p\alpha}{2r^2}|w|^2} dA(w) \\ &= \frac{p\alpha}{2\pi r^2}\int_{\mathbb{C}} \left| f(w) e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2}\right|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}|w|^2(r^{-2}-1)} dA(w). \end{aligned}$$

Però resulta que, per a qualsevol $r \in (0,1)$, $r^{-2} - 1 > 0$ i per tant per a tota $w \in \mathbb{C}$ $e^{-\frac{p\alpha}{2}|w|^2(r^{-2}-1)} \leq 1$. En altres paraules,

$$\left| f(w) e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2}\right|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}|w|^2(r^{-2}-1)} \leq \left| f(w) e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2}\right|^p \in L^1(dA(w)).$$

Així doncs, pel Teorema de la convergència dominada de Lebesgue 2.4 obtenim que $||f_r||_{F^p_\alpha} \to ||f||_{F^p_\alpha}$ quan $r \to 1^-$. I finalment, aplicant la Proposició 2.10 resulta que $||f_r - f||_{F^p_\alpha} \to 0$.

Ara, podem provar (b) utilitzant l'apartat anterior veient que, per a tota $r \in (0,1)$, la funció f_r es pot aproximar pels seus polinomis de Taylor en la norma de F^p_α. Primer de tot, donades $r \in (0,1)$ i $\beta \in (r^2\alpha, \alpha)$, notem que $f_r \in F^2_\beta$. En efecte, d'una banda, per l'apartat (b) del Lema 3.5 sabem que $f_r \in F^p_{r^2\alpha}$ i $||f_r||_{F^2_{r^2\alpha}} = ||f||_{F^2_\alpha}$. D'altra banda, per l'estimació puntual tenim que

$$|f_r(z)| \leq ||f_r||_{F^p_{r^2\alpha}} e^{\frac{r^2\alpha}{2}|z|^2} \Longleftrightarrow |f_r(z)|^2 \leq ||f||^2_{F^p_\alpha} e^{r^2\alpha|z|^2},$$

i per tant

$$||f_r||^2_{F^2_\beta} = \frac{\beta}{\pi}\int_{\mathbb{C}} |f(rz)|^2 e^{-\beta|z|^2} dA(z) \leq \frac{\beta}{\pi}||f||^2_{F^p_\alpha}\int_{\mathbb{C}} e^{r^2\alpha|z|^2} e^{-\beta|z|^2} dA(z) < +\infty,$$

ja que $f \in F^p_\alpha$ i $r^2\alpha - \beta < 0$. Veiem ara que $F^2_\beta \subset F^p_\alpha$. És a dir, volem provar que existeix una constant $C > 0$ tal que per a tota $g \in F^2_\beta$ es compleix que $||g||_{F^p_\alpha} \leq C||g||_{F^2_\beta}$. Suposem primer que $p < 2$. Si $g \in F^2_\beta$,

$$||g||^p_{F\alpha^p} = \frac{p\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} |g(z)|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}|z|^2} dA(z) = \frac{p\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} |g(z)|^p e^{\frac{-p\beta}{2}|z|^2} e^{\frac{\beta-\alpha}{2}p|z|^2} dA(z).$$

Donat que $\frac{2}{p} > 1$, podem aplicar la Desigualtat de Hölder 2.7 per al parell $\frac{2}{p}$ i l'exponent conjugat $\frac{2}{2-p} > 1$ de manera que

$$\begin{aligned}
||g||^p_{F^p_\alpha} &\leq \frac{p\alpha}{2\pi}\left(\int_{\mathbb{C}} \left||g(z)|^p e^{\frac{-p\beta}{2}|z|^2}\right|^{\frac{2}{p}} dA(z)\right)^{\frac{p}{2}} \left(\int_{\mathbb{C}} \left|e^{\frac{\beta-\alpha}{2}p|z|^2}\right|^{\frac{2}{2-p}} dA(z)\right)^{\frac{2-p}{2}} \\
&\leq \frac{p\alpha}{2\pi}\left(\int_{\mathbb{C}} |g(z)|^2 e^{-\beta|z|^2} dA(z)\right)^{\frac{p}{2}} \left(\int_{\mathbb{C}} e^{\frac{\beta-\alpha}{2-p}|z|^2} dA(z)\right)^{\frac{2-p}{2}} \\
&\leq \frac{p\alpha}{2\pi}\left(\frac{\pi}{\beta}\int_{\mathbb{C}} |g(z)|^2 d\lambda_\beta(z)\right)^{\frac{p}{2}} \left(\int_{\mathbb{C}} e^{\frac{\beta-\alpha}{2-p}|z|^2} dA(z)\right)^{\frac{2-p}{2}}.
\end{aligned}$$

Observem que la integral de l'esquerra és igual a $||g||^2_{F^2_\beta}$ i que la de la dreta és finita ja que $\frac{\beta-\alpha}{2-p} < 0$. Així doncs, existeix una constant $C > 0$ tal que

$$||g||^p_{F^p_\alpha} \leq C^p ||g||^p_{F^2_\beta} \iff ||g||_{F^p_\alpha} \leq C||g||_{F^2_\beta}.$$

Veiem ara què passa en el cas que $p \geq 2$. Fent servir l'estimació puntual resulta que

$$||g||^p_{F^p_\alpha} = \frac{p\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} |g(z)|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}|z|^2} dA(z) \leq ||g||^p_{F^2_\beta} \frac{p\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} e^{\frac{\beta-\alpha}{2}p|z|^2} dA(z).$$

I com que la integral de la dreta és finita, llavors existeix una constant $C > 0$ tal que

$$||g||^p_{F^p_\alpha} \leq C^p ||g||^p_{F^2_\beta} \iff ||g||_{F^p_\alpha} \leq C||g||_{F^2_\beta}.$$

Finalment, si p_n és l'enèssim polinomi de Taylor de f_r, aplicant la desigualtat que acabem d'obtenir i la Proposició 3.9, deduïm que

$$||f_r - p_n||_{F^p_\alpha} \leq C||f_r - p_n||_{F^2_\beta} \to 0.$$

□

El següent objectiu és estudiar les inclusions entre els espais F^p_α que serà una conseqüència de l'estimació puntual. Per fer-ho, primer hem de definir els espais f^∞_α.

Definició 3.23. *Definim **l'espai de Fock** f^∞_α l'espai de funcions enteres f tals que*

$$\lim_{|z|\to+\infty} f(z)e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} = 0. \tag{3.9}$$

Lema 3.24. *f_α^∞ és un subespai tancat de F_α^∞.*

Demostració. Per provar-ho, hem de veure que si $f_n \in f_\alpha^\infty$ i $f_n \to f$ en F_α^∞ per a tota $n \in \mathbb{N}$, llavors $f \in f_\alpha^\infty$.

D'una banda, donat que $f_n \to f$ en F_α^∞, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que per a tota $n \geq n_0$ $|f(z) - f_n(z)|e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} < \frac{\epsilon}{2}$. D'altra banda, com que $f_{n_0} \in f_\alpha^\infty$, existeix una constant $M > 0$ tal que $|f_{n_0}(z)| < \frac{\epsilon}{2}$ quan $|z| > M$. Aleshores, utilitzant la desigualtat triangular

$$|f(z)|e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} \leq |f(z) - f_{n_0}(z)|e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} + |f_{n_0}(z)|e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Per tant, $f \in f_\alpha^\infty$. $\square$

Teorema 3.25. *Si $0 < p < q < +\infty$, llavors es verifica que $F_\alpha^p \subset F_\alpha^q$ i $F_\alpha^p \subset f_\alpha^\infty$. A més, aquestes inclusions són estrictes.*

Demostració. Siguin $0 < p < q < +\infty$ i f una funció entera. Primer de tot, notem que per l'estimació puntual tenim que

$$\begin{aligned}||f||_{F_\alpha^q}^q = \frac{q\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^q e^{-\frac{q\alpha}{2}|z|^2} dA(z) = \frac{q\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^p |f(z)|^{q-p} e^{-\frac{q\alpha}{2}|z|^2} dA(z)\\ \leq ||f||_{F_\alpha^p}^{q-p}\frac{q\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^p e^{\frac{\alpha}{2}(q-p)|z|^2} e^{-\frac{q\alpha}{2}|z|^2} dA(z) = ||f||_{F_\alpha^p}^{q-p}\frac{q\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}|z|^2} dA(z)\\ = ||f||_{F_\alpha^p}^{q-p}\frac{q}{p}||f||_{F_\alpha^p}^p = \frac{q}{p}||f||_{F_\alpha^p}^q,\end{aligned}$$

i per tant

$$||f||_{F_\alpha^q} = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} ||f||_{F_\alpha^p}.$$

És a dir, $F_\alpha^p \subset F_\alpha^q$. Ara volem veure que aquesta inclusió és estricte per reducció a l'absurd. Suposem que $F_\alpha^p = F_\alpha^q$ de manera que l'aplicació identitat és acotada i bijectiva. Aleshores, pel Teorema de l'Aplicació Oberta 2.13, existeix una constant $C > 0$ tal que per a tota $f \in F_\alpha^p$ tenim que

$$\frac{1}{C}||f||_{F_\alpha^p} \leq ||f||_{F_\alpha^q} \leq C||f||_{F_\alpha^p}. \tag{3.10}$$

Agafem $z^n \in F_\alpha^p$ i observem usant la Fórmula de Stirling que

$$\begin{aligned}||z^n||_{F_\alpha^p}^p = \frac{p\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} |z|^{np} e^{\frac{-p\alpha}{2}|z|^2} dA(z) = \frac{p\alpha}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} r^{np+1} e^{\frac{-p\alpha}{2}r^2} d\theta dr\\ = p\alpha\int_0^{+\infty} r^{np+1} e^{\frac{-p\alpha}{2}r^2} dr = \int_0^{+\infty}\left(\frac{2t}{p\alpha}\right)^{\frac{np}{2}} e^{-t}dt = \left(\frac{2}{p\alpha}\right)^{\frac{np}{2}}\int_0^{+\infty} t^{\frac{np}{2}} e^{-t}dt\\ = \left(\frac{2}{p\alpha}\right)^{\frac{np}{2}}\Gamma\left(\frac{np}{2}+1\right) \approx \left(\frac{2}{p\alpha}\right)^{\frac{np}{2}} e^{\frac{-np}{2}}\left(\frac{np}{2}\right)^{\frac{np}{2}}\left(2\pi\frac{np}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\\ = \left(\frac{n}{e\alpha}\right)^{\frac{np}{2}}(np\pi)^{\frac{1}{2}} \approx \left(\frac{n}{e\alpha}\right)^{\frac{np}{2}} n^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

En altres paraules, $||z^n||_{F_\alpha^p} \approx \left(\frac{n}{e\alpha}\right)^{\frac{n}{2}} n^{\frac{1}{2p}}$. Aleshores, per la desigualtat (3.10) obtenim que

$$\frac{1}{C}\left(\frac{n}{e\alpha}\right)^{\frac{n}{2}} n^{\frac{1}{2p}} \leq \left(\frac{n}{e\alpha}\right)^{\frac{n}{2}} n^{\frac{1}{2q}} \leq C\left(\frac{n}{e\alpha}\right)^{\frac{n}{2}} n^{\frac{1}{2p}} \iff \frac{1}{C}n^{\frac{1}{2p}} \leq n^{\frac{1}{2q}} \leq Cn^{\frac{1}{2p}},$$

i per tant

$$\frac{1}{C^{2p}} n \leq n^{\frac{p}{q}} \leq C^{2p} n,$$

cosa que no pot ser ja que $n^{\frac{p}{q}} \to 0$ quan $n \to +\infty$. Així doncs, $F^p_\alpha \subsetneq F^q_\alpha$.

Ara volem veure que també es satisfà $F^p_\alpha \subset f^\infty_\alpha$. Per començar, és senzill observar que

(1) $F^p_\alpha \subset F^\infty_\alpha$ per l'estimació puntual;

(2) f^∞_α conté els polinomis ja que, per $n \geq 0$, $|z|^n e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} \to 0$ quan $|z| \to +\infty$.

Aleshores, com que els polinomis són densos en F^p_α per la Proposició 3.22, existeix una successió $(p_n)_n$ de polinomis holomorfs tal que $p_n \to f$ en F^p_α. D'una banda, per (1) tenim que $p_n \to f$ en F^∞_α. D'altra banda, fent servir (2) i el Lema 3.24, obtenim que $f \in f^\infty_\alpha$ i per tant $F^p_\alpha \subset f^\infty_\alpha$. Finalment, només ens queda comprovar que també es tracta d'una inclusió estricta. Utilitzant càlculs elementals, deduïm que per a tota $n \in \mathbb{N}$

$$||z^n||_{F^\infty_\alpha} = \sup_{z \in \mathbb{C}} |z|^n e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} = \left(\frac{n}{e\alpha}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Suposem que $F^p_\alpha = F^\infty_\alpha$ i, aplicant Teorema de l'Aplicació Oberta 2.13 un altre vegada, existeix una constant $C > 0$ tal que $\frac{1}{C}||z^n||_{F^p_\alpha} \leq ||z^n||_{F^\infty_\alpha} \leq C||z^n||_{F^p_\alpha}$. Conseqüentment,

$$\frac{1}{C}\left(\frac{n}{e\alpha}\right)^{\frac{n}{2}} n^{\frac{1}{2p}} \leq \left(\frac{n}{e\alpha}\right)^{\frac{n}{2}} \leq C\left(\frac{n}{e\alpha}\right)^{\frac{n}{2}} n^{\frac{1}{2p}} \iff \frac{1}{C} n^{\frac{1}{2p}} \leq 1 \leq C n^{\frac{1}{2p}},$$

i fent $n \to +\infty$ arribem a contradicció. Per tant, $F^p_\alpha \subsetneq f^\infty_\alpha$ és una inclusió estricte. □

Per acabar aquest capítol, veurem el creixement de les funcions enteres que també ens servirà per poder estudiar els conjunts de zeros dels espais de Fock F^p_α més endavant.

Teorema 3.26. *Siguin $0 < p < +\infty$ i $f \in F^p_\alpha$. Aleshores, la funció f és d'ordre més petit o igual que 2. En particular, si f és d'ordre 2, llavors f ha de ser de tipus més petit o igual que $\frac{\alpha}{2}$.*

Demostració. Sigui $f \in F^p_\alpha$. Per l'estimació puntual, sabem que per a tota $z \in \mathbb{C}$ existeix una constant $C > 0$ tal que $|f(z)| \leq Ce^{\frac{\alpha}{2}|z|^2}$. Aleshores, per a tota $r > 0$

$$M(r) := \sup_{|z|=r} |f(z)| \leq \sup_{|z|=r} Ce^{\frac{\alpha}{2}|z|^2} = Ce^{\frac{\alpha}{2}r^2}.$$

En particular, $\log M(r) \leq \log Ce^{\frac{\alpha}{2}r^2} = \log C + \frac{\alpha r^2}{2}$ de manera que tenim

$$\frac{\log(\log M(r))}{\log r} \leq \frac{\log\left(\log C + \frac{\alpha r^2}{2}\right)}{\log r}.$$

Aplicant la Regla de l'Hôpital deduïm que f és d'ordre $\rho \leq 2$, ja que

$$\frac{\frac{\alpha r}{\left(\log C + \frac{\alpha r^2}{2}\right)}}{\frac{1}{r}} = \frac{\alpha r^2}{\left(\log C + \frac{\alpha r^2}{2}\right)} \to 2, \quad r \to +\infty.$$

D'altra banda, si suposem que $\rho = 2$ tenim que

$$\frac{\log M(r)}{r^2} \leq \frac{\log C + \frac{\alpha r^2}{2}}{r^2} \to \frac{\alpha}{2}, \quad r \to +\infty$$

i per tant f és de tipus $\sigma \leq \frac{\alpha}{2}$. □

4 L'acotació dels operadors P_α i Q_α en els espais L^p_α

Hem vist que $P_\alpha : L^2_\alpha \to F^2_\alpha$ és una projecció ortogonal i per tant acotada. En aquest capítol estudiarem l'acotació de l'operador P_α per a altres valors de p, en concret pels valors $1 \leq p < +\infty$.

En el primer Lema que veurem comprovarem que P_α, inicialment definit sobre L^2_α, està també definit per a $p \geq 1$ i defineix una funció entera.

Lema 4.1. *Siguin $1 \leq p < +\infty$ i $f \in L^p_\alpha$. Aleshores,*

(a) les aplicacions $z \in \mathbb{C} \mapsto \int_{\mathbb{C}} K_\alpha(z,w)f(w)d\lambda_\alpha(w)$ i $z \in \mathbb{C} \mapsto \int_{\mathbb{C}} |K_\alpha(z,w)|f(w)d\lambda_\alpha(w)$ estan ben definides;

(b) Si $P_\alpha f(z) := \int_{\mathbb{C}} K_\alpha(z,w)f(w)d\lambda_\alpha(w) \in L^p_\alpha$, llavors $P_\alpha f$ és una funció entera.

Demostració. Per a demostrar ambdues parts, farem ús de la Desigualtat de Hölder 2.7 per al parell p i el seu exponent conjugat $q = \frac{p}{p-1} > 1$.

Provem (a). Observem que per a $z \in \mathbb{C}$

$$I = \left| \int_{\mathbb{C}} K_\alpha(z,w)f(w)d\lambda_\alpha(w) \right| \leq \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} |e^{\alpha z\overline{w}}||f(w)|e^{-\alpha|w|^2}dA(w)$$

$$= \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} e^{\alpha Re(z\overline{w})}|f(w)|e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2}e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2}dA(w) = \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} |f(w)|e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2}e^{\alpha Re(z\overline{w})-\frac{\alpha}{2}|w|^2}dA(w),$$

i aplicant la Desigualtat de Hölder 2.7 obtenim que

$$I \leq \left(\int_{\mathbb{C}} \left| |f(w)|e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2} \right|^p dA(w) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{C}} \left| e^{\alpha Re(z\overline{w})-\frac{\alpha}{2}|w|^2} \right|^{\frac{p}{p-1}} dA(w) \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$= \left(\int_{\mathbb{C}} |f(w)|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}|w|^2}dA(w) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{C}} e^{\frac{p\alpha}{p-1}Re(z\overline{w})-\frac{p\alpha}{2(p-1)}|w|^2}dA(w) \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$= \left(\frac{2\pi}{p\alpha} \right)^{\frac{1}{p}} ||f||^{\frac{1}{p}}_{F^p_\alpha} \left(\int_{\mathbb{C}} e^{\frac{p\alpha}{p-1}Re(z\overline{w})-\frac{p\alpha}{2(p-1)}|w|^2}e^{-\frac{p\alpha}{2(p-1)}|z|^2}e^{\frac{p\alpha}{2(p-1)}|z|^2}dA(w) \right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$= \left(\frac{2\pi}{p\alpha} \right)^{\frac{1}{p}} ||f||^{\frac{1}{p}}_{F^p_\alpha} \left(\int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{p\alpha}{2(p-1)}|z-w|^2}dA(w) \right)^{\frac{p-1}{p}} e^{\frac{\alpha}{2}|z|^2}.$$

Com que la integral resultant és finita, existeix una constant $C > 0$ tal que

$$\left| \int_{\mathbb{C}} K_\alpha(z,w)f(w)d\lambda_\alpha(w) \right| \leq C||f||_{F^p_\alpha},$$

i per tant podem definir, per a tota $z \in \mathbb{C}$, $P_\alpha f(z) := \int_{\mathbb{C}} K_\alpha(z,w)f(w)d\lambda_\alpha(w)$. Equivalentment, podem veure que $\int_{\mathbb{C}} |K_\alpha(z,w)|f(w)d\lambda_\alpha(w)$ també està ben definida per a tota $z \in \mathbb{C}$.

Ara provarem (b) aplicant el Teorema de Morera 2.20. Comencem veient que $P_\alpha f$ és contínua en $\mathbb{C}$, comprovant que si $(z_n)_n \subset \mathbb{C}$ tal que $z_n \to z$ en $\mathbb{C}$, llavors resulta que

$P_\alpha f(z_n) \to P_\alpha f(z)$ en $\mathbb{C}$. Notem que

$$J = |P_\alpha f(z_n) - P_\alpha f(z)| = \left| \int_{\mathbb{C}} e^{\alpha z_n \overline{w}} f(w) d\lambda_\alpha(w) - \int_{\mathbb{C}} e^{\alpha z \overline{w}} f(w) d\lambda_\alpha(w) \right|$$
$$= \left| \int_{\mathbb{C}} \left(e^{\alpha z_n \overline{w}} - e^{\alpha z \overline{w}} \right) f(w) d\lambda_\alpha(w) \right| \leq \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \left| e^{\alpha z_n \overline{w}} - e^{\alpha z \overline{w}} \right| |f(w)| e^{-\alpha |w|^2} dA(w)$$
$$= \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \left| e^{\alpha z_n \overline{w}} - e^{\alpha z \overline{w}} \right| e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2} |f(w)| e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2} dA(w),$$

i aplicant la Desigualtat de Hölder 2.7 obtenim que

$$J \leq \frac{\alpha}{\pi} \left(\int_{\mathbb{C}} \left| e^{\alpha z_n \overline{w}} - e^{\alpha z \overline{w}} \right|^{\frac{p}{p-1}} e^{-\frac{p\alpha}{2(p-1)}|w|^2} dA(w) \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{C}} |f(w)|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}|w|^2} dA(w) \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{2\pi}{p\alpha} \right)^{\frac{1}{p}} ||f||^{\frac{1}{p}}_{F^p_\alpha} \left(\int_{\mathbb{C}} \left| e^{\alpha z_n \overline{w}} - e^{\alpha z \overline{w}} \right|^{\frac{p}{p-1}} e^{-\frac{p\alpha}{2(p-1)}|w|^2} dA(w) \right)^{\frac{p-1}{p}}$$
$$= \frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{2\pi}{p\alpha} \right)^{\frac{1}{p}} ||f||^{\frac{1}{p}}_{F^p_\alpha} \left(\int_{\mathbb{C}} \left| e^{\alpha z \overline{w}} \right|^{\frac{p}{p-1}} \left| e^{\alpha (z_n - z) \overline{w}} - 1 \right|^{\frac{p}{p-1}} e^{-\frac{p\alpha}{2(p-1)}|w|^2} dA(w) \right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Suposem primer que $|w| \leq M$ per una certa constant $M > 0$ que fixarem després. Sabem que si $|e^z - 1| \to 0$ quan $z \to 0$, llavors existeix $\delta > 0$ tal que $|e^z - 1| < \epsilon$ per a tot $|z| < \delta$. Aleshores, com que $z_n \to z$ per hipòtesi, existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que per a tota $n \geq n_0$

$$|\alpha(z_n - z)\overline{w}| < \delta \Longrightarrow \left| e^{\alpha(z_n - z)\overline{w}} - 1 \right| < \epsilon.$$

Així doncs, tornant a l'última integral obtenim que

$$J_0 = \int_{|w| \leq M} \left| e^{\alpha z \overline{w}} \right|^{\frac{p}{p-1}} \left| e^{\alpha(z_n - z)\overline{w}} - 1 \right|^{\frac{p}{p-1}} e^{-\frac{p\alpha}{2(p-1)}|w|^2} dA(w)$$
$$< \epsilon \int_{|w| \leq M} e^{\left(|z||w| - \frac{|w|^2}{2} \right) \frac{p\alpha}{p-1}} dA(w)$$

i aplicant un canvi a coordenades polars

$$J_0 < 2\pi\epsilon \int_0^{+\infty} e^{\left(|z|r - \frac{r^2}{2} \right) \frac{p\alpha}{p-1}} r dr < +\infty.$$

A més, observem que existeix $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n|, |z| \leq 2|z|$ per a tota $n \geq n_0$, de manera que

$$\int_{\mathbb{C}} \left| e^{\alpha z \overline{w}} \right|^{\frac{p}{p-1}} \left| e^{\alpha(z_n - z)\overline{w}} - 1 \right|^{\frac{p}{p-1}} e^{-\frac{p\alpha}{2(p-1)}|w|^2} dA(w) \leq 2 \int_{\mathbb{C}} e^{\frac{p\alpha}{p-1} k|w|} e^{-\frac{p\alpha}{2(p-1)}|w|^2} dA(w)$$
$$= 2\pi \int_0^{+\infty} e^{\frac{p\alpha}{p-1} kr} e^{-\frac{p\alpha}{2(p-1)} r^2} r dr < +\infty,$$

Aleshores, existeix una constant $M > 0$ tal que si $|w| > M$

$$\int_{|w| > M} \left| e^{\alpha z \overline{w}} \right|^{\frac{p}{p-1}} \left| e^{\alpha(z_n - z)\overline{w}} - 1 \right|^{\frac{p}{p-1}} e^{-\frac{p\alpha}{2(p-1)}|w|^2} dA(w) < \epsilon.$$

Per tant, $P_\alpha f(z_n) \to P_\alpha f(z)$ de manera que $P_\alpha(f)$ és contínua en $\mathbb{C}$.

D'altra banda, si $T \subset \mathbb{C}$ és un triangle, és fàcil veure que la següent integral és finita. En efecte,

$$\int_{\partial T} |P_\alpha f(z)| d\lambda_\alpha(z) = \frac{\alpha}{\pi} \int_{\partial T} \left| \int_{\mathbb{C}} f(w) e^{\alpha z \overline{w}} e^{-\alpha|w|^2} dA(w) \right| dA(z)$$
$$\leq \frac{\alpha}{\pi} \int_{\partial T} \int_{\mathbb{C}} |f(w)| |e^{\alpha z \overline{w}}| e^{-\alpha|w|^2} dA(w) dA(z) < +\infty.$$

Així doncs, pel Teorema de Fubini resulta que

$$\int_{\partial T} P_\alpha f(z) d\lambda_\alpha(z) \leq \frac{\alpha}{\pi} \int_{\partial T} \int_{\mathbb{C}} f(w) e^{\alpha z \overline{w}} e^{-\alpha|w|^2} dA(w) dA(z)$$
$$= \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} f(w) e^{-\alpha|w|^2} \int_{\partial T} e^{\alpha z \overline{w}} dA(z) dA(w) = 0,$$

ja que $\displaystyle\int_{\partial T} e^{\alpha z \overline{w}} dA(z) = 0$. I pel Teorema de Morera 2.20, $P_\alpha(f) \in H(\mathbb{C})$. $\square$

Així doncs, tenim ben definits els següents operadors integrals

$$P_\alpha f(z) = \int_{\mathbb{C}} K_\alpha(z,w) f(w) d\lambda_\alpha(w), \tag{4.1}$$

$$Q_\alpha f(z) = \int_{\mathbb{C}} |K_\alpha(z,w)| f(w) d\lambda_\alpha(w). \tag{4.2}$$

El pròxim objectiu és estudiar l'acotació d'aquests operadors de L^p_α en F^p_α.

Teorema 4.2. *Sigui $1 \leq p < +\infty$. Aleshores es compleix que*

(a) $P_\alpha : L^p_\alpha \to F^p_\alpha$, és a dir, existeix una constant $C > 0$ tal que per a tot $f \in L^p_\alpha$ es té que $||P_\alpha f||_{F^p_\alpha} \leq C ||f||_{L^p_\alpha}$.

(b) $Q_\alpha : L^p_\alpha \to L^p_\alpha$, és a dir, existeix una constant $C > 0$ tal que per a tot $f \in L^p_\alpha$ es té que $||Q_\alpha f||_{L^p_\alpha} \leq C ||f||_{L^p_\alpha}$.

Demostració. Donat que $|P_\alpha f| \leq Q_\alpha |f|$, només cal que provem (b). Comencem observant que per a $f \in L^p_\alpha$

$$I = e^{-\frac{p\alpha}{2}|z|^2} |Q_\alpha f(z)|^p = \left(e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}\right)^p \left| \int_{\mathbb{C}} f(w) \left|e^{\alpha z \overline{w}}\right| d\lambda_\alpha(w) \right|^p$$
$$\leq \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^p \left(\int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} |f(w)| |e^{\alpha z \overline{w}}| e^{-\alpha|w|^2} dA(w) \right)^p$$
$$\leq \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^p \left(\int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{\alpha}{2p}|z|^2} e^{-\frac{\alpha}{2q}|z|^2} |f(w)| e^{\frac{\alpha}{p} Re z\overline{w}} e^{\frac{\alpha}{q} Re z\overline{w}} e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2} e^{-\frac{\alpha}{2p}|w|^2} e^{-\frac{\alpha}{2q}|w|^2} dA(w) \right)^p,$$

i aplicant la Desigualtat de Hölder 2.7 per al parell $p \geq 1$ i l'exponent conjugat $q = \frac{p-1}{p} \geq 1$ obtenim que

$$I \leq \left(\int_{\mathbb{C}} |f(w)|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}|w|^2} e^{\alpha Re z\overline{w} - \frac{\alpha}{2}|w|^2 - \frac{\alpha}{2}|z|^2} dA(w) \right) \left(\int_{\mathbb{C}} e^{\alpha Re z\overline{w} - \frac{\alpha}{2}|w|^2 - \frac{\alpha}{2}|z|^2} dA(w) \right)^{p-1}$$
$$\leq \left(\int_{\mathbb{C}} |f(w)|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}|w|^2} e^{-\frac{\alpha}{2}|z-w|^2} dA(w) \right) \left(\int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{\alpha}{2}|z-w|^2} dA(w) \right)^{p-1}.$$

I com que la integral de la dreta és finita, aleshores existeix una constant $C_0 > 0$ tal que

$$I \leq C_0 \int_{\mathbb{C}} |f(w)|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}|w|^2} e^{-\frac{\alpha}{2}|z-w|^2} dA(w).$$

Això implica que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}} |Q_\alpha f(z)|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}|z|^2} dA(z) &\leq C_0 \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} |f(w)|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}|w|^2} e^{-\frac{\alpha}{2}|z-w|^2} dA(w) dA(z) \\ &= C_0 \int_{\mathbb{C}} |f(w)|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}|w|^2} \int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{\alpha}{2}|z-w|^2} dA(z) dA(w).\end{aligned}$$

Finalment, com que la integral respecte $dA(z)$ és finita, llavors existeix una certa constant $C > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{C}} |Q_\alpha f(w)|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}|w|^2} dA(w) \leq C \int_{\mathbb{C}} |f(w)|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}|w|^2} dA(w).$$

□

Corol·lari 4.3. *Sigui* $0 < p < +\infty$. *Si* $f \in F^p_\alpha$, *llavors* $P_\alpha(f) = f$.

Demostració. Com que P_α és contínua, $z^n \in F^2_\alpha$ i $P_\alpha(z^n) = z^n$ per a tota $n \geq 0$, aleshores $P_\alpha(R) = R$ per a tot polinomi R. D'altra banda, que per a tota $f \in F^p_\alpha$, existeix una successió de polinomis $(R_n)_n$ tal que $R_n \to f$ en F^p_α. Aplicant el Teorema anterior tenim que $||P_\alpha(R_n) - P_\alpha(f)||_{F^p_\alpha} = ||R_n - P_\alpha(f)||_{F^p_\alpha} \leq ||R_n - f||_{F^p_\alpha} \to 0$. Per tant, utilitzant la unicitat del límit, $P_\alpha(f) = f$ per a tota $f \in F^p_\alpha$. □

Comprovarem, doncs, que l'acotació de P_α per a $p \geq 1$ ens permet donar una demostració més directa de la densitat dels polinomis holomorfs en F^p_α quan $p \geq 1$.

Corol·lari 4.4. *Si* $1 \leq p < +\infty$, *aleshores els polinomis són densos en* F^p_α.

Demostració. Sigui $1 \leq p < +\infty$. Sabem que els polinomis de la forma $R(z) = \sum_{j,k=0}^{N} a_{jk} z^j \overline{z}^k$ amb $a_{jk} \in \mathbb{C}$ són densos en L^p_α. Llavors, per a $f \in F^p_\alpha \subset L^p_\alpha$ existeix una successió de polinomis $(R_n)_n \in L^p_\alpha$ tal que $||R_n - f||_{L^p_\alpha} \to 0$.

D'altra banda, P_α és continu de L^p_α a F^p_α i, en particular, es satisfà que

$$||P_\alpha(R_n) - f||_{F^p_\alpha} = ||P_\alpha(R_n) - P_\alpha(f)||_{F^p_\alpha} \leq C||R_n - f||_{L^p_\alpha}.$$

I com que $P_\alpha(R_n)$ és un polinomi holomorf, obtenim el resultat desitjat. □

Una pregunta natural que es planteja a arrel del Teorema 4.2 és si l'operador P_α està acotat quan $p < 1$ i d'altra banda si es pot assegurar l'acotació de P_α com a operador de L^p_α en F^p_β per a tot β. La següent Proposició respon a la primera qüestió.

Proposició 4.5. *Siguin* $0 < p < +\infty$ *i* α, $\beta > 0$. *Si* P_α *està acotat en* $L^p(\mathbb{C}, d\lambda_\beta)$, *llavors* $p\alpha \leq 2\beta$ *i* $p \geq 1$. *En particular, si* $F^p_\alpha = L^p(\mathbb{C}, d\lambda_{\frac{p\alpha}{2}}) \cap H(\mathbb{C})$ *i* $P_\alpha : L^p_\alpha \to F^p_\alpha$ *és acotat, aleshores* $p \geq 1$.

Demostració. Siguin $x \in (0, +\infty)$ i k enter no negatiu. Per a tota $z \in \mathbb{C}$, agafem les funcions $f_{x,k}(z) = e^{-x|z|^2} z^k$ i en calculem la seva integral. Aleshores, fent un canvi a coordenades polars

$$\begin{aligned} I = \int_{\mathbb{C}} |f_{x,k}(z)|^p d\lambda_\beta(z) &= \frac{\beta}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \left| e^{-x|z|^2} z^k \right|^p e^{-\beta|z|^2} dA(z) = \frac{\beta}{\pi} \int_{\mathbb{C}} e^{-(xp+\beta)|z|^2} |z|^{kp} dA(z) \\ &= \frac{\beta}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-(xp+\beta)r^2} r^{kp+1} d\theta dr = 2\beta \int_0^{+\infty} e^{-(xp+\beta)r^2} (r^2)^{\frac{kp}{2}} r dr, \end{aligned}$$

i fent el canvi $u = (xp+\beta)r^2$

$$I = \frac{\beta}{(xp+\beta)^{\frac{kp}{2}+1}} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{kp}{2}} du = \frac{\beta \Gamma\left(\frac{kp}{2}+1\right)}{(xp+\beta)^{\frac{kp}{2}+1}}.$$

D'altra banda, aplicant la Fórmula reproductora de $F^2_{\alpha+x}$ a (4.1) tenim que

$$\begin{aligned} P_\alpha(f_{x,k})(z) &= \int_{\mathbb{C}} e^{\alpha z \overline{w}} e^{-x|w|^2} w^k d\lambda_\alpha(w) = \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{C}} e^{\alpha z \overline{w}} w^k e^{-(\alpha+x)|w|^2} dA(w) \\ &= \frac{\alpha}{\alpha+x} \int_{\mathbb{C}} e^{\alpha z \overline{w}} w^k d\lambda_{\alpha+x}(w) = \frac{\alpha}{\alpha+x} \int_{\mathbb{C}} e^{(\alpha+x)\frac{\alpha z}{\alpha+x}\overline{w}} w^k d\lambda_{\alpha+x}(w) \\ &= \frac{\alpha}{\alpha+x} \left\langle K_{\frac{\alpha z}{\alpha+x}}, w^k \right\rangle = \frac{\alpha}{\alpha+x} \left(\frac{\alpha z}{\alpha+x} \right)^k = \left(\frac{\alpha}{\alpha+x} \right)^{k+1} z^k. \end{aligned}$$

Amb això ara ja podem calcular la integral de l'operador P_α. Aleshores, fent un altre canvi a polars

$$\begin{aligned} J = \int_{\mathbb{C}} |P_\alpha(f_{x,k})(z)|^p d\lambda_\beta(z) &= \int_{\mathbb{C}} \left| \left(\frac{\alpha}{\alpha+x} \right)^{k+1} z^k \right|^p d\lambda_\beta(z) \\ = \left(\frac{\alpha}{\alpha+x} \right)^{p(k+1)} \int_{\mathbb{C}} |z|^{kp} d\lambda_\beta(z) &= \left(\frac{\alpha}{\alpha+x} \right)^{p(k+1)} \frac{\beta}{\pi} \int_{\mathbb{C}} |z|^{kp} e^{-\beta|z|^2} dA(z) \\ = \left(\frac{\alpha}{\alpha+x} \right)^{p(k+1)} \frac{\beta}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} r^{kp+1} e^{-\beta r^2} d\theta dr &= \left(\frac{\alpha}{\alpha+x} \right)^{p(k+1)} 2\beta \int_0^{+\infty} r^{kp+1} e^{-\beta r^2} dr, \end{aligned}$$

i fent el canvi $u = \beta r^2$, obtenim que

$$J = \left(\frac{\alpha}{\alpha+x} \right)^{p(k+1)} \frac{1}{\beta^{\frac{kp}{2}}} \int_0^{+\infty} u^{\frac{kp}{2}} e^{-u} du = \left(\frac{\alpha}{\alpha+x} \right)^{p(k+1)} \frac{\Gamma\left(\frac{kp}{2}+1\right)}{\beta^{\frac{kp}{2}}}.$$

Si aquesta integral està acotada en $L^p(\mathbb{C}, d\lambda_\beta)$, llavors existeix una constant $C > 0$ independent de x i de k tal que

$$\int_{\mathbb{C}} |P_\alpha(f_{x,k})|^p d\lambda_\beta \leq C \int_{\mathbb{C}} |f_{x,k}|^p d\lambda_\beta.$$

Així doncs,

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha+x}\right)^{p(k+1)}\frac{\Gamma\left(\frac{kp}{2}+1\right)}{\beta^{\frac{kp}{2}}}\leq C\frac{\beta\Gamma\left(\frac{kp}{2}+1\right)}{(xp+\beta)^{\frac{kp}{2}+1}}\Longleftrightarrow\left(\frac{\alpha}{\alpha+x}\right)^{p(k+1)}\leq C\left(\frac{\beta}{xp+\beta}\right)^{\frac{kp}{2}+1},$$

de manera que només ens queda veure per a quines condicions es satisfà aquesta desigualtat. Per trobar-les raonarem per casos:

(1) Si $x>0$ i $k\to+\infty$, tenim que

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha+x}\right)^{p(k+1)}\leq C\left(\frac{\beta}{xp+\beta}\right)^{\frac{kp}{2}+1}$$

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha+x}\right)^{p}\left(\frac{xp+\beta}{\beta}\right)\leq C\left(\left(\frac{\alpha+x}{\alpha}\right)^{2}\frac{\beta}{xp+\beta}\right)^{\frac{kp}{2}}$$

d'on podem deduir que $\left(\frac{\alpha+x}{\alpha}\right)^2\frac{\beta}{xp+\beta}\geq 1$ perquè sinó la part dreta de la desigualtat tendiria a zero quan $k\to+\infty$ cosa que no pot ser. Llavors,

$$\left(\frac{\alpha+x}{\alpha}\right)^{2}\geq\frac{\beta}{xp+\beta}\Longleftrightarrow\alpha^2p\leq 2\beta\alpha+\beta x$$

tendeix a $\alpha^2p\leq 2\beta\alpha$ quan $x\to 0$ i per tant $p\alpha\leq 2\beta$.

(2) Suposem ara que $k=0$ i $x\to+\infty$. Llavors,

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha+x}\right)^{p}\leq C\left(\frac{\beta}{xp+\beta}\right)\Longleftrightarrow\frac{xp+\beta}{(\alpha+x)^p}\leq C\frac{\beta}{\alpha^p}.$$

Si $0<p<1$, la part esquerra d'aquesta desigualtat tendeix cap a $+\infty$ cosa que no pot ser ja que $C>0$ és finita. Per tant $p\geq 1$ quan $x\to+\infty$.

Així doncs, $p\alpha\leq 2\beta$ i $p\geq 1$ com volíem demostrar. $\square$

En altres paraules, l'operador P_α, i conseqüentment Q_α, tan sols estan acotats en $L^p(\mathbb{C},d\lambda_\beta)$ quan $p\geq 1$ de manera que només ens centrarem en aquests valors de p.

Ara, considerem l'acció dels operadors P_α i Q_α en l'espai $L^p(\mathbb{C},d\lambda_\beta)$. Per aquest motiu, a partir d'aquí fixarem α i β, i notem que també podem escriure

$$P_\alpha f(z)=\frac{\alpha}{\beta}\int_{\mathbb{C}}e^{\alpha z\overline{w}+(\beta-\alpha)|w|^2}f(w)d\lambda_\beta(w), \tag{4.3}$$

$$Q_\alpha f(z)=\frac{\alpha}{\beta}\int_{\mathbb{C}}\left|e^{\alpha z\overline{w}+(\beta-\alpha)|w|^2}\right|f(w)d\lambda_\beta(w). \tag{4.4}$$

Pel Lema 2.12, tenim que els autoadjunts dels operadors P_α i Q_α respecte la integral $\langle f,g\rangle_\beta=\displaystyle\int_{\mathbb{C}}f(z)\overline{g(z)}d\lambda_\beta(z)$ són els següents:

$$P_\alpha^* f(z)=\frac{\alpha}{\beta}e^{(\beta-\alpha)|z|^2}\int_{\mathbb{C}}e^{\alpha z\overline{w}}f(w)d\lambda_\beta(w), \tag{4.5}$$

$$Q_\alpha^* f(z) = \frac{\alpha}{\beta} e^{(\beta-\alpha)|z|^2} \int_{\mathbb{C}} \left| e^{\alpha z \overline{w}} \right| f(w) d\lambda_\beta(w). \tag{4.6}$$

Aquests operadors P_α^* i Q_α^* ens seran útils per facilitar-nos les demostracions dels Lemes següents.

Lema 4.6. *Sigui* $1 < p < +\infty$. *Si* P_α *està acotat en* $L^p(\mathbb{C}, d\lambda_\beta)$*, llavors* $p\alpha > \beta$.

Demostració. Sigui $q = \frac{p}{p-1} > 1$ l'exponent conjugat de p. Per començar, observem que si $p > 1$ i P_α està acotat en $L^p(\mathbb{C}, d\lambda_\beta)$, aleshores P_α^* està acotat en $L^q(\mathbb{C}, d\lambda_\beta)$. Això implica que si considerem $f \equiv 1$ tenim que

$$\int_{\mathbb{C}} |P_\alpha^*(1)|^q d\lambda_\beta(z) = \frac{\beta}{\pi} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^q \int_{\mathbb{C}} e^{(\beta-\alpha)q|z|^2} e^{-\beta|z|^2} \left| \int_{\mathbb{C}} e^{\alpha z \overline{w}} d\lambda_\beta(w) \right|^q dA(z) < +\infty.$$

En particular, notem que

$$\int_{\mathbb{C}} e^{(\beta-\alpha)q|z|^2} e^{-\beta|z|^2} dA(z) < +\infty,$$

de manera que $(\beta - \alpha)q - \beta < 0$. Finalment, substituint q, és fàcil veure que $p\alpha < \beta$. □

Lema 4.7. *Si* P_α *està acotat en* $L^1(\mathbb{C}, d\lambda_\beta)$*, aleshores* $\alpha = 2\beta$.

Demostració. Fixada $a \in \mathbb{C}$, considerem la família de funcions $f_a(z) = \dfrac{e^{\alpha z \overline{a}}}{|e^{\alpha z \overline{a}}|}$, $z \in \mathbb{C}$, tals que $||f_a||_\infty = 1$. Observem que

$$P_\alpha^*(f_a)(a) = \frac{\alpha}{\beta} e^{(\beta-\alpha)|a|^2} \int_{\mathbb{C}} e^{\alpha z \overline{w}} \frac{e^{\alpha z \overline{a}}}{|e^{\alpha z \overline{a}}|} d\lambda_\beta(w) = \frac{\alpha}{\beta} e^{(\beta-\alpha)|a|^2} \int_{\mathbb{C}} |e^{\alpha w \overline{a}}| d\lambda_\beta(w),$$

i pel Corol·lari 3.16 obtenim que

$$P_\alpha^*(f_a)(a) = \frac{\alpha}{\beta} e^{(\beta-\alpha)|a|^2} e^{\frac{\alpha^2|a|^2}{4\beta}}.$$

A més, si P_α^* està acotat en $L^\infty(\mathbb{C})$, existeix una constant $C > 0$ tal que per a tota $a \in \mathbb{C}$

$$P_\alpha^*(f_a)(a) \leq ||P_\alpha^*(f_a)||_{F_\infty} \leq C||f_a||_{F_\infty} = C.$$

És a dir, $P_\alpha^*(f_a)(a) < +\infty$ cosa que implica que $(\beta - \alpha) + \frac{\alpha^2}{4\beta} \leq 0$ i per tant $(2\beta - \alpha)^2 \leq 0$. Finalment, com que el quadrat no pot ser negatiu, resulta que $\alpha = 2\beta$. □

Lema 4.8. *Sigui* $1 < p \leq 2$. *Si* P_α *està acotat en* $L^p(\mathbb{C}, d\lambda_\beta)$*, llavors* $p\alpha = 2\beta$.

Demostració. Siguin $x \in (0, +\infty)$ i k enter no negatiu. Per a tota $z \in \mathbb{C}$, considerem les funcions $f_{x,k}(z) = e^{-x|z|^2} z^k$. Aplicant la Fórmula reproductora en $F^2_{\beta+x}$ veiem que

$$\begin{aligned}
P_\alpha^*(f_{x,k})(z) &= \frac{\alpha}{\beta} e^{(\beta-\alpha)|z|^2} \int_{\mathbb{C}} e^{\alpha z \overline{w}} e^{-x|w|^2} w^k d\lambda_\beta(w) \\
&= \frac{\alpha}{\pi} e^{(\beta-\alpha)|z|^2} \int_{\mathbb{C}} e^{\alpha z \overline{w}} e^{-(\beta+x)|w|^2} w^k dA(w) = \frac{\alpha}{\beta + x} e^{(\beta-\alpha)|z|^2} \int_{\mathbb{C}} e^{\alpha z \overline{w}} w^k d\lambda_{\beta+x}(w) \\
&= \frac{\alpha}{\beta + x} e^{(\beta-\alpha)|z|^2} \int_{\mathbb{C}} e^{(\beta+x)\frac{\alpha z}{\beta+x}\overline{w}} w^k d\lambda_{\beta+x}(w) = \frac{\alpha}{\beta+x} e^{(\beta-\alpha)|z|^2} \left(\frac{\alpha z}{\beta + x}\right)^k \\
&= \left(\frac{\alpha}{\beta + x}\right)^{k+1} e^{(\beta-\alpha)|z|^2} z^k.
\end{aligned}$$

Ara, agafem $q = \frac{p}{p-1} > 1$ que és l'exponent conjugat de p. Sabem que si P_α està acotat en $L^p(\mathbb{C}, d\lambda_\beta)$, P_α^* ho està en $L^q(\mathbb{C}, d\lambda_\beta)$. Aleshores, existeix una constant $C > 0$ que no depèn ni de x ni de k tal que

$$\int_{\mathbb{C}} |P_\alpha^*(f_{x,k})|^q d\lambda_\beta \leq C \int_{\mathbb{C}} |(f_{x,k})|^q d\lambda_\beta.$$

D'una banda, amb càlculs anàlegs a la demostració del Lema 4.5 tenim que

$$\int_{\mathbb{C}} |(f_{x,k})|^q d\lambda_\beta = \frac{\beta\Gamma\left(\frac{qk}{2}+1\right)}{(qx+\beta)^{\frac{qk}{2}+1}}.$$

D'altra banda, com que $1 < p \leq 2$ i P_α està acotat en $L^p(\mathbb{C}, d\lambda_\beta)$, pel Lema 4.6 tenim que $p\alpha > \beta$. Notem que podem escriure $p = \frac{q}{q-1}$ de manera que $\beta - q(\beta - \alpha) > 0$. Aleshores,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}} |P_\alpha^*(f_{x,k})|^q d\lambda_\beta(z) &= \frac{\beta}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \left| \left(\frac{\alpha}{\beta+x}\right)^{k+1} e^{(\beta-\alpha)|z|^2} z^k \right|^q e^{-\beta|z|^2} dA(z) \\
&= \frac{\beta}{\pi} \left(\frac{\alpha}{\beta+x}\right)^{q(k+1)} \int_{\mathbb{C}} |z|^{qk} e^{-(\beta-q(\beta-\alpha))|z|^2} dA(z) \\
&= \frac{\beta}{\beta-q(\beta-\alpha)} \left(\frac{\alpha}{\beta+x}\right)^{q(k+1)} \int_{\mathbb{C}} |z|^{qk} d\lambda_{\beta-q(\beta-\alpha)}(z) \\
&= \frac{\beta\Gamma\left(\frac{qk}{2}+1\right)}{(\beta-q(\beta-\alpha))^{\frac{qk}{2}+1}} \left(\frac{\alpha}{\beta+x}\right)^{q(k+1)}.
\end{aligned}$$

Per tant, fixada $x > 0$ i fent tendir $k \to +\infty$

$$\int_{\mathbb{C}} |P_\alpha^*(f_{x,k})|^q d\lambda_\beta \leq C \int_{\mathbb{C}} |(f_{x,k})|^q d\lambda_\beta \Longleftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta+x}\right)^{q(k+1)} \leq C \left(\frac{\beta-q(\beta-\alpha)}{qx+\beta}\right)^{\frac{qk}{2}+1}.$$

En particular, tenim que $\left(\frac{\alpha}{\beta+x}\right)^q \left(\frac{qx+\beta}{\beta-q(\beta-\alpha)}\right) \leq C \left(\left(\frac{\beta+x}{\alpha}\right)^2 \frac{\beta-q(\beta-\alpha)}{qx+\beta}\right)^{\frac{qk}{2}}$,

d'on podem deduir que $\left(\frac{\beta+x}{\alpha}\right)^2 \frac{\beta-q(\beta-\alpha)}{qx+\beta} \geq 1$. Fent càlculs elementals obtenim

$$g(x) := (p\alpha-\beta)x^2 + [2\beta(p\alpha-\beta) - \alpha^2 p]x + [\beta^2(p\alpha-\beta) - \alpha^2\beta(p-1)] \geq 0.$$

És senzill veure que $g(x)$ té el seu mínim a $x_0 = \frac{\alpha^2 p - [2\beta(p\alpha-\beta)}{2(p\alpha-\beta)}$. Notem que

(1) $\alpha^2 p - [2\beta(p\alpha-\beta) \geq p(\alpha-\beta)^2 \geq 0$ ja que $p \geq 2$ per hipòtesi;

(2) pel Lema 2.34 $p\alpha - \beta > 0$.

Així doncs, $x_0 \geq 0$ de manera que $g(x) \geq g(x_0) \geq 0$, per a tota $x \in \mathbb{R}$. Conseqüentment, el discriminant de g no pot ser positiu i per tant

$$[2\beta(p\alpha-\beta) - \alpha^2 p]^2 - 4(p\alpha-\beta)[\beta^2(p\alpha-\beta) - \alpha^2\beta(p-1)] = 0 \Longleftrightarrow p\alpha = 2\beta.$$

□

Lema 4.9. *Si $2 < p < +\infty$ i P_α està acotat en $L^p(\mathbb{C}, d\lambda_\beta)$, aleshores $p\alpha = 2\beta$.*

Demostració. Donat que $p > 2$, sigui $q = \frac{p}{p-1}$ l'exponent conjugat de p tal que $1 < q < 2$. Si P_α està acotat en $L^p(\mathbb{C}, d\lambda_\beta)$, llavors P_α^* també ho està en $L^q(\mathbb{C}, d\lambda_\beta)$. Considerem, $f \in L^q(\mathbb{C}, d\lambda_\beta)$ de manera que existeix una constant $C > 0$ independent de f tal que

$$\int_{\mathbb{C}} |P_\alpha^* f(z)|^q d\lambda_\beta(z) \le C \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^q d\lambda_\beta(z), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{4.7}$$

D'un banda, tenim que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{C}} |P_\alpha^* f(z)|^q d\lambda_\beta(z) &= \int_{\mathbb{C}} \left| \frac{\alpha}{\beta} e^{(\beta-\alpha)|z|^2} \int_{\mathbb{C}} e^{\alpha z \overline{w}} f(w) d\lambda_\beta(w) \right|^q d\lambda_\beta(z) \\
&= \int_{\mathbb{C}} \left| \frac{\alpha}{\pi} e^{(\beta-\alpha)|z|^2} \int_{\mathbb{C}} e^{\alpha z \overline{w}} f(w) e^{-\beta|w|^2} dA(w) \right|^q d\lambda_\beta(z) \\
&= \int_{\mathbb{C}} \left| e^{(\beta-\alpha)|z|^2} \int_{\mathbb{C}} e^{\alpha z \overline{w}} f(w) e^{(\alpha-\beta)|w|^2} d\lambda_\alpha(w) \right|^q d\lambda_\beta(z).
\end{aligned}$$

Agafem $f(z) = g(z) e^{(\beta-\alpha)|w|^2}$ on $g \in L^q(\mathbb{C}, d\lambda_{\beta-q(\beta-\alpha)})$. Donat que es compleix que $\beta - q(\beta - \alpha) > 0$ pel Lema 4.6, existeix una constant $k > 0$ independent de g tal que per a tota $g \in L^q(\mathbb{C}, d\lambda_{\beta-q(\beta-\alpha)})$ tenim que

$$\int_{\mathbb{C}} |P_\alpha g(z)|^q d\lambda_{\beta-q(\beta-\alpha)}(z) \le k \int_{\mathbb{C}} |P_\alpha g(z)|^q d\lambda_{\beta-q(\beta-\alpha)}(z).$$

És a dir, P_α està acotat en $L^q(\mathbb{C}, d\lambda_{\beta-q(\beta-\alpha)})$. Finalment, com que estem suposant que $1 < q < 2$, pel Lema 4.8 obtenim que

$$q\alpha = [\beta - q(\beta - \alpha)] \Longleftrightarrow p\alpha = 2\beta.$$

□

En resum, el Teorema 4.2 i els Lemes estudiats ens donen les següents equivalències.

Teorema 4.10. *Siguin α i β positives. Si $1 \le p < +\infty$, llavors són equivalents les següents afirmacions:*

(a) Q_α està acotat en $L^p(\mathbb{C}, d\lambda_\beta)$;

(b) P_α està acotat en $L^p(\mathbb{C}, d\lambda_\beta)$;

(c) es satisfà que $p\alpha = 2\beta$.

Demostració. Considerem que $1 \le p < +\infty$. Comencem observant que (a) implica (b) és evident per a qualsevol p.

Veiem ara que (b) implica (c). Suposem que es satisfà (b). Si $p = 1$, utilitzant el Lema 4.7 tenim que es compleix (c). D'altra banda, si $1 < p < +\infty$ i (b), fent servir els Lemes 4.8 i 4.9 immediatament també obtenim (c).

Finalment, només ens queda provar que (c) implica (a). Suposem que es verifica (c). Si $p = 1$, utilitzant el Teorema de Fubini i el Col·lari 3.16 obtenim que se satisfà (a). I si suposem que $1 < p < +\infty$, pel Teorema 4.2 immediatament obtenim el que volem. □

Com a conseqüència immediata al Teorema 4.10, tenim:

Teorema 4.11. *Siguin $\alpha > 0$ i $\beta > 0$. Si $1 \le p < +\infty$, llavors $P_\alpha : L^p_\alpha \to F^p_\beta$ està acotat si i només si $\alpha = \beta$.*

5 Les mesures de Carleson per a F^p_α

Les mesures de Carleson en el disc van ser introduïdes pel matemàtic suec Lennart Carleson. Una mesura de Carleson μ és una mesura de Borel finita i positiva tal que $\mu(T(I)) \leq C|I|$ per a tot arc $I \subset T$ i per a tota tenda

$$T(I) = \left\{ z \in \mathbb{D} : \frac{z}{|z|} \in I, \quad 1 - |z| \leq |I| \right\},$$

on $|I|$ és la mesura de l'arc normalitzada. Carleson va demostrar que aquestes són les mesures per les quals es verifica la inclusió $H^p(\mathbb{D}) \subset L^p(d\mu)$, on $H^p(\mathbb{D})$ denota l'espai de Hardy en el disc per a tota $0 < p < +\infty$

$$H^p(\mathbb{D}) = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : ||f||_{H^p} = \sup_{r<1} \left(\frac{1}{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\},$$

i $H^\infty(\mathbb{D}) = H(\mathbb{D}) \cap L^\infty(\mathbb{D})$ per a $p = +\infty$. De fet, aquesta és la definició que es considera quan estenem la noció de mesura de Carleson a altres espais de funcions holomorfes, com ara els espais de Bergman o els espais de Hardy-Sobolev, de la qual n'hi ha una literatura molt àmplia. Aquestes mesures apareixen de forma natural quan s'estudien problemes com per exemple la caracterització de multiplicadors puntuals entre espais de funcions holomorfes.

A continuació, estudiarem la mesura de Carleson per als espais de Fock F^p_α. Començarem amb dos lemes tècnics que ens ajudaran a provar el Teorema principal d'aquest capítol.

Lema 5.1. *Siguin $p, \alpha, R > 0$. Aleshores, existeix una constant $C = C(p, \alpha, R) > 0$ tal que per a totes $f \in H(\mathbb{C})$, $a \in \mathbb{C}$ i $r(0, R]$ tenim que*

$$\left| f(a) e^{-\frac{\alpha}{2}|a|^2} \right|^p \leq \frac{C}{r^2} \int_{B(a,r)} \left| f(z) e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} \right|^p dA(z).$$

Demostració. Fixant $f \in H(\mathbb{C})$, $a \in \mathbb{C}$ i $r(0, R]$, i fent el canvi de variables $w = z - a$

$$\begin{aligned} I = \int_{B(a,r)} \left| f(z) e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} \right|^p dA(z) &= \int_{|w|<r} |f(w + a)|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}|w+a|^2} dA(z) \\ &= \int_{|w|<r} |f(w + a) e^{\alpha w \overline{a}}|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}(|w|^2+|a|^2)} dA(z), \end{aligned}$$

i fent un canvi a coordenades polars obtenim que

$$I = \int_0^r e^{-\frac{p\alpha}{2}(t^2+|a|^2)} t \int_0^{2\pi} |f(te^{i\theta} + a) e^{\alpha t e^{i\theta} \overline{a}}|^p d\theta dt.$$

Aplicant el Teorema 2.26 mitjançant la subharmonicitat de la funció $|f(w + a)e^{\alpha w \overline{a}}|^p$ deduïm que

$$\begin{aligned} I &\geq 2\pi |f(a)|^p \int_0^r t e^{-\frac{p\alpha}{2}(t^2+|a|^2)} dt = 2\pi \left| f(a) e^{-\frac{\alpha}{2}|a|^2} \right|^p \int_0^r t e^{-\frac{p\alpha}{2}t^2} dt \\ &= -\frac{2\pi}{p\alpha} \left| f(a) e^{-\frac{\alpha}{2}|a|^2} \right|^p \left[e^{-\frac{p\alpha}{2}t^2} \right]_0^r = \frac{2\pi}{p\alpha} \left| f(a) e^{-\frac{\alpha}{2}|a|^2} \right|^p \left(1 - e^{-\frac{p\alpha}{2}r^2} \right). \end{aligned}$$

Si considerem $0 < r < \frac{R}{2}$, com que $\lim_{z\to 0} \dfrac{1-e^{-z}}{z} = 1$, tenim que $1 - e^{-\frac{p\alpha}{2}r^2} \simeq r^2$. Per tant,

$$\left|f(a)e^{-\frac{\alpha}{2}|a|^2}\right|^p \leq \frac{p\alpha}{2\pi r^2}\int_{B(a,r)}\left|f(z)e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}\right|^p dA(z)$$

on $C = \frac{p\alpha}{2\pi}$ és la constant que busquem. En canvi, si considerem $\frac{R}{2} < r < R$, tenim que

$$\left(1-e^{-\frac{p\alpha}{2}r^2}\right)^{-1} \leq \left(1-e^{-\frac{p\alpha}{8}R^2}\right)^{-1} = \left(1-e^{-\frac{p\alpha}{8}R^2}\right)^{-1}\frac{r^2}{r^2} \leq \left(1-e^{-\frac{p\alpha}{8}R^2}\right)^{-1}\frac{R^2}{r^2} = C$$

de manera que també obtenim el resultat desitjat. □

Lema 5.2. *Sigui* $0 < p \leq +\infty$. *Per a tota* $a \in \mathbb{C}$, *la funció* $K_a(w) = e^{\alpha w\overline{a} - \frac{\alpha}{2}|a|^2} \in F^p_\alpha$ *té* $||K_a||_{F^p_\alpha} = 1$.

Demostració. Suposem que $0 < p < +\infty$. El que volem veure és conseqüència immediata de la Fórmula reproductora en $F^2_{\frac{p\alpha}{2}}$. En efecte,

$$\begin{aligned}||K_a||^p_{F^p_\alpha} &= \frac{p\alpha}{2\pi}\int_{\mathbb{C}}\left|e^{\alpha z\overline{a}-\frac{\alpha}{2}|a|^2}\right|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}|z|^2}dA(z) = \frac{p\alpha}{2\pi}e^{-\frac{\alpha}{2}|a|^2}\int_{\mathbb{C}}|e^{\alpha z\overline{a}}|^p e^{-\frac{p\alpha}{2}|z|^2}dA(z)\\ &= \frac{p\alpha}{2\pi}e^{-\frac{\alpha}{2}|a|^2}\int_{\mathbb{C}}\left|e^{\frac{p\alpha}{2}z\overline{a}}\right|^2 e^{-\frac{p\alpha}{2}|z|^2}dA(z) = e^{-\frac{\alpha}{2}|a|^2}e^{\frac{\alpha}{2}|a|^2} = 1.\end{aligned}$$

Comprovem ara que passa el mateix si $p = +\infty$. Efectivament,

$$\begin{aligned}||K_a||_{F^\infty_\alpha} &= \sup_{z\in\mathbb{C}}|K_a(z)|e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2} = \sup_{z\in\mathbb{C}}\left|e^{\alpha z\overline{a}-\frac{\alpha}{2}|a|^2}\right|e^{-\frac{\alpha}{2}|z|^2}\\ &= \sup_{z\in\mathbb{C}}\left|e^{\alpha z\overline{a}-\frac{\alpha}{2}|a|^2-\frac{\alpha}{2}|z|^2}\right| = \sup_{z\in\mathbb{C}}e^{-\frac{\alpha}{2}|z-a|^2} = 1.\end{aligned}$$

□

Definició 5.3. *Sigui* $0 < p < +\infty$. *Direm que una mesura de Borel positiva en* $\mathbb{C}$ *és una* ***mesura de Carleson*** *per a* F^p_α *si* $F^p_\alpha \subset L^p(e^{-\frac{p\alpha}{2}|z|^2}d\mu)$, *és a dir, si existeix una constant* $C > 0$ *tal que per a tota* $f \in F^p_\alpha$

$$\int_{\mathbb{C}}\left|f(w)e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2}\right|^p d\mu(w) \leq C||f||^p_{F^p_\alpha}.$$

Teorema 5.4. *Siguin* μ *una mesura de Borel positiva en* $\mathbb{C}$, $0 < p < +\infty$ *i* $0 < r < +\infty$. *Aleshores, les condicions següents són equivalents:*

(a) μ *és una mesura de Carleson per a* F^p_α*;*

(b) Existeix una constant $C > 0$ *tal que* $\int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{p\alpha}{2}|z-w|^2}d\mu(w) \leq C$ *per a tota* $z \in \mathbb{C}$*;*

(c) Existeix una constant $C = C(p,r) > 0$ *tal que* $\mu(B(z,r)) \leq C$ *per a tota* $z \in \mathbb{C}$ *on* $B(z,r) = \{w \in \mathbb{C} : |w-z| < r\}$.

Demostració. Comencem provant que (a) implica (b). Suposem que es compleix (a). Considerem la funció test $f(w) = K_z(w) = \frac{K_\alpha(w,z)}{\sqrt{K_\alpha(z,z)}} = e^{\alpha w\bar{z} - \frac{\alpha}{2}|z|^2}$ que pel Lema 5.2 compleix que $||K_z||_{F^p_\alpha} = 1$. Aleshores,

$$\int_{\mathbb{C}} \left| f(w)e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2} \right|^p d\mu(w) \leq C \int_{\mathbb{C}} \left| f(w)e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2} \right|^p dA(w),$$

és a dir,

$$\int_{\mathbb{C}} \left| e^{\alpha w\bar{z} - \frac{\alpha}{2}|z|^2} e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2} \right|^p d\mu(w) \leq C \int_{\mathbb{C}} \left| e^{\alpha w\bar{z} - \frac{\alpha}{2}|z|^2} e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2} \right|^p dA(w).$$

Per tant,

$$\int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{p\alpha}{2}|z-w|^2} d\mu(w) \leq C \int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{p\alpha}{2}|z-w|^2} dA(w),$$

i com que la integral de la dreta és finita ja tenim el que volíem.

A continuació, veurem que (b) implica (c). Suposem que es satisfà (b), és a dir, existeix una constant $C > 0$ tal que per a tota $z \in \mathbb{C}$ $\displaystyle\int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{p\alpha}{2}|z-w|^2} d\mu(w) \leq C$. Fixem $z \in \mathbb{C}$, $r > 0$ i notem que

$$\int_{B(z,r)} e^{-\frac{p\alpha}{2}|z-w|^2} d\mu(w) \leq \int_{\mathbb{C}} e^{-\frac{p\alpha}{2}|z-w|^2} d\mu(w) \leq C.$$

D'altra banda, es compleix que $-\frac{p\alpha}{2}|z-w|^2 \geq -\frac{p\alpha}{2}r^2$ degut a que $|z-w| \leq r$ si $w \in B(z,r)$. Així doncs,

$$\int_{B(z,r)} e^{-\frac{p\alpha}{2}r^2} d\mu(w) \leq \int_{B(z,r)} e^{-\frac{p\alpha}{2}|z-w|^2} d\mu(w) \leq C,$$

i per tant

$$e^{-\frac{p\alpha}{2}r^2} \int_{B(z,r)} d\mu(w) \leq C \Longleftrightarrow \mu(B(z,r)) \leq e^{\frac{p\alpha}{2}r^2} C.$$

Per acabar, només ens quedar demostrar que (c) implica (a). Suposem que es verifica la condició (c). Donat $0 < r < +\infty$, considerem el reticle $r\mathbb{Z}^2 = \{rm + irn \in \mathbb{C} : m, n \in \mathbb{Z}\}$. Agafem ara un conjunt $\{z_n\}_n$ de punts ordenats d'aquest reticle de manera que per a tota $f \in H(\mathbb{C})$ resulta

$$I(f) = \int_{\mathbb{C}} \left| f(w)e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2} \right|^p d\mu(w) \leq \sum_{n\geq 0} \int_{B(z_n,r)} \left| f(w)e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2} \right|^p d\mu(w).$$

A més, és senzill veure que per a tota $w \in B(z_n, r)$ i per a tota $u \in B(w, r)$, tenim que $u \in B(z_n, 2r)$ i $B(w, r) \subset B(z_n, 2r)$. Pel Lema 5.1, sabem que existeix una constant $C_1 = C_1(r) > 0$ tal que per a tota $w \in B(z_n, r)$

$$\begin{aligned}
I(f) &\leq \frac{C_1}{r^2} \sum_{n\geq 0} \int_{B(z_n,r)} \int_{B(z_n 2r)} \left| f(u)e^{-\frac{\alpha}{2}|u|^2} \right|^p dA(u)d\mu(w) \\
&= \frac{C_1}{r^2} \sum_{n\geq 0} \int_{B(z_n,2r)} \left| f(u)e^{-\frac{\alpha}{2}|u|^2} \right|^p \int_{B(z_n r)} d\mu(w)dA(u) \\
&= \frac{C_1}{r^2} \mu(B(z_n r)) \sum_{n\geq 0} \int_{B(z_n,2r)} \left| f(u)e^{-\frac{\alpha}{2}|u|^2} \right|^p dA(u).
\end{aligned}$$

Per (c) existeix $C_2 > 0$ constant tal que $\mu(B(z,r)) \leq C$, per a tota $z \in \mathbb{C}$, de manera que

$$\begin{aligned} I(f) &\leq \frac{C_1 C_2}{r^2} \sum_{n \geq 0} \int_{B(z_n, 2r)} \left| f(u) e^{-\frac{\alpha}{2}|u|^2} \right|^p dA(u) \\ &= \frac{C_1 C_2}{r^2} \int_{\mathbb{C}} \sum_{n \geq 0} \chi_{B(z_n, 2r)}(u) \left| f(u) e^{-\frac{\alpha}{2}|u|^2} \right|^p dA(u), \end{aligned}$$

on $\chi_{B(z_n,2r)}$ és la funció característica de $B(z_n, 2r)$. Així doncs, existeix $N > 0$ constant tal que satisfà $\sum_{n \geq 0} \chi_{B(z_n,2r)}(u) < N$ i també existeix $C = C(r) > 0$ constant tal que per a tota $f \in H(\mathbb{C})$

$$I(f) \leq C \int_{\mathbb{C}} \left| f(w) e^{-\frac{\alpha}{2}|w|^2} \right|^p dA(w).$$

□

En realitat, la condició (a) és independent de r i la condició (c) tampoc depèn ni de p i ni de α. Conseqüentment, les mesures de Carleson són les mateixes per a tot l'espai F^p_α.

Corol·lari 5.5. *Siguin $r > 0$ i $r\mathbb{Z}^2 = \{rm + irn \in \mathbb{C} : m, n \in \mathbb{Z}\}$ el reticle associat a r. Aleshores, les següents condicions són equivalents:*

(a) μ és una mesura de Carleson per a F^p_α;

(b) Existeix una constant $C > 0$ tal que, per a tota $k \geq 1$, $\mu(B(z_k, r)) \leq C$.

Demostració. Pel Teorema 5.4 és evident que (a) implica (b) de manera que només hem de provar el recíproc.

Suposem que es compleix (b). Considerem $z \in B\left(z_k, \frac{r}{2}\right)$ i $w \in B\left(z, \frac{r}{2}\right)$. Notem que de fet tenim que $w \in B(z_k, r)$. En efecte,

$$|w - z_k| \leq |w - z| + |z - z_k| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

En conseqüència, resulta que $B\left(z, \frac{r}{2}\right) \subset B(z_k, r)$ i per tant obtenim que per a tota $k \geq 1$ es compleix $\mu\left(B\left(z, \frac{r}{2}\right)\right) \leq \mu\left(B\left(z_k, r\right)\right) \leq C$. □

Seguidament, construirem un exemple de mesura discreta que és una mesura de Carleson per a F^p_α.

Exemple 5.6. Siguin $p > 0$ i $\alpha > 0$. Recordem que, si $a \in \mathbb{C}$, es defineix la delta de Dirac δ_a com la mesura que compleix $f(a) = \int_{\mathbb{C}} f\delta_a$. Aleshores, $\mu = \sum_{n \geq 0} \lambda_n \delta_{z_n}$ és una mesura de Carleson per F^p_α si i només si $(\lambda_n)_n$ està acotada.

Demostració. Fixem $r > 0$ i considerem el reticle $r\mathbb{Z}^2 = \{rm + irn \in \mathbb{C} : m, n \in \mathbb{Z}\}$ associat a r que escrivim com $r\mathbb{Z}^2 = \bigcup_{n \geq 1} \{z_n\}$. Observem que

$$\mu(B(z_n, r)) = \int \chi_{B(z_n,r)}(z) d\mu(z) = \sum_{z_m \in B(z_k, r)} \lambda_m = \lambda_k.$$

Així doncs, per a tota $n \in \mathbb{N}$ existeix una constant $C > 0$ tal que $\mu(B(z_n, r)) \leq C$ si i només si $(\lambda_n)_n$ està acotat. I pel Corol·lari anterior sabem que μ ha de ser una mesura de Carleson per a F^p_α, com volíem demostrar. $\square$

Per acabar el capítol, veurem un exemple de mesura discreta que, malgrat tenir tots els coeficients acotats, no és una mesura de Carleson per a F^p_α.

Exemple 5.7. Donat $r > 0$, sigui el reticle $r\mathbb{Z}^2 = \{z_{m,n} = rm + irn \in \mathbb{C} : m, n \in \mathbb{Z}\}$ associat a r. Considerem $w^k_{m,n} = z_{m,n} + \frac{r}{2} e^{\frac{2\pi}{k} i\theta}$ per a $k = 0, ..., |m| + |n| - 1$. Llavors, la mesura $\mu = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{|m|+|n|-1} \delta_{w^k_{m,n}}$ no és una mesura de Carleson per a F^p_α.

Demostració. Observem que

$$\mu(B(z_{m,n}, r)) = \int \chi_{B(z_{m,n}, r)}(z) d\mu(z) = \sum_{k=0}^{|m|+|n|-1} 1 = |m| + |n|,$$

i per tant μ no és una mesura de Carleson per a F^p_α. $\square$

6 Els conjunts de zeros de F^p_α

Com dèiem a la Introducció del treball, un problema clàssic en Teoria de funcions de variable complexa és el de la caracterització dels conjunts de zeros $Z(f)$ de les funcions f d'un espai de funcions holomorfes. Recordem que, si $f \not\equiv 0$, $Z(f)$ és un conjunt finit o numerable sense punts d'acumulació en l'espai.

Per exemple, per a $0 < q < p < +\infty$, els espais de Hardy $H^p(\mathbb{D})$ compleixen que

$$H^\infty(\mathbb{D}) \subset H^p(\mathbb{D}) \subset H^q(\mathbb{D}).$$

Utilitzant la Fórmula de Jensen 2.25, es pot demostrar que si $(z_n)_n \subset \mathbb{D}$ és la successió de zeros d'una funció de $H^p(\mathbb{D})$, llavors aquesta successió satisfà la condició de Blaschke, és a dir, $\sum_{n\geq 0}(1-|z_n|) < +\infty$. Recíprocament, si es compleix aquesta condició, els productes de Blaschke permeten construir una funció de $H^\infty(\mathbb{D})$ amb $Z(f) = \bigcup_{n\geq 0}\{z_n\}$. En altres paraules, la condició de Blaschke caracteritza les successions de zeros de funcions dels espais de Hardy $H^\infty(\mathbb{D})$. En particular, tenim que les unions de conjunts de zeros són conjunts de zeros, que tota subsuccessió d'una successió de zeros també és una successió de zeros de $H^\infty(\mathbb{D})$, i que els conjunts de zeros són els mateixos per a tots els espais $H^\infty(\mathbb{D})$.

Aquestes afirmacions poden no ser certes per altres espais de funcions holomorfes. En el espais de Fock que estem estudiant encara no s'ha pogut obtenir una caracterització del seu conjunt de zeros.

En aquest capítol, en veurem una condició necessària i una altra de suficient sobre el seu conjunt de zeros. També veurem que, a diferència del que passa als espais de Hardy $H^\infty(\mathbb{D})$, la unió de conjunts de zeros de F^p_α no és necessàriament un conjunt de zeros de F^p_α i que en general tampoc ho és un subconjunt d'un conjunt de zeros de F^p_α.

Per provar tot això farem servir la Fórmula de Jensen 2.25 i el Producte de Weierstrass que ens permetran construir funcions amb zeros prefixats i propietats de les funcions enteres.

Una condició necessària

Teorema 6.1. *Sigui $0 < p < +\infty$. Suposem que $(z_n)_n$ és una successió de zeros infinita d'una funció $f \in F^p_\alpha$ amb $f(0) \neq 0$. Suposem també que els zeros d'aquesta successió estan repetits segons la seva multiplicitat i ordenats de forma que $0 \leq |z_1| \leq |z_2| \leq \dots$ Aleshores, existeix una constant $c > 0$ tal que $|z_n| \geq c\sqrt{n}$ per a tota $n \in \mathbb{N}$.*

Demostració. Sigui $f \in F^p_\alpha$. Notem que $kf \in F^p_\alpha$ per qualsevol k, de manera que podem suposar que $f(0) = 1$. A més, al Teorema 3.25 hem vist que $F^p_\alpha \subset F^\infty_\alpha$ i per tant n'hi ha prou que considerem el cas $p = +\infty$.

Recordem que $Z(f)$ és finit o bé numerable ja que $f \not\equiv 0$. Aleshores, agafem un $r > 0$ tal que f no tingui cap zero en $|z| = r$, és a dir, $Z(f) \cap \{|z| = r\} = \phi$, i denotem $n(r)$ el nombre de zeros de f que hi ha en $|z| < r$. Per provar aquest Teorema farem servir la

Fórmula de Jensen 2.25:

$$\sum_{k=1}^{n(r)} \log\left(\frac{r}{|z_k|}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta.$$

Observem que, per l'estimació puntual, $|f(re^{i\theta})| \leq ||f||_{F_\alpha^\infty} e^{\frac{\alpha}{2}r^2}$ per a tota $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Aplicant això a la Fórmula de Jensen obtenim que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n(r)} \log\left(\frac{r}{|z_k|}\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left(||f||_{F_\alpha^\infty} e^{\frac{\alpha}{2}r^2}\right) d\theta \\ &= \log\left(||f||_{F_\alpha^\infty} e^{\frac{\alpha}{2}r^2}\right) = \log(||f||_{F_\alpha^\infty}) + \frac{\alpha}{2}r^2 = C + \frac{\alpha}{2}r^2,\end{aligned}$$

on posem $C = \log(||f||_{F_\alpha^\infty})$. Aleshores, podem deduir que

$$\sum_{k=1}^{n(r)} \log\left(\frac{r}{|z_k|}\right) \leq C + \frac{\alpha}{2}r^2,$$

i aplicant l'exponencial en ambdós costats de la desigualtat, la podem reescriure com

$$\prod_{k=1}^{n(r)} \frac{r}{|z_k|} \leq e^{C+\frac{\alpha}{2}r^2}. \tag{6.1}$$

En realitat podem escriure aquesta desigualtat posant la n que no depengui de r. Notem que per a qualssevol $n > 0$ i $r > 0$ tenim que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{r}{|z_k|} \leq \prod_{k=1}^{n(r)} \frac{r}{|z_k|}$. Per comprovar-ho, raonarem per casos:

(1) Si $n \leq n(r)$, llavors $|z_k| \leq r$. I com que $\dfrac{r}{|z_k|} \geq 1$, resulta que

$$\prod_{k=1}^{n(r)} \frac{r}{|z_k|} = \prod_{k=1}^{n} \frac{r}{|z_k|} \prod_{k=n+1}^{n(r)} \frac{r}{|z_k|} \geq \prod_{k=1}^{n} \frac{r}{|z_k|}.$$

(2) Si $n > n(r)$, aleshores $|z_k| > r$. I com que $\frac{r}{|z_k|} < 1$, obtenim que

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{r}{|z_k|} = \prod_{k=1}^{n(r)} \frac{r}{|z_k|} \prod_{k=n(r)+1}^{n} \frac{r}{|z_k|} \leq \prod_{k=1}^{n(r)} \frac{r}{|z_k|}.$$

D'altra banda, com que $(|z_k|)_k$ és una successió creixent, deduïm de la desigualtat (6.1) que

$$\frac{r^n}{|z_n|^n} \leq e^{C+\frac{\alpha}{2}r^2} \iff \frac{1}{|z_n|} \leq \frac{1}{r} e^{\frac{C}{n}+\frac{\alpha}{2n}r^2}.$$

Com que estem suposant que $f \not\equiv 0$, en particular $Z(f)$ és finit o numerable de manera que $\{r \in \mathbb{N} : Z(f) \cap \{|z| = r\} \neq \phi\}$ també és finit o numerable. Aleshores, per a tota $n > 0$, existeix $(r_k)_k \to \sqrt{n}$ quan $k \to +\infty$ i tal que $Z(f) \cap \{|z| = r_k\} = \phi$. Així doncs, per a tota $n \geq 1$,

$$\frac{1}{|z_n|} \leq \frac{1}{r_k} e^{\frac{C}{n}+\frac{\alpha}{2n}r_k^2} \to \frac{1}{|z_n|} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} e^{\frac{C}{n}+\frac{\alpha}{2}}.$$

I com que $e^{\frac{C}{n}+\frac{\alpha}{2}} \to e^{\frac{\alpha}{2}} \neq 0$, existeix una constant $a > 0$ tal que $\frac{1}{|z_n|} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}a$, $\forall n \geq 1$. $\square$

Observació 6.2. En realitat, la restricció $f(0) = 0$ no és necessària. Això és conseqüència immediata del Lema 3.19, doncs $g(z) = \frac{f(z)}{z^m} \in F^p_\alpha$ on m és la multiplicitat de f a l'origen, $f(0) \neq 0$ i $Z(g) = Z(f) \setminus \{0\}$.

Observació 6.3. La funció $f(z) = \frac{sin(\delta z^2)}{\delta z^2}$ vista als exemples 3.18 prova que l'estimació donada per aquest Teorema és la millor possible, ja que $Z(f) = \{z : \delta z^2 = k\pi, k \neq 0\}$.

Corol·lari 6.4. *Sigui* $0 < p \leq +\infty$. *Si* $(z_n)_n$ *és una successió de zeros d'alguna* $f \in F^p_\alpha$ *amb* $f(0) \neq 0$, *aleshores per a tota* $r > 2$ *tenim que*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{|z_n|^r} < +\infty.$$

Una condició suficient

Teorema 6.5. *Sigui* $(z_n)_n \subset \mathbb{C}$ *una successió que satisfà* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{|z_n|^2} < +\infty$. *Aleshores, per a tota* $0 < p \leq +\infty$, *existeix* $f \in F^p_\alpha$ *no nul·la tal que* $Z(f) = \bigcup_{n\geq 1} \{z_n\}$.

Demostració. Sense pèrdua de generalitat, podem suposar que $|z_n| \leq |z_{n+1}|$ per a tota $n \in \mathbb{N}$. Com que es satisfà $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{|z_n|^2} < +\infty$ per hipòtesi, el producte de Weierstrass

$$f(z) = \prod_{n\geq 1} E_1\left(\frac{z}{z_n}\right) \tag{6.2}$$

on $E_1(z) = (1-z)e^z$, convergeix. Llavors, el Teorema de factorització de Weierstrass 2.28, ens dóna que f és una funció entera amb $Z(f) = \bigcup_{n\geq 1} \{z_n\}$. Arribats a aquest punt tan sols ens queda comprovar que $f \in F^p_\alpha$ per a tota $0 < p \leq +\infty$. Per fer-ho, considerem els casos següents:

(1) Si $|z| < \frac{1}{2}$, notem que existeix la determinació del logaritme de $E_1(z)$ i

$$\log |E_1(z)| = \log |(1-z)e^z| = Re[\log((1-z)e^z)] = Re[\log(1-z) + z].$$

Substituint $\log(1-z) + z$ pel polinomi de Taylor corresponent i aplicant que estem suposant $|z| < \frac{1}{2}$ obtenim que

$$\begin{aligned} Re\left[-\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} - ...\right] &\leq \frac{|z|^2}{2} + \frac{|z|^3}{3} + \frac{|z|^4}{4} + ... \\ = |z|^2\left(\frac{1}{2} + \frac{|z|}{3} + \frac{|z|^2}{4} + ...\right) &\leq \frac{|z|^2}{2}\left(1 + |z| + |z|^2 + ...\right) \\ \leq \frac{|z|^2}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - ...\right) &= \frac{|z|^2}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^n} = \frac{|z|^2}{2}2 = |z|^2. \end{aligned}$$

(2) Ara suposem que $|z| \geq \frac{1}{2}$. Si $z \in \mathbb{C}$, $|E_1(z)| \leq (1+|z|)e^{|z|}$ i per tant tenim que $\log |E_1(z)| \leq |z| + \log(1+|z|)$. A més, per a qualsevol constant $a > 0$,

$$\frac{|z| + \log(1+|z|)}{a|z|^2} \to 0$$

quan $|z| \to +\infty$, de manera que existeix $R > 0$ tal que $\log|E_1(z)| \leq a|z|^2$, en $|z| > R$. A l'anell $\frac{1}{2} \leq |z| \leq R$, resulta que $|z|^2 \log|E_1(z)|$ és contínua excepte en $z = 1$ ja que $\log|E_1(z)| = |z| + \log|1 - z| \to -\infty$ quan $z \to 1$. Per tant, existeix $0 < \delta < 1$ tal que $|z - 1| < \delta$ implica que $\log|E_1(z)| < 0$.

D'altra banda, notem que el conjunt $\{\frac{1}{2} \leq |z| \leq R\} \setminus \{|z-1| < \delta\}$ és compacte i $\dfrac{\log|E_1(z)|}{|z|^2}$ és contínua. Aleshores, existeix una constant $B > 0$ tal que per a tota $z \in \{\frac{1}{2} \leq |z| \leq R\} \setminus \{|z-1| < \delta\}$ tenim que $\log|E_1(z)| \leq |\log|E_1(z)|| \leq B|z|^2$. En particular, si $\frac{1}{2} \leq |z| \leq R$, tenim que $\log|E_1(z)| \leq B|z|^2$.

Combinant els dos casos anteriors deduïm que existeix una constant $M = max(1, A, B)$ positiva que satisfà

$$\log|E_1(z)| \leq M|z|^2, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{6.3}$$

Donat que $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{|z_n|^2} < +\infty$, per a tot $\epsilon > 0$, existeix una $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n\geq N+1} \frac{1}{|z_n|^2} \leq \frac{\epsilon}{2M}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{6.4}$$

Utilitzant les desigualtats (6.3) i (6.4) podem veure que per a tota $z \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n\geq N+1} \log\left|E_1\left(\frac{z}{z_n}\right)\right| \leq M \sum_{n\geq N+1} \left|\frac{z}{z_n}\right|^2 \leq M|z|^2 \sum_{n\geq N+1} \frac{1}{|z_n|^2} \leq M|z|^2 \frac{\epsilon}{2M} = \frac{\epsilon}{2}|z|^2.$$

Posem ara $S = \sum_{n=1}^{N} \dfrac{1}{|z_n|^2} > 0$. Observem que $\dfrac{|z| + \log(1+|z|)}{\frac{\epsilon}{2S}|z|^2} \to 0$ quan $|z| \to +\infty$. Això implica que existeix una constant $r_1 > 0$ que compleix per a tot $|z| > r_1$

$$\log|E_1(z)| \leq \frac{\epsilon}{2S}|z|^2. \tag{6.5}$$

Agafem $r_2 := r_1|z_N|$. Si $|z| > r_2$, llavors $\left|\dfrac{z}{z_n}\right| > \dfrac{r_2}{|z_n|} \geq \dfrac{r_2}{|z_N|} = r_1$ per $n = 1, ..., N$. Així doncs, utilitzant la desigualtat (6.5) veiem que en $|z| > r_2$

$$\sum_{n=1}^{N} \log\left|E_1\left(\frac{z}{z_n}\right)\right| \leq \frac{\epsilon}{2S} \sum_{n=1}^{N} \left|\frac{z}{z_n}\right|^2 = \frac{\epsilon}{2S}|z|^2 \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{|z_n|^2} = \frac{\epsilon}{2S}|z|^2 S = \frac{\epsilon}{2}|z|^2.$$

Finalment, deduïm que

$$\begin{aligned}\log|f(z)| = \sum_{n\geq 1} \log\left|E_1\left(\frac{z}{z_n}\right)\right| &= \sum_{n=1}^{N} \log\left|E_1\left(\frac{z}{z_n}\right)\right| + \sum_{n\geq N+1} \log\left|E_1\left(\frac{z}{z_n}\right)\right| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2}|z|^2 + \frac{\epsilon}{2}|z|^2 = \epsilon|z|^2,\end{aligned}$$

és a dir, $|f(z)| \leq e^{\epsilon|z|^2}$, $|z| > r_2$. I com que $\epsilon > 0$ és arbitrari, aleshores $f \in F^p_\alpha$. $\square$

Propietats patològiques

En aquest apartat provarem que, a diferència del que passa pels espais de Hardy, la unió de conjunts de zeros per a F^p_α no és, en general, un conjunt de zeros per a F^p_α; i que un subconjunt d'un conjunt de zeros no és necessàriament un conjunt de zeros de F^p_α.

Teorema 6.6. *Siguin $0 < p \leq +\infty$ i $\alpha > 0$. Aleshores, existeixen dues successions de zeros en F^p_α diferents tals que la seva unió no és una successió de zeros en F^p_α.*

Demostració. Donada $\delta \in \left(\frac{\alpha\pi}{8}, \frac{\alpha}{2}\right)$, considerem $Z = \left\{e^{i\frac{k\pi}{2}}\sqrt{\frac{n\pi}{8}} : n \in \mathbb{N}, k = 0,1,2,3\right\}$. Notem que Z és la successió de zeros de la funció $f(z) = \frac{\sin(\delta z^2)}{\delta z^2} \in H(\mathbb{C})$. A més, als exemples 3.18 hem vist que $f \in F^p_\alpha$ si $\delta < \frac{\alpha}{2}$. I com que $Z(f) = Z$, llavors Z és un conjunt de zeros de F^p_α.

Ara, considerem $Z' = \left\{e^{i\frac{\pi}{4}}z : z \in Z\right\}$. En particular, observem que Z' també és un conjunt de zeros de F^p_α i $Z \cap Z' = \phi$. A continuació, volem provar que $Z \cup Z'$ no ho és.

Posem que $Z \cup Z' = \{z_n\}$ compleix que $|z_1| \leq |z_2| \leq ...$ Suposant que $\{z_n\}$ és una successió de zeros de $F^p_\alpha \subset F^\infty_\alpha$, per la demostració del teorema 6.1 existeix una constant $C > 0$ tal que

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{r}{|z_k|} \leq Ce^{\frac{\alpha}{2}r^2}, \quad n \geq 1, r > 0.$$

Aleshores, elevant al quadrat i substituint n per $8n$

$$\prod_{k=1}^{8n} \frac{r^2}{|z_k|^2} \leq C^2 e^{\alpha r^2},$$

i integrant respecte la mesura $re^{-\beta r^2}$ on $\beta > \alpha$ en l'interval $(0, +\infty)$

$$\int_0^{+\infty} \prod_{k=1}^{8n} \frac{r^2}{|z_k|^2} re^{-\beta r^2} dr \leq C^2 \int_0^{+\infty} e^{(\alpha-\beta)r^2} dr. \tag{6.6}$$

D'una banda, aplicant el canvi de variable $t = \beta r^2$ a la integral de l'esquerra tenim que

$$\int_0^{+\infty} \prod_{k=1}^{8n} \frac{r^2}{|z_k|^2} re^{-\beta r^2} dr = \prod_{k=1}^{8n} \left(\frac{1}{|z_k|^2}\right) \int_0^{+\infty} (r^2)^{8n} re^{-\beta r^2} dr$$
$$= \frac{1}{2\beta^{8n+1}} \prod_{k=1}^{8n} \left(\frac{1}{|z_k|^2}\right) \int_0^{+\infty} t^{8n} e^{-t} dt = \frac{(8n)!}{2\beta^{8n+1}} \prod_{k=1}^{8n} \frac{1}{|z_k|^2}.$$

D'altra banda, com que la integral de la dreta de (6.6) és finita ja que hem suposat $\beta > \alpha$, llavors existeix una constant $C_0 > 0$ tal que

$$\frac{(8n)!}{2\beta^{8n+1}} \prod_{k=1}^{8n} \frac{1}{|z_k|^2} \leq C_0, \quad n \geq 1. \tag{6.7}$$

A més, per cada $j = 1, ..., n$, tenim vuit punts z_{kj} complint que $|z_{kj}| = \sqrt{\frac{j\pi}{\delta}}$. Així doncs,

$$\prod_{k=1}^{8n} \frac{1}{|z_k|^2} = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\delta}{j\pi}\right)^8 = \left(\frac{\delta}{\pi}\right)^{8n} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{j^8} = \left(\frac{\delta}{\pi}\right)^{8n} \frac{1}{(n!)^8}.$$

Substituint el hem obtingut a la part esquerra de la desigualtat (6.7) i aplicant la Fórmula de Stirling

$$\frac{(8n)!}{2\beta^{8n+1}}\left(\frac{\delta}{\pi}\right)^{8n}\frac{1}{(n!)^8}=\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\beta\pi}\right)^{8n}\frac{(8n)!}{(n!)^8}\approx\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\beta\pi}\right)^{8n}\frac{(8n)^{8n}e^{-8n}\sqrt{2\pi 8n}}{n^{8n}e^{-8n}(\sqrt{2\pi 8n})^8}\simeq\left(\frac{8\delta}{\beta\pi}\right)^{8n}\frac{\sqrt{n}}{n^4},$$

de manera que la desigualtat (6.7) es pot reescriure com

$$\left(\frac{8\delta}{\beta\pi}\right)^{8n}\frac{\sqrt{n}}{n^4}\leq C_0, \quad n\geq 1.$$

De fet, això implica que $8\delta \leq \beta\pi$. Donat que β pot ser arbitràriament propera a α, obtenim que $\delta \leq \frac{\alpha\pi}{8}$. Però al principi de la demostració havíem agafat $\delta > \frac{\alpha\pi}{8}$ manera que arribem a contradicció.

Per tant, $Z\cup Z'$ no és una successió de zeros de F^p_α. □

Teorema 6.7. *Siguin $0 < p \leq +\infty$ i $\alpha > 0$. Aleshores, existeix una successió de zeros de F^p_α tal que una subsuccessió seva no és una successió de zeros de F^p_α.*

Demostració. Sigui $0 < \delta < \frac{\alpha}{2}$. Considerem la funció $f(z) = \frac{e^{i\delta z^2}-1}{i\delta z^2} \in F^p_\alpha$ que té com a conjunt de zeros en F^p_α

$$Z=\left\{\pm\sqrt{\frac{2n\pi}{\delta}}:n\in\mathbb{N}\right\}\cup\left\{\pm i\sqrt{\frac{2n\pi}{\delta}}:n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Denotem $\{z_n\}$ els nombres reals del conjunt anterior i volem veure que aquesta subsuccessió no és un conjunt de zeros de F^p_α.

Suposem que existeix una funció $g \in F^p_\alpha$ no nul·la tal que té $Z(g) = \{z_n\}$ com a conjunt de zeros. Pel Corol·lari 6.4 sabem que

$$\rho_1(g)=\inf\left\{s>0:\sum_{n\geq 1}\frac{1}{|z_n|^s}<+\infty\right\}=2,$$

i conseqüentment l'enter positiu més petit que satisfà la convergència del sumatori és 3, és a dir, $m(g) + 1 = 3$ i per tant $m(g) = 2$. D'altra banda, si g és d'ordre ρ, pel Teorema 2.30 tenim que $\rho(g) \geq \rho_1(g) = 2$. Però el Teorema 3.26 ens diu que qualsevol funció de F^p_α és d'ordre menor o igual que 2, de manera que podem concloure que g és d'ordre $\rho(g) = 2$.

Ara, observem que la suma parcial

$$S(r)=\sum_{|z_n|\leq r}\frac{1}{z_n^2}=\sum_{|z_n|\leq r}\frac{\delta}{2n\pi}\simeq\log r, \quad r>1,$$

no està acotada. Pel Teorema de Lindelöf 2.31 això implica que g (amb ordre $\rho = 2$) és de tipus infinit cosa que contradiu el Teorema 3.26 que també ens diu que tota funció de F^p_α és de tipus $\sigma \leq \frac{\alpha}{2}$. En altres paraules, obtenim que g no pot pertànyer a l'espai F^p_α cosa que que és contradictòria amb el que hem suposat inicialment. Per tant, $(z_n)_n$ no és un conjunt de zeros de l'espai F^p_α. □

7 Conclusions

Arrel d'haver cursat l'assignatura optativa de Funcions de Variable Complexa vaig tenir clar que havia de fer el Treball de Final de Grau sobre algun tema que estigués relacionat. Vam finalitzar l'assignatura estudiant zeros de diferents espais de funcions holomorfes, com ara els espais de funcions enteres i els espais de funcions holomorfes i acotades en el disc unitat, i finalment estudiant funcions enteres de les funcions holomorfes i acotades en H^∞. Així doncs, la meva tutora em va suggerir que podríem encaminar-nos en aquesta direcció, considerant els espais de Fock de funcions enteres dels quals no havia sentit mai a parlar.

Principalment, hem fet servir de guia el llibre *Analysis on Fock spaces* del matemàtic Kehe Zhu i hem consultat alguns articles complementaris. En moltes ocasions m'he trobat sense els coneixements previs requerits per entendre els conceptes, com ara les mesures de Carleson, de manera que he hagut de cercar la bibliografia addicional necessària per suplir aquestes mancances. D'altra banda, però, he pogut consolidar alguns coneixements adquirits en els darrers anys, especialment sobre conceptes de Teoria de la mesura i variable complexa.

Aquest treball ha esdevingut una exposició sobre algunes propietats dels espais de Fock F^p_α, calculant el seu nucli reproductor, provant l'acotació de la seva projecció en L^p_α, estudiant les inclusions dels diferents espais de Fock i caracteritzant les mesures de Carleson i els conjunts de zeros per a F^p_α.

El ventall de temes que hem deixat per explorar és molt ampli i molt divers, és per aquest motiu que espero en un futur no gaire llunyà seguir aprofundint en el coneixement d'aquests espais: els espais de Fock F^p_α.

Referències

[1] Bruna, J.; Cufí, J.: Anàlisi complexa, Manuals Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra, 2008.

[2] Conway, J.: Functions of One Complex Variable, Springer, New York, 1973.

[3] Dostanić, M.; Zhu, K.: Integral operators induced by the Fock kernel, Integr. Equat. Operat. Theor. 60, 217-236, 2008.

[4] Isralowitz, J.; Zhu, K.: Toeplitz operators on the Fock space, Integr. Equat. Operat. Theor. 66, 593-611, 2010.

[5] Rudin, W.: Análisis real y complejo, Mc Grawl Hill, Tercera edición, Madrid, 1988.

[6] Zhu, K.: Analysis on Fock Spaces, Graduate Texts in Mathematics, 263, Springer, New York, 2012.

[7] Zhu, K.: Zeros of functions in Fock spaces, Complex variables 21, 87-98, 1993.