



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

BIFURCACIONS DE HOPF I DE NEIMARK-SACKER

Autor: Núria Camí Cervelló

Director: Dr. Ernest Fontich Julià
Realitzat a: Departament de Matemàtiques
i Informàtica

Barcelona, 21 de juny de 2020

Abstract

Dynamical systems that depend on one or more parameters can display different types of bifurcations under small variations of these. Particularly, we will deal with those which, under this perturbation, an equilibrium point (fixed point, for discrete systems) of the phase space changes its stability, that is, switching from stable to unstable, or vice versa, and an isolated periodic orbit (closed invariant curve, respectively) of small amplitude emerges around it. This description corresponds to the Hopf bifurcation, for continuous systems, and the Neimark-Sacker bifurcation, for discrete ones. Although it generically occurs, there is no guarantee that a periodic orbit (or closed invariant curve) will branch from that equilibrium (or fixed point). For both cases the needed existence and genericity assumptions will be studied in detail, starting with planar systems and concluding with the generalization for the n -dimensional case. To achieve these results we will use normal form and center manifold theories, which will also allow us to analyze the dynamics of the bifurcation itself.

Resum

Els sistemes dinàmics que depenen d'un o diversos paràmetres poden presentar diversos tipus de bifurcacions sota petites variacions d'aquests. En particular, es tractaran aquells en els que, sota aquesta pertorbació, un punt d'equilibri (punt fix, per a sistemes discrets) de l'espai de fase canvia la seva estabilitat, és a dir, passa d'estable a inestable, o viceversa, i s'origina al voltant seu una òrbita periòdica aïllada (corba tancada invariant, respectivament) d'amplitud petita. Aquesta descripció es correspon a una bifurcació de Hopf, per a sistemes continus, i a una bifurcació de Neimark-Sacker, per a sistemes discrets. Encara que ocorre de manera genèrica, no hi ha plena garantia que el punt d'equilibri (o punt fix) bifurqui a una òrbita periòdica (o corba tancada invariant). En ambdós casos s'estudiarà en detall les condicions d'existència i genericitat necessàries, començant amb sistemes planars i conclouent amb la generalització al cas n -dimensional. Per dur-ho a terme s'emprarà la teoria de les formes normals i les varietats centrals que, a més, permetrà analitzar la dinàmica de la mateixa bifurcació.

Agraïments

A la meva família, pel suport rebut ara i sempre.

A l'altra *família*, el millor que m'enduc.

Índex

Introducció	1
1 Preliminars	3
1.1 Sistemes dinàmics	3
1.2 Bifurcació, diagrames de bifurcació i codimensió	4
2 Teoria de les formes normals	6
2.1 Forma normal de Poincaré	6
2.2 Forma normal d'una bifurcació	8
3 Bifurcació de Hopf en dimensió 2	10
3.1 Forma normal topològica	10
3.2 Bifurcació de Hopf genèrica	14
4 Bifurcació de Neimark-Sacker en dimensió 2	24
4.1 Forma normal topològica	24
4.2 Bifurcació de Neimark-Sacker genèrica	29
5 Generalització al cas n-dimensional	34
5.1 Teorema de la Varietat Central	34
5.2 Varietats centrals en sistemes dependents d'un paràmetre	35
5.3 Equacions restringides a la varietat central	37
Conclusions	40
Apèndixs	41
A Teorema de la Funció Implícita i Teorema de la Funció Inversa	41
B Teorema de Hartman-Grobman	41
Referències	42

Introducció

La teoria fonamental d'existència de solucions periòdiques (i, en particular, de cicles límit) d'equacions diferencials ordinàries (EDO's) no-lineals va ser establerta pel matemàtic francès Henri Poincaré (1854-1912). Ben entrat al segle XX, el matemàtic soviètic A. A. Andronov juntament amb els seus col·laboradors van obtenir resultats rellevants en relació amb l'aparició d'aquestes solucions en sistemes n -dimensionals dependents d'un sol paràmetre. De manera independent, el matemàtic alemany H. Hopf va elaborar un estudi rigorós basat, en gran part, en els resultats d'Andronov, els quals es va dedicar a formalitzar. La teoria del seu estudi rau en el fet que l'amplitud i la freqüència d'una solució periòdica de tal sistema pot ser calculada de manera aproximada quan es fa variar un paràmetre real del sistema. A més, explica com l'estabilitat de la solució periòdica, que bifurca des d'un equilibri, pot determinar-se en el moment en el qual el paràmetre creua un valor crític concret. Anys més tard, aquest resultat ha estat revalidat i aplicat per molts altres investigadors de diferents camps disciplinaris. És el cas, per exemple, de M. Neimark i R. Sacker, que van desenvolupar resultats anàlegs per a sistemes dinàmics discrets.

En general, els sistemes dinàmics indexats per paràmetres poden presentar diversos tipus de bifurcacions, és a dir, canvis qualitius a nivell topològic en l'estructura de les òrbites sota una petita variació de certs valors dels paràmetres, anomenats *valors crítics de bifurcació*. L'estudi de bifurcacions és, per tant, determinant per entendre el comportament del sistema. Aquestes poden ser de caire local (*sella-node*, *pitchfork*, *doblement de període*, *Hopf*, *Neimark-Sacker...*) o global (*homoclínica*, *heteroclínica...*), i poden trobar-se tant en sistemes dinàmics continus com discrets en el temps.

En sistemes dinàmics continus generats per EDO's, una *bifurcació de Hopf* (o d'*Andronov-Hopf*) es correspon al naixement d'un cicle límit a partir d'un equilibri en el moment en què aquest canvia la seva estabilitat quan una (única) parella de valors propis creua l'eix imaginari. De manera anàloga, existeix la *bifurcació de Neimark-Sacker* per a sistemes dinàmics discrets generats per la iteració d'una aplicació. Aquesta altra fa referència a l'aparició d'una corba tancada invariant a partir d'un punt fix en el moment en què aquest canvia la seva estabilitat quan una (única) parella de valors propis complexos creua el cercle unitat. En els dos casos, a part d'aquestes condicions d'existència, és imprescindible el compliment de certes condicions suplementàries de genericitat.

Ambdues bifurcacions poden presentar una configuració *supercrítica* o *subcrítica*, segons el canvi d'estabilitat de l'equilibri (o punt fix) quan el paràmetre creua el valor crític i, en conseqüència, el de la solució periòdica que exhibeix al fer-ne una petita variació. Aquesta distinció s'evidencia quan es representa en el *diagrama de bifurcació*, on es pot apreciar la figura d'un paraboloides generat per les solucions periòdiques en una certa regió de l'espai de paràmetres.

El comportament qualitatiu d'aquestes bifurcacions ve determinat per una expressió polinomial anomenada *forma normal topològica* del sistema, que s'obté aplicant successius canvis de variables no-lineals al sistema original. Les formes normals, en general, no estan definides de manera única, ja que existeix certa variabilitat en el càlcul dels coeficients de les transformacions no-lineals. La part bona és que la seva expressió és més simple que la del mateix sistema i, per tant, són més fàcils de tractar.

El diagrama de bifurcació d'una forma normal té un significat universal i representa els fenòmens que ocorren en sistemes que exhibeixen un mateix tipus de bifurcació. Així, un pas previ a estudiar aquestes bifurcacions serà reduir el sistema a la seva forma normal i després analitzar-la.

El projecte

Per al marc teòric del treball, excepte en alguns punts on s'indica, s'han considerat sistemes dinàmics no-lineals, autònoms i uniparamètrics. L'objectiu principal d'aquest és analitzar de quina manera un sistema genèric (amb termes fins a un cert ordre) que exhibeixi una bifurcació de Hopf o de Neimark-Sacker pot ser estudiat a partir de la seva forma normal topològica.

Malgrat que aquestes dues bifurcacions comparteixen característiques comunes, les condicions d'existència i de genericitat i la conseqüent anàlisi qualitativa resulta ser significativament diferent. Per al cas continu, serem capaces de certificar una equivalència topològica (local) entre el sistema i la forma normal a partir de la construcció d'una aplicació de retorn i la d'un homeomorfisme entre els espais de fase d'ambdós sistemes. Pel que fa al cas discret, veurem que la presència de termes d'ordre superior del sistema pot condicionar una possible conjugació topològica. No obstant això, s'aconseguirà provar l'existència d'una corba tancada invariant mitjançant el Teorema de l'Aplicació Contractiva, el qual també ens donarà informació referent a l'estabilitat d'aquesta corba.

Per aquest motiu que s'ha considerat adient fer un estudi independent que permeti entendre la casuística de cada bifurcació, començant per sistemes amb la mínima dimensió requerida, $n = 2$, i acabant amb el cas general n -dimensional, on serà necessari l'ús d'unes varietats invariants anomenades varietats centrals.

Estructura de la Memòria

Més enllà de la numeració dels capítols, es podria fer una divisió del treball en tres grans blocs.

Bloc 1: Elements introductoris. El primer capítol, com bé indica el seu títol, pretén donar les eines i el vocabulari bàsic per situar-se en el context matemàtic de l'estudi de sistemes dinàmics, així com introduir les bifurcacions i els elements essencials que cal conèixer per poder analitzar-les. El segon capítol està exclusivament dedicat a les formes normals, el pilar fonamental del treball. Es fa distinció entre la *forma normal de Poincaré*, que engloba el concepte de manera general, i la *forma normal topològica*, que és una eina apropiada per a l'estudi de bifurcacions com les que es tractaran.

Bloc 2: Estudi de les bifurcacions de Hopf i de Neimark-Sacker en dimensió 2. Els capítols 3 i 4 tenen estructures similars, on s'estudien per separat sistemes dinàmics de camps vectorials en el pla associats a EDO's (cas continu) i a aplicacions (cas discret) que presenten bifurcacions Hopf i de Neimark-Sacker, respectivament. El que es pretén veure en ambdós casos és que qualsevol sistema genèric que presenti certes condicions de bifurcació i genericitat pot reduir-se a una forma normal (amb certs termes d'ordre superior) manifestant també bifurcacions d'aquest tipus. En cada capítol s'enuncia un lema de gran importància que determina una possible equivalència o conjugació topològica entre el sistema original i el de la forma normal, i que permet detectar el cas continu i discret de manera independent. També es detallen les condicions necessàries de genericitat per a què això ocorri, així com l'expressió matemàtica de $l_1(0)$ (*coeficient de Lyapunov*) i $d(0)$, respectivament, que, a part de ser parcíps com a condicions de no-degeneració, són determinants pel que fa a la direcció que prenen cadascuna de les bifurcacions. Els capítols conclouen amb un petit estudi d'un model concret presentant aquests tipus de bifurcacions.

Bloc 3: Cas general. Després d'haver fet una anàlisi profunda per al cas senzill $n = 2$, al capítol 5 s'estenen els resultats per al cas continu n -dimensional. Es comença presentant les *varietats centrals*, un element que serà fonamental per a estudiar la bifurcació tant en el valor crític de bifurcació com al voltant d'aquest. En particular, es detalla el cas $n = 3$, que permet entendre de manera més intuïtiva el vincle entre la forma normal estudiada en capítols anteriors i la varietat central. Per últim, es dedueix la fórmula pel coeficient de Lyapunov en dimensions superiors.

Finalment, a l'apartat de Conclusions es fa una petita valoració del treball, seguit dels Apèndixs i el recull de referències bibliogràfiques emprades.

1 Preliminars

1.1 Sistemes dinàmics

Per començar, introduïrem els conceptes bàsics que permetran situar-nos dins l'estudi d'aquesta petita part de la teoria de les equacions diferencials ordinàries. Serà convenient començar veient què és un *sistema dinàmic*.

Un sistema dinàmic és una formulació matemàtica d'un procés determinista, l'evolució temporal del qual queda totalment determinada pel seu *estat inicial*. Certament, els estats passats i futurs es poden predir a partir de l'estat present i una llei d'evolució.

Definició 1.1. Els possibles estats d'un sistema vénen caracteritzats pels punts d'un conjunt X anomenat *espai de fase*, que considerarem de dimensió finita.

L'evolució d'un sistema dinàmic designa un canvi d'estat en el temps $t \in T$, on T és el *conjunt temporal*, que pot ser continu, $T = \mathbb{R}$, o discret, $T = \mathbb{Z}$, depenent del context o objectius de l'estudi. En aquest treball tractarem amb ambdós casos.

Podem suposar sense pèrdua de generalitat que *l'instant inicial* és $t_0 = 0$. Això és propi de les equacions diferencials autònomes, és a dir, invariants per translacions en el temps; no és rellevant l'instant inicial, sinó el temps transcorregut des d'aquest. Així, donada una condició inicial $(t_0, x_0) = (0, x_0) \in T \times X$, la *llei d'evolució* ens determina l'estat x_t , per a algun $t \in T$. Aquesta llei permet tant saber la posició actual de cada estat com determinar la seva evolució a mesura que transcorre el temps.

Definició 1.2. L'*operator d'evolució* és l'aplicació $\varphi^t: X \rightarrow X$, $x_0 \mapsto x_t$, que transforma l'estat inicial $x_0 \in X$ en un altre estat $x_t \in X$ en el temps $t \in T$, és a dir, $\varphi^t x_0 = x_t$, satisfent $\varphi^0 = Id$ i $\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s \quad \forall t, s \in T$.

Definició 1.3. Per al cas continu de temps, la *família d'operadors d'evolució* $\{\varphi^t\}_{t \in T}$ s'anomena *flux*. També farem servir la notació $\varphi = \varphi(x, t)$, per a $x \in X$, $t \in T$.

Amb aquests elements ja podem donar una definició més completa i formal de sistema dinàmic.

Definició 1.4. Un *sistema dinàmic* és una terna $\{T, X, \varphi^t\}$, on T és l'interval temporal, X l'espai de fase i $\varphi^t: X \rightarrow X$ una família d'operadors d'evolució parametritzada per $t \in T$ i satisfent $\varphi^0 = Id$ i $\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s \quad \forall t, s \in T$.

Definició 1.5. Una *òrbita* (o *trajectòria*) començant en x_0 és un subconjunt ordenat d'elements de X , és a dir, $\mathcal{O}(x_0) = \{x \in X : x = \varphi^t x_0 \quad \forall t \in T \text{ on } \varphi^t x_0 \text{ estigui definit}\}$. També farem servir la notació $\mathcal{O} = \mathcal{O}(x_0, \varphi)$, que ens permetrà referir-nos a una òrbita d'un sistema dinàmic concret.

En particular, les òrbites de sistemes en temps continu són *corbes* de l'espai de fase parametritzades pel temps i orientades per la direcció en la qual avancen, mentre que en el cas discret són *seqüències de punts* de l'espai de fase indexades per enters creixents, és a dir, *successions*.

Proposició 1.6. Donats dos punts de l'espai de fase $x_0, y_0 \in X$ tals que $y_0 = \varphi^{t_0} x_0$ per a algun t_0 , aleshores $\mathcal{O}(x_0) = \mathcal{O}(y_0)$, és a dir, les seves òrbites coincideixen.

Definició 1.7. Un punt $x_0 \in X$ s'anomena *equilibri* (en el cas continu) o *punt fix* (en el cas discret) si compleix $\varphi^t x_0 = x_0 \quad \forall t \in T$. La seva òrbita té la configuració més simple possible, ja que està formada únicament per aquest punt.

Definició 1.8. Un *cicle* γ_0 en un sistema continu és una òrbita periòdica en el temps, és a dir, satisfent que, per a cada punt $x_0 \in \gamma_0$, $\varphi^{t+T_0} x_0 = \varphi^t x_0$ per a algun $T_0 > 0$, $\forall t \in T$. Si aquest es troba aïllat (sense altres cicles a prop), parlarem de *cicle límit*. Aquest concepte s'utilitza preferentment en dimensió 2.

Definició 1.9. Per a sistemes dinàmics discrets utilitzarem el concepte de *corba (tancada) invari-ant* per a referir-nos a conjunts (corbes tancades) tals que, prenent un estat inicial x_0 pertanyent a aquest, la corresponent òrbita $\mathcal{O}(x_0)$ romà en el mateix conjunt per a tots els possibles valors de temps.

Tant els cicles límit com les corbes tancades invariants poden ser de caràcter *estable, inestable* o *semiestable*, segons la manera en com atrauen o repelen les òrbites de qualsevol solució amb estat inicial prou proper a aquestes.

Definició 1.10. El *retrat de fase* és una partició de l'espai de fase en òrbites.

De manera molt acurada es poden classificar totes les òrbites d'un sistema dinàmic continu en equilibris, cicles i corbes obertes simples. Així, l'estudi del retrat de fase queda simplificat i proporciona una representació intuïtiva i sintetitzada del conjunt de solucions del sistema.

1.2 Bifurcació, diagrames de bifurcació i codimensió

La manera més comuna de definir els sistemes dinàmics és mitjançant *equacions diferencials ordi-nàries* (EDO's) o *aplicacions*. Sovint, de fet, l'operador d'evolució no ve explícit, sinó que es manifesta en termes de les velocitats \dot{x} com a funcions de $x \in X$.

Per al marc teòric del treball s'ha assumit que l'espai de fase X és un obert de \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, i que els sistemes amb els quals treballarem seran no-lineals, autònoms i uniparamètrics; és per això que a vegades aquestes propietats podran anar implícites en les explicacions. Escrivem:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, \alpha) \text{ per al cas continu,} \\ x &\mapsto f(x, \alpha) \text{ per al cas discret,}\end{aligned}$$

on $x \in \mathbb{R}^n$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ són la variable i el paràmetre, respectivament, i $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ un camp vectorial suficientment diferenciable tal que, fixat un α , assigna a cada punt x de l'espai de fase un vector $f(x, \alpha)$. Parlarem d'EDO's per al cas continu i d'aplicacions per al cas discret.

Fixat un valor del paràmetre $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, si el fem variar, el retrat de fase també canvia de manera simultània. D'aquí n'apareixen dos possibles escenaris: que el sistema resultant sigui topològicament equivalent a l'original o, per contra, que no ho sigui.

Quan dos sistemes amb aquestes característiques són *topològicament equivalents* ens referim al fet que tenen comportaments "qualitativament similars" a nivell topològic i que, per tant, la dinàmica d'un d'ells pot estudiar-se a través de l'altre. De manera formal, si considerem dos sistemes dinàmics a temps continu dependents d'un paràmetre,

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad (1.1)$$

$$\dot{y} = g(y, \beta), \quad y \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

on f i g són camps vectorials diferenciables d'oberts de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ en \mathbb{R}^n .

Definició 1.11. Es diu que el sistema dinàmic (1.1) és *localment topològicament equivalent* al sistema (1.2) a prop de $(x, \alpha) = (0, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, si:

- i) existeix un homeomorfisme entre els espais de paràmetres, $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\beta \mapsto p(\alpha)$, definit en un entorn petit de $\alpha = 0$, amb $p(0) = 0$, i
- ii) existeix un homeomorfisme dependent de paràmetre entre els espais de fase, $h_\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $y \mapsto h_\alpha(x)$, definit en un entorn petit U_α de $x = 0$, amb $h_0(0) = 0$, que envia les òrbites de (1.1) en U_α a òrbites de (1.2) en $h_\alpha(U_\alpha)$, amb $\beta = p(\alpha)$, tot preservant la direcció del temps.

Dit d'una altra manera, si $\varphi_\alpha = \varphi(x, t)$ i $\psi_\beta = \psi(y, t)$ són els fluxos respectius de (1.1) i (1.2), amb $\beta = p(\alpha)$, i denotem \mathcal{O} com una òrbita, aleshores h_α satisfà

$$h_\alpha(\mathcal{O}(x, \varphi)) = \{h_\alpha \circ \varphi(x, t) : t \in \mathbb{R}\} = \{\psi(h_\alpha(x), t) : t \in \mathbb{R}\} = \mathcal{O}(h_\alpha(x), \psi)$$

per a cada $x \in U_\alpha$. A més, per a cadascun dels $x \in U_\alpha$, existeix un $\delta > 0$ tal que, si $0 < |s| < t < \delta$, i s satisfà que $\psi(h_\alpha(x), s) = h_\alpha \circ \varphi(x, t)$, llavors $s > 0$.

Tanmateix, la noció d'*equivalència topològica* és una mica menys restrictiva que la de *conjugació topològica*, utilitzada per al mateix propòsit en sistemes dinàmics a temps discret; aquesta requereix que h_α preservi la variable de temps $t \in \mathbb{Z}$, de la mateixa manera que ho fa amb les òrbites i la seva orientació. Per tant, en aquest cas, h_α satisfà

$$\psi(h_\alpha(x), t) = h_\alpha \circ \varphi(x, t), \quad \forall x \in U_\alpha, \forall t \in \mathbb{Z}.$$

Definició 1.12. L'aparició d'un retrat de fase fruit d'una variació del paràmetre que no sigui topològicament equivalent a l'original s'anomena *bifurcació*. Concretament, aquesta es produeix en el moment en què es creua el *valor (crític) de bifurcació* α_0 a l'espai de paràmetres.

Definició 1.13. El *diagrama de bifurcació* d'un sistema dinàmic és una estratificació de l'espai de paràmetres on es representa el retrat de fase per a cada valor del paràmetre.

Observació. Sistemes dinàmics dependents de paràmetres que són topològicament equivalents tenen també diagrames de bifurcació (topològicament) equivalents.

Aquest diagrama permet fer una anàlisi qualitativa del sistema dinàmic en funció del paràmetre, ja que presenta d'una manera molt condensada els diferents comportaments del sistema i les transicions de la bifurcació sota certa pertorbació. És per aquest motiu que s'acostuma a representar al voltant dels valors implicats en la bifurcació.

En general, quan l'espai de paràmetres és \mathbb{R}^m , $m \geq 1$, el diagrama està format per un nombre finit de regions de l'espai de paràmetres, i en cadascuna d'aquestes els retrats de fase corresponents són topològicament equivalents entre si. Aquestes regions les delimiten les *fronteres de bifurcació*, que són subvarietats de l'espai de paràmetres (punts, corbes, superfícies...), i són precisament els llocs on s'assoleix la bifurcació. Així, una frontera de bifurcació es defineix especificant un objecte (equilibri, cicle, etc) i algunes condicions que determinen de quin tipus de bifurcació es tracta (sella-node, Hopf, doblement de període, etc.).

En els casos teòrics que s'estudiaran, la bifurcació s'assoleix en el valor crític del paràmetre, dividint així el diagrama en tres regions topològicament equivalents: la del mateix valor crític, la regió "per sota" i la regió "per sobre" d'aquest. Per exemple, per a la bifurcació de Hopf, aquesta frontera vindrà determinada per un equilibri i una sola condició: que en els valors propis resultants d'avaluar l'equilibri a la matriu Jacobiana del sistema hi hagi exactament una parella d'imaginaris purs, és a dir, amb part real nul·la (equilibri de tipus *no-hiperbòlic*). Anàlogament, per a la bifurcació de Neimark-Sacker, caldrà tenir un parell de valors propis complexos d'un punt fix sobre el cercle unitat que siguin diferents de les arrels quadrades, cúbiques i quàrtiques de 1.

Observació. El requeriment d'haver de disposar d'aquesta parella de valors propis satisfent les propietats esmentades suposa haver de treballar, com a mínim, en un espai de fase de dimensió 2 per a què esdevinguin aquests tipus de bifurcacions que estudiarem.

De manera essencial, la *codimensió*¹ d'una bifurcació fa referència a la diferència entre la dimensió de l'espai de paràmetres i la dimensió corresponent a la frontera de bifurcació. Aquesta indica el nombre de condicions independents que determinen la bifurcació i que fan possible la descripció de la dinàmica en el seu entorn.

Proposició 1.14. La codimensió de les bifurcacions de Hopf i de Neimark-Sacker és 1.

Aquesta afirmació és certa fins i tot si treballem amb més d'un paràmetre. En efecte, en sistemes uniparamètrics la bifurcació ocorre en un punt de X per a valors aïllats del paràmetre. En sistemes de dos paràmetres generalment ocorre en corbes específiques (que, quan es creuen transversalment, els diagrames de bifurcació uniparamètrics resultants són topològicament equivalents al diagrama de bifurcació amb un sol paràmetre). De manera gradual, la idea és la mateixa quan es creua una varietat de dimensió 2 (superfície) corresponent a un sistema dependent de 3 paràmetres, i així successivament per a dimensions superiors.

¹La definició més rigorosa requereix la construcció de deformacions versals.

2 Teoria de les formes normals

Una de les eines bàsiques per a l'estudi del comportament qualitatiu de sistemes dinàmics entorn d'un punt de bifurcació és el *mètode de les formes normals*.

Quan tractem famílies paramètriques de sistemes que satisfan certes condicions (de genericitat) que són suficients per a l'aparició d'un tipus particular de bifurcació, l'aplicació d'aquest mètode consisteix bàsicament a fer alguns canvis de variable (no-lineals) en els que s'acaba transformant el sistema a una forma polinomial denominada forma normal, que resulta ser molt més fàcil de tractar.

2.1 Forma normal de Poincaré

Malgrat que en l'anàlisi de les bifurcacions de Hopf i de Neimark-Sacker veurem que serà necessària la construcció d'una forma normal, aquesta només representa una petita part de la teoria requerida per estudiar-les.

L'objectiu de la secció és introduir aquest concepte en un context general, amb la finalitat d'anunciar un resultat de Poincaré. Aquest afirma que un camp vectorial *no-ressonant* pot transformar-se (formalment) a la seva linealització en un entorn proper a un punt singular mitjançant una successió (infinita) de canvis de variable polinomials. Encara que el camp en qüestió contingui termes *ressonants*, és possible reduir-lo a una expressió molt més simple, anomenada *forma normal de Poincaré*.

Considerem un sistema d'EDO's diferenciables

$$\dot{x} = Ax + f^{(2)}(x) + f^{(3)}(x) + \dots, \quad x \in \mathbb{R}^n, f^{(i)} \in H_i, i \geq 2, \quad (2.1)$$

on H_i és l'espai vectorial de funcions (vectorials) tal que les seves components són polinomis homogenis d'ordre $i \geq 2$.

Observació. La linealització de (2.1) és $\dot{x} = Ax$ i té una singularitat en $x = 0$. Idealment A s'escriurà en forma de Jordan.

A continuació introduïm el canvi de variable

$$x = y + h^{(k)}(y), \quad (2.2)$$

on $y \in \mathbb{R}^n$ és una nova variable i $h^{(k)}(y)$ és un polinomi vectorial arbitrari de H_k , per a un $k \geq 2$ fixat.

Notació. Podem escriure $h^{(k)}$ en comptes de $h^{(k)}(y)$ per simplificar la notació. El mateix per a la funció f .

La idea és que, mitjançant aquest canvi, aconseguim simplificar el terme $f^{(k)}$ de (2.1). Així, si anem aplicant successius canvis de la forma (2.2) amb k creixent, $k = 2, 3, \dots$, acabarem obtenint una expressió global molt més simplificada.

Observem que $G(y) := y + h^{(k)}(y)$ és un difeomorfisme local. En efecte, com que $G \in \mathcal{C}^\infty$, $G(0) = 0$ i $G'(0) = \text{Id}$, on Id és la matriu identitat, el Teorema de la Funció Inversa (veure Apèndix A) implica que existeix G^{-1} .

Per tant, (2.2) és invertible a prop de l'origen i podem escriure $y = x - h^{(k)}(x) + \mathcal{O}(\|x\|^{k+1})$. A continuació derivem y d'aquesta expressió:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{x} - h_x^{(k)}(x)\dot{x} + \mathcal{O}(\|x\|^{k+1}) = \left(\text{Id} - h_x^{(k)}(x)\right)\dot{x} + \mathcal{O}(\|x\|^{k+1}) \\ &= \left(\text{Id} - h_x^{(k)}(x)\right) \left[Ax + \sum_{i=2}^{k-1} f^{(i)}(x) + \mathcal{O}(\|x\|^{k+1}) \right] \\ &= \left(\text{Id} - h_{y+h^{(k)}(y)}^{(k)}(y + h^{(k)}(y))\right) \left[A(y + h^{(k)}(y)) + f^{(2)}(y + h^{(k)}(y)) + \dots + f^{(k)}(y + h^{(k)}(y)) + \dots \right], \end{aligned}$$

on en aquest últim pas s'ha utilitzat el canvi de variable (2.2). Seguidament fem l'expansió de Taylor de les funcions $h_{y+h^{(k)}(y)}^{(k)}(y+h^{(k)}(y)) = Dh^{(k)}(y+h^{(k)}(y))$ i $f^{(i)}(y+h^{(k)}(y))$ per a $i \geq 2$ entorn de $y+h^{(k)}(y) \approx y$:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \left(\text{Id} - \left[Dh^{(k)}(y) + D^2h^{(k)}(y)(y+h^{(k)}(y)-y) + \frac{1}{2!}D^3h^{(k)}(y)(y+h^{(k)}(y)-y)^2 + \dots \right] \right) \\ &\cdot \left[Ay + Ah^{(k)}(y) + \left(f^{(2)}(y) + Df^{(2)}(y)(y+h^{(k)}(y)-y) \right) + \left(f^{(3)}(y) + Df^{(3)}(y)(y+h^{(k)}(y)-y) \right) + \dots \right] \\ &= \left(\text{Id} - \left[Dh^{(k)}(y) + D^2h^{(k)}(y)h^{(k)}(y) + \frac{1}{2}D^3h^{(k)}(y)(h^{(k)}(y))^2 + \dots \right] \right) \\ &\cdot \left[Ay + Ah^{(k)}(y) + f^{(2)}(y) + f^{(3)}(y) + \dots + f^{(k-1)}(y) + f^{(k)}(y) + \sum_{i=2}^k Df^{(i)}(y)h^{(k)}(y) + \dots \right] \\ &= Ay + \sum_{i=2}^{k-1} f^{(i)}(y) + \left[f^{(k)}(y) + Ah^{(k)}(y) - Dh^{(k)}(y)Ay \right] + \mathcal{O}(\|y\|^{k+1}). \end{aligned}$$

L'última expressió consta de tres parts ben diferenciades: la primera, on es troben tots els termes d'ordre $< k$, seguida del bloc entre claudàtors, que inclou únicament els d'ordre k i, a continuació d'aquests, la resta de termes d'ordres superiors.

Sigui L_A un operador lineal definit per

$$(L_A h)(y) = \frac{\partial h}{\partial y}(y)Ay - Ah(y),$$

aleshores, podem reescriure l'expressió \dot{y} com

$$\dot{y} = Ay + \sum_{i=2}^{k-1} f^{(i)}(y) + \left[f^{(k)}(y) - (L_A h^{(k)})(y) \right] + \mathcal{O}(\|y\|^{k+1}). \quad (2.3)$$

Observació. L'operador $L_A: H_k \rightarrow H_k$, amb $k \geq 2$, està ben definit. En efecte, si $h \in H_k$, aleshores els sumands que defineixen l'operador també hi pertanyen i, per tant, $L_A h \in H_k$ per a tot $k \geq 2$.

Fixem-nos que els termes d'ordre més petit que k a (2.3) romanen invariants respecte el sistema inicial (2.1). Pel que fa als d'ordre k , ara, en comptes de tenir $f^{(k)}(y)$, tenim $f^{(k)} - (L_A h^{(k)})(y)$.

Considerem l'equació homològica

$$L_A h^{(k)} = f^{(k)}. \quad (2.4)$$

Idealment ens interessarà que $L_A h^{(k)} - f^{(k)}$ sigui el més proper a 0 possible per tal de simplificar al màxim el terme d'ordre k , $f^{(k)}$. Que l'equació $L_A h^{(k)} - f^{(k)} = 0$ se satisfaci vol dir que existeix una solució $h^{(k)}$ de (2.4) per la qual $f^{(k)}$ pertany a la imatge de L_A . En altres paraules, existeix una transformació de la forma (2.2) que elimina tots els termes homogenis d'ordre k de (2.1).

Observació. Si això passa per a tots els termes d'ordre $k \geq 2$ de (2.1), fent una sèrie de transformacions convenientes serà possible reduir aquesta expressió al sistema lineal $\dot{x} = Ax$. No obstant, en general, això no és del tot freqüent.

Escrivim $f^{(k)} = s^{(k)} + r^{(k)}$, on $s^{(k)} \in L_A(H_k)$ és la part que podrà ser descartada de (2.1), i $r^{(k)}$, que serà la part no-negligible, pertany a un conjunt complementari \tilde{H}_k de H_k en $L_A(H_k)$. Així, un cop aplicada la transformació (2.2), tindrem:

$$\dot{y} = Ay + \sum_{i=2}^{k-1} f^{(i)}(y) + r^{(k)} + \mathcal{O}(\|y\|^{k+1}).$$

Els termes romanents $r^{(k)}$ s'anomenen *termes ressonants* d'ordre k . Aquests no estan definits de manera única pel fet que \tilde{H}_k tampoc ho està².

Observació. El sistema (2.1) es pot interpretar com un camp vectorial $v(x) = Ax + \mathcal{O}(|x|^2)$, on suposem que tots els valors propis de A són diferents. Diem que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ són *ressonants* si existeix una relació integral de la forma $\lambda_i = (l, \lambda)$, on $l = (l_1, \dots, l_n)$, $l_j \geq 0$ i $\sum l_j \geq 2$ per a $i, j = 1, \dots, n$. La relació establerta s'anomena *ressonància* i ve caracteritzada per $|l| = \sum l_j$, *l'ordre de ressonància*. Per tant, si els valors propis de A són no-ressonants, aleshores l'equació $\dot{x} = Ax + \mathcal{O}(|x|^2)$ pot reduir-se a una equació lineal $\dot{y} = Ay$ mitjançant un canvi formal de variable de la forma $x = y + \mathcal{O}(\|y\|^2)$.

Si apliquem el procediment descrit de manera inductiva per a $k = 2, 3, \dots$ fins a cert ordre m de (2.1), podem afirmar el següent resultat.

Teorema 2.1 (de Poincaré). Existeix un canvi polinomial de variable, $x = y + \sum_{k=2}^m h^{(k)}(y)$, $h^{(k)} \in H_k$, que transforma (2.1) al sistema

$$\dot{y} = Ay + \sum_{k=2}^m r^{(k)}(y) + \mathcal{O}(\|y\|^{m+1}),$$

on cada $r^{(k)}$ conté els termes ressonants d'ordre k , és a dir, $r^{(k)} \in \tilde{H}_k$ per a $k = 2, 3, \dots, m$. Aquesta expressió s'anomena *forma normal de Poincaré* de (2.1).

2.2 Forma normal d'una bifurcació

Tant la bifurcació de Hopf com la de Neimark-Sacker són de caire *local*, el que significa que poden ser detectades focalitzant-nos només en l'equilibri (o el punt fix) en qüestió i en un entorn petit d'aquest. Així, l'estudi dels diagrames universals d'aquest tipus de bifurcacions es centra, no només en analitzar els mateixos equilibris, sinó el retrat de fase sencer al voltant d'aquests.

A continuació es presenta una primera idea de la *forma normal topològica* per al cas continu de temps en un sistema uniparamètric, malgrat que la construcció sigui pràcticament la mateixa per al cas discret. Ambdós casos es desenvoluparan més detalladament als capítols 2 i 3, respectivament.

Considerem un sistema dinàmic autònom

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

que tingui un equilibri $x = 0$ en $\alpha_0 = 0$, i suposem que compleix certes condicions que es corresponen amb la manifestació d'algun tipus de bifurcació.

Observació. D'ara endavant assumirem que f satisfà les condicions necessàries per tal que, donat un valor inicial x_0 de l'espai de fase, l'equació diferencial (2.5) tingui una única solució per a un valor del paràmetre α fixat. Sovint estudiarem el sistema en el *valor crític de bifurcació* α_0 , que suposarem exactament igual a 0.

Donat un sistema com el (2.5), a vegades és possible construir un sistema simple (polinomial en ξ_i) de la forma

$$\dot{\xi} = g(\xi, \beta; \sigma), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^l, \quad n, l \in \mathbb{N}^+, \quad (2.6)$$

tal que en $\beta = 0$ té un equilibri $\xi = 0$ i el vector σ conté els coeficients σ_i , $i = 1, 2, \dots, l$, dels polinomis involucrats. Assumirem també que tenim un nombre finit de regions a l'espai de coeficients corresponents a diagrames de bifurcació de (2.5) que no són topològicament equivalents. En els casos més simples, σ_i només pren un nombre finit de valors enters, com per exemple $\sigma_i = 1 \forall i$ excepte per a algun i_0 en el que $\sigma_{i_0} = \pm 1$, mentre que en situacions més complexes, podrà prendre valors reals.

²Una selecció vàlida per $\tilde{H}_k \subset H_k$ seria agafar el conjunt ortogonal i caracteritzar-lo mitjançant el *Teorema de l'Alternativa de Fredholm*.

Definició 2.2. El sistema (2.6) s'anomena *forma normal topològica* de la bifurcació del sistema genèric (2.5) si els dos sistemes satisfan les mateixes condicions de bifurcació en el valor crític del paràmetre i existeixen coeficients σ_i que fan que siguin topològicament equivalents a nivell local (en un entorn proper a l'equilibri).

Entenem per sistema genèric aquell que, a banda de satisfer certes condicions de bifurcació, satisfà un nombre finit de *condicions de genericitat*, que vénen determinades pel sistema en el valor crític $\alpha_0 = 0$. Per una banda, les que s'expressen en termes de les derivades parcials $\frac{\partial}{\partial x} f(x, 0)|_{x=0}$, s'anomenen *condicions de no-degeneració*. La resta, on hi està involucrada la derivada $\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, 0)$, s'anomenen *condicions de transversalitat*. El rol d'aquests dos tipus de condicions no és el mateix; les de no-degeneració garanteixen que l'equilibri no sigui del tot degenerat, mentre que les de transversalitat estan relacionades amb el comportament del paràmetre respecte de la singularitat en una forma general.

En el següent capítol es comença estudiant la bifurcació de Hopf en sistemes planars. Concretament, es parteix d'un sistema que pren la forma següent amb $\sigma = -1$:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \beta \xi_1 - \xi_2 + \sigma \xi_1 (\xi_1^2 + \xi_2^2), \\ \dot{\xi}_2 = \xi_1 + \beta \xi_2 + \sigma \xi_2 (\xi_1^2 + \xi_2^2). \end{cases} \quad (2.7)$$

L'objectiu és acabar veient que aquestes equacions corresponen a la forma normal topològica 2-dimensional d'un sistema qualsevol d'aquesta dimensió i com, gràcies a les quals, podrem fer un estudi qualitatiu de la bifurcació de Hopf. Clarament, aquest sistema també haurà de satisfer la condició de la bifurcació (codimensió) ja esmentada al capítol anterior: que l'equilibri $\xi = 0$ en $\beta = 0$ sigui no-hiperbòlic amb un parell de valors propis imaginaris purs.

En general, per a sistemes amb dimensió $n \geq 2$, la garantia que aquests exhibeixin una bifurcació d'aquest tipus passa per verificar que es compleixen les següents condicions de genericitat:

- (I) $\left. \frac{\partial}{\partial \beta} \operatorname{Re}(\lambda_{1,2}(\beta)) \right|_{\beta=0} \neq 0$, és a dir, la parella de valors propis conjugats complexos de la matriu Jacobiana avaluada en l'equilibri en el valor crític del paràmetre creua l'eix imaginari amb velocitat no nul·la (transversalitat).
- (II) $l_1(0) \neq 0$, on la fórmula per a $l_1(0)$ es donarà en el següent capítol. Aquesta condició ve a dir que existeix una certa combinació de coeficients de Taylor de la banda dreta del sistema (incloent els termes d'ordre 3) que és no nul·la (no-degeneració).

Notació. Atès que de manera freqüent treballarem amb parelles de valors propis conjugats, sovint s'utilitzarà $\lambda(\alpha) := \lambda_1(\alpha)$ i $\bar{\lambda}(\alpha) := \lambda_2(\alpha)$. A més, a partir d'ara ens referirem a valor propi com a *vap* i a vector propi com a *vep*.

Resultats semblants (tot i que no idèntics) es veuran per a la bifurcació de Neimark-Sacker al capítol 4. De moment, al pròxim capítol veurem, entre altres coses, que el sistema (2.7) és realment la forma normal topològica de la bifurcació de Hopf i es donarà una fórmula explícita per al càlcul de $l_1(0)$. Provar que aquest valor no és 0 no només serà una condició necessària; el seu signe $\sigma = \operatorname{signe}(l_1(0))$ també aportarà informació rellevant pel que fa a la direcció de la mateixa bifurcació.

3 Bifurcació de Hopf en dimensió 2

Aquí comença l'estudi de la bifurcació de Hopf per a sistemes no-lineals, bidimensionals, uniparamètrics i continus en el temps.

En el primer apartat es parteix d'una forma normal topològica simple (amb termes fins a ordre 3) que satisfà les condicions de bifurcació. A través d'uns canvis de variable senzills, es proporcionen expressions alternatives que permeten tant la construcció del diagrama de bifurcació com les característiques principals per a què pugui ser detectada. Per últim, s'anuncia un lema de gran importància que permet utilitzar aquests resultats en un sistema genèric qualsevol que presenti aquesta bifurcació, tenint en compte que els termes d'ordre superior no afecten significativament el diagrama del sistema.

En el segon apartat, mitjançant el desenvolupament de Taylor i emprant canvis polinomials de variables, s'aconsegueix reduir un sistema qualsevol a la seva forma normal amb termes de cert ordre. Assumint que aquesta satisfà les condicions de bifurcació i de genericitat convenients, i fent ús del lema que fa de nexce entre els dos apartats, s'aconsegueix estudiar i detectar qualsevol sistema que presenti una bifurcació de Hopf.

3.1 Forma normal topològica

Considerem el sistema no-lineal 2-dimensional dependent d'un paràmetre,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 = x_1 + \alpha x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2), \end{cases} \quad (3.1)$$

que també es pot escriure com

$$x' = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = f(x, \alpha), \quad (3.2)$$

i té per matriu Jacobiana:

$$D_x f(x, \alpha) = A(x, \alpha) = \begin{pmatrix} \alpha - 3x_1^2 - x_2^2 & -1 - 2x_1x_2 \\ 1 - 2x_1x_2 & \alpha - 3x_2^2 - x_1^2 \end{pmatrix}.$$

El sistema té un equilibri $x = (x_1, x_2) = (0, 0) \forall \alpha \in \mathbb{R}$ i el jacobiana en aquest punt és

$$A(\alpha) = A(0, \alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix},$$

amb polinomi característic $\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 + 1$ que s'anul·la en els vaps $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i$.

Fixem-nos que l'estabilitat de l'origen ve determinada pel signe($\text{Re}(\lambda_{1,2})$) = signe(α). En $\alpha = 0$ l'equilibri és *no-hiperbòlic* i és on s'origina la bifurcació de Hopf. Per entendre el seu comportament donarem la seva representació en un diagrama de bifurcació, però abans serà convenient transformar el sistema actual en un sistema a coordenades polars.

Primer introduïm la variable complexa $z = x_1 + ix_2$, satisfent $\bar{z} = x_1 - ix_2$, $|z|^2 = x_1^2 + x_2^2$, i la derivem:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \dot{x}_1 + i\dot{x}_2 = [\alpha x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)] + i[x_1 + \alpha x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2)] \\ &= \alpha(x_1 + ix_2) + i(x_1 + ix_2) - (x_1 + ix_2)(x_1^2 + x_2^2). \end{aligned}$$

Així, hem obtingut

$$\dot{z} = (\alpha + i)z - z|z|^2 = \lambda_1 z - z|z|^2. \quad (3.3)$$

Ara, mitjançant el canvi de variable $z = \rho e^{i\phi}$, $\rho \geq 0$, es té

$$\rho e^{i\phi}(\alpha + i) - \rho e^{i\phi} \rho^2 = \dot{z} = \dot{\rho} e^{i\phi} + \rho i \dot{\phi} e^{i\phi} \implies \dot{\rho} + \rho i \dot{\phi} = \rho(\alpha + i - \rho^2) \implies \dot{\rho} = \rho(\alpha + i - \rho^2) - i\rho \dot{\phi}.$$

D'aquesta manera el sistema de coordenades polars resultant es pot escriure com

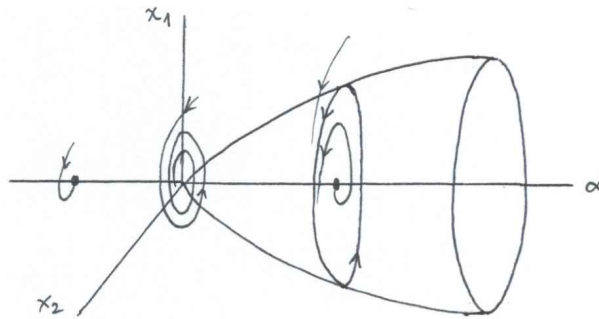
$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\alpha - \rho^2), \\ \dot{\phi} = 1. \end{cases} \quad (3.4)$$

Ara que tenim un sistema sense interacció de variables, podem analitzar les diferents regions del diagrama de bifurcació de (3.1) delimitades per $\alpha = 0$. Com que estem considerant $\rho \geq 0$, la primera equació de (3.4) té un punt d'equilibri $\rho = 0 \forall \alpha \in \mathbb{R}$, que es correspon amb l'origen com a equilibri de (3.1). Per altra banda, la segona equació descriu una rotació amb velocitat constant. De tot això se'n dedueix el següent:

- i) Per a $\alpha < 0$ l'origen és *estable*, corresponent a un *focus atractor*.
- ii) Per a $\alpha = 0$ l'origen és el punt de bifurcació del sistema i és topològicament equivalent a un focus estable. Més precisament, diríem que és un focus *feblement estable*, ja que tendeix a l'origen potencialment en comptes d'exponencialment. Notem que, en aquest cas, el Teorema de Hartman-Grobman (veure Apèndix B) no ens permet explicar la dinàmica de l'equilibri a causa del seu caràcter no-hiperbòlic.
- iii) Per a $\alpha > 0$ l'origen és *inestable*, corresponent a un *focus repulsor*. A més, existeix un altre equilibri $\rho_0(\alpha)$ satisfent $\alpha - \rho^2 = 0$, que descriu un (únic) *cicle límit estable* al voltant de l'origen. L'amplitud d'aquesta òrbita és $\rho_0(\alpha) = \sqrt{\alpha}$.

Així, podem detectar que tenim una bifurcació de Hopf d'un equilibri no-hiperbòlic quan, en fer avançar el paràmetre α fins a la seva regió positiva, l'equilibri canvia d'estabilitat i apareix una òrbita periòdica com a solució del sistema (3.1). A conseqüència del canvi d'estabilitat de l'origen sota aquesta pertorbació, diem que aquest punt d'equilibri és *estructuralment inestable*.

Una representació del diagrama de bifurcació a l'espai (x_1, x_2, α) seria la següent. Fixem-nos que la família de cicles límit que genera la regió de $\alpha > 0$ forma una superfície parabolòide (varietat invariant 2 dimensional³).



La bifurcació descrita és de tipus *supercrítica* degut que el cicle límit (atractor) apareix per a $\alpha > 0$ i l'origen en $\alpha = 0$ és estable. Si, per contra, haguéssim estudiat el sistema (3.1) amb signe oposat en els termes no-lineals, el cicle límit (ara repulsor) hauria aparegut per a $\alpha < 0$ i l'origen en $\alpha = 0$ hagués estat inestable. En aquest segon cas la bifurcació hauria sigut de tipus *subcrítica*.

Tant en el cas supercrític com en el cas subcrític l'equilibri pateix una pèrdua d'estabilitat en passar a la regió positiva de α , però aquesta transició és més controlable (ocorre de manera més "suau") en el primer cas. Això és degut al fet que en el cas supercrític apareixen cicles límit estables d'amplitud petita, cosa que permet al sistema romandre en un entorn proper a l'equilibri i adaptar-se suaument a ells a mesura que el paràmetre avança. En l'altre cas, l'equilibri es troba amb un cicle inestable que l'empeny cap enfora, provocant una transició més brusca. L'avantatge de conservar la zona d'atracció de l'equilibri és que el sistema tolera millor la variació de la pertorbació.

³Quan això passa en una aplicació de Poincaré d'un cicle límit, la bifurcació genera un tor invariant 2-dimensional a la corresponent EDO.

Observació. Si en comptes del sistema considerat n'haguéssim estudiat un sense termes no-lineals, l'origen en $\alpha < 0$ i $\alpha > 0$ hauria romàs asimptòticament estable i inestable, respectivament, però en el pla $\alpha = 0$ aquest hagués passat a ser un centre (no-lineal), és a dir, a estar foliat per òrbites periòdiques d'amplitud creixent.

Finalment, donarem un resultat que serà determinant per enllaçar els resultats vistos en aquest apartat amb el següent, on partirem d'un sistema qualsevol 2-dimensional.

Si afegim alguns termes d'ordre superior al sistema (3.2),

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\|x\|^4), \quad (3.5)$$

on $x = (x_1, x_2)^\top$, $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$ i els termes $\mathcal{O}(\|x\|^4)$ poden dependre de α , podem donar el següent resultat important.

Lema 3.1. El sistema (3.5) és localment topològicament equivalent a prop de l'origen al sistema (3.2).

Demostració. Provarem la versió complexa, és a dir, veurem que el sistema

$$\dot{z} = (\alpha + i)z - z|z|^2 + \mathcal{O}(|z|^4), \quad (3.6)$$

és localment topològicament equivalent a prop de l'origen al sistema

$$\dot{z} = (\alpha + i)z - z|z|^2. \quad (3.7)$$

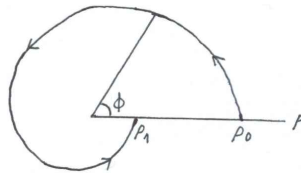
Per una banda, caldrà veure que (3.6) té un únic cicle límit per a $\alpha > 0$. Per a fer-ho, construirem una *aplicació de retorn*, els punts fixos (aïllats) de la qual corresponen a solucions periòdiques (aïllades) del sistema. Per altra banda, caldrà veure que realment existeix un homeomorfisme entre els retrats de fase d'ambdós sistemes i, d'aquesta manera, provarem l'equivalència topològica (notem que l'homeomorfisme entre els espais de paràmetres és trivial).

Comencem passant el sistema (3.6) a coordenades polars (ρ, ϕ) mitjançant $z = \rho e^{i\phi}$, $\rho \geq 0$,

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\alpha - \rho^2) + S_\alpha(\rho, \phi), \\ \dot{\phi} = 1 + T_\alpha(\rho, \phi), \end{cases} \quad (3.8)$$

on $S_\alpha = S_\alpha(\rho, \phi)$ i $T_\alpha = T_\alpha(\rho, \phi)$ són funcions complexes (dependents de α) que agrupen els termes d'ordres més grans que 4 i 3, respectivament.

Una òrbita de (3.8) pot ser considerada com una corba començant en $(\rho, \phi) = (\rho_0, 0)$ que va variant el seu angle a mesura que també ho fa ρ .



Escrivim cada punt d'aquesta òrbita com $\rho = \rho(\phi; \rho_0)$, on $\rho_0 = \rho(0; \rho_0)$.

Per una banda, com que $\rho(\phi; 0) \equiv 0$, podem donar l'expansió de Taylor de $\rho(\phi; \rho_0)$ al voltant de l'origen,

$$\rho = \rho(\phi; \rho_0) = u_1(\phi)\rho_0 + u_2(\phi)\rho_0^2 + u_3(\phi)\rho_0^3 + \mathcal{O}(|\rho_0|^4), \quad (3.9)$$

amb coeficients $u_1 = u_1(\phi)$, $u_2 = u_2(\phi)$, $u_3 = u_3(\phi)$... per ara desconeguts. El següent pas serà determinar-los per així poder construir l'aplicació de retorn i veure que té un punt fix.

Notem que la derivada d'aquesta expressió és

$$\rho' = u_1'(\phi)\rho_0 + u_2'(\phi)\rho_0^2 + u_3'(\phi)\rho_0^3 + \dots \quad (3.10)$$

Per altra banda, fent l'expansió de Taylor a $\frac{1}{1+T_\alpha}$ al voltant de l'origen,

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\phi} &= \frac{\rho(\alpha - \rho^2) + S_\alpha}{1 + T_\alpha} = [\rho(\alpha - \rho^2) + S_\alpha] [1 - T_\alpha + T_\alpha^2 - T_\alpha^3 + \dots] \\ &= \rho(\alpha - \rho^2) + S_\alpha - (\rho(\alpha - \rho^2))(T_\alpha - T_\alpha^2 + T_\alpha^3 + \dots), \end{aligned}$$

veiem que ρ satisfà l'equació:

$$\frac{d\rho}{d\phi} = \rho(\alpha - \rho^2) + R_\alpha, \quad (3.11)$$

on $R_\alpha = R_\alpha(\rho, \phi) = S_\alpha - (\rho(\alpha - \rho^2))(T_\alpha - T_\alpha^2 + T_\alpha^3 + \dots)$, que recull els termes d'ordre ≥ 4 .

Observem que la transició de (3.8) a (3.11) és equivalent a la introducció d'una nova parametrizació $\dot{\phi} = 1$, que implica que les òrbites que comencen en $\rho_0 = \rho(0; \rho_0)$ i arriben a un punt ρ_1 en aquest mateix semieix $\phi = 0$ ho fan totes amb el mateix temps (*temps de retorn*).

Substituint les expressions (3.9) i (3.10) a (3.11) i igualant les corresponents potències de ρ_0 , s'obtenen EDO's lineals. Si, a més, fixem les condicions inicials $u_1(0) = 1$, $u_2(0) = u_3(0) = 0$, se'ns plantegen els següents problemes de valor inicial:

$$\begin{cases} \dot{u}_1(\phi) = \alpha u_1, & \dot{u}_2(\phi) = \alpha u_2, & \dot{u}_3(\phi) = u_3^3 + \alpha u_3, \\ u_1(0) = 1, & u_2(0) = 0, & u_3(0) = 0, \end{cases}$$

la solució dels quals dóna lloc als tres primers coeficients de la forma de Taylor de $\rho(\phi; \rho_0)$:

$$u_1(\phi) = e^{\alpha\phi}, \quad u_2(\phi) \equiv 0, \quad u_3(\phi) = e^{\alpha\phi} \left(\frac{1 - e^{2\alpha\phi}}{2\alpha} \right).$$

Fixem-nos que cap d'aquests depèn de $R_\alpha(\rho, \phi)$ i, per tant, l'expansió de ρ tampoc:

$$\rho = e^{\alpha\phi} \rho_0 + 0 \cdot \rho_0^2 + e^{\alpha\phi} \left(\frac{1 - e^{2\alpha\phi}}{2\alpha} \right) \rho_0^3 + \mathcal{O}(|\rho_0|^4).$$

Recordem que aquesta funció representa el valor de ρ amb angle ϕ en una òrbita que comença a la coordenada $(\rho, \phi) = (\rho_0, 0)$. Prenent $\phi = 2\pi$, és a dir, donant una volta sencera, el punt resultant $\rho_1 = \rho(2\pi; \rho_0)$ correspondria a una òrbita que parteix del semieix $\phi = 0$ amb radi $\rho = \rho_0$ i que retorna en aquest mateix semieix amb radi $\rho = \rho_1$ (veure dibuix de la pàgina anterior).

Per tant, substituint l'angle per 2π a l'última expressió, s'aconsegueix definir l'*aplicació de retorn*, $\rho_0 \mapsto \rho_1 = \rho(2\pi, \rho_0)$, així:

$$\rho_1 = e^{2\pi\alpha} \rho_0 - e^{2\pi\alpha} [2\pi + \mathcal{O}(\alpha)] \rho_0^3 + \mathcal{O}(\rho_0^4),$$

per a tot $\tilde{R}_\alpha = \mathcal{O}(\rho_0^4)$. Aquesta pot ser analitzada fàcilment per a ρ_0 i $|\alpha|$ suficientment petits, amb la qual cosa podem determinar els punts fixos sota aquestes condicions. Un punt fix de ρ_1 correspon a una corba tancada de (3.8). En efecte, si aïllem ρ_0 de

$$\rho_0 = e^{2\pi\alpha} \rho_0 - e^{2\pi\alpha} [2\pi + \mathcal{O}(\alpha)] \rho_0^3, \quad \text{obtenim} \quad \rho_0 = \left\{ 0, \sqrt{\frac{1 - e^{-2\pi\alpha}}{2\pi + \mathcal{O}(\alpha)}} \right\},$$

on hem descartat una solució negativa que contradeia $\rho \geq 0$.

Fixem-nos, a més, que per a valors de α propers a 0, $\mathcal{O}(\alpha)$ és negligible i que $\frac{1 - e^{-2\pi\alpha}}{2\pi} > 0$ només se satisfà per a valors positius de α . Així, per a aquests valors del paràmetre es pot reescriure la solució estrictament positiva com:

$$\rho_0^+ = \sqrt{\frac{1 - e^{-2\pi\alpha}}{2\pi}} = \sqrt{\frac{1 - 1 + 2\pi\alpha + \dots}{2\pi}} = \sqrt{\alpha} + \dots$$

De tot això se'n dedueix que, per a valors petits de $\alpha < 0$, tenim un únic punt fix trivial $\rho_0 = 0$, mentre que, per a $\alpha > 0$, a part d'aquest, existeix un punt fix addicional, $\rho_0^+ = \sqrt{\alpha} + \dots > 0$ que es correspon a un cicle límit del sistema (3.8) amb alguns termes $\mathcal{O}(|z|^4)$. Per tant, de la mateixa manera que ho havíem vist en (3.7), podem dir que (3.6) també té un únic cicle límit (estable) que bifurca des de l'origen per a $\alpha > 0$ amb la mateixa direcció i amplitud.

Fins aquí s'ha provat que els termes d'ordre superior no afecten a l'aparició d'un cicle límit de la bifurcació en un entorn de $z = 0$ per a $|\alpha|$ suficientment petit i, per tant, l'existència i unicitat del cicle límit establert queda evidenciada. No obstant, cal fer un pas més enllà per a provar l'equivalència topològica entre els retrats de fase d'ambdós sistemes.

Com que tant (3.6) com (3.7) té un cicle límit en un entorn petit de l'origen per un $\alpha > 0$ prou petit, podem assumir que es realitza una reparametrització en (3.6) a partir del temps de retorn constant 2π . A més, podem aplicar un escalament lineal de coordenades de tal manera que la intersecció entre el cicle i el semieix horitzontal $\phi = 0$ sigui exactament el punt $x_1 = \sqrt{\alpha}$.

Tenint en compte aquestes indicacions, prenem un punt $z = x_1 + ix_2$ del retrat de fase de (3.7). Sabem que existeix una òrbita d'aquest sistema començant en $(\rho, \phi) = (\rho_0, 0)$ que arriba al punt z amb temps $t = \tau_0$. A continuació, començant per aquest mateix punt $(\rho_0, 0)$, construïm una òrbita del sistema (3.6) que es mogui a l'interval de temps $[0, \tau_0]$ i arribi fins a un altre punt que anomenarem $\tilde{z} = \tilde{x}_1 + i\tilde{x}_2$. L'aplicació $z \mapsto \tilde{z}$, amb $\tilde{z} = 0$ quan $z = 0$, és bijectiva, contínua i amb inversa contínua. Per tant, hem construït un homeomorfisme tal que, per a $\alpha > 0$, relaciona òrbites del sistema (3.7) d'un entorn proper a l'origen amb òrbites de (3.6), tot preservant la direcció del temps. En conseqüència, es prova la definició d'equivalència topològica (local) entre ambdós sistemes.

Per al cas $\alpha < 0$ utilitzariem les mateixes consideracions excepte que no hagués calgut reescalar les coordenades. \square

El que és rellevant d'aquest resultat és que els termes d'ordre superior no afecten al comportament de la bifurcació del sistema. Així, coneixent el diagrama de bifurcació pel cas més simple, l'estudi de bifurcacions de Hopf en sistemes genèrics (fins a ordre qualsevol) serà relativament fàcil d'interpretar, un cop s'hagi transformat a la seva forma normal.

3.2 Bifurcació de Hopf genèrica

L'objectiu principal serà veure que un sistema genèric que presenti una bifurcació de Hopf pot transformar-se a la forma normal (3.5), amb un possible canvi de signe en els termes cúbics. Si veiem això, gràcies al Lema 3.1., serem capaces d'estudiar el comportament de la bifurcació tal com ho hem vist a l'apartat anterior.

Considerem el següent sistema genèric en dues dimensions:

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (3.12)$$

on f és una funció diferenciable que té un equilibri $x = 0$ en $\alpha = 0$ amb vaps imaginaris simples $\lambda_{1,2} = \pm\omega_0 i$, $\omega_0 > 0$.

Per a $\alpha \neq 0$, com que $\frac{\partial f}{\partial x}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ és un isomorfisme, el Teorema de la Funció Implícita (veure Apèndix A) ens diu que $\exists \varepsilon > 0$ suficientment petit tal que $x: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha \mapsto x(\alpha)$, és una funció diferenciable i $f(x(\alpha), \alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Dit d'una altra manera, mentre $\lambda = 0$ no sigui un vap del jacobià, sota una lleugera variació del paràmetre α , segueix havent-hi un únic equilibri $x(\alpha)$ (no-hiperbòlic) proper a l'origen. Per tant, fent un canvi de coordenades en funció del paràmetre, podem assumir, sense pèrdua de generalitat, que $x(\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Per a $|\alpha|$ suficientment petit veiem, doncs, que si expressem f en sèrie de Taylor al voltant de l'origen,

$$f(x, \alpha) = f(0, \alpha) + f_x(0, \alpha)x + \frac{f_{xx}(0, \alpha)x^2}{2} + \dots,$$

com que $f(0, \alpha) = 0$, podem escriure

$$f(x, \alpha) = A(\alpha)x + F(x, \alpha), \quad (3.13)$$

on $F = \mathcal{O}(\|x\|^2)$ és diferenciable i conté els termes d'ordre ≥ 2 . A més,

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} a(\alpha) & b(\alpha) \\ c(\alpha) & d(\alpha) \end{pmatrix}$$

és la matriu Jacobiana, amb funcions diferenciables en α en el seu interior, i els seus vaps són les arrels del polinomi característic $\lambda^2 - \Gamma\lambda + \Delta$, on

$$\Gamma = \Gamma(\alpha) = \text{tr}(A(\alpha)) = a(\alpha) + d(\alpha) \quad \text{i} \quad \Delta = \Delta(\alpha) = \det(A(\alpha)) = a(\alpha)d(\alpha) - b(\alpha)c(\alpha).$$

Per tant, podem escriure: $\lambda_{1,2}(\alpha) = \frac{1}{2}(\Gamma(\alpha) \pm \sqrt{\Gamma^2(\alpha) - 4\Delta(\alpha)})$.

Observació. Recordem que la codimensió de la bifurcació de Hopf en el valor crític $\alpha = 0$ implica que $\Gamma(0) = 0$ i $\Delta(0) = \omega_0^2 > 0$.

Per a $|\alpha|$ suficientment petit, denotem

$$\kappa(\alpha) = \frac{1}{2}\Gamma(\alpha), \quad \omega(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{4\Delta(\alpha) - \Gamma^2(\alpha)},$$

i aleshores els vaps de $A(\alpha)$ podem expressar-los de la forma $\lambda_{1,2}(\alpha) = \kappa(\alpha) \pm i\omega(\alpha)$.

Seguint el mateix procediment que en l'apartat anterior, introduïm la variable complexa z .

Lema 3.2. El sistema (3.13) es pot reescriure, per a $|\alpha|$ suficientment petit, com una única equació

$$\dot{z} = \lambda(\alpha)z + g(z, \bar{z}, \alpha), \quad (3.14)$$

on $\lambda(\alpha) = \lambda_1(\alpha)$ i $g = \mathcal{O}(|z|^2)$ és una funció complexa diferenciable en (z, \bar{z}, α) .

Demostració.

Sigui $q(\alpha) = (q_1(\alpha), q_2(\alpha)) \in \mathbb{C}^2$ vep de vap $\lambda(\alpha)$ de $A(\alpha)$, satisfent $A(\alpha)q(\alpha) = \lambda(\alpha)q(\alpha)$.

Sigui $p(\alpha) = (p_1(\alpha), p_2(\alpha)) \in \mathbb{C}^2$ vep de vap $\bar{\lambda}(\alpha)$ de $A^\top(\alpha)$, satisfent $A^\top(\alpha)p(\alpha) = \bar{\lambda}(\alpha)p(\alpha)$.

Clarament $\lambda(\alpha)$ i $\bar{\lambda}(\alpha)$ són vaps de $A(\alpha)$ i $A^\top(\alpha)$, respectivament, ja que $A(\alpha)$ és real i ambdues matrius tenen la mateixa traça i determinant.

Notem també que $\bar{q}(\alpha) \in \mathbb{C}^2$ és vep de vap $\bar{\lambda}(\alpha)$ de $A(\alpha)$, satisfent $A(\alpha)\bar{q}(\alpha) = \bar{\lambda}(\alpha)\bar{q}(\alpha)$ (anàleg per a $\bar{p}(\alpha)$ i $A^\top(\alpha)$).

Prenem $\langle p, q \rangle = \bar{p}_1 q_1 + \bar{p}_2 q_2$, on $\langle \cdot, \cdot \rangle$ és el producte escalar estàndard a \mathbb{C}^2 . De fet, podem normalitzar p respecte a q ($\langle p, q \rangle = 1$), ja que aquest producte mai s'anul·la. En efecte, si suposem que $\langle p, q \rangle = 0$, s'arriba a una contradicció. Veiem primer que se satisfà $\langle p, \bar{q} \rangle = 0$:

$$\langle p, \bar{q} \rangle = \langle p, \frac{1}{\lambda} A \bar{q} \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle A^\top p, \bar{q} \rangle = \frac{\lambda}{\lambda} \langle p, \bar{q} \rangle \implies \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda}\right) \langle p, \bar{q} \rangle = 0 \implies \langle p, \bar{q} \rangle = 0,$$

utilitzant, en aquest últim pas, que $\omega(\alpha) > 0$ i, per tant, $\lambda \neq \bar{\lambda}$. Si fossin certes les dues igualtats, $\langle p, q \rangle = 0$ i $\langle p, \bar{q} \rangle = 0$, aleshores p seria el vector nul i no podria ser un vector propi.

El proper pas és provar que cada $x \in \mathbb{R}^2$ pot ser representat per un $|\alpha|$ prou petit com $x = zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha)$, per a algun $z \in \mathbb{C}$. Multiplicant a banda i banda per $p(\alpha)$, es té

$$\langle p(\alpha), x \rangle = \langle p(\alpha), zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha) \rangle = z\langle p(\alpha), q(\alpha) \rangle + \bar{z}\langle p(\alpha), \bar{q}(\alpha) \rangle.$$

Com que $\langle p, q \rangle = 1$ i $\langle p, \bar{q} \rangle = 0$, llavors $\langle p(\alpha), x \rangle = z \cdot 1 + \bar{z} \cdot 0 = z$, arribant així a la igualtat que volíem provar: $x = zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha)$.

Finalment, derivem la variable z :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \langle p(\alpha), \dot{x} \rangle = \langle p(\alpha), A(\alpha)x + F(x, \alpha) \rangle \\ &= \langle p(\alpha), A(\alpha)(zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha)) + F(zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha), \alpha) \rangle \\ &= \langle p(\alpha), \lambda(\alpha)zq(\alpha) + \lambda(\alpha)\bar{z}\bar{q}(\alpha) + F(zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha), \alpha) \rangle \\ &= \lambda(\alpha)z \cdot 1 + \lambda(\alpha)\bar{z} \cdot 0 + \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha), \alpha) \rangle \\ &= \lambda(\alpha)z + \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha), \alpha) \rangle. \end{aligned}$$

I, per tant, s'ha provat que $\dot{z} = \lambda(\alpha)z + g(z, \bar{z}, \alpha)$, on $g(z, \bar{z}, \alpha) = \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha), \alpha) \rangle$. \square

A continuació detallarem de forma més explícita com són els primers coeficients g_{kl} de $g(z, \bar{z}, \alpha)$, que és la funció que conté els termes quadràtics i d'ordre superior de la forma normal complexa.

Per a $|\alpha|$ suficientment petit, l'expansió de Taylor de g al voltant de (z, \bar{z}) és de la forma

$$g(z, \bar{z}, \alpha) = \sum_{k+l \geq 2} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\alpha) z^k \bar{z}^l,$$

on $g_{kl}(\alpha) = \frac{\partial^{k+l}}{\partial z^k \partial \bar{z}^l} \langle p(\alpha), F(zq(\alpha) + \bar{z}\bar{q}(\alpha), \alpha) \rangle \Big|_{z=0}$ per a $k+l \geq 2$, $k, l = 0, 1, 2, \dots$

Concretament, si avaluem $F(x, \alpha)$ en el valor crític del paràmetre $\alpha = 0$, podem perfilar encara més. Escrivim:

$$F(x, 0) = \frac{1}{2}B(x, x) + \frac{1}{6}C(x, x, x) + \mathcal{O}(\|x\|^4),$$

on $B(x, y)$ i $C(x, y, u)$ són funcions lineals i simètriques en $x, y, u \in \mathbb{R}^2$, és a dir, $B: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $C: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, que contenen els termes d'ordres 2 i 3, respectivament.

Escrivint $F(\xi, 0)$ en coordenades $(F_1, F_2) = (F_1(\xi, 0), F_2(\xi, 0))$, i considerant les matrius

$$DF(\xi, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \xi_2} \end{pmatrix}, \quad D^2F(\xi, 0) = (D^2F_1(\xi, 0), D^2F_2(\xi, 0)), \quad \text{on } D^2F_i(\xi, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_i}{\partial \xi_1 \partial \xi_1} & \frac{\partial^2 F_i}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} \\ \frac{\partial^2 F_i}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} & \frac{\partial^2 F_i}{\partial \xi_2 \partial \xi_2} \end{pmatrix},$$

per a $i = 1, 2$, podem arribar a escriure les components de B :

$$B_i(x, y) = (x_1, x_2) D^2F_i(\xi, 0) \Big|_{\xi=0} (y_1, y_2)^\top = \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2 F_i(\xi, 0)}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \Big|_{\xi=0} x_j y_k, \quad i = 1, 2.$$

Anàlogament per a C , es trobaria

$$C_i(x, y, u) = \sum_{j,k,l=1}^2 \frac{\partial^3 F_i(\xi, 0)}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \Big|_{\xi=0} x_j y_k u_l, \quad i = 1, 2.$$

Per tant, prenent $z = z(0)$, $q = q(0)$, es té

$$B(zq + \bar{z}\bar{q}, zq + \bar{z}\bar{q}) = B(zq, zq) + 2B(zq, \bar{z}\bar{q}) + B(\bar{z}\bar{q}, \bar{z}\bar{q}) = z^2 B(q, q) + 2z\bar{z} B(q, \bar{q}) + \bar{z}^2 B(\bar{q}, \bar{q}),$$

del que se'n dedueix

$$g_{20} = \langle p, B(q, q) \rangle, \quad g_{11} = \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle, \quad g_{02} = \langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle,$$

i, de càlculs similars per a C , es té $g_{21} = \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle$.

Observació. La normalització del vep q és irrellevant en el que segueix. En efecte, suposem que q està normalitzat per $\langle q, q \rangle = 1$, i que $\tilde{q} = \zeta q$ és un altre vep de vap $\zeta \in \mathbb{C}$, $\zeta \neq 0$, però amb la normalització $\langle \tilde{q}, \tilde{q} \rangle = |\zeta|^2$. Per a mantenir la normalització inicial intacta podem prendre $\tilde{p} = \frac{1}{\zeta} p$, i aleshores $\langle \tilde{p}, \tilde{q} \rangle = 1$. En aquest cas fixem-nos que els coeficients \tilde{g}_{kl} calculats usant \tilde{q} i \tilde{p} són lleugerament diferents dels g_{kl} inicials:

$$\tilde{g}_{20} = \zeta g_{20}, \quad \tilde{g}_{11} = \tilde{\zeta} g_{11}, \quad \tilde{g}_{02} = \frac{\tilde{\zeta}^2}{\zeta} g_{02}, \quad \tilde{g}_{21} = |\zeta|^2 g_{21}.$$

De tota manera, podem neutralitzar fàcilment aquest canvi fent un escalament lineal de la variable $z = \frac{1}{\zeta} \omega$, amb la qual cosa provem que la normalització de q és irrellevant.

Els dos lemes següents ens permeten simplificar l'expressió (3.14) mitjançant canvis de coordenades no-lineals. Primer, comencem desfont-nos dels termes quadràtics.

Lema 3.3. L'equació

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 + \mathcal{O}(|z|^3), \quad (3.15)$$

amb $\lambda = \lambda(\alpha) = \kappa(\alpha) + i\omega(\alpha)$, $\kappa(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$ i $g_{ij} = g_{ij}(\alpha)$, pot ser transformada, per a $|\alpha|$ prou petit, a aquesta altra equació sense termes quadràtics:

$$\dot{\omega} = \lambda\omega + \mathcal{O}(|\omega|^3),$$

mitjançant el següent canvi de coordenada complexa i invertible (dependent del paràmetre):

$$z = z(\omega) = \omega + \frac{h_{20}}{2} \omega^2 - h_{11} \omega \bar{\omega} + \frac{h_{02}}{2} \bar{\omega}^2. \quad (3.16)$$

Demostració. Mitjançant el mètode dels coeficients indeterminats podem obtenir la transformació inversa a (3.16), que té per variable $\omega = \omega(z)$ i els seus coeficients també depenen de α , però no és polinomial. La part lineal de (3.16) fa que, en un entorn proper a l'origen, la transformació sigui “gairebé” idèntica i verifiqui $z(\omega) = z(\omega(z)) = z$:

$$\omega = \omega(z) = z - \frac{h_{20}}{2} z^2 - h_{11} z \bar{z} - \frac{h_{02}}{2} \bar{z}^2 + \mathcal{O}(|z|^3).$$

Derivant ω d'aquesta expressió, s'obté:

$$\dot{\omega} = \dot{z} - h_{20} z \dot{z} - h_{11} (\dot{z} \bar{z} + z \dot{\bar{z}}) - h_{02} \bar{z} \dot{\bar{z}} + \dots = \dot{z} - h_{20} z \dot{z} - h_{11} \dot{z} \bar{z} - h_{11} z \dot{\bar{z}} - h_{02} \bar{z} \dot{\bar{z}} + \dots$$

Utilitzant (3.15), substituïm \dot{z} i $\dot{\bar{z}}$, i tenim:

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \lambda z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 + \dots - h_{20} z \left[\lambda z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 + \dots \right] \\ &\quad - h_{11} \bar{z} \left[\lambda z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 + \dots \right] - h_{11} z \left[\bar{\lambda} \bar{z} + \frac{\bar{g}_{20}}{2} \bar{z}^2 + \bar{g}_{11} \bar{z} z + \frac{\bar{g}_{02}}{2} z^2 + \dots \right] \\ &\quad - h_{02} \bar{z} \left[\bar{\lambda} \bar{z} + \frac{\bar{g}_{20}}{2} \bar{z}^2 + \bar{g}_{11} \bar{z} z + \frac{\bar{g}_{02}}{2} z^2 + \dots \right] \\ &= \lambda z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z \bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 + \dots - \lambda h_{20} z^2 - h_{20} \frac{g_{20}}{2} z^3 + \dots - \lambda h_{11} z \bar{z} - h_{11} \frac{g_{20}}{2} z^2 \bar{z} \\ &\quad - h_{11} g_{11} z \bar{z}^2 + \dots - \bar{\lambda} h_{11} z \bar{z} - h_{11} \frac{\bar{g}_{20}}{2} z \bar{z}^2 - h_{11} \bar{g}_{11} z^2 \bar{z} - h_{11} \frac{\bar{g}_{02}}{2} z^3 + \dots - \bar{\lambda} h_{02} \bar{z}^2 - h_{02} \frac{\bar{g}_{02}}{2} \bar{z}^3 + \dots \\ &= \lambda z + \left(\frac{g_{20}}{2} - \lambda h_{20} \right) z^2 + (g_{11} - \lambda h_{11} - \bar{\lambda} h_{11}) z \bar{z} + \left(\frac{g_{02}}{2} - \bar{\lambda} h_{02} \right) \bar{z}^2 + \dots \end{aligned}$$

A continuació reemplacem z i \bar{z} mitjançant (3.16) per així tenir-ho tot en funció de ω i $\bar{\omega}$:

$$\dot{\omega} = \lambda\omega + \frac{1}{2}(g_{20} - \lambda h_{20})\omega^2 + (g_{11} - \bar{\lambda} h_{11})\omega\bar{\omega} + \frac{1}{2}(g_{02} - (2\bar{\lambda} - \lambda)h_{02})\bar{\omega}^2 + \mathcal{O}(|\omega|^3).$$

Finalment, imposant les següents igualtats (ben definides per a $|\alpha|$ prou petit):

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda}, \quad h_{11} = \frac{g_{11}}{\bar{\lambda}}, \quad h_{02} = \frac{g_{02}}{2\bar{\lambda} - \lambda},$$

obtenim l'expressió sense termes d'ordre 2:

$$\dot{\omega} = \lambda\omega + \mathcal{O}(|\omega|^3).$$

□

Observació. En aplicar la transformació (3.16), els coeficients dels termes d'ordre 3 i superiors de (3.15) s'han modificat lleugerament.

Assumint que hem eliminat tots els termes quadràtics, ara volem provar d'eliminar-ne tots els cúbics. El següent lema mostra que això és possible excepte per a un terme, que “es resisteix” respecte a la resta.

Lema 3.4. L'equació

$$\dot{z} = \lambda z + \frac{g_{30}}{6} z^3 + \frac{g_{21}}{2} z^2 \bar{z} + \frac{g_{12}}{2} z \bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6} \bar{z}^3 + \mathcal{O}(|z|^4), \quad (3.17)$$

amb $\lambda = \lambda(\alpha) = \kappa(\alpha) + i\omega(\alpha)$, $\kappa(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$ i $g_{ij} = g_{ij}(\alpha)$, pot ser transformada, per a $|\alpha|$ prou petit, a l'equació:

$$\dot{\omega} = \lambda\omega + c_1\omega^2\bar{\omega} + \mathcal{O}(|\omega|^4), \text{ on } c_1 = c_1(\alpha),$$

mitjançant el següent canvi de coordenada complexa i invertible (dependent del paràmetre):

$$z = z(\omega) = \omega + \frac{h_{30}}{6}\omega^3 + \frac{h_{21}}{2}\omega^2\bar{\omega} + \frac{h_{12}}{2}\omega\bar{\omega}^2 + \frac{h_{03}}{6}\bar{\omega}^3. \quad (3.18)$$

Demostració. El procediment que seguirem serà anàleg al de la demostració del lema anterior.

La transformació inversa verificant $z(\omega) = z(\omega(z)) = z$, és:

$$\omega = \omega(z) = z - \frac{h_{30}}{6}z^3 - \frac{h_{21}}{2}z^2\bar{z} - \frac{h_{12}}{2}z\bar{z}^2 - \frac{h_{03}}{6}\bar{z}^3 + \mathcal{O}(|z|^4).$$

Derivant ω , s'obté:

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \dot{z} - \frac{h_{30}}{2}z^2\dot{z} - \frac{h_{21}}{2}(2z\bar{z}\dot{z} + z^2\dot{\bar{z}}) - \frac{h_{12}}{2}(\dot{z}\bar{z}^2 + 2z\bar{z}\dot{\bar{z}}) - \frac{h_{03}}{2}\bar{z}^2\dot{\bar{z}} + \dots \\ &= \dot{z} - \frac{h_{30}}{2}z^2\dot{z} - h_{21}z\bar{z}\dot{z} - \frac{h_{21}}{2}z^2\dot{\bar{z}} - \frac{h_{12}}{2}\dot{z}\bar{z}^2 - h_{12}z\bar{z}\dot{\bar{z}} - \frac{h_{03}}{2}\bar{z}^2\dot{\bar{z}} + \dots \end{aligned}$$

Seguidament, reemplacem \dot{z} i $\dot{\bar{z}}$ utilitzant (3.17):

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \lambda z + \frac{g_{30}}{6}z^3 + \frac{g_{21}}{2}z^2\bar{z} + \frac{g_{12}}{2}z\bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6}\bar{z}^3 + \dots \\ &\quad - \frac{h_{30}}{2}z^2 \left[\lambda z + \frac{g_{30}}{6}z^3 + \frac{g_{21}}{2}z^2\bar{z} + \frac{g_{12}}{2}z\bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6}\bar{z}^3 + \dots \right] \\ &\quad - h_{21}z\bar{z} \left[\lambda z + \frac{g_{30}}{6}z^3 + \frac{g_{21}}{2}z^2\bar{z} + \frac{g_{12}}{2}z\bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6}\bar{z}^3 + \dots \right] \\ &\quad - \frac{h_{21}}{2}z^2 \left[\bar{\lambda}\bar{z} + \frac{\bar{g}_{30}}{6}\bar{z}^3 + \frac{\bar{g}_{21}}{2}\bar{z}^2z + \frac{\bar{g}_{12}}{2}\bar{z}z^2 + \frac{\bar{g}_{03}}{6}z^3 + \dots \right] \\ &\quad - \frac{h_{12}}{2}\bar{z}^2 \left[\lambda z + \frac{g_{30}}{6}z^3 + \frac{g_{21}}{2}z^2\bar{z} + \frac{g_{12}}{2}z\bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6}\bar{z}^3 + \dots \right] \\ &\quad - h_{12}z\bar{z} \left[\bar{\lambda}\bar{z} + \frac{\bar{g}_{30}}{6}\bar{z}^3 + \frac{\bar{g}_{21}}{2}\bar{z}^2z + \frac{\bar{g}_{12}}{2}\bar{z}z^2 + \frac{\bar{g}_{03}}{6}z^3 + \dots \right] \\ &\quad - \frac{h_{03}}{2}\bar{z}^2 \left[\bar{\lambda}\bar{z} + \frac{\bar{g}_{30}}{6}\bar{z}^3 + \frac{\bar{g}_{21}}{2}\bar{z}^2z + \frac{\bar{g}_{12}}{2}\bar{z}z^2 + \frac{\bar{g}_{03}}{6}z^3 + \dots \right] + \dots \end{aligned}$$

A continuació ens quedem només amb els termes lineals i cúbics que ens interessin:

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \lambda z + \frac{g_{30}}{6}z^3 + \frac{g_{21}}{2}z^2\bar{z} + \frac{g_{12}}{2}z\bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6}\bar{z}^3 + \dots - \lambda \frac{h_{30}}{2}z^3 - \dots - \lambda h_{21}z^2\bar{z} - \dots \\ &\quad - \bar{\lambda} \frac{h_{21}}{2}z^2\bar{z} - \dots - \lambda \frac{h_{12}}{2}z\bar{z}^2 - \dots - \bar{\lambda} h_{12}z\bar{z}^2 - \dots - \bar{\lambda} \frac{h_{03}}{2}\bar{z}^3 - \dots \\ &= \lambda z + \left(\frac{g_{30}}{6} - \frac{\lambda h_{30}}{2} \right) z^3 + \left(\frac{g_{21}}{2} - \lambda h_{21} - \frac{\bar{\lambda} h_{21}}{2} \right) z^2\bar{z} \\ &\quad + \left(\frac{g_{12}}{2} - \frac{\lambda h_{12}}{2} - \bar{\lambda} h_{12} \right) z\bar{z}^2 + \left(\frac{g_{03}}{6} - \frac{\bar{\lambda} h_{03}}{2} \right) \bar{z}^3 + \dots \end{aligned}$$

Fent ús del canvi de variable complexa (3.18) i agrupant els termes, s'acaba obtenint:

$$\begin{aligned}\dot{\omega} = & \lambda\omega + \frac{1}{6}(g_{30} - 2\lambda h_{30})\omega^3 + \frac{1}{2}(g_{21} - (\lambda + \bar{\lambda})h_{21})\omega^2\bar{\omega} + \frac{1}{2}(g_{12} - 2\bar{\lambda}h_{12})\omega\bar{\omega}^2 \\ & + \frac{1}{6}(g_{03} + (\lambda - 3\bar{\lambda})h_{03})\bar{\omega}^3 + \mathcal{O}(|\omega|^4).\end{aligned}$$

Per últim, imposant les següents igualtats (ben definides per a $|\alpha|$ prou petit):

$$h_{30} = \frac{g_{30}}{2\lambda}, \quad h_{12} = \frac{g_{12}}{2\bar{\lambda}}, \quad h_{03} = \frac{g_{03}}{3\bar{\lambda} - \lambda},$$

obtenim l'expressió que buscàvem:

$$\dot{\omega} = \lambda\omega + c_1\omega^2\bar{\omega} + \mathcal{O}(|\omega|^4), \quad \text{on } c_1 = c_1(\alpha).$$

Fixem-nos que, prenent $h_{21} = \frac{g_{21}}{\lambda + \bar{\lambda}}$, el denominador s'anul·laria per a $\alpha = 0$ i no estaria ben definit. Per tant, es pren $h_{21} = 0$ i llavors $c_1 = c_1(\alpha) = \frac{g_{21}}{2}$. \square

El terme romanent $\omega^2\bar{\omega}$ s'anomena *terme ressonant*. A més, hem vist que el seu coeficient, c_1 , coincideix amb el del terme cúbic $z^2\bar{z}$ de (3.17).

Finalment es combinen els dos lemes anteriors.

Lema 3.5 (Forma normal topològica de la bifurcació de Hopf). L'equació

$$\dot{z} = \lambda z + \sum_{2 \leq k+l \leq 3} \frac{1}{k!l!} g_{kl} z^k \bar{z}^l + \mathcal{O}(|z|^4), \quad (3.19)$$

amb $\lambda = \lambda(\alpha) = \kappa(\alpha) + i\omega(\alpha)$, $\kappa(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$ i $g_{ij} = g_{ij}(\alpha)$, pot ser transformada, per a $|\alpha|$ prou petit, a una equació amb un únic terme ressonant d'ordre 3,

$$\dot{\omega} = \lambda\omega + c_1\omega^2\bar{\omega} + \mathcal{O}(|\omega|^4), \quad \text{on } c_1 = c_1(\alpha), \quad (3.20)$$

mitjançant el següent canvi de coordenada complexa i invertible (dependent del paràmetre):

$$z = z(\omega) = \omega + \frac{h_{20}}{2}\omega^2 - h_{11}\omega\bar{\omega} + \frac{h_{02}}{2}\bar{\omega}^2 + \frac{h_{30}}{6}\omega^3 + \frac{h_{12}}{2}\omega\bar{\omega}^2 + \frac{h_{03}}{6}\bar{\omega}^3.$$

Demostració. Fixem-nos que el canvi de coordenada que es proposa és una combinació dels canvis de coordenada dels dos lemes anteriors, la qual cosa fa que la demostració sigui gairebé directa. Primer prenem (3.16) i substituïm els valors assignats de les h_{ij} en el Lema 3.3. D'aquesta manera aconseguim eliminar tots els termes d'ordre 2, malgrat que ara els d'ordre 3 hagin variat. Per exemple, el coeficient de $\omega^2\bar{\omega}$ inicial, $\frac{1}{2}g_{21}$, ara l'escrivim com $\frac{1}{2}\tilde{g}_{21}$. Seguidament prenem (3.18) amb els valors de les h_{ij} del Lema 3.4. D'aquesta manera s'eliminen tots els termes d'ordre 3 excepte un (el ressonant), obtenint així l'expressió desitjada. \square

Sabem que $c_1 = c_1(\alpha)$ (per ara desconegut) correspon al coeficient $\frac{1}{2}\tilde{g}_{21}$ del terme $\omega^2\bar{\omega}$ després de la segona transformació. Existeixen dues maneres directes de calcular-lo: o bé derivar (3.16) i substituir-hi $\dot{\omega}$ de (3.20), o bé substituir (3.16) a l'equació inicial (3.19) i igualar els coeficients corresponents fins a identificar c_1 . De les dues maneres, s'obté:

$$c_1 = c_1(\alpha) = \frac{g_{20}g_{11}(2\lambda + \bar{\lambda})}{2|\lambda|^2} + \frac{|g_{11}|^2}{\lambda} + \frac{|g_{02}|^2}{2(2\lambda - \bar{\lambda})} + \frac{g_{21}}{2}, \quad \text{amb } \lambda = \lambda(\alpha) \text{ i } g_{ij} = g_{ij}(\alpha).$$

Aquest coeficient avaluat en el valor crític del paràmetre serà fonamental per a poder donar una condició necessària de genericitat. Tenint en compte que $\lambda(0) = i\omega_0$, la seva expressió és:

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega_0} \left(g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right) + \frac{g_{21}}{2}. \quad (3.21)$$

A continuació volem transformar la forma normal (complexa) de Poincaré vista en el Lema 3.5. a l'expressió de la forma normal estudiada a l'apartat anterior.

Lema 3.6. Considerem l'equació

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = (\kappa(\alpha) + i\omega(\alpha))\omega + c_1(\alpha)\omega|\omega|^2 + \mathcal{O}(|\omega|^4),$$

amb $\kappa(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0 > 0$. Suposem, a més, que $\kappa'(0) \neq 0$ i $\text{Re}(c_1(0)) \neq 0$.

Aleshores, aquesta equació pot ser transformada mitjançant un canvi de coordenades (dependent del paràmetre) i una parametrització no-lineal del temps, en una equació de la forma

$$\dot{u} = \frac{du}{d\theta} = (\beta + i)u + su|u|^2 + \mathcal{O}(|u|^4), \quad (3.22)$$

on u és una nova coordenada complexa, θ la nova variable de temps, β el nou paràmetre i $s = \text{signe}(\text{Re}(c_1(0))) = \pm 1$.

Observació. Prenent $s = -1$, si reescrivim (3.22) en la seva forma real, aquesta coincideix exactament amb l'expressió (3.5) de la forma normal vista a l'apartat anterior.

Demostració.

1. *Transformació temporal.* Abans d'aplicar la parametrització no-lineal de la variable θ , primer caldrà fer un escalament lineal. Introduïm, doncs, una nova variable de temps: $\tau = \omega(\alpha)t$. Com que $\omega(\alpha) > 0$ per a $|\alpha|$ suficientment petit, aquesta preserva la direcció de temps:

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{d\omega}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{d\omega}{dt} \frac{1}{\omega(\alpha)} = \frac{1}{\omega(\alpha)} \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{\omega(\alpha)} \dot{\omega}.$$

Així, multiplicant per $\frac{1}{\omega(\alpha)}$ a l'equació original de $\dot{\omega}$, s'obté:

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \left(\frac{\kappa(\alpha)}{\omega(\alpha)} + i \frac{\omega(\alpha)}{\omega(\alpha)} \omega \right) + \frac{c_1(\alpha)}{\omega(\alpha)} \omega|\omega|^2 + \mathcal{O}(|\omega|^4) = (\beta + i)\omega + d_1(\beta)\omega|\omega|^2 + \mathcal{O}(|\omega|^4),$$

on $\beta = \beta(\alpha) = \frac{\kappa(\alpha)}{\omega(\alpha)}$ i $d_1(\beta) = \frac{c_1(\alpha(\beta))}{\omega(\alpha(\beta))}$.

Podem considerar β com un nou paràmetre, ja que $\beta \in \mathcal{C}^\infty$, $\beta(0) = 0$, $\beta'(0) = \frac{\kappa'(0)}{\omega(0)} \neq 0$ i, per tant, el Teorema de la Funció Inversa garanteix l'existència local i la diferenciabilitat de α com a funció de β . Pel que fa a d_1 , observem que és complex i que està ben definit.

Ara canviem la parametrització del temps al llarg de les òrbites introduint la nova variable de temps $\theta = \theta(\tau, \beta)$, amb

$$d\theta = \left(1 + \text{Im}(d_1(\beta))|\omega|^2 \right) d\tau.$$

Fixem-nos que en un entorn petit de l'origen es té $|\omega|^2 \approx 0$ i, per tant, la transformació donada és similar a la identitat.

Utilitzant aquesta nova definició del temps θ i la seva derivada $d\theta$, s'obté:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{d\theta} &= \frac{d\omega}{d\tau} \frac{d\tau}{d\theta} = \left[(\beta + i)\omega + d_1(\beta)\omega|\omega|^2 + \mathcal{O}(|\omega|^4) \right] \left[1 + \text{Im}(d_1(\beta))|\omega|^2 \right]^{-1} \\ &= \left[(\beta + i)\omega + d_1(\beta)\omega|\omega|^2 + \mathcal{O}(|\omega|^4) \right] \left[1 - \text{Im}(d_1(\beta))|\omega|^2 + \left(\text{Im}(d_1(\beta))|\omega|^2 \right)^2 - \dots \right] \\ &= (\beta + i)\omega + d_1(\beta)\omega|\omega|^2 + \mathcal{O}(|\omega|^4) - \left[(\beta + i)\omega + d_1(\beta)\omega|\omega|^2 + \mathcal{O}(|\omega|^4) \right] \left[\text{Im}(d_1(\beta))|\omega|^2 \right] + \mathcal{O}(|\omega|^4) \\ &= (\beta + i)\omega + \left(d_1(\beta) - \beta \text{Im}(d_1(\beta)) - i \text{Im}(d_1(\beta)) \right) \omega|\omega|^2 + \mathcal{O}(|\omega|^4). \end{aligned}$$

Com que $d_1(\beta) = \text{Re}(d_1(\beta)) + i \text{Im}(d_1(\beta))$, llavors $d_1(\beta) - i \text{Im}(d_1(\beta)) = \text{Re}(d_1(\beta))$ i, per tant,

$$\frac{d\omega}{d\theta} = (\beta + i)\omega + \left(\text{Re}(d_1(\beta)) - \beta \text{Im}(d_1(\beta)) \right) \omega|\omega|^2 + \mathcal{O}(|\omega|^4) = (\beta + i)\omega + l_1(\beta)\omega|\omega|^2 + \mathcal{O}(|\omega|^4),$$

on $l_1(\beta) = \operatorname{Re}(d_1(\beta)) - \beta \operatorname{Im}(d_1(\beta))$ és real i

$$l_1(0) = \operatorname{Re}(d_1(0)) - 0 = \operatorname{Re}\left(\frac{c_1(0)}{\omega(0)}\right) = \frac{\operatorname{Re}(c_1(0))}{\omega(0)}. \quad (3.23)$$

2. *Transformació de coordenada.* Introduïm una nova variable u de la forma: $\omega = \frac{u}{\sqrt{|l_1(\beta)|}}$. Aquesta està ben definida per un $\beta \approx 0$, ja que $\operatorname{Re}(c_1(0)) \neq 0$ i, per tant, $l_1(0) \neq 0$.

Quan aïllem la derivada de u respecte de θ , obtenim:

$$\frac{du}{d\theta} = \sqrt{|l_1(\beta)|} \frac{d\omega}{d\theta} = \sqrt{|l_1(\beta)|} \left[(\beta + 1) \frac{u}{\sqrt{|l_1(\beta)|}} + l_1(\beta) \left(\frac{u}{\sqrt{|l_1(\beta)|}} \frac{|u|^2}{|l_1(\beta)|} \right) + \mathcal{O}(|\omega|^4) \right]$$

i, per tant, podem escriure

$$\frac{du}{d\theta} = (\beta + i)u + \frac{l_1(\beta)}{|l_1(\beta)|} u|u|^2 + \mathcal{O}(|u|^4) = (\beta + i)u + su|u|^2 + \mathcal{O}(|u|^4),$$

on $s = \operatorname{signe}(l_1(0)) = \operatorname{signe}(\operatorname{Re}(c_1(0)))$, arribant així a obtenir l'expressió (3.22). \square

En aquesta demostració apareix per primer cop la funció real $l_1(\beta)$ anomenada *primer coeficient de Lyapunov* que, avaluada en el valor crític $\beta = 0$, ens proporciona informació rellevant arran de l'existència de la bifurcació i la seva direcció. Concretament, el seu signe s determina si es tracta d'un cas supercrític ($l_1(0) < 0$), o subcrític, altrament. Usant les expressions de (3.21) i (3.23), fàcilment s'arriba a deduir que:

$$l_1(0) = \frac{1}{2\omega_0^2} \operatorname{Re}(ig_{20}g_{11} + \omega_0 g_{21}). \quad (3.24)$$

Fixem-nos que, per a calcular $l_1(0)$, tan sols són necessaris els coeficients g_{20} , g_{11} i g_{21} de la forma normal en $\alpha = 0$, els quals anteriorment ja n'havíem explicat el seu càlcul. Com que aquests es calculen utilitzant els vectors q i p , el valor de $l_1(0)$ dependrà de la normalització $\langle p, q \rangle$ que s'hagi pres, mentre que el seu signe s , es mantindrà invariant sigui quina sigui aquesta normalització.

Ja per acabar, resumim els resultats obtinguts en el següent teorema.

Teorema 3.7. Suposem que tenim un sistema 2-dimensional

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R},$$

on $f \in \mathcal{C}^4$ que, per a $|\alpha|$ suficientment petit, té un equilibri $x = 0$ amb vaps $\lambda_{1,2}(\alpha) = \kappa(\alpha) \pm i\omega(\alpha)$, on $\kappa(0) = 0$ i $\omega(0) = \omega_0 > 0$.

Suposem també que se satisfan les següents condicions de genericitat:

(I) $l_1(0) \neq 0$, on $l_1(\beta)$ és el 1r coeficient de Lyapunov,

(II) $\kappa'(0) \neq 0$.

Aleshores, existeixen canvis de coordenades i paràmetres invertibles, i una reparametrizació del temps, que transforma el sistema original en

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\|y\|^4). \quad (3.25)$$

Aquest resultat s'explica pel fet que l'expressió (3.22) amb $s = \pm 1$ en la seva forma real és exactament l'expressió (3.25) donada en aquest teorema. Els canvis de coordenada, paràmetre i la reparametrizació del temps es corresponen amb els que s'han utilitzat per a la demostració del Lema 3.6.

Usant el Lema 3.1. anunciat a l'apartat anterior, aconseguim desfer-nos dels termes d'ordre ≥ 4 i arribar, finalment, al següent resultat general.

Teorema 3.8 (Bifurcació de Hopf genèrica). Per a qualsevol sistema genèric 2-dimensional i uniparamètric $\dot{x} = f(x, \alpha)$, que tingui en $\alpha = 0$ l'equilibri $x = 0$ amb vaps $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$, aquest és localment topològicament equivalent a prop de l'origen a la següent forma normal:

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Observació. Les condicions genèriques assumides en aquest teorema es corresponen a les condicions de no-degeneració (I) i de transversalitat (II) del Teorema 3.7., que també n'havíem fet esment al capítol anterior.

Estudi d'un model

Un exemple de sistema no-lineal exhibint una bifurcació de Hopf és *l'oscil·lador de Van der Pol*, que va ser descrit pel físic i enginyer Balthasar Van der Pol mentre examinava la dinàmica d'un circuit elèctric. Aquest ve descrit per una EDO de 2n ordre,

$$\ddot{y} - (\alpha - y^2)\dot{y} + y = 0,$$

on $y \in \mathbb{R}$ és la variable de posició com a funció del temps i α el paràmetre escalar associat a l'amortiment de l'oscil·lador.

Introduint $y = \dot{x}$, es pot reescriure l'equació com un sistema de dues equacions diferencials:

$$\begin{cases} \dot{x} = (\alpha - y^2)x - y = \alpha x - y - xy^2, \\ \dot{y} = x. \end{cases} \quad (3.26)$$

Fixem-nos que, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $(x, y) = (0, 0)$ és un punt d'equilibri del sistema.

En particular, per a $\alpha = 0$, la matriu Jacobiana avaluada en aquest punt és

$$A = A(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

i els vaps resultants són una parella d'imaginaris purs: $\lambda_{1,2} = \pm i$. Per tant, $\alpha_0 = 0$ és el valor crític del paràmetre i queda palesa la condició de bifurcació.

Si fem el càlcul dels vectors propis de λ_1 i λ_2 , obtenim, respectivament:

$$v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Posem $q := v_1 \in \mathbb{C}^2$, que és el vep de vap λ_1 de A . Altrament, veiem que el vep de vap $\bar{\lambda} = \lambda_2$ de A^\top , $p \in \mathbb{C}^2$, coincideix justament amb q .

Segui $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producte escalar estàndard a \mathbb{C}^2 definit per $\langle p, q \rangle = \bar{p}_1 q_1 + \bar{p}_2 q_2$, observem que $\langle p, q \rangle = 2$. Tot i no ser imprescindible, podem normalitzar aquest producte considerant

$$q = p = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Denotem també $\bar{q} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-i, 1)^\top$.

Per a $|\alpha|$ suficientment petit, la matriu

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

té $\text{tr}(A(\alpha)) = \alpha$ i $\det(A(\alpha)) = 1$. D'aquí se'n poden deduir fàcilment els seus vaps:

$$\lambda_{1,2}(\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4}) = \frac{1}{2}\alpha \pm i \frac{\sqrt{4 - \alpha^2}}{2}.$$

Observem que $\kappa(\alpha) = \frac{\alpha}{2}$, satisfent $\kappa(0) = 0$, i $\omega(\alpha) = \frac{\sqrt{4-\alpha^2}}{2}$, amb $\omega(0) = \omega_0 = 1 > 0$.

Ara, el sistema (3.26) es pot reescriure de la forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A(\alpha) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + F((x, y), \alpha),$$

on $F((x, y), 0) = (-xy^2, 0)^\top$. En particular, com que aquest no té termes d'ordre 2, les components de B són nul·les i els coeficients $g_{kl} = g_{kl}(0)$ de la forma normal amb $k + l = 2$ seran exactament 0. Per tant, només serà necessari calcular el coeficient g_{21} .

Considerant les matrius

$$DF((x, y), 0) = \begin{pmatrix} -y^2 & -2xy \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad D^2F((x, y), 0) = \begin{pmatrix} 0 & -2y & 0 & 0 \\ -2y & -2x & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

podem donar l'expressió de C :

$$C(u, v, w) = \sum_{j,k,l=1}^2 \frac{\partial^3 F_1(\xi, 0)}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \Big|_{(x,y)=(0,0)} u_j v_k w_l = \begin{pmatrix} -2u_2 v_1 w_2 - 2u_2 v_2 w_1 - 2u_1 v_2 w_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

per a $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$.

Per tant, $C(q, q, \bar{q}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}$ i, llavors,

$$g_{21} = \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} (i, 1), -\frac{1}{\sqrt{2}} (i, 0) \right\rangle = -\frac{1}{2}.$$

Amb el càlcul de g_{21} ja podem determinar el valor del 1r coeficient de Lyapunov avaluat en $\alpha = 0$:

$$l_1(0) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(0 - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{4} < 0.$$

Com bé sabem, el seu signe indica que es tracta d'una bifurcació de tipus supercrítica, és a dir, que les òrbites periòdiques del sistema apareixen a mesura que s'avança el paràmetre cap a la dreta.

Observem també que

$$c_1(0) = \frac{i}{2} \left(0 - 2|0|^2 - \frac{1}{3}|0|^2 \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{4},$$

el signe del qual coincideix amb el de $l_1(0)$.

Finalment, com que se satisfan les condicions de genericitat:

$$\kappa'(0) = \frac{1}{2} \neq 0, \quad l_1(0) \neq 0,$$

sabem que podem estudiar la bifurcació de Hopf de (3.26) per a $|\alpha|$ suficientment petit a partir d'una forma normal més senzilla.

Hem vist que els dos últims teoremes, juntament amb l'estudi de la forma normal topològica i la fórmula (3.24) per $l_1(0)$, proporcionen les eines necessàries per a l'anàlisi de la bifurcació de Hopf en un sistema genèric 2-dimensional. Al capítol 5 generalitzarem aquests resultats a sistemes n -dimensionals, per a $n \geq 3$.

4 Bifurcació de Neimark-Sacker en dimensió 2

En aquest capítol se segueix la mateixa estructura que en l'anterior. Per a sistemes dinàmics a temps discret també existeix una forma normal que descriu el comportament qualitatiu d'un sistema simple. No obstant, amb presència de termes d'ordre superior, la cosa canvia. Malgrat que es pugui verificar l'existència d'una corba tancada invariant que bifurca des de l'origen, la dinàmica del sistema no es pot capturar directament de la forma normal simple, ja que l'estructura de les òrbites que descriu no és la mateixa.

4.1 Forma normal topològica

Considerem el sistema no-lineal uniparamètric 2-dimensional,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto (1 + \alpha) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

on α és el paràmetre i $\theta = \theta(\alpha)$, $b = b(\alpha)$, $d = d(\alpha)$ són funcions diferenciables en α satisfent $0 < \theta(0) < \pi$, $d(0) \neq 0$.

El sistema té un punt fix $x = (x_1, x_2) = (0, 0) \forall \alpha \in \mathbb{R}$ i el jacobiana en aquest punt és

$$A(\alpha) = (1 + \alpha) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

amb vaps $\mu_{1,2} = (1 + \alpha)e^{\pm i\theta(\alpha)}$. En particular, per a $\alpha = 0$ el punt fix és no-hiperbòlic, ja que tenim una parella de vaps complexos amb mòdul 1.

Segui $d_1 := d + ib \in \mathbb{C}$, $d_1 = d_1(\alpha)$, si introduïm la variable complexa $z = x_1 + ix_2$ satisfent $\bar{z} = x_1 - ix_2$, $|z|^2 = x_1^2 + x_2^2$, i procedim de la mateixa manera que havíem fet per a la forma normal topològica de la bifurcació de Hopf, s'obté l'aplicació

$$z \mapsto \mu_1 z + c_1 z |z|^2 = (1 + \alpha)e^{i\theta} z + (e^{i\theta} d_1(\alpha)) z |z|^2 = e^{i\theta} z (1 + \alpha + d_1 |z|^2), \quad (4.2)$$

on $c_1 = c_1(\alpha) = e^{i\theta(\alpha)} d_1(\alpha)$ és una funció complexa.

Utilitzant el canvi a coordenades polars $z = \rho e^{i\phi}$, $\rho = |z|$, s'obté $\rho \mapsto \rho |1 + \alpha + d_1(\alpha) \rho^2|$.

Com que $|1 + \alpha + d_1(\alpha) \rho^2| = (1 + \alpha) \left(1 + \frac{2d(\alpha)}{1+\alpha} \rho^2 + \frac{|d_1(\alpha)|^2}{(1+\alpha)^2} \rho^4 \right)^{1/2} = 1 + \alpha + d(\alpha) \rho^2 + \mathcal{O}(\rho^4)$, el sistema corresponent a (4.1) en coordenades polars és:

$$\begin{cases} \rho \mapsto \rho (1 + \alpha + d(\alpha) \rho^2) + \rho^4 R_\alpha(\rho), \\ \phi \mapsto \phi + \theta(\alpha) + \rho^2 Q_\alpha(\rho), \end{cases} \quad (4.3)$$

amb $R_\alpha = R_\alpha(\rho)$, $Q_\alpha = Q_\alpha(\rho) \in \mathcal{O}(\|\rho\|^0)$.

En aquest sistema no hi ha interacció entre les dues variables, de manera que podem analitzar les diferents regions del diagrama de bifurcació de (4.1) delimitades per $\alpha = 0$. Com que $\rho \geq 0$, l'aplicació per ρ de (4.3) té un punt fix $\rho = 0 \forall \alpha \in \mathbb{R}$, que es correspon amb el punt fix de (4.1). Pel que fa a l'aplicació per ϕ , aquesta descriu una rotació d'un angle dependent de ρ i α , que és aproximadament igual a $\theta(\alpha)$. De tot això se'n dedueix el següent:

- i) Per a $\alpha < 0$ l'origen és linealment estable.
- ii) Per a $\alpha = 0$ l'origen és estable (no-linealment) i és el punt de bifurcació del sistema.
- iii) Per a $\alpha > 0$ l'origen és linealment inestable. A més, es pot detectar un punt fix addicional, $\rho_0(\alpha) = \sqrt{-\frac{\alpha}{d(\alpha)}} + \mathcal{O}(\alpha)$, que dóna lloc a una (única) *corba tancada invariant* de caràcter estable que envolta l'origen.

En aquesta descripció s'ha considerat $d(0) < 0$, la qual cosa es correspon amb una bifurcació de tipus *supercrítica* o "suau". Per contra, si haguéssim considerat $d(0) > 0$, la bifurcació hauria estat de tipus *subcrítica* o "caòtica". Al proper apartat es veurà que, efectivament, l'estabilitat del punt fix en $\alpha = 0$ ve determinada pel signe del coeficient $d(0)$.

Un fet rellevant pel que fa a les òrbites de (4.3) en el *cercle invariant* que hem descrit en $\alpha > 0$, és que la seva estructura depèn de si la rotació d'angle $\Delta\phi = \theta(\alpha) + \rho^2 Q_\alpha(\rho)$ és un múltiple racional o irracional de 2π en el cercle. Si és racional, llavors totes les òrbites de la corba són periòdiques. Més concretament, si $\frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{a}{b}$ amb a i $b \neq 0$ enters, tots els punts de la corba són cicles de període b de la a -èssima iteració de l'aplicació. Per contra, si és irracional, no hi ha òrbites periòdiques i totes les òrbites són denses en el cercle invariant.

Per ara la construcció de la bifurcació de Neimark-Sacker presenta característiques semblants a les que havíem vist per Hopf en el capítol anterior. No obstant, en afegir termes d'ordre superior al sistema inicial (4.1), veiem que no podem concloure el mateix que en el cas continu. Considerem

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\mapsto (1 + \alpha) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &+ (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\|x\|^4), \end{aligned} \quad (4.4)$$

on els termes $\mathcal{O}(\|x\|^4)$ poden dependre de α . Si escrivim (4.4) en termes de ρ i ϕ , ara l'equació per ρ dependrà de ϕ , i això implica que les funcions R_α i Q_α seran 2π -periòdiques. Per tant, encara que aquest sistema pugui ser representat d'una manera similar a (4.3), l'estructura de les òrbites que descriu en $\alpha > 0$ no és la mateixa. Tot i això, podem anunciar el següent lema.

Lema 4.1. El sistema (4.4) exhibeix una única corba tancada invariant que bifurca des de l'origen en la mateixa direcció i estabilitat que la del sistema (4.1).

Demostració. Provarem la versió complexa, és a dir, donada l'aplicació

$$\tilde{z} = e^{i\theta(\alpha)} z (1 + \alpha + d_1(\alpha)|z|^2) + g(z, \bar{z}, \alpha), \quad (4.5)$$

on $d_1(\alpha) = d(\alpha) + ib(\alpha)$; $b(\alpha)$, $d(\alpha)$ i $\theta(\alpha)$ són funcions diferenciables en α ; $d(0) < 0$, $0 < \theta(0) < \pi$ i $g = \mathcal{O}(|z|^4)$ és una funció complexa diferenciable en (z, \bar{z}, α) , volem veure que (4.5) té una corba tancada invariant de caràcter estable per a valors de $\alpha > 0$ suficientment petits. Malgrat que només es demostrarà la continuïtat de la corba, cal remarcar que també és diferenciable (encara que mai tant com el mateix sistema).

1. *Reescalament i transformacions.* Abans de tot, serà oportú transformar (4.5) en un sistema amb dues coordenades.

Comencem introduint noves variables (s, ϕ) a través de la fórmula

$$z = \sqrt{-\frac{\alpha}{d(\alpha)}} e^{i\phi} (1 + s). \quad (4.6)$$

Si substituïm (4.6) a (4.5) i agrupem termes, obtenim

$$e^{i\tilde{\phi}} (1 + \tilde{s}) = e^{i(\phi + \theta(\alpha))} (1 + s) [1 - \alpha(2s + s^2) + i\alpha\nu(\alpha)(1 + s)^2] + \alpha^{3/2} h(s, \phi, \alpha),$$

on $\nu(\alpha) = -\frac{b(\alpha)}{d(\alpha)}$ i h és una funció diferenciable complexa de $(s, \phi, \alpha^{1/2})$. Així, l'expressió (4.5) en coordenades (s, ϕ) es correspon al sistema

$$\begin{cases} \tilde{s} = (1 - 2\alpha)s - \alpha(3s^2 + s^3) + \alpha^{3/2} p(s, \phi, \alpha), \\ \tilde{\phi} = \phi + \theta(\alpha) + \alpha\nu(\alpha)(1 + s)^2 + \alpha^{3/2} q(s, \phi, \alpha), \end{cases} \quad (4.7)$$

on p i q són funcions complexes diferenciables de $(s, \phi, \alpha^{1/2})$. A continuació apliquem l'escalament $s = \sqrt{\alpha}\xi$ a la variable s , de manera que el sistema (4.7) passa a ser

$$\begin{cases} \tilde{\xi} = (1 - 2\alpha)\xi - \alpha^{3/2}(3\xi^2 + \alpha^{1/2}\xi^3) + \alpha p^{(1)}(\xi, \phi, \alpha), \\ \tilde{\phi} = \phi + [\theta(\alpha) + \alpha\nu(\alpha)] + \alpha^{3/2}\nu(\alpha)(2\xi + \alpha^{1/2}\xi^2) + \alpha^{3/2}q^{(1)}(\xi, \phi, \alpha), \end{cases} \quad (4.8)$$

on $p^{(1)}(\xi, \phi, \alpha) = p(\alpha^{1/2}\xi, \phi, \alpha)$, $q^{(1)}(\xi, \phi, \alpha) = q(\alpha^{1/2}\xi, \phi, \alpha)$ són diferenciables en $(\alpha^{1/2}\xi, \phi, \alpha)$.

Fixem-nos que podem escriure $p^{(1)}$ com $p^{(1)}(\xi, \phi, \alpha) = r^{(0)}(\phi, \alpha) + \alpha^{1/2}r^{(1)}(\xi, \phi, \alpha)$. Denotem també $\eta(\alpha) = \theta(\alpha) + \alpha\nu(\alpha)$. Així, podem reescriure (4.8) com

$$\begin{cases} \tilde{\xi} = (1 - 2\alpha)\xi + \alpha r^{(0)}(\phi, \alpha) + \alpha^{3/2}r^{(2)}(\xi, \phi, \alpha), \\ \tilde{\phi} = \phi + \eta(\alpha) + \alpha^{3/2}q^{(2)}(\xi, \phi, \alpha), \end{cases} \quad (4.9)$$

amb

$$r^{(2)}(\xi, \phi, \alpha) = -(3\xi^2 + \alpha^{1/2}\xi^3) + r^{(1)}(\xi, \phi, \alpha), \quad q^{(2)}(\xi, \phi, \alpha) = \nu(\alpha)(2\xi + \alpha^{1/2}\xi^2) + q^{(1)}(\xi, \phi, \alpha).$$

Remarquem que aquestes funcions $r^{(2)}$ i $q^{(2)}$ són igual de diferenciables que $r^{(1)}$ i $q^{(1)}$. Finalment, emprem el canvi de coordenades $\xi = u + \frac{1}{2}r^{(0)}(\phi, \alpha)$ per tal d'eliminar el terme $\alpha r^{(0)}(\phi, \alpha)$ de la primera equació de (4.9). Amb això obtenim una nova aplicació F que és amb la que treballarem d'ara endavant:

$$F : \begin{cases} \tilde{u} = (1 - 2\alpha)u + \alpha^{3/2}H_\alpha(u, \phi), \\ \tilde{\phi} = \phi + \eta(\alpha) + \alpha^{3/2}K_\alpha(u, \phi), \end{cases} \quad (4.10)$$

on $\eta(\alpha)$ és diferenciable i

$$H_\alpha(u, \phi) = r^{(2)}\left(u + \frac{1}{2}r^{(0)}(\phi, \alpha), \phi, \alpha\right), \quad K_\alpha(u, \phi) = q^{(2)}\left(u + \frac{1}{2}r^{(0)}(\phi, \alpha), \phi, \alpha\right),$$

són funcions diferenciables en $(u, \phi, \alpha^{1/2})$ i 2π -periòdiques en ϕ .

Notem que la banda $\{(u, \phi) : |u| \leq 1, \phi \in [0, 2\pi]\}$ correspon a una banda d'amplada $\mathcal{O}(\alpha)$ al voltant del cercle

$$S_0(\alpha) = \left\{ z : |z|^2 = -\frac{\alpha}{d(\alpha)} \right\}$$

en (4.5), que a la coordenada original z té per radi $\mathcal{O}(\alpha^{1/2})$. Recordem que el sistema (4.3) per a $\alpha > 0$ tenia un punt fix, $\rho_0(\alpha) = \sqrt{-\frac{\alpha}{d(\alpha)}} + \mathcal{O}(\alpha)$, que es corresponia amb una corba tancada invariant de (4.1).

En el que segueix, serà convenient introduir un nombre λ tal que

$$\lambda = \sup_{|u| \leq 1, \phi \in [0, 2\pi]} \left\{ |H_\alpha|, |K_\alpha|, \left| \frac{\partial H_\alpha}{\partial u} \right|, \left| \frac{\partial K_\alpha}{\partial u} \right|, \left| \frac{\partial H_\alpha}{\partial \phi} \right|, \left| \frac{\partial K_\alpha}{\partial \phi} \right| \right\}. \quad (4.11)$$

D'aquesta manera, λ depèn de α però romà acotat quan $\alpha \rightarrow 0$.

2. *Definició de l'espai de funcions.* A continuació caracteritzarem les corbes tancades per elements d'un espai de funcions U . Per definició, $u \in U$ és una funció 2π -periòdica, $u = u(\phi)$, satisfent les dues condicions següents:

(U.1) $|u(\phi)| \leq 1$ per a tot ϕ , és a dir, està estrictament acotada per la unitat;

(U.2) $|u(\phi_1) - u(\phi_2)| \leq |\phi_1 - \phi_2|$ per a tot ϕ_1, ϕ_2 , que és equivalent a dir que $u(\phi)$ és *lipschitziana* amb constant de Lipschitz igual a 1.

A més, l'espai U és un *espai mètric complet* respecte a la norma del suprem,

$$\|u\| = \sup_{\phi \in [0, 2\pi]} |u(\phi)|.$$

3. *Teorema de l'Aplicació Contractiva.* Considerem una aplicació \mathcal{F} induïda per F en U , $\mathcal{F}: U \rightarrow U$. Si veiem que aquesta és contractiva en U , el Teorema de l'Aplicació Contractiva implica que té un únic punt fix $u^{(\infty)} \in U$, és a dir, $\mathcal{F}(u^{(\infty)}) = u^{(\infty)}$. Conseqüentment, aquest és un punt fix globalment estable del sistema dinàmic infinit-dimensional $\{U, \mathcal{F}\}$, i això es tradueix en el fet que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\mathcal{F}^k(u) - u^{(\infty)}\| = 0$ per a tot $u \in U$.

Començarem provant les hipòtesis del teorema.

3.1. Construcció de \mathcal{F} .

L'aplicació \mathcal{F} ha de transformar una funció $u(\phi) \in U$ en una altra funció $\tilde{u}(\phi) = (\mathcal{F}u)(\phi) \in U$. Això ve a dir que si u representa una corba tancada, aleshores $\tilde{u} = \mathcal{F}(u)$ representa la seva imatge sota l'aplicació F definida per (4.10). Per tant, caldrà donar una definició de \mathcal{F} i assegurar-nos que està ben definida.

Suposem que tenim una funció $u = u(\phi)$ de U . Per tal de construir l'aplicació \mathcal{F} hem d'especificar un mètode per a cadascun dels ϕ que ens permeti trobar la corresponent $\tilde{u}(\phi) = (\mathcal{F}u)(\phi)$. Notem, però, que F és pràcticament una rotació d'angle $\eta(\alpha)$ en ϕ . Així, un punt $(\tilde{u}(\phi), \phi)$ de la corba resultant és la imatge d'un punt $(u(\hat{\phi}), \hat{\phi})$ a la corba original que té una coordenada d'angle diferent, $\hat{\phi}$. Per veure que aquest $\hat{\phi}$ està definit de manera única, hem de provar que l'equació

$$\phi = \hat{\phi} + \eta(\alpha) + \alpha^{3/2}K_\alpha(u(\hat{\phi}), \hat{\phi}) \quad (4.12)$$

té una única solució $\hat{\phi} = \hat{\phi}(\phi)$ per a qualsevol $u \in U$ donat. Això és cert precisament perquè la banda dreta de (4.12) és una funció estrictament creixent de $\hat{\phi}$. En efecte, suposem que existeixen ϕ_2, ϕ_1 amb $\phi_2 > \phi_1$ que satisfan la igualtat (4.12) i restem les dues expressions:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_2 - \tilde{\phi}_1 &= \phi_2 - \phi_1 + \alpha^{3/2}[K_\alpha(u(\phi_2), \phi_2) - K_\alpha(u(\phi_1), \phi_1)] \\ &\geq \phi_2 - \phi_1 - \alpha^{3/2}|K_\alpha(u(\phi_2), \phi_2) - K_\alpha(u(\phi_1), \phi_1)|. \end{aligned}$$

Tenint en compte la propietat (U.2) i que K_α és una funció diferenciable satisfent (4.11), podem escriure

$$|K_\alpha(u(\phi_2), \phi_2) - K_\alpha(u(\phi_1), \phi_1)| \leq \lambda[|u(\phi_2) - u(\phi_1)| + |\phi_2 - \phi_1|] \leq 2\lambda|\phi_2 - \phi_1| = 2\lambda(\phi_2 - \phi_1).$$

Aquesta última estimació també es pot expressar com

$$-|K_\alpha(u(\phi_2), \phi_2) - K_\alpha(u(\phi_1), \phi_1)| \geq -2\lambda(\phi_2 - \phi_1),$$

i això implica que $\tilde{\phi}_2 - \tilde{\phi}_1 \geq (1 - 2\lambda\alpha^{3/2})(\phi_2 - \phi_1)$. Així, suposant que α és suficientment petita, la banda dreta de (4.12) és una funció estrictament creixent i la seva solució $\hat{\phi}$ està definida de manera única. Concretament, $\hat{\phi} = \phi - \eta(\alpha)$.

Per les estimacions fetes anteriorment, es dedueix que $\hat{\phi}(\phi)$ (que és la funció inversa de la funció donada per (4.12)) és lipschitziana:

$$|\hat{\phi}(\phi_1) - \hat{\phi}(\phi_2)| \leq (1 - 2\lambda\alpha^{3/2})^{-1}|\phi_2 - \phi_1|. \quad (4.13)$$

Recuperant la primera equació de (4.10), ara podem definir l'aplicació $\tilde{u} = \mathcal{F}(u)$ mitjançant la fórmula

$$\tilde{u}(\phi) = (1 - 2\alpha)u(\hat{\phi}) + \alpha^{3/2}H_\alpha(u(\hat{\phi}), \hat{\phi}), \quad (4.14)$$

on $\hat{\phi}$ és la solució de (4.12). No obstant, la definició per si sola no és suficient, ja que cal verificar que $\mathcal{F}(u) \in U$ per a $u \in U$, és a dir, cal provar les propietats (U.1) i (U.2) per a la imatge $\tilde{u} = \mathcal{F}(u)$. La condició (U.1) es dedueix de l'estimació:

$$|\tilde{u}(\phi)| \leq (1 - 2\alpha)|u(\hat{\phi})| + \alpha^{3/2}|H_\alpha(u(\hat{\phi}), \hat{\phi})| \leq 1 - 2\alpha + \lambda\alpha^{3/2},$$

on aquí hem utilitzat (U.1) per a u i l'acotació (4.11). Així, per a α suficientment petita i positiva tenim que $|\tilde{u}| \leq 1$. La condició (U.2) per a \tilde{u} s'obté de la seqüència d'estimacions:

$$\begin{aligned} |\tilde{u}(\phi_1) - \tilde{u}(\phi_2)| &\leq (1 - 2\alpha)|u(\hat{\phi}_1) - u(\hat{\phi}_2)| + \alpha^{3/2}|H_\alpha(u(\hat{\phi}_1), \hat{\phi}_1) - H_\alpha(u(\hat{\phi}_2), \hat{\phi}_2)| \\ &\leq (1 - 2\alpha)|u(\hat{\phi}_1) - u(\hat{\phi}_2)| + \alpha^{3/2}\lambda[|\tilde{u}(\phi_1) - \tilde{u}(\phi_2)| + |\hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_2|] \\ &\leq (1 - 2\alpha + 2\lambda\alpha^{3/2})|\hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_2|, \end{aligned}$$

on l'última desigualtat és deguda a la lipschitzitat de u . Introduint l'estimació (4.13), obtenim

$$|\tilde{u}(\phi_1) - \tilde{u}(\phi_2)| \leq (1 - 2\alpha + 2\lambda\alpha^{3/2})(1 - 2\lambda\alpha^{3/2})^{-1}|\phi_2 - \phi_1|.$$

Així, \tilde{u} també satisfà (U.2) per a $\alpha > 0$ suficientment petit. En conjunt, acabem de veure que l'aplicació $\tilde{u} = \mathcal{F}(u)$ donada per (4.14) està ben definida.

3.2. *Verificació de la propietat de contracció.* Sabem que una aplicació $\mathcal{F}: U \rightarrow U$ és *contractiva* si existeix un valor ε , $0 < \varepsilon < 1$, tal que

$$\|\mathcal{F}(u_1) - \mathcal{F}(u_2)\| \leq \varepsilon\|u_1 - u_2\| \quad \text{per a tot } u_{1,2} \in U.$$

Suposem que tenim dues funcions $u_1, u_2 \in U$. L'objectiu és obtenir l'estimació $\|\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2\|$ en termes de $\|u_1 - u_2\|$. Per la definició (4.14) de $\tilde{u} = \mathcal{F}(u)$, es té

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_1(\phi) - \tilde{u}_2(\phi)\| &\leq (1 - 2\alpha)|u_1(\hat{\phi}_1) - u_2(\hat{\phi}_2)| + \alpha^{3/2}|H_\alpha(u_1(\hat{\phi}_1), \hat{\phi}_1) - H_\alpha(u_2(\hat{\phi}_2), \hat{\phi}_2)| \\ &\leq (1 - 2\alpha)|u_1(\hat{\phi}_1) - u_2(\hat{\phi}_2)| + \alpha^{3/2}\lambda[|u_1(\hat{\phi}_1) - u_2(\hat{\phi}_2)| + |\hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_2|], \end{aligned} \quad (4.15)$$

on $\hat{\phi}_1$ i $\hat{\phi}_2$ són les úniques solucions de

$$\phi = \hat{\phi}_1 + \eta(\alpha) + \alpha^{3/2}K_\alpha(u_1(\hat{\phi}_1), \hat{\phi}_1) \quad \text{i} \quad (4.16)$$

$$\phi = \hat{\phi}_2 + \eta(\alpha) + \alpha^{3/2}K_\alpha(u_2(\hat{\phi}_2), \hat{\phi}_2), \quad (4.17)$$

respectivament. Les estimacions (4.15) encara no resolen el problema ja que la banda dreta només pot quedar en funció de $\|u_1 - u_2\|$. Primer, expressem $|u_1(\hat{\phi}_1) - u_2(\hat{\phi}_2)|$ en termes de $\|u_1 - u_2\|$ i $|\hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_2|$:

$$\begin{aligned} |u_1(\hat{\phi}_1) - u_2(\hat{\phi}_2)| &= |u_1(\hat{\phi}_1) - u_2(\hat{\phi}_1) + u_2(\hat{\phi}_1) - u_2(\hat{\phi}_2)| \\ &\leq |u_1(\hat{\phi}_1) - u_2(\hat{\phi}_1)| + |u_2(\hat{\phi}_1) - u_2(\hat{\phi}_2)| \\ &\leq \|u_1 - u_2\| + |\hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_2|, \end{aligned} \quad (4.18)$$

on l'última desigualtat l'hem obtingut utilitzant la definició de la norma descrita anteriorment i la condició de lipschitzitat de u_2 . Seguidament, expressem $|\hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_2|$ en termes de $\|u_1 - u_2\|$. Restant (4.17) de (4.16), aïllant $\hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_2$ i prenent valors absoluts, ens queda:

$$|\hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_2| \leq \alpha^{3/2}|K_\alpha(u_1(\hat{\phi}_1), \hat{\phi}_1) - K_\alpha(u_2(\hat{\phi}_2), \hat{\phi}_2)| \leq \alpha^{3/2}\lambda[|u_1(\hat{\phi}_1) - u_2(\hat{\phi}_2)| + |\hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_2|].$$

Utilitzant (4.18) en aquesta desigualtat i agrupant els termes que involucren $|\hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_2|$ a la banda esquerra, es té:

$$|\hat{\phi}_1 - \hat{\phi}_2| \leq (1 - 2\alpha^{3/2}\lambda)^{-1}\alpha^{3/2}\lambda\|u_1 - u_2\|. \quad (4.19)$$

Així, usant les estimacions (4.18) i (4.19), podem reestimar (4.15) d'aquesta manera:

$$\|\tilde{u}_1(\phi) - \tilde{u}_2(\phi)\| \leq \epsilon\|u_1 - u_2\|,$$

on $\epsilon = (1 - 2\alpha)[1 + \alpha^{3/2}\lambda(1 - 2\alpha^{3/2}\lambda)^{-1}] + \alpha^{3/2}\lambda[1 + 2\alpha^{3/2}\lambda(1 - 2\alpha^{3/2}\lambda)^{-1}]$.

Com que $\epsilon = 1 - 2\alpha + \mathcal{O}(\alpha^{3/2})$, que és més petit que 1 per a valors petits de $\alpha > 0$, l'aplicació \mathcal{F} és una contracció en U . Per tant, podem afirmar que hi ha un únic punt fix estable $u^{(\infty)} \in U$.

4. *Estabilitat de la corba invariant.* Ara prenem un punt (u_0, ϕ_0) de dins de la banda $\{(u, \phi) : |u| \leq 1, \phi \in [0, 2\pi]\}$. Si el punt pertany a la corba donada per $u^{(\infty)}$, com que \mathcal{F} actua sobre una corba en ella mateixa, el punt romà en aquesta corba sota iteracions de F . Si és un punt que no passa per la corba invariant, en prenem una altra (de no invariant) on sí que hi passi i que estigui representada, posem, per $u^{(0)} \in U$ (una corba així sempre existeix). A continuació apliquem les iteracions de F definida per (4.10) en aquest punt i obtenim una seqüència de punts $\{(u_k, \phi_k)\}_{k=0}^{\infty}$.

Queda palès que cada punt d'aquesta seqüència pertany a la corresponent iteració de la corba $u^{(0)} \in U$ sota l'aplicació \mathcal{F} . Fins ara s'ha demostrat que les iteracions de la corba convergeixen a la corba invariant donada per $u^{(\infty)}$, de manera que la seqüència de punts ha de convergir també a la corba. Això prova l'estabilitat de la corba tancada invariant com a conjunt invariant de l'aplicació i completa la demostració. \square

La conclusió de tot plegat és que, malgrat que no es pugui assegurar que el sistema (4.4) sigui localment topològicament conjugat al sistema (4.1), els termes $\mathcal{O}(\|x\|^4)$ de (4.4) no afecten l'aparició de la corba tancada invariant en $\alpha > 0$, de manera que els seus retrats de fase comparteixen característiques comunes.

4.2 Bifurcació de Neimark-Sacker genèrica

En aquest apartat veurem com garantir l'existència d'una corba tancada invariant que bifurca des d'un punt fix en un sistema genèric qualsevol que presenti les condicions necessàries d'una bifurcació de Neimark-Sacker. Això serà possible gràcies al Lema 4.1., si aconseguim transformar un sistema qualsevol a la forma (4.4). Finalment, es donarà l'expressió del terme $d(0)$, el signe del qual determinarà la direcció de la corba invariant.

Considerem el següent sistema genèric de dues dimensions:

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (4.20)$$

on f és una funció diferenciable que té un equilibri $x = 0$ en $\alpha = 0$ amb vaps simples $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$, $0 < \theta_0 < \pi$.

Sabem que prenent α suficientment petit i proper a 0, i sempre que $\mu_{1,2}$ no sigui igual a 1, el sistema té un únic punt fix proper a l'origen que, amb un canvi simple de coordenades dependent del paràmetre, podem recol·locar-lo fàcilment a l'origen. Per tant, assumim sense pèrdua de generalitat que $x = 0$ és el punt fix del sistema amb $|\alpha|$ prou petit. Així, podem reescriure el sistema com:

$$f(x, \alpha) \mapsto A(\alpha)x + F(x, \alpha), \quad (4.21)$$

on $F = \mathcal{O}(\|x\|^2)$ és diferenciable i conté els termes d'ordre ≥ 2 , i $A(\alpha)$ és la matriu Jacobiana avaluada en $x = 0$ que té per vaps $\mu_{1,2}(\alpha) = r(\alpha)e^{\pm i\varphi(\alpha)}$, satisfent $r(0) = 1$, $\varphi(0) = \theta_0$.

De fet, podem escriure $r(\alpha) = 1 + \beta(\alpha)$ per alguna funció diferenciable $\beta(\alpha)$ amb $\beta(0) = 0$. Suposant que $\beta'(0) \neq 0$, aleshores podem utilitzar β com un nou paràmetre i expressar els vaps en termes de β :

$$\mu_1(\beta) = \mu(\beta), \quad \mu_2(\beta) = \bar{\mu}(\beta), \quad \text{on } \mu(\beta) = (1 + \beta)e^{i\theta(\beta)},$$

amb $\theta(\beta)$ com a funció diferenciable tal que $\theta(0) = \theta_0$.

A continuació introduïm la variable complexa z , juntament amb el nou paràmetre β , i anunciem el següent resultat.

Lema 4.2. El sistema (4.21) es pot reescriure, per a $|\alpha|$ suficientment petit, com una única equació

$$z \mapsto \mu(\beta)z + g(z, \bar{z}, \beta), \quad (4.22)$$

on $\beta \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$, $\mu(\beta) = (1 + \beta)e^{i\theta(\beta)}$ i $g = \mathcal{O}(|z|^2)$ és una funció complexa i diferenciable en (z, \bar{z}, β) que agrupa els termes quadràtics i d'ordre superior:

$$g(z, \bar{z}, \beta) = \sum_{k+l \geq 2} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\beta) z^k \bar{z}^l, \quad \text{amb } k, l = 0, 1, 2, \dots$$

Demostració. Anàloga a la del Lema 3.2. per al cas continu.

Seguint amb el mateix procediment que el capítol anterior, s'utilitzen els canvis de coordenades no-lineals (complexos) corresponents als Lemes 3.3. i 3.4. que permeten desfer-nos, en primer lloc, dels termes quadràtics i, en segon, dels cúbics excepte un de ressonant. Aquests parteixen i arriben a les mateixes expressions exposades al capítol 3, però amb algunes puntualitzacions que donarem a continuació.

Considerant la notació $\mu = \mu(\beta) = (1 + \beta)e^{i\theta(\beta)}$, $g_{ij} = g_{ij}(\beta)$, en el pas d'eliminació dels termes d'ordre 2 s'assumeix també que $e^{i\theta_0} \neq 1$ i $e^{3i\theta_0} \neq 3$. Aquestes condicions impliquen que $\mu(0) \neq 1$ i $\mu(0)^3 \neq 1$, respectivament (la primera és una suposició que ja s'assumeix des del principi). Les assignacions corresponents a les h_{ij} (ben definides per a $|\beta|$ prou petit, incloent-hi $\beta = 0$), són:

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\mu^2 - \mu}, \quad h_{11} = \frac{g_{11}}{|\mu|^2 - \mu}, \quad h_{02} = \frac{g_{02}}{\bar{\mu}^2 - \mu}.$$

Recordem que aquesta transformació canvia els coeficients dels termes cúbics de l'expressió original.

Pel que fa al pas de reducció dels termes d'ordre 3, aquí s'assumeix que $e^{2i\theta_0} \neq 1$ i $e^{4i\theta_0} \neq 1$. Aquestes condicions impliquen que $\mu(0)^2 \neq 1$ i $\mu(0)^4 \neq i$, respectivament (la primera ja se suposa des d'un principi). Les assignacions corresponents a les h_{ij} (ben definides per a $|\beta|$ prou petit), són:

$$h_{30} = \frac{g_{30}}{\mu^3 - \mu}, \quad h_{12} = \frac{g_{12}}{\bar{\mu}|\mu|^2 - \mu}, \quad h_{03} = \frac{g_{03}}{\bar{\mu}^3 - \mu}.$$

Fixem-nos que l'assignació $h_{21} = \frac{g_{21}}{\mu(1-|\mu|^2)}$ per al terme $\omega^2\bar{\omega}$ no seria vàlida, ja que el denominador s'anul·la en $\beta = 0$ per a tot θ_0 . Per tant, es tria, igual que per al cas continu, $h_{21} = 0$, obtenint així $c_1 = c_1(\beta) = \frac{g_{21}}{2}$.

La combinació d'aquestes transformacions porta al següent resultat.

Lema 4.3 (Forma normal topològica de la bifurcació de Neimark-Sacker). L'aplicació

$$z \mapsto \mu z + \frac{g_{20}}{2} z^2 + g_{11} z\bar{z} + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}^2 + \frac{g_{30}}{6} z^3 + \frac{g_{21}}{2} z^2\bar{z} + \frac{g_{12}}{2} z\bar{z}^2 + \frac{g_{03}}{6} \bar{z}^3 + \mathcal{O}(|z|^4), \quad (4.23)$$

amb $\mu = \mu(\beta) = (1 + \beta)e^{i\theta(\beta)}$, $g_{ij} = g_{ij}(\beta)$ i $\theta_0 = \theta(0)$ tal que $e^{ik\theta_0} \neq 1$ per a $k = 1, 2, 3, 4$, pot ser transformada, per a $|\beta|$ prou petit, a una aplicació amb un únic terme ressonant d'ordre 3,

$$\omega \mapsto \mu\omega + c_1\omega^2\bar{\omega} + \mathcal{O}(|\omega|^4), \quad \text{on } c_1 = c_1(\beta), \quad (4.24)$$

mitjançant el següent canvi de coordenada complexa i invertible (dependent del paràmetre):

$$z = z(\omega) = \omega + \frac{h_{20}}{2}\omega^2 - h_{11}\omega\bar{\omega} + \frac{h_{02}}{2}\bar{\omega}^2 + \frac{h_{30}}{6}\omega^3 + \frac{h_{12}}{2}\omega\bar{\omega}^2 + \frac{h_{03}}{6}\bar{\omega}^3.$$

Demostració. Anàloga a la del Lema 3.5. per al cas continu.

Observem que el terme $\omega^2\bar{\omega}$ correspon al *terme ressonant* de (4.24) i el seu coeficient, c_1 , coincideix amb el del terme cúbic de $z^2\bar{z}$ a (4.23).

Dels càlculs realitzats fins ara, se'n dedueixen les expressions per a $c_1(\beta)$ i $c_1(0)$:

$$c_1 = c_1(\beta) = \frac{g_{20}g_{11}(\bar{\mu} - 3 + 2\mu)}{2(\mu^2 - \mu)(\bar{\mu} - 1)} + \frac{|g_{11}|^2}{1 - \bar{\mu}} + \frac{|g_{20}|^2}{2(\mu^2 - \bar{\mu})} + \frac{g_{21}}{2}, \quad (4.25)$$

$$c_1(0) = \frac{g_{20}(0)g_{11}(0)(1 - 2\mu_0)}{2(\mu_0^2 - \mu_0)} + \frac{|g_{11}(0)|^2}{1 - \bar{\mu}_0} + \frac{|g_{02}(0)|^2}{2(\mu_0^2 - \bar{\mu}_0)} + \frac{g_{21}(0)}{2}, \quad \text{on } \mu_0 = e^{i\theta_0}. \quad (4.26)$$

Ja per acabar, es resumeixen tots els resultats en el següent teorema.

Teorema 4.4. Suposem que tenim un sistema 2-dimensional discret en el temps,

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R},$$

on f és una funció diferenciable que, per a $|\alpha|$ suficientment petit, té un punt fix $x = 0$ amb vaps corresponents a $\mu_{1,2}(\alpha) = r(\alpha)e^{\pm i\varphi(\alpha)}$, amb $r(0) = 1$ i $\varphi(0) = \theta_0$.

Assumim, a més, que se satisfan les condicions següents:

- (I) $r'(0) \neq 0$,
 (II) $e^{ik\theta_0} \neq 1$ per a $k = 1, 2, 3, 4$.

Aleshores, existeixen canvis de coordenades i paràmetres invertibles que transformen el sistema original en

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto (1 + \beta) \begin{pmatrix} \cos \theta(\beta) & -\sin \theta(\beta) \\ \sin \theta(\beta) & \cos \theta(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} \cos \theta(\beta) & -\sin \theta(\beta) \\ \sin \theta(\beta) & \cos \theta(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d(\beta) & -b(\beta) \\ b(\beta) & d(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\|y\|^4), \quad (4.27)$$

amb $\theta(0) = \theta_0$ i $d(0) = \operatorname{Re}(e^{-i\theta_0} c_1(0))$, on $c_1(0)$ ve donat per la fórmula (4.26).

Demostració. L'única cosa que falta per provar és la fórmula per $d(0)$. En efecte, el conjunt de resultats vistos en aquest apartat ens permeten transformar el sistema a la forma normal topològica complexa:

$$\omega \mapsto \mu(\beta)\omega + c_1(\beta)\omega|\omega|^2 + \mathcal{O}(|\omega|^4),$$

amb $\mu(\beta) = (1 + \beta)e^{i\theta(\beta)}$. Per l'apartat anterior sabem que aquesta aplicació pot escriure's com

$$\omega \mapsto e^{i\theta(\beta)}(1 + \beta + d_1(\beta)|\omega|^2)\omega + \mathcal{O}(|\omega|^4),$$

on $d_1(\beta) = d(\beta) + ib(\beta)$, amb $d(\beta)$ i $b(\beta)$ com a funcions reals. Si retornem a les coordenades reals (y_1, y_2) , $\omega = y_1 + iy_2$, s'obté el sistema (4.27). Finalment, $d(\beta) = \operatorname{Re}(d_1(\beta)) = \operatorname{Re}(e^{-i\theta(\beta)} c_1(\beta))$ i, per tant, $d(0) = \operatorname{Re}(e^{-i\theta_0} c_1(0))$ (fixem-nos que mai s'anul·la). \square

Usant el Lema 4.1. anunciat a l'apartat anterior s'arriba al següent resultat general.

Teorema 4.5 (Bifurcació de Neimark-Sacker genèrica). Per a qualsevol sistema genèric 2-dimensional i uniparamètric $x \mapsto f(x, \alpha)$ que tingui en $\alpha = 0$ el punt fix $x_0 = 0$ amb vaps complexos $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$, existeix un entorn de x_0 en el que, a mesura que α creua l'origen, una única corba tancada invariant bifurca des de x_0 .

Observació. Les condicions genèriques assumides al Teorema 4.5. corresponen a les condicions de transversalitat (I) i de no-ressonància (II) del Teorema 4.4., a més a més d'una condició addicional de no-degeneració: (III) $d(0) \neq 0$.

Cal remarcar que la condició (II) no és simplement tècnica, ja que, si $e^{ik\theta_0} = 1$ per a algun $k = 1, 2, 3, 4$, pot ser que la corba tancada invariant no aparegui del tot, o que diverses corbes invariants bifurquin des del punt fix.

Finalment, mitjançant (4.26), podem arribar a deduir l'expressió del coeficient $d(0)$:

$$d(0) = \operatorname{Re}\left(\frac{e^{-i\theta_0} g_{21}}{2}\right) - \operatorname{Re}\left(\frac{(1 - 2e^{i\theta_0})e^{-2i\theta_0}}{2(1 - e^{i\theta_0})} g_{20} g_{11}\right) - \frac{1}{2}|g_{11}|^2 - \frac{1}{4}|g_{02}|^2. \quad (4.28)$$

Aquest terme exerceix una funció similar a la del coeficient $l_1(0)$ que havíem vist per al cas continu, ja que determina la direcció de l'aparença de la corba invariant d'un sistema genèric exhibint una bifurcació de Neimark-Sacker. No obstant, fixem-nos que el seu càlcul és lleugerament diferent.

Estudi d'un model

Un exemple de sistema no-lineal exhibint una bifurcació de Neimark-Sacker és el model de *depredador-presa* proposat pel genetista britànic J. Maynard Smith l'any 1968:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \alpha x_k(1 - x_k) - x_k y_k, \\ y_{k+1} = \frac{1}{\beta} x_k y_k, \end{cases} \quad (4.29)$$

que és la versió discreta del model de Volterra. La variable x_k representa el nombre de preses, la y_k el nombre de depredadors, k és l'indicador de l'any (generació) i $\alpha, \beta > 0$ són els paràmetres del model. En particular, $x_0, y_0 \geq 0$ i s'assumeix que, en absència de preses, els depredadors s'extingeixen a la següent generació.

Observació. En molts casos, en models on intervé més d'un paràmetre s'acostuma, o bé a deixar-los tots fixos excepte un, o bé a trobar una relació entre ells per tal de treballar amb un sistema uniparamètric.

Si resollem el sistema

$$\begin{cases} x = \alpha x(1-x) - xy, \\ y = \frac{1}{\beta} xy, \end{cases}$$

obtenim tres solucions que corresponen als punts fixos de (4.29):

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} \frac{\alpha-1}{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad P_3 = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha(1-\beta) - 1 \end{pmatrix}.$$

Observem que P_2 existeix només si $\alpha > 1$, i per a P_3 es necessita que $\alpha > \frac{1}{1-\beta}$ amb $\beta < 1$. En particular, si $\alpha < \frac{1}{1-\beta}$ amb $\beta < 1$, llavors P_1 seria l'únic punt fix, però veurem que aquest cas no ocorre.

La matriu Jacobiana del sistema és

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha - 2\alpha x - y & -x \\ \frac{1}{\beta} y & \frac{1}{\beta} x \end{pmatrix}.$$

Notació. Posem $\mu_{1,2} = \mu_{1,2}(\alpha, \beta)$ per a referir-nos als vaps d'aquesta matriu. Denotem també $P_3 = (x_*, y_*)$.

Els vaps resultants d'avaluar $J(x, y)$ en el punt P_1 , són: $\mu_1 = \alpha, \mu_2 = 0 \in \mathbb{R}$, i els resultants d'avaluar $J(x, y)$ en P_2 , són: $\mu_1 = 2 - \alpha, \mu_2 = \frac{1}{\beta}(-\frac{1}{\alpha} + 1) \in \mathbb{R}$. Així, ni P_1 ni P_2 són candidats a punts de la bifurcació.

Si provem d'avaluar $J(x, y)$ en P_3 , obtenim:

$$J(x_*, y_*) = \begin{pmatrix} \alpha - 2\alpha\beta - \alpha(1-\beta) + 1 & -\beta \\ \frac{1}{\beta}(\alpha(1-\beta) - 1) & 1 \end{pmatrix}.$$

El seu polinomi característic coincideix amb l'expressió $\mu^2 - \text{tr}(J(x_*, y_*))\mu + \det(J(x_*, y_*))$. Com que

$$\text{tr}(J(x_*, y_*)) = -\alpha\beta + 2 \quad \text{i} \quad \det(J(x_*, y_*)) = \alpha - 2\alpha\beta,$$

els vaps de $J(x_*, y_*)$ es poden determinar resolent l'equació $\mu^2 - (2 - \alpha\beta) + \alpha - 2\alpha\beta = 0$. En efecte, operant, es té:

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2}(2 - \alpha\beta) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2\beta^2 - 4\alpha + 4\alpha\beta + 4}.$$

Per tal que els vaps de P_3 siguin complexos, cal que el discriminant $\Delta = \alpha^2\beta^2 - 4\alpha + 4\alpha\beta + 4$ sigui negatiu, i això passa només per valors de $\beta < \frac{2}{\sqrt{\alpha}} - \frac{2}{\alpha}$. No obstant, això no és suficient, ja que la condició de bifurcació també requereix que el mòdul d'aquests sigui 1.

Com que $\mu_{1,2} \in \mathbb{C}$ amb $\mu_2 = \bar{\mu}_1$, aleshores $|\mu_{1,2}|^2 = \mu_1\mu_2$. Per tant, si veiem que $\mu_1\mu_2 = 1$, també haurem provat que $|\mu_{1,2}| = 1$.

Multiplicant els dos vaps, veiem que: $\mu_1\mu_2 = \alpha - 2\alpha\beta = 1$ se satisfà $\iff 1 < \alpha < 9$ i $\beta = \frac{\alpha-1}{2\alpha}$. D'ara endavant denotarem com (α_*, β_*) a les parelles de paràmetres satisfent aquestes condicions, que seran les candidates a ser valors crítics de bifurcació.

Amb aquests càlculs, la condició de bifurcació queda provada i μ_1, μ_2 poden ser expressats en notació complexa:

$$\mu_{1,2} = r(\alpha, \beta)e^{\pm i\varphi(\alpha, \beta)},$$

amb $r(\alpha_*, \beta_*) = 1$ i $\varphi(\alpha_*, \beta_*) := \theta_* \in (0, \pi)$. Així, el següent pas serà provar les condicions de genericitat.

Per definició, es té que $r(\alpha, \beta) = |\mu_{1,2}|$. En particular, si calculem les derivades parcials:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} r(\alpha, \beta) \Big|_{(\alpha, \beta) = (\alpha_*, \beta_*)} &= \frac{1 - 2\beta}{2\sqrt{\alpha - 2\alpha\beta}} \Big|_{(\alpha, \beta) = (\alpha_*, \beta_*)} = \frac{1}{2\alpha}, \\ \frac{\partial}{\partial \beta} r(\alpha, \beta) \Big|_{(\alpha, \beta) = (\alpha_*, \beta_*)} &= \frac{-2\alpha}{2\sqrt{\alpha - 2\alpha\beta}} \Big|_{(\alpha, \beta) = (\alpha_*, \beta_*)} = -\alpha, \end{aligned}$$

veiem que cap d'aquestes s'anul·la per a valors de α propers a $\alpha_0 = 0$. Per tant, la condició de transversalitat queda provada per a tota parella de paràmetres de la forma $(\alpha, \frac{\alpha-1}{2\alpha})$, amb $1 < \alpha < 9$.

Per a la condició de no-ressonància, es tracta de veure si tota parella de paràmetres (α_*, β_*) satisfà $e^{ik\theta_0} \neq 1$ per a $k = 1, 2, 3, 4$. En altres paraules, cal verificar que l'angle θ_* no coincideix amb cap de les arrels cúbiques de la unitat, que són de la forma $\frac{2\pi}{k}m$, per a $k = 1, 2, 3, 4$ i $m \in \mathbb{Z}$.

Primer, observem que:

$$\begin{aligned} \theta_* = \varphi(\alpha_*, \beta_*) &= \arctan \left(\frac{\operatorname{Re}(\mu_1)}{\operatorname{Im}(\mu_1)} \right) \Big|_{(\alpha, \beta) = (\alpha_*, \beta_*)} \\ &= \arctan \left(\frac{\sqrt{-\alpha^2\beta^2 + 4\alpha - 4\alpha\beta - 4}}{2 - \alpha\beta} \right) \Big|_{(\alpha, \beta) = (\alpha_*, \beta_*)} = \arctan \left(\frac{\sqrt{-\alpha_*^2 + 10\alpha_* - 9}}{-\alpha_* + 5} \right). \end{aligned}$$

Seguidament, sigui $m \in \mathbb{Z}$, estudiem cas per cas:

- 1) Per a $k = 1$, $\theta_* = 2\pi m$ només ocorre si $\alpha_* = 1, 9$, però sabem que α_* no pot prendre aquests valors.
- 2) Per a $k = 2$, l'angle θ_* mai coincideix amb πm per a valors de $1 < \alpha_* < 9$.
- 3) Per a $k = 3$, les possibles arrels són $\frac{2\pi}{3}m$ i $\frac{4\pi}{3}m$. Si igualem

$$\frac{\sqrt{-\alpha^2 + 10\alpha - 9}}{-\alpha + 5} = \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{i} \quad \frac{\sqrt{-\alpha^2 + 10\alpha - 9}}{-\alpha + 5} = \tan\left(\frac{4\pi}{3}\right),$$

veiem que els únics valors de α_* que ho satisfan són $\alpha_* = 7$ i $\alpha_* = 3$, respectivament.

- 4) Per a $k = 4$, seguint el procediment del punt anterior, veiem que cal descartar $\alpha_* = 5$, ja que és l'únic valor en el qual l'angle coincideix amb $\frac{\pi}{2}$ i $\frac{3\pi}{2}$.

Arribats a aquest punt, podem donar el conjunt de valors crítics de bifurcació corresponent a una corba discontinua a l'espai de paràmetres:

$$\left\{ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \beta = \frac{\alpha - 1}{2\alpha}, \alpha \in (1, 3) \cup (3, 5) \cup (5, 7) \cup (7, 9) \right\}.$$

Per acabar, un cop provada la no-degeneració de P_3 per als valors d'aquest conjunt, el Teorema 4.5 ens permet afirmar que el sistema (4.29) exhibeix una bifurcació de Neimark-Sacker en un entorn del punt fix estudiat.

5 Generalització al cas n-dimensional

En els dos capítols anteriors s'ha estudiat la bifurcació de Hopf i de Neimark-Sacker d'equilibris i punts fixos en un sistema dinàmic genèric uniparamètric amb la mínima dimensió d'espai de fase ($n = 2$). En aquest capítol es mostra que això ocorre “essencialment” de la mateixa manera per a sistemes dinàmics genèrics n -dimensionals. Aquesta anàlisi es fa a través de certes varietats invariants, anomenades *varietats centrals*, de dimensió 2 i uniparamètriques, en les quals el sistema exhibeix les corresponents bifurcacions. En particular, es detallarà el cas continu en $n = 3$ en el valor crític del paràmetre i al voltant d'aquest, i es donaran equacions explícites per al cas general que permeten calcular el coeficient de Lyapunov en dimensions superiors, un indicador de l'existència d'aquest tipus de bifurcacions.

5.1 Teorema de la Varietat Central

En aquest apartat formularem (sense demostració) els teoremes principals que permeten reduir la dimensió de l'estudi al voltant d'una bifurcació de Hopf d'un sistema donat, sense perdre informació relacionada amb l'estabilitat. Per dur-ho a terme assumirem, de moment, que el nostre sistema està fixat al valor crític de bifurcació $\alpha_0 = 0$.

Així, considerem el sistema

$$\dot{x} = f(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 2, \quad (5.1)$$

amb $f \in \mathcal{C}^r$, $r \geq 1$, i satisfent $f(0) = 0$.

Siguin $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ els vaps de la matriu Jacobiana A avaluada en el punt d'equilibri $x_0 = 0$. Suposem que l'equilibri és no-hiperbòlic i que $\text{Re}(\lambda_i) = 0$ només per a $i = 1, 2$. Concretament, assumim que hi ha n_+ vaps amb $\text{Re}(\lambda) > 0$, $n_0 = 2$ vaps amb $\text{Re}(\lambda) = 0$ i n_- vaps amb $\text{Re}(\lambda) < 0$, comptant multiplicitats. Anomenarem a λ_1 i λ_2 *vaps crítics*, els vaps associats dels quals defineixen l'espai propi crític T^c .

Sigui φ^t el flux associat a (5.1), sota les condicions fixades, se sustenta el següent teorema:

Teorema 5.1. Existeix una varietat localment invariant de dimensió $n_0 = 2$ de (5.1), $W_{loc}^c(0)$, anomenada *varietat central*, que és tangent a T^c en $x = 0$. La seva diferenciabilitat coincideix amb la de f en el cas que sigui finita.

A més, existeix un entorn U de $x_0 = 0$ tal que, si $\varphi^t x \in U \quad \forall t \geq 0 \implies \varphi^t x \xrightarrow{t \rightarrow \infty} W_{loc}^c(0)$. La implicació és la mateixa quan es tendeix a $t \rightarrow -\infty$ per a $t \leq 0$.

Notació. Escrivim $W^c := W_{loc}^c(0)$.

Observacions.

- 1) La segona part del teorema s'interpreta com que les òrbites que es troben a prop de l'equilibri per a $t \geq 0$ (respectivament $t \leq 0$) tendeixen a W^c en la corresponent direcció de temps. Si *a priori* sabem que totes les òrbites que neixen en U romanen en aquesta regió “per sempre” (això ocorre quan $n_+ = 0$), aleshores el teorema implica que aquestes òrbites arriben a W^c quan $t \rightarrow \infty$. En aquest cas podem dir que la varietat W^c és “atractora”.
- 2) El teorema ens assegura l'existència de la varietat central, però no la unicitat. Tot i així, veurem que això no suposa cap impediment per a l'estudi de la bifurcació.
- 3) Com ja s'ha esmentat, en un entorn U de l'equilibri, si $f \in \mathcal{C}^k$ per a k finit, llavors també $W^c \in \mathcal{C}^k$. Ara bé, a mesura que $k \rightarrow \infty$, U esdevé cada cop més petit, el que provoca que no existeixi una varietat $W^c \in \mathcal{C}^\infty$ per a certs sistemes \mathcal{C}^∞ .

Per tal de donar una caracterització més específica de la dinàmica a prop de l'equilibri no-hiperbòlic, escrivim (5.1) en una base pròpia:

$$\begin{cases} \dot{u} = A_c u + f_c(u, v), \\ \dot{v} = A_{su} v + f_{su}(u, v), \end{cases} \quad (5.2)$$

on $u \in \mathbb{R}^2$, $v \in \mathbb{R}^{n_+ + n_-}$, A_c és una matriu 2×2 amb 2 vaps imaginaris purs, i A_{su} una matriu $(n_+ + n_-) \times (n_+ + n_-)$ amb cap vap sobre l'eix imaginari. Les funcions f_c i f_{su} tenen ordre 2.

De la segona equació de (5.2) se'n dedueix que la varietat central W^c està localment representada per la gràfica d'una funció diferenciable $W^c = \{(u, v) : v = V(u)\}$, on $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{n_+ + n_-}$, amb $V(u) = \mathcal{O}(\|u\|^2)$ per la propietat tangent de W^c .

Observació. Podem escriure $T^c = \{v = 0\}$. Així, la gràfica de la funció $v = V(u)$ ha de ser tangent al pla $v = 0$ en el punt $(u, v) = (0, 0)$.

Teorema 5.2 (Principi de Reducció). El sistema (5.2) és localment topològicament equivalent a prop de l'origen al sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = A_c u + f_c(u, V(u)), \\ \dot{v} = A_{su} v. \end{cases} \quad (5.3)$$

A més, si existeix més d'una varietat central, tots els sistemes resultants com el (5.3) amb diferents V són equivalents diferenciablement a nivell local.

La primera equació de (5.3) és el resultat de restringir el sistema (5.2) a la seva varietat central W^c . Així, la dinàmica del sistema (5.2) estructuralment inestable queda essencialment determinada per aquesta restricció, donat que la segona equació de (5.3) és lineal i té solucions exponencialment creixents/decreixents.

En particular, si $u = 0$ és un equilibri asimptòticament estable d'aquesta restricció i tots els vaps de f_{su} compleixen que $\text{Re}(\lambda) > 0$, aleshores $(u, v) = (0, 0)$ correspon a un equilibri asimptòticament estable de (5.2). Fixem-nos, doncs, que la dinàmica de la varietat central ve determinada, no només pels termes lineals de (5.2), sinó també pels no-lineals.

Notem també que les equacions per a u i v del nou sistema depenen exclusivament de u i v , respectivament, cosa que ens facilitarà molt més l'estudi de la varietat.

A la pràctica, la segona equació de (5.3) pot reemplaçar-se per les equacions d'una sella estàndard:

$$\begin{cases} \dot{v} = -v, \\ \dot{w} = w, \end{cases} \quad (5.4)$$

amb $v \in \mathbb{R}^{n_-}$, $w \in \mathbb{R}^{n_+}$.

Així, el Principi de Reducció pot reformular-se de la següent manera:

Proposició 5.3. A prop d'un equilibri no-hiperbòlic, el sistema és localment topològicament equivalent a la suspensió de la seva restricció a la varietat central per una sella estàndard.

Observació. La *suspensió* esmentada és entesa com el producte de (5.3) per la sella estàndard descrita per (5.4).

5.2 Varietats centrals en sistemes dependents d'un paràmetre

Si bé és certa l'existència de varietats centrals en el valor crític de bifurcació, podem donar resultats semblants que expliquen l'existència de certes varietats invariants per a un entorn d'aquest. Ho veurem per al cas particular d'un sistema 3-dimensional, on donarem l'equació explícita de (5.3) per a α suficientment proper a 0.

Considerem ara la família parametritzada per α de sistemes dinàmics amb les mateixes característiques que (5.1):

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}, n \geq 2. \quad (5.5)$$

Remarquem que $x = 0$ és un punt d'equilibri (no-hiperbòlic) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ i $\alpha_0 = 0$ segueix sent el valor del paràmetre on s'origina la bifurcació.

Per tal de caracteritzar les varietats invariants mencionades al primer paràgraf entorn del valor crític α_0 , serà necessari considerar el sistema estès

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = 0, \\ \dot{x} = f(x, \alpha). \end{cases} \quad (5.6)$$

El jacobinià d'aquest sistema, de dimensió $(n+1) \times (n+1)$, avaluat en $(x, \alpha) = (0, 0)$ és

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f_\alpha(0, 0) & f_x(0, 0) \end{pmatrix},$$

i conté $n_0 + 1 = 3$ vaps a l'eix imaginari i $n - n_0 = n - 2$ vaps amb part real $\neq 0$.

Fixem-nos que disposem de les hipòtesis necessàries per aplicar el Teorema 5.1. al sistema (5.6), que ens garanteix l'existència d'una varietat central W^c de dimensió 3. A més, aquesta varietat és tangent a l'origen a l'espai propi (generalitzat) de J corresponent als $n_0 + 1$ vaps amb part real nul·la.

Com que $\dot{\alpha} = 0$, els hiperplans $\Pi_{\alpha_0} = \{(x, \alpha) : \alpha = \alpha_0\}$ són també invariants respecte (5.6). Així, podem dir que la varietat central W^c està generada per (infinites) varietats invariants n_0 -dimensionals de la forma

$$W_\alpha^c = W^c \cap \Pi_\alpha,$$

les quals també ens referirem a elles com a varietats centrals, tot i que no ho siguin estrictament.

Lema 5.4. El sistema (5.5) té una varietat local i invariant 2-dimensional dependent del paràmetre, W_α^c , per a tot $|\alpha|$ suficientment petit. Si $n_+ = 0$, la varietat és atractora.

Seguint el procediment de l'apartat anterior, ara restringim el sistema (5.5) a W_α^c . Com que W_α^c és tangent a T^c , podem donar un sistema de coordenades (dependent del paràmetre) utilitzant una projecció (local) de W_α^c en T^c . Així, parametritzant amb $u \in \mathbb{R}^2$ com a coordenada, aquesta restricció estarà representada pel sistema diferenciable

$$\dot{u} = \psi(u, \alpha). \quad (5.7)$$

Observació. En $\alpha = 0$ el sistema (5.7) és equivalent a la restricció de (5.5) a la varietat central W_0^c . A l'apartat 5.3 donarem els càlculs explícits d'aquesta expressió fins a termes d'ordre 3.

Teorema 5.5 (Shoshitaishvili [1972]). El sistema (5.5) és localment topològicament equivalent a la suspensió de (5.7) per la sella estàndard (5.4). De fet, pot reemplaçar-se per qualsevol altre sistema que sigui equivalent topològicament a nivell local.

Bàsicament, el teorema reitera la idea que tots els esdeveniments "essencials" a prop de $\alpha = 0$ ocorren a la varietat central W_α^c i estan controlats pel sistema (5.7) 2-dimensional.

Observació. Aquest mateix teorema pot ser formulat per a sistemes dinàmics amb cas discret de temps i per a sistemes amb més d'un paràmetre.

A continuació donarem l'expressió explícita de (5.7) per al cas $n = 3$. Considerem, per tant, el sistema

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (5.8)$$

i assumim que en $\alpha = 0$ els vaps de l'equilibri són $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, amb $\omega_0 > 0$, i $\lambda_3 < 0$.

El Teorema 5.1. ens garanteix l'existència de la varietat central W_0^c , i la restricció de (5.8) a aquesta varietat presenta la següent expressió en forma complexa:

$$\dot{z} = i\omega_0 z + f_c(z, \bar{z}), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Per a $|\alpha|$ suficientment petit, el Lema 5.4. ens proporciona una varietat invariant de dimensió 2 de (5.8), W_α^c , que és dependent de α , diferenciable i localment atractora.

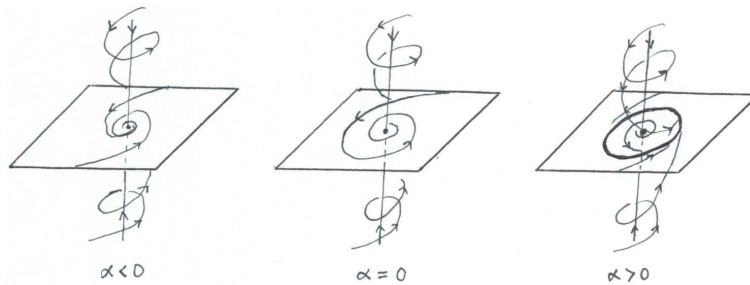
Notem que la condició de transversalitat, $\kappa'(0) \neq 0$, ja se satisfà. Si, a més, comprovem que el coeficient de Lyapunov $l_1(0)$ és no nul i l'equació restringida a W_α^c depèn del paràmetre, aleshores, pel Teorema 3.8., aquesta és localment topològicament equivalent a la forma normal

$$\dot{z} = (\alpha + i)z + \sigma z^2 \bar{z}, \quad z \in \mathbb{C}, \text{ on } \sigma = \text{signe}(l_1(0)) = \pm 1.$$

Així, sota aquestes condicions generals, el Teorema 5.5. implica que (5.8) és localment topològicament equivalent al sistema

$$\begin{cases} \dot{z} = (\alpha + i)z + \sigma z^2 \bar{z}, \\ \dot{v} = -v. \end{cases} \quad (5.9)$$

El retrat de fase de (5.9) es pot representar, per a $\sigma = -1$, com:



Fixem-nos que la bifurcació de Hopf (supercrítica) té lloc al pla invariant $v = 0$, que és atractiu. No obstant, el més destacable és que aquest comportament és substancialment el mateix que el del sistema (5.8) a la superfície atractiva W_α^c , representada per $v = V(u)$, que és tangent a $v = 0$ en l'origen.

Com ja s'ha comentat anteriorment, l'elecció de W_α^c per a un α fixat no és única. Concretament, aquesta coincideix amb la varietat inestable del focus fins que arriba al cicle límit estable (en $\alpha > 0$) on, a partir de llavors, la unicitat es perd.

La construcció donada fins ara permet una generalització per a qualsevol dimensió arbitrària $n \geq 3$. En particular, al proper apartat s'aplicarà sobre el valor crític del paràmetre per tal d'obtenir les condicions suficients que garanteixen l'existència de la bifurcació.

5.3 Equacions restringides a la varietat central

Fins ara sabem que l'estudi d'una bifurcació de Hopf en un sistema multidimensional continu es redueix a l'anàlisi de les EDO's que conformen el sistema restringides a la varietat invariant W_c^α . També sabem pel capítol 3 que aquestes bifurcacions vénen determinades pels coeficients de la forma normal del sistema en el valor crític del paràmetre $\alpha = 0$. Per tant, relacionant aquestes dues idees, podem arribar a trobar les equacions de la varietat central $W^c = W_0^c$ i les EDO's (amb suficients termes d'ordre superior) restringides a aquesta varietat que ens donaran informació determinant per a l'estudi de la bifurcació.

Recordem que a l'apartat 5.1, inicialment havíem transformat el sistema a la seva base pròpia. Aquí no farem el mateix, sinó que utilitzarem els veps corresponents als vaps crítics de A i A^\top per tal de "projectar" el sistema a T^c i el seu complementari T^{su} . Els coeficients quadràtics de les aproximacions de Taylor d'una funció que representi la varietat central W^c es calcularan mitjançant un procediment recursiu en el qual, a cada pas, es requerirà la resolució d'un sistema lineal d'equacions algebraiques, i seran els mateixos per a totes les possibles varietats. Finalment, ens quedarà una expressió que dependrà únicament dels coeficients corresponents a la forma normal, i a través dels quals podrem donar una fórmula explícita per al coeficient de Lyapunov $l_1(0)$ en dimensió n .

Com ja s'ha especificat, en aquest apartat es realitzen els càlculs en el valor crític $\alpha = 0$ i, per tant, s'obviarà a la notació. Considerem, per tant, el sistema

$$\dot{x} = f(x) = Ax + F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (5.10)$$

on $F(x) = \mathcal{O}(\|x\|^2)$ és una funció diferenciable, i la seva expansió de Taylor al voltant de $x = 0$ es pot escriure com

$$F(x) = \frac{1}{2}B(x, x) + \frac{1}{6}C(x, x, x) + \mathcal{O}(\|x\|^4), \quad (5.11)$$

on $B(x, y)$ i $C(x, y, z)$ són funcions lineals. Al capítol 3 ja vam veure que les seves expressions en coordenades eren les següents:

$$B_i(x, y) = \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2 F_i(\xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \Big|_{\xi=0} x_j y_k, \quad C_i(x, y, z) = \sum_{j,k,l=1}^2 \frac{\partial^3 F_i(\xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \Big|_{\xi=0} x_j y_k z_l,$$

per a $i = 1, 2, \dots, n$.

Sigui $q \in \mathbb{C}^n$ el vep de vap $\lambda_1 = i\omega_0$, satisfent $Aq = i\omega_0 q$ i $A\bar{q} = (-i\omega_0)\bar{q}$ (recordem que la seva normalització és irrellevant).

Introduïm també el vep adjunt $p \in \mathbb{C}^n$, satisfent $A^\top p = (-i\omega_0)p$ i $A^\top \bar{p} = i\omega_0 \bar{p}$, amb la normalització $\langle p, q \rangle = 1$, on $\langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{p}_i q_i$ és el producte escalar estàndard a \mathbb{C}^n .

L'espai propi crític T^c corresponent a $\pm i\omega_0$ és 2-dimensional i està generat per $\{\text{Re}(q), \text{Im}(q)\}$. L'espai propi complementari (no crític) T^{su} corresponent als $(n-2)$ vaps de A diferents de $\pm i\omega_0$ és, lògicament, $(n-2)$ -dimensional.

Lema 5.6. $y \in T^{su} \iff \langle p, y \rangle = 0$.

Observació. $y \in T^{su}$ és real, mentre que $p \in \mathbb{C}^n$ és complex. El lema implica que les parts real i imaginària de $\langle p, y \rangle$ s'han d'anul·lar.

Aquest lema ens permet descompondre un $x \in \mathbb{R}^n$ qualsevol en $x = zq + \bar{z}\bar{q} + y$, on $z \in \mathbb{C}$, $zq + \bar{z}\bar{q} \in T^c$ i $y \in T^{su}$. Observem que la variable complexa z és una coordenada en T^c . A més, a la demostració del Lema 3.2. vam veure que $\langle p, \bar{q} \rangle = 0$. Per tant, podem escriure:

$$\begin{cases} z = \langle p, x \rangle, \\ y = x - \langle p, x \rangle q - \langle \bar{p}, x \rangle \bar{q}. \end{cases}$$

Tenint present l'observació anterior, en aquestes coordenades, l'expressió (5.10) pren la forma d'aquest sistema $(n+2)$ -dimensional:

$$\begin{cases} \dot{z} = i\omega_0 z + \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle, \\ \dot{y} = Ay + F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) - \langle p, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle q - \langle \bar{p}, F(zq + \bar{z}\bar{q} + y) \rangle \bar{q}. \end{cases}$$

Utilitzant l'expressió (5.11) donada i les definicions dels vectors propis, podem reescriure aquest sistema de la forma

$$\begin{cases} \dot{z} = i\omega_0 z + \frac{1}{2}G_{20}z^2 + G_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}G_{02}\bar{z}^2 + \frac{1}{2}G_{21}z^2\bar{z} + z\langle p, B(q, y) \rangle + \bar{z}\langle p, B(\bar{q}, y) \rangle + \dots, \\ \dot{y} = Ay + \frac{1}{2}H_{20}z^2 + H_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}H_{02}\bar{z}^2 + \dots, \end{cases}$$

on $G_{20}, G_{11}, G_{02}, G_{21} \in \mathbb{C}$, $H_{ij} \in \mathbb{C}^n$ i $\langle \cdot, \cdot \rangle$ és el producte escalar a \mathbb{C}^n .

Ara es tracta d'anar determinant els coeficients desconeguts per arribar a donar una expressió explícita del sistema. Comencem especificant els nombres i vectors complexos implicats:

$$\begin{aligned} G_{20} &= \langle p, B(q, q) \rangle, & G_{11} &= \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle, & G_{02} &= \langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle, \\ G_{21} &= \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle & \text{i} & & \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{cases} H_{20} = B(q, q) - \langle p, B(q, q) \rangle q - \langle \bar{p}, B(q, q) \rangle \bar{q}, \\ H_{11} = B(q, \bar{q}) - \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle q - \langle \bar{p}, B(q, \bar{q}) \rangle \bar{q}. \end{cases} \quad (5.13)$$

Fixem-nos que, com que $y \in \mathbb{R}^n$, $\bar{H}_{ij} = H_{ij}$.

Ara que l'equació de la derivada de y està totalment determinada, podem escriure la representació de W^c com la gràfica de la funció

$$y = V(z, \bar{z}) = \frac{1}{2}\omega_{20}z^2 + \omega_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}\omega_{02}\bar{z}^2 + \mathcal{O}(|z|^3),$$

on $w_{ij} \in \mathbb{C}^n$ són coeficients desconeguts que satisfan $\langle p, \omega_{ij} \rangle = 0$.

Per la condició d'invariància de W^c , podem escriure $\dot{y} = V_z \dot{z} + V_{\bar{z}} \dot{\bar{z}}$, i llavors w_{20} , w_{11} i w_{02} són solucions de les equacions lineals

$$\begin{cases} (2i\omega_0 \text{Id} - A)\omega_{20} = H_{20}, \\ -A\omega_{11} = H_{11}, \\ (-2i\omega_0 \text{Id} - A)\omega_{02} = H_{02}, \end{cases}$$

on Id és la matriu identitat $n \times n$. Fixem-nos que les solucions són úniques perquè les matrius de la banda esquerra són invertibles (0 i $\pm 2i\omega_0$ no són vaps de A).

Per tant, l'equació restringida a W^c és

$$\begin{aligned} \dot{z} = i\omega_0 z + \frac{1}{2}G_{20}z^2 + G_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}G_{02}\bar{z}^2 + \frac{1}{2}(G_{21} - 2\langle p, B(q, A^{-1}H_{11}) \rangle \\ + \langle p, B(\bar{q}, (2i\omega_0 \text{Id} - A)^{-1}H_{20}) \rangle)z^2\bar{z} + \dots \end{aligned} \quad (5.14)$$

Per acabar, donarem l'expressió del 1r coeficient de Lyapunov per al sistema restringit (5.14).

Si substituïm les expressions (5.12) i (5.13) a (5.14) i considerem les següents identitats:

$$A^{-1}q = \frac{1}{i\omega_0}q, \quad A^{-1}\bar{q} = -\frac{1}{i\omega_0}\bar{q}, \quad (2i\omega_0 \text{Id} - A)^{-1}q = \frac{1}{i\omega_0}q, \quad (2i\omega_0 \text{Id} - A)^{-1}\bar{q} = \frac{1}{3i\omega_0}\bar{q},$$

aconseguint transformar (5.14) a l'equació

$$\dot{z} = i\omega_0 z + \frac{1}{2}g_{20}z^2 + g_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}g_{02}\bar{z}^2 + \frac{1}{2}g_{21}z^2\bar{z} + \dots,$$

$$\begin{aligned} \text{on } g_{20} = \langle p, B(q, q) \rangle, \quad g_{11} = \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle, \quad \text{i} \\ g_{21} = \langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle - 2\langle p, B(q, A^{-1}B(q, \bar{q})) \rangle + \langle p, B(\bar{q}, (2i\omega_0 \text{Id} - A)^{-1}B(q, q)) \rangle \\ + \frac{1}{i\omega_0} \langle p, B(q, q) \rangle \langle p, B(q, \bar{q}) \rangle - \frac{2}{i\omega_0} |\langle p, B(q, \bar{q}) \rangle|^2 - \frac{1}{3i\omega_0} |\langle p, B(\bar{q}, \bar{q}) \rangle|^2. \end{aligned}$$

Observem que, a la segona línia de g_{21} , els dos últims sumands són imaginaris purs, mentre que el primer conté el mateix producte escalar que el producte $g_{20}g_{11}$. Per tant, aplicant la fórmula (3.24), obtenim:

$$\begin{aligned} l_1(0) &= \frac{1}{2\omega_0^2} \text{Re}(ig_{20}g_{11} + \omega_0 g_{21}) \\ &= \frac{1}{2\omega_0} \text{Re} \left(\langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle - 2\langle p, B(q, A^{-1}B(q, \bar{q})) \rangle + \langle p, B(\bar{q}, (2i\omega_0 \text{Id} - A)^{-1}B(q, q)) \rangle \right). \end{aligned}$$

Aquesta fórmula sembla ser la més convenient pel tractament analític de la bifurcació de Hopf en sistemes n -dimensionals amb $n \geq 2$. S'ha constatat que no requereix la transformació prèvia del sistema a la seva base pròpia i dona l'expressió de $l_1(0)$ usant termes lineals, quadràtics i cúbics originals, assumint que només coneixem els veps crítics (l'ordinari i l'adjunt) de la matriu Jacobiana.

Conclusions

L'anàlisi de bifurcacions locals en sistemes dinàmics dependents d'un paràmetre combina un parell de conceptes que he après durant el Grau, de manera independent, a les assignatures de Models Matemàtics i Sistemes Dinàmics i d'Equacions Diferencials. Això m'ha permès, per una banda, comprendre millor la unió entre aquestes dues disciplines i, per altra, ampliar la base dels meus coneixements pel que fa a la dinàmica qualitativa d'EDOS i aplicacions.

De fet, un dels motius que em va motivar a encaminar el treball en aquesta direcció, va ser que al temari d'Equacions Diferencials, tot i estar estretament relacionat, no s'arriben a tractar les formes normals. Si bé allà es donen eines de com caracteritzar el comportament d'un sistema dinàmic entorn d'un equilibri o punt fix hiperbòlic (Teorema de Hartman-Grobman), al voltant d'un punt regular (Teorema del Flux Tubular) i a prop d'una òrbita periòdica (Aplicació de Poincaré o de retorn), mancava la part corresponent a la dinàmica al voltant d'un equilibri o punt fix no-hiperbòlic. Així, una manera indirecta i alhora atractiva de treballar-ho era a través de l'estudi de bifurcacions que neixen de singularitats no-hiperbòliques.

El tema del treball que es va establir al principi del semestre s'ha mantingut, i aquest ha anat evolucionant en funció de petits objectius que s'han anat acordant progressivament. En un principi, una possible idea era tractar un exemple d'algun article científic concret, però al final es va apostar per models proposats de [6], especialment preparats per a les bifurcacions que s'han estudiat.

El fet d'haver de discernir entre els casos continu i discret de temps, però que al mateix temps aquests compartissin certes similituds, ha dificultat la redacció de la memòria en algun moment, ja que prevalia la rigorositat i la precisió matemàtica però també volent evitar una repetició excessiva de conceptes i càlculs. Per part meua, he intentat que la lectura sigui la més clara i entenedora possible volent mostrar, al mateix temps, el meu procés d'aprenentatge.

Per últim, donada la situació excepcional dels últims mesos, únicament he pogut treballar amb [6] en format físic, del qual n'he arribat a fer un gran ús per la comoditat de tenir-lo en paper i perquè el seu contingut encaixava amb la temàtica del treball. De tota manera, gràcies a l'enorme quantitat de recursos disponibles a la xarxa, sovint també he fet diverses cerques en línia, sempre procurant consultar fonts oficials. Així mateix, la comunicació amb l'Ernest, el meu tutor, ha estat satisfactòria en tot moment, ja que m'ha aconsellat i recomanat lectures apropiades quan ha estat necessari. El conjunt d'aquests factors, juntament amb el benestar del meu entorn, m'ha permès elaborar el projecte de final de grau amb normalitat i concloure, així, aquesta etapa de la meua vida.

Apèndixs

A Teorema de la Funció Implícita i Teorema de la Funció Inversa

Considerem una aplicació $F: V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $F \in \mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, definida per $(x, y) \mapsto F(x, y)$ en un entorn V de $(x, y) = (x_0, y_0)$ i tal que $F(x_0, y_0) = 0$. Sigui $F_y(x_0, y_0)$ la matriu de les derivades primeres de F respecte la variable y avaluada en (x_0, y_0) , és a dir,

$$F_y(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial F_i(x, y)}{\partial y_j} \right) \Big|_{(x, y) = (x_0, y_0)}, \quad \text{on } i, j = 1, 2, \dots, m.$$

Teorema (de la Funció Implícita). Si la matriu $F_y(x_0, y_0)$ és no-singular, aleshores existeix una única funció que és de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$, definida localment per

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \\ x \mapsto f(x) = y, \quad \text{tal que } F(x, f(x)) = 0$$

per a tot x en algun entorn de x_0 a \mathbb{R}^n . A més, en aquest entorn,

$$f_x(x) = -[F_y(x, f(x))]^{-1} F_x(x, f(x)).$$

Considerem ara una aplicació $g: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g \in \mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, tal que $y = g(x)$, definida al voltant de $x_0 \in U$ i satisfent $g(x_0) = y_0$. El següent resultat és una conseqüència del teorema anterior.

Teorema (de la Funció Inversa). Si la matriu $g_x(x_0)$ és no-singular, aleshores existeix una única funció diferenciable definida localment per

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ y \mapsto f(y) = x, \quad \text{tal que } g(f(y)) = y$$

per a tot y en algun entorn de y_0 a \mathbb{R}^n . La funció f s'anomena *funció inversa* de g i es denota per $f = g^{-1}$.

B Teorema de Hartman-Grobman

Sigui $X: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un camp vectorial \mathcal{C}^r diferenciable, $r \geq 1$, en un obert $U \subset \mathbb{R}^n$, i x_* un punt fix hiperbòlic del camp.

Sigui $Y: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ el camp lineal definit per $y \mapsto DX(x_*)y$.

Posem $y_* \equiv 0 \in \mathbb{R}^n$ i denotem per $\varphi = \varphi(x, t)$ i $\psi = \psi(y, t)$ els fluxos de X i Y , respectivament.

Aleshores existeix un entorn $U_* \subset U$ de x_* i un homeomorfisme $h_\alpha: U_* \rightarrow h_\alpha(U_*)$ tal que $h_\alpha(x_*) = y_*$ i conjuga els fluxos:

$$\psi(h_\alpha(x), t) = h_\alpha \circ \varphi(x, t), \quad \forall x \in U_*, \forall t \in [-1, 1],$$

de tal manera que podem afirmar que els camps X i Y són topològicament conjugats.

El resultat del teorema es tradueix en el fet que el comportament d'un sistema dinàmic definit per un camp vectorial en un entorn d'un punt fix hiperbòlic és qualitativament el mateix que el comportament de la seva linealització a prop d'aquest punt.

Referències

- [1] ALLIGOOD, K.T.; SAUER, T.D.; YORKE, J.A. *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, Springer, New York, 1996. ISBN 0-387-94677-2.
- [2] ARNOLD, V.I. *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1988. ISBN 0-387-96649-8.
- [3] ARROWSMITH, D.K.; PLACE, C.M. *Dynamical Systems. Differential equations, maps and chaotic behaviour*, Chapman & Hall, London, 1992. ISBN 0-412-39070-1.
- [4] CAMPBELL, S.L.; HABERMAN, R. *Introduction to Differential Equations with Dynamical Systems*, Princeton University Press, New Jersey, 2008. ISBN 978-0-691-12474-2.
- [5] CHICONE, C. *Ordinary Differential Equations with Applications*, Springer, New York, 1999. ISBN 0-387-98535-2.
- [6] KUZNETSOV, Y.A. *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer, New York, 1995 (3rd edition), chapters 1-5. ISBN 0-387-21906-4.
- [7] MARSDEN, J.E.; MCCRACKEN, M. *The Hopf Bifurcation and Its Applications*, Springer-Verlag, New York, 1976. ISBN 0-387-90200-7.
- [8] MOIOLA, J.L.; CHEN, G. *Hopf Bifurcation Analysis, a Frequency Domain Approach*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 1996. ISBN 981-02-2628-4.
- [9] PERKO, L. *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer, New York, 1990. ISBN 0-387-97443-1.
- [10] REMEDIOS, L. *Bifurcación de Andronov-Hopf en la dinámica neuronal*, Graduate Thesis, México, 2013.
<https://www.fcfm.buap.mx/assets/docs/docencia/tesis/ma/LeonardoRemediosSantiago.pdf>.
- [11] WIGGINS, S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag, New York, 1990. ISBN 0-387-97003-7.