UNIVERSITAT DE BARCELONA

GRAU en MATEMÀTIQUES
GRAU en ADMINISTRACIÓ I DIRECCIÓ D'EMPRESES

Facultat de Matemàtiques i Informàtica
Facultat d'Economia i Empresa

Treball Final de Grau

Problema de bancarrota

Raquel Domínguez León

Directors: **Dr. Josep Vives**
Dept. de Matemàtiques i Informàtica
Dr. Mikel Álvarez
Dept. de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial

Barcelona, Gener 2021

Resumen

En este proyecto se pretende estudiar los problemas de bancarrota y cómo se asocian a un juego cooperativo. Se conoce como un problema de bancarrota aquella situación en la que hay que repartir un bien escaso cuya cantidad es insuficiente para satisfacer la demanda de aquellos que reclaman este bien.

Algunas situaciones reales como la quiebra de una empresa o una herencia pueden ser modeladas mediante estos problemas. El más conocido es el problema planteado en el Talmud, un libro de la tradición judía:
Un deudor en bancarrota debe a sus acreedores 100, 200 y 300 zuzim, respectivamente.
¿Cómo debe repartir la cantidad que dispone, si ésta es de 100, 200, 300 zuzim?

La resolución de tales problemas no es única, varía en función de la regla de reparto que se utilice. A partir del problema del Talmud se muestran como actúan cinco reglas de reparto: Proporcional, igualar ganacias, igualar pérdidas, por orden de llegada y Talmúdico.

Abstract

This project aims to study bankruptcy problems and how they are associated with cooperative game. A bankruptcy problem is known as a situation in which a scarce good has to be distributed, the quantity of which is insufficient to satisfy the demand of those who *Claim* this good.

Some real situations like the bankruptcy of a company or an inheritance can be modeled by these problems. The best known is the problem posed in the Talmud, a book of Jewish tradition:
A bankrupt debtor owes his creditors 100, 200 and 300 zuzim, respectively.
How should you distribute the amount you have, if it is 100, 200, 300 zuzim?

The resolution of such problems is not unique, it varies depending on the rule of cast that is used. From the problem of the Talmud, five rules of distribution are shown: Proportional, equal gains, equal losses, in order of arrival and Talmudic.

2010 Mathematics Subject Classification. 91A12, 91A80, 91A26

Agradecimientos

Deseo agradecer a mis tutotes, el Dr. Josep Vives y el Dr. Mikel Álvarez, su imprescindible dedicación a este proyecto. Sin sus consejos y su tiempo no hubiera conseguido el mismo resultado.

En segundo lugar, quiero agradecer a mis amigos por acompañarme durante esta aventura que ha sido la universidad, especialmente a Laia, gracias por estar siempre ahí. También quisiera dar las gracias a Eugenio por darme fuerzas en la última etapa de mi vida académica.

Y, por último, todo esto no hubiera sido posible sin el apoyo incondicional de mi familia y los esfuerzos que han hecho por mí. ¡Gracias!

Índice

Capítulo I

Introducción

La teoría de juegos es una rama de la economía que estudia cómo un individuo debe tomar sus decisiones para tener éxito, teniendo en cuenta lo que cree que harán los demás agentes que intervienen en la situación. La teoría de juegos como estudio matemático se ha utilizado tanto en la economía como en la psicología, gestión, estrategia e incluso en la biología.

Muchos opinan que el fundador de la teoría de juegos, formalmente hablando, fue el matemático John von Neumann. Desarrolló, junto con Morgenstern, el concepto de teoría de juegos en su libro *The Theory of Games and Economic Behavior* [29], publicado en 1944.
Más hacia el siglo XIX, se destaca al economista Antoine Augustin Cournot por ser particularmente innovador. Realizó un estudio sobre un duopolio en el que alcanzó una versión reducida del equilibrio de Nash, ya que se llega a un nivel de precios y producción óptimos.

La teoría de juegos analiza situaciones de conflicto mediante modelos matemáticos, estos conflictos son los llamados juegos. Definimos un juego como cualquier situación que implica a varias personas, llamadas jugadores, y en la que se pueden obtener recompensas o incentivos que dependen de las acciones del resto.

Existen diferentes tipos de juegos:
- Simultáneos o secuenciales: Los juegos simultáneos son aquellos en los que los jugadores actúan todos a la vez. Mientras que en los secuenciales cada jugador actúa después de otro.

- De información perfecta o imperfecta: En los juegos de información perfecta todos los jugadores saben lo que han hecho los otros anteriormente. Al contrario que en los juegos de información imperfecta.

- Simétricos o asimétricos: Un juego simétrico es aquel en que las recompensas y castigos de cada jugador son las mismas. En cambio, son distintas si el juego es asimétrico.

- Juegos de suma cero o distinta de cero: En los primeros, la pérdida para un jugador es la misma que la ganancia para el otro. En cambio, en un juego de suma distinta de cero la ganancia o pérdida varía.

- Juegos cooperativos o no cooperativos: Los juegos cooperativos son aquellos en los que los jugadores pueden firmar acuerdos vinculantes y los juegos no cooperativos son en los que actúan de forma independiente.

En este proyecto nos centraremos en el estudio de juegos cooperativos, desarrollando primeramente una base teórica, gracias a [10], [12] y [20], en la que estudiaremos definiciones y soluciones tales como el Core, el Nucleolus y el valor de Shapley [1], [15]. A continuación, realizaremos un estudio de los problemas de bancarrota, sus reglas de reparto y sus propiedades. Para concluir este apartado se expone una tabla-resumen de qué propiedades cumple cada una de las reglas clásicas. Todo este bloque está extraído en gran parte de [11], [16], [21], [25], [26], [27] y [28]. Seguidamente, desarrollaremos un problema de bancarrota real:

¿Cómo reparte el Estado a cada Comunidad Autónoma su parte correspondiente en concepto de Sanidad?

A partir de este problema, iremos ejemplificando los conceptos explicados anteriormente.

La metodología empleada en este trabajo ha sido la búsqueda de fuentes de información tales como artículos, libros o páginas web. Además, se ha utilizado el paquete *CoopGame* del programa R para calcular de manera sencilla las soluciones al ejemplo del primer capítulo. También se han elaborado unas hojas de cálculo en Excel que han permitido realizar las operaciones necesarias para obtener los resultados proporcionados por las reglas de reparto estudiadas.

En última instancia, tendremos las referencias bibliográficas utilizadas en la elaboración del trabajo.

Capítulo II

Introducción a los juegos cooperativos

Un juego es una situación en la que dos o más personas, estableciendo unas reglas, toman decisiones que conducen a un resultado. Se tratan mediante modelos matemáticos para entender la decisión tomada y cómo han interactuado los individuos que han tomado la decisión. El juego más popular es el conocido como "El dilema del prisionero" [5] [18].

A continuación, exponemos este problema clásico: "La policía detiene a dos sospechosos de un delito. No tienen suficientes pruebas para condenarlos, por lo tanto, deciden interrogarlos por separado. A cada uno de ellos se le preguntará sobre la culpabilidad del otro. Cada uno de los sospechosos se encuentra en una celda, y a ambos se les ofrece el mismo trato: si uno confiesa y su cómplice continúa sin hablar, su cómplice será condenado a la pena máxima (supongamos 10 años) y él será puesto en libertad. Si el cómplice confiesa, pero él no, recibirá la pena máxima y su cómplice será liberado. Si ambos permanecen callados, ambos serán encerrados 6 meses por un cargo menor, mientras que si ambos confiesan, serán condenados a 6 años."

Así pues, el dilema se encuentra en decidir si cooperar y permanecer callado o traicionar y confesar. El resultado de cada decisión depende de la elección del cómplice.

De todas formas, independientemente del otro, la mejor elección siempre es confesar ya que, si un prisionero confía en que el otro va a cooperar, la mejor opción es confesar y así obtendrá la libertad y su compañero la pena máxima. Por otro lado, si se espera que el cómplice va a confesar, la mejor opción también es confesar para evitar la pena máxima y conformarse con la misma condena que el otro, 6 años. Y como tercera opción, si los dos cooperan, cumplirán la pena mínima.

En este proyecto, dentro de los juegos, nos centraremos en los juegos cooperativos. Éstos parten de suponer que los jugadores se comprometen a comportarse de una manera socialmente óptima. Por ello, se dice que un juego es cooperativo si los jugadores pueden llegar a acuerdos vinculantes sobre la distribución de pagos, o la elección de estrategias, con la finalidad de encontrar un beneficio común.

Así pues, al formar un acuerdo entre los jugadores, se crea una coalición que denotaremos $S \subseteq N$. Estos subconjuntos pueden estar formados por cualquier grupo de jugadores, los cuales cooperan entre ellos independientemente de las acciones que los demás jugadores lleven a cabo. Una coalición puede ser de cualquier tamaño, en particular, si $S = N$ se llama la gran coalición.

2.1. Juegos cooperativos de Utilidad Transferible

Hablamos de un juego con utilidad transferible o, abreviadamente, TU, cuando cualquier reparto del pago entre los jugadores es posible. El objetivo principal de la teoría de los juegos TU es definir soluciones que sean óptimas para los jugadores. La información para estudiar los juegos TU proviene de [4] y [17].

Si definimos el conjunto de jugadores como $N = \{1, \ldots, n\}$, tenemos que una situación de cooperación viene dada por una función real $v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que v asigna cero al conjunto vacío y donde 2^N son las partes de N. A esta función la llamamos función característica.

Sea (N, v) un juego cooperativo de n jugadores. Si los jugadores llegan a un acuerdo entre ellos, al final se repartirán la cantidad total[1], $v(N)$, que es todo lo que puede conseguir la coalición formada.

Una distribución de $v(N)$ entre los jugadores se representa mediante un vector, x, que satisface el principio de eficiencia:

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N).$$

Es decir, si se forma la gran coalición N, el beneficio será repartido en su totalidad por los jugadores que la forman.

Un vector de pagos, x, es un elemento de $\mathbb{R}^N$ donde la i-ésima coordenada representa el pago correspondiente al i-ésimo jugador. El reparto de estos pagos se hará efectivo al finalizar el juego entre los jugadores que forman la coalición.

Por otro lado, se dice que un vector de pagos cumple el principio de racionalidad individual si, para cada $i \in N$, $x_i \geq v(\{i\})$, i.e., que se asigne a cada jugador una cantidad superior o igual a la que conseguiría si actuara individualmente.

En definitiva, denotamos como $v(S)$, el valor de la coalición S, es decir, como el beneficio que S puede generar. Por lo tanto, $v(S)$ se puede caracterizar por un solo número dado por $max \sum_{i \in S} x_i$.

Definición 1. *Definimos el conjunto de preimputaciones de un juego (N, v) como el conjunto de todas las distribuciones o vectores de pago eficientes:*

$$PI(v) = \{x \in \mathbb{R}^n \textit{ tal que } x(N) = v(N)\}.$$

Definición 2. *Se llama imputación a un vector de pagos eficiente y que, además, cumple el principio de individualidad racional. El conjunto de imputaciones se define como:*

$$I(v) = \{x \in \mathbb{R}^N \textit{ tal que } x(N) = v(N) \quad y \quad x_i \geq v(\{i\}), \textit{ para todo } i \in N\}.$$

[1]La cantidad total a repartir no necesariamente tiene que ser dinero, hablamos de cualquier tipo de utilidad que se pueda transferir.

Dado un conjunto de jugadores fijo $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ sea $n := |N|$ el cardinal[2] del conjunto. Suponemos una asociación entre el juego (N, v) y su función característica v. Así pues, denotamos el conjunto de juegos por G^N, definido como:

$$G^N = \{v \text{ tal que } v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}, v(\emptyset) = 0\}.$$

Se definen las siguientes operaciones sobre G^N:

$$+ : G^N \times G^N \Rightarrow G^N, (v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2,$$

$$\bullet : \mathbb{R} \times G^N \Rightarrow G^N, (\alpha, v) \mapsto \alpha v.$$

Definidas para todo $S \subseteq N$, con $v_1, v_2 \in G^N$ y $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(v_1 + v_2)(S) = v_1(S) + v_2(S),$$

$$(\alpha v)(S) = \alpha v(S).$$

Es inmediato ver que el conjunto G^N con la estructura (G^N,+,$\bullet$) es un espacio vectorial de dimensión $2^n - 1$.

Definición 3. *Se dice que un juego cooperativo es monótono si al aumentar el número de jugadores que forman una coalición, el pago no disminuye. Es decir, un juego (N, v) es monótono si, para todo $S, T \subseteq N$ con $S \subseteq T$, se cumple que $v(S) \leq v(T)$.*

Definición 4. *Decimos que un juego cooperativo es superaditivo si al unirse dos coaliciones disjuntas, forman una coalición mayor cuya utilidad será superior o igual a la suma de los beneficios de las dos coaliciones originales por separado.*
Esto es, un juego (N, v) es superaditivo si verifica que, para todo $S, T \subseteq N$ tal que $S \cap T = \emptyset$:

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T).$$

Definición 5. *Definimos un juego convexo como aquel en el que dos coaliciones se unen para formar una mayor y obtener una utilidad superior o igual a la que obtendrían por separado menos la parte que comparten.*
Matemáticamente, $\forall S, T \subseteq N$:

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) - v(S \cap T).$$

Otra caracterización equivalente es:

Un juego es convexo $\Leftrightarrow v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T), \quad \forall i \in N, \forall S \subseteq T \subseteq N \backslash \{i\}$.

Ejemplo. *En ocasiones, varias empresas pequeñas se unen en una sola para poder obtener los privilegios de las grandes empresas. Esta nueva empresa tendrá una personalidad jurídica propia y, si alcanza un volumen de compra adecuado, se le llama un grupo de compra.*

Es favorecedor porque las pequeñas empresas al unirse en este proyecto no pierden su propia identidad y, por tanto, no pierden las ventajas de ser una pequeña empresa. Además,

[2] La cardinalidad la denotamos con la letra minúscula, en el caso de las coaliciones, decimos que S tiene $|S| = s$ jugadores.

este grupo puede ser tan sólo puntual, no es necesario que sea una operación duradera. Por ejemplo, pueden unirse para negociar con distribuidores mayoristas o para adquirir mercancías.

Así pues, supongamos cuatro empresas que quieren formar un grupo de compra: La empresa 1 desea adquirir 600 unidades de un cierto bien de consumo, la empresa 2 quiere 500 unidades, la empresa 3 400 y la empresa 4 300 unidades.
Consideramos el precio de cada unidad de este bien de 1€ y que el distribuidor mayorista con el cual negocian ofrece unos descuentos en el precio final dependiendo de la cantidad que vayan a comprar, por ejemplo:
- de 0 a 499 unidades no hay descuento,
- de 500 a 999 unidades el descuento del 5 %,
- de 1000 a 1499 unidades el descuento del 10 %,
- de 1500 a 1999 unidades es del 20 %,
- de 2000 unidades en adelante hay un descuento del 30 %.

Es inmediato calcular el coste para cada empresa si deciden comprar todas las unidades que necesitan, teniendo en cuenta el descuento del mayorista: La empresa 1 pagará 570€, la empresa 2 475€, la empresa 3 400€ y la empresa 4 300€. En total, entre las cuatro empresas, el mayorista recibirá una cantidad de 1.745€ pero si esa cantidad la pagara una sola empresa, el mayorista cobraría 1.440€. Es decir, si formaran el grupo de compra las empresas saldrían beneficiadas pero ¿cuánto le corresponde pagar a cada una de los 1.440€?

Esta pregunta encuentra la respuesta en el estudio de la teoría de juegos cooperativos. En este caso, tenemos 4 jugadores y una asignación de costes que se describe mediante un juego cooperativo. Cada v(S) representa la cantidad que abona la coalición S al mayorista suponiendo que se suman las cantidades que requieren los integrantes de S y después se aplica el descuento ya que se considera que es un único pedido.

Así pues, la función característica es:

$v(1)= 570$	$v(13)= (600 + 400)\cdot 0{,}9= 900$	$v(123)= (600 + 500 + 400)\cdot 0{,}8= 1.200$
$v(2)= 475$	$v(14)= (600 + 300)\cdot 0{,}95= 855$	$v(124)= (600 + 500 + 300)\cdot 0{,}9= 1.260$
$v(3)= 400$	$v(23)= (500 + 400)\cdot 0{,}95= 855$	$v(134)= (600 + 400 + 300)\cdot 0{,}9= 1.170$
$v(4)= 300$	$v(24)= (500 + 300)\cdot 0{,}95= 760$	$v(234)= (500 + 400 + 300)\cdot 0{,}9= 1.080$
$v(12)= (600 + 500)\cdot 0{,}9= 990$	$v(34)= (400 + 300)\cdot 0{,}95= 665$	$v(1234)= (600 + 500 + 400 + 300)\cdot 0{,}8= 1.440$

2.2. El Core

El concepto de Core o Núcleo fue introducido por *Gillies* en 1953 [2]. Se considera una de las soluciones más importantes dentro de los juegos cooperativos ya que limita el conjunto de posibles soluciones a un conjunto de vectores de pago con unas determinadas restricciones.

Del conjunto de preimputaciones, se extraen unos vectores de pago que los jugadores estén dispuestos a aceptar, es decir, que sean eficientes. Si a estos vectores les exigimos que también cumplan el principio de racionalidad individual, entonces hablamos de extraer un subconjunto de vectores del conjunto de imputaciones. Y, además, si extendemos el concepto de principio de racionalidad individual al principio de racionalidad coalicional[3],

[3]Para todo $S \subset N$, $x(S) = \sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$.

obtenemos el Core.

Definición 6. *Dado $v \in G^N$, se denota el núcleo de v como $C(v)$ y se define, en el caso de beneficios de la siguiente manera:*

$$Core(N, v) = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^N \text{ tal que } x(N) = v(N) \quad y \quad v(S) \leq x(S)\},$$

para todo $S \subset N$ con $S \neq \emptyset$.

Si estamos hablando de un problema de costes, entonces se define como:

$$Core(N, v) = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^N \text{ tal que } x(N) = v(N) \quad y \quad v(S) \geq x(S)\}.$$

Se deduce de la definición que ninguna coalición tiene alicientes para oponerse al pago, dado que el núcleo asegura que cada una de ellas obtendrá un vector de pagos que, como mínimo, iguala la utilidad que cada coalición tiene por sí misma. Es decir, el Core tiene la propiedad de la estabilidad: ningún jugador o coalición gana más si se sale de la gran coalición.

Es posible que el Core sea un conjunto vacío, en este caso, no existen soluciones racionales para todas las coaliciones. En caso contrario, puede ser un espacio de un punto, o de infinitos. En este caso, la dificultad se haya en decidir cual de sus vectores de pagos elegir.

En relación con el caso del Core no vacío, decimos que una familia de coaliciones $F \subset 2^N \backslash \{\emptyset\}$ es equilibrada si existen números positivos $\{\alpha_S$ tal que $S \in F\}$, llamados pesos, tales que, para cada $i \in N$, $\sum_{S \in F, i \in S} \alpha_S = 1$.

Decimos que un juego $v \in G^N$ está equilibrado si, para cada familia equilibrada F, con coeficientes de equilibrio $\{\alpha_S$ tal que $S \in F\}$,

$$\sum_{S \in F} \alpha_S v(S) \leq v(N).$$

Interpretamos los coeficientes de equilibrio α_S como el tiempo que los jugadores en S están dedicando a S. Para que se cumpla la condición de equilibrio, los jugadores deben tener una unidad de tiempo para repartir entre las diferentes coaliciones en F.

Por tanto, para que un juego TU sea equilibrado, el valor de las diferentes coaliciones de N tienen que ser relativamente pequeñas en comparación con el valor de la gran coalición.

Teorema 1 (Teorema de Bondareva-Shapley)**.** *Sea $v \in G^N$. Entonces, $C(v) \neq \emptyset$ si y solo si v está equilibrado.*

El teorema de Bondareva-Shapley generalmente se demuestra mediante técnicas de dualidad en programación lineal[4], las cuales aprovechan la definición del núcleo en términos de desigualdades lineales.

[4]El concepto de dualidad indica que para cada problema de programación lineal, llamado primal, existe una asociación con otro problema de programación lineal, llamado dual

Recientemente, se demostró el teorema de dos maneras más[5], estas pruebas se basan en métodos elementales de punto fijo.

Para profundizar más en esta demostración ver "Fixed Point Approaches to the Proof of the Bondareva-Shapley" [13].

Teorema 2. *El Core es un conjunto compacto y convexo.*

Demostración. De la definición de Core vemos que los vectores de pago están en el hiperplano de las preeimputaciones y en un conjunto de semiespacios cerrados, por lo que, siendo una intersección finita de espacios cerrados, es cerrado.

Por otro lado, si $x \in C(v), \forall i \in N$, se cumple que:

$$v(i) \leq x_i = \sum_{i \in N} x_i - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j \leq v(N) - v(N \setminus \{i\}).$$

Lo que demuestra que $C(v)$ es acotado. Como es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ cerrado y acotado, por el teorema de Heine-Borel[6], también es compacto.

Ahora vemos que es convexo: Tomamos $x, y \in C(v)$ y $\lambda \in [0,1]$,

$$(\lambda x + (1-\lambda)y)(N) = \sum_{i \in N} (\lambda x_i + (1-\lambda)y_i) = \lambda v(N) + (1-\lambda)v(N) = v(N).$$

Y para cada coalición $S \subseteq N$,

$$(\lambda x + (1-\lambda)y)(S) = \sum_{i \in S} (\lambda x_i + (1-\lambda)y_i) = \lambda \sum_{i \in S} x_i + (1-\lambda) \sum_{i \in S} y_i \geq \lambda v(S) + (1-\lambda)v(S) = v(S).$$

Por lo tanto, $\lambda x + (1-\lambda)y \in C(v)$ lo que demuestra que $C(v)$ es convexo. □

Ejemplo. *Continuando con el ejemplo del Grupo de compra, mediante el paquete CoopGame del programa R, calculamos el Core.*

> characteristic_function<-c(570, 475, 400, 300, 990, 900, 855, 855, 760, 665, 1200, 1260, 1170, 1080, 1440)
> coreVertices(characteristic_function)
[,1] [,2] [,3] [,4]

Lo que quiere decir que el Core es vacío.
De hecho, en este ejemplo, incluso el conjunto de imputaciones es vacío:
> characteristic_function<-c(570, 475, 400, 300, 990, 900, 855, 855, 760, 665, 1200, + 1260, 1170, 1080, 1440)
> imputationsetVertices(characteristic_function)
[1] "The imputation set is empty"
[,1] [,2] [,3] [,4]

[5]Se puede ver en "Some applications of linear programming methods to the theory of cooperative games" [6]

[6]Un subespacio K de $\mathbb{R}^n$ es compacto si, y solo si, es cerrado y acotado.

2.3. El Nucleolus

El Nucleolus o nucleolo es un concepto introducido en 1969 por *Schmeidler* [22]. Es una solución que tiene en cuenta los posibles excesos o quejas de las coaliciones respecto a los pagos. Se busca un reparto justo en el que la coalición que resulte más desfavorecida del reparto, esté lo menos perjudicada posible.

Definiciones previas:
Dado $v \in G^N$ y $x \in \mathbb{R}^N$, para cada coalición $S \subset N$, se define el exceso de valor de la coalición S respecto a x como:

$$e(S,x) := v(S) - \sum_{i \in S} x_i.$$

Intuitivamente vemos que, cuanto más aumente $e(S,x)$, más insatisfechos estarán los jugadores de S frente a x.

Por otro lado, definimos el vector de excesos, $\theta(x)$, como el vector cuyas componentes son los excesos de las coaliciones ordenados de forma no creciente:

$$\theta(x) = (e(S_1,x),\dots,e(S_{2^N},x)) \in \mathbb{R}^{2^N}.$$

Sean $x,y \in I(v)$, y sea $\theta(x) = (e(S_1^x,x),\dots,e(S_{2^N}^x,x))$ y $\theta(y) = (e(S_1^y,y),\dots,e(S_{2^N}^y,y))$ dos vectores de excesos, decimos que $\theta(x)$ precede a $\theta(y)$ en el orden lexicográfico, denotado por $\prec_L$, si:
$\exists j > 1$ tal que $\forall 1 \leq i < j$:

$$e(S_j^x,x) < e(S_j^y,y) \ \ \wedge \ \ e(S_i^x,x) = e(S_i^y,y).$$

Por tanto, para comparar dos vectores de excesos según su orden lexicográfico, se miran las dos primeras componentes; si la primera componente de un vector es menor que la del otro vector, entonces el primer vector es menor que el segundo según el orden lexicográfico definido. Si los dos vectores tienen iguales sus primeras componentes, se comparan sus segundas componentes, y así sucesivamente.

Definición 7. *Sea $\theta(x)$ y $\theta(y)$ los repartos de excesos de valor respecto a x y y, repectivamente, y $\prec_L$ el orden lexicográfico en $\mathbb{R}^{2^N}$. Entonces, definimos el nucleolo de un juego (N,v) como el siguiente conjunto:*

$$\eta(v) = \{x \in I(v) \text{ tal que } \theta(x) \prec_L \theta(y)\}, \quad \forall y \in I(v).$$

Lema. *Sea $v \in G^N$ y sea $x,y \in \mathbb{R}^N$ tal que $x \neq y$ y $\theta(x) = \theta(y)$. Sea $\alpha \in (0,1)$, entonces $\theta(x) \succ_L \theta(\alpha x + (1-\alpha)y)$.*

Demostración. Por un lado, por definición de excesos, para cada $S \subset N$, $e(S, \alpha x + (1-\alpha)y) = \alpha(v(S) - \sum_{i \in S} x_i) + (1-\alpha)(v(S) - \sum_{i \in S} y_i) = \alpha e(S,x) + (1-\alpha)e(S,y)$.

Por otro lado, sea $S_1,\dots,S_{2^n}$ una permutación de todas las coaliciones, consideramos $\theta(x) = (e(S_1,x),\dots,e(S_{2^n},x))$, definida como:
Para cada $k \in \{1,\dots,2^n-1\}$,

- $e(S_k, x) \geq e(S_{k+1}, x)$, y
- Si $e(S_k, x) = e(S_{k+1}, x)$ entonces $e(S_k, y) \geq e(S_{k+1}, y)$.

Dado que $x \neq y$, hay un $S \subset N$ tal que $e(S, x) \neq e(S, y)$. Sea k el menor índice que cumple $e(S_k, x) \neq e(S_k, y)$. Entonces, para cada $t \in \{1, \ldots, k-1\}$, se tiene $e(S_t, \alpha x + (1-\alpha)y) = e(S_t, x)$ pero como $\theta(x) = \theta(y)$ tiene que ser $e(S_k, y) < e(S_k, x)$.

Además, la elección del orden $S_1, \ldots, S_{2^n}$ asegura que, para cada $t > k$ tal que $e(S_t, x) = e(S_k, x)$, tenemos $e(S_t, y) \leq e(S_k, y) < e(S_k, x)$. Por lo tanto, para cada $t > k$, tenemos una de estas dos opciones:
i) $e(S_t, x) = e(S_k, x)$ y $e(S_t, y) < e(S_k, x)$.
ii) $e(S_t, x) < e(S_k, x)$ y $e(S_t, y) \leq e(S_k, x)$.
Entonces, para cada $t \geq k$,

$$e(S_t, \alpha x + (1-\alpha)y) = \alpha e(S_t, x) + (1-\alpha)e(S_t, y) < e(S_k, x).$$

Por tanto, para cada $t \in \{1, \ldots, k-1\}$, $\theta_t(x) = \theta_t(\alpha x + (1-\alpha)y)$ y para cada $t \geq k$, $\theta_t(x) > \theta_k(\alpha x + (1-\alpha)y)$. Y esto da $\theta(x) \succ_L \theta(\alpha x + (1-\alpha)y)$. $\square$

Teorema 3. *Sea $v \in G^N$ un juego esencial, es decir, un juego tal que $I(v) \neq \emptyset$, entonces $\eta(v)$ contiene una asignación única.*

Demostración. Sea $I^0 := I(v)$. Para cada $k \in \{1, \ldots, 2^n\}$, definimos el conjunto

$$I^k := \{x \in I^{k-1} \text{ tal que para cada } y \in I^{k-1}, \theta_k(x) \leq \theta_k(y)\}$$

Para cada $k \in \{1, \ldots, 2^n\}$, la función que asigna a cada $x \in I(v)$ la coordenada k-ésima de $\theta(x)$ es continua. Por lo tanto, dado que $I(v)$ es un conjunto compacto no vacío, I^1 también es compacto y no vacío, igual que todos los conjuntos I^k.

Afirmamos que $\eta(v) = I^{2^n}$. Sea $x \in I^{2^n}$ y $y \in I(v)$. Si $y \in I^{2^n}$, entonces $\theta(x) = \theta(y)$ y, por lo tanto, $\theta(y) \succ_L \theta(x)$. Así pues, suponemos que $y \in I(v) \backslash I^{2^n}$.

Sea k el índice más pequeño tal que $y \notin I^k$, entonces, $\theta_k(y) > \theta_k(x)$ ya que $x, y \in I^{k-1}$, para cada $l \in \{1, \ldots, k-1\}$, $\theta_l(x) = \theta_l(y)$ ya que $\theta(y) \succ_L \theta(y)$. Por lo tanto, hemos demostrado que $\eta(v)$ es un conjunto no vacío.

Ahora vemos que $\eta(v)$ es un punto. Supongamos que no lo es y lleguemos a una contradicción.

Sea $x, y \in \eta(v)$, con $x \neq y$. Entonces, $\theta(x) = \theta(y)$. Como $I(v)$ es un conjunto convexo, para cada $\alpha \in (0,1)$, $\alpha x + (1-\alpha)y \in I(v)$. Entonces, por el teorema anterior, $\theta(x) \succ_L \theta(\alpha x + (1-\alpha)y)$, lo que contradice que $x \in \eta(v)$. $\square$

Es decir, el nucleolo es una regla que toma una solución incluida dentro del Core (siempre que no sea vacío) y se reduce a un único vector de pagos[7]. Este punto, el nucleolo, contiene aquellos pagos que son imputaciones y minimiza la insatisfacción de las coaliciones.

[7]Ver: An introductory course on mathematical game theory [12].

Ejemplo. *De la misma manera que con el Core, utilizando R intentamos calcular el nucleolo del ejemplo explicado pero como hemos visto que el Core y el conjunto de imputaciones es vacío, nos debería salir que el nucleolo no existe.*

```
> characteristic_function<-c(570, 475, 400, 300, 990, 900, 855, 855, 760, 665, 1200,
1260, 1170, 1080, 1440)
> nucleolus(characteristic_function)
    [1] "Solution concept is only provided for games with a nonempty imputation set."
    NULL
```

Efectivamente, esto es debido a que no estamos tratando con un juego esencial. Podemos comprobar de donde aparece el mensaje de la consola con este fragmento de código del comando "nucleolus":

```
...
logicNucleolusDerivatives<-function(A, ER, FR, isImput, isNType){
  retVal = NULL
  N <- length(A)
  n <- getNumberOfPlayers(A)
  hasConverged = FALSE

  if (isDegenerateGame(A) && isImput){
  retVal = A[1:n]
  hasConverged = TRUE
  }

  if ((!(isDegenerateGame(A))) && (!(isEssentialGame(A))) && isImput){
  print("Solution concept is only provided for games with a nonempty imputation set.")
  retVal = NULL
  hasConverged = TRUE
  }
...
}
```

2.4. El valor de Shapley

El valor de Shapley es el concepto de solución más utilizado dentro de los juegos TU. Este concepto surge de la cuestión: dada una función característica de un juego, ¿Cuál es el valor del mismo para un jugador individual?

Dar soluciones axiomáticas o valores es definir operadores $\phi : (N, v) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que en mayor o menor medida resuelven todos los juegos, pero el objetivo de Shapley era demostrar que existe un único operador "bueno".

Así pues, el valor de Shapley es un reparto de pagos único que cumple una serie de axiomas previamente establecidos. Shapley determinó que existe un único valor que asigna un vector de pagos eficiente a cada juego. Además, asigna el mismo pago a jugadores simétricos, un pago nulo a jugadores irrelevantes y cumple que, dado dos juegos v y w, los pagos del juego suma[8] coinciden con la suma de pagos de los juegos.

Cabe destacar que el valor de Shapley, a diferencia del nucleolo, es un concepto de solución independiente al Core ya que no es necesario que se cumpla el principio de racionalidad coalicional. Sin embargo, para los juegos convexos, el valor de Shapley sí pertenece al Core del juego.

Definición 8. *Sea $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$, el valor de Shapley para $i = 1, \dots, n$, se define como*

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} [v(S \cup \{i\}) - v(S)].$$

Así pues, Shapley en 1953 determinó que, dado un juego (N, v) en forma coalicional, con $N = \{1, \dots, n\}$, se tiene una asignación de pagos $\phi(v) = (\phi_1(v), \dots, \phi_n(v)) \in \mathbb{R}^n$ donde cada ϕ_i es tal y como hemos definido antes.

El valor de Shapley se puede interpretar como la contribución esperada de cada jugador al entrar en una coalición. Así pues, el factor $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ es la contribución marginal efectiva de un jugador i al incorporarse a $v(S \cup \{i\})$, mientras que el resto de la ecuación, a la que llamaremos $q(S)$, es la probabilidad de que al jugador i le toque incorporarse a $v(S \cup \{i\})$ y no a cualquier otra coalición. El factor $q(S)$ es definido bajo la suposición de que un jugador se unirá a una coalición de tamaño s, siendo los tamaños de las coaliciones equiprobables, y una vez fijado el tamaño, el jugador se unirá a una coalición determinada de ese tamaño también de manera equiprobable.

A continuación, necesitamos dos definiciones para seguir con una caracterización importante del valor de Shapley:
Dado un juego $v \in G^N$,
- Se dice que un jugador $i \in N$ es irrelevante o un jugador pasivo si no aporta nada a ninguna coalición, esto es, para todo $S \subseteq N \setminus \{i\}$:

$$v(S \cup \{i\}) = v(S).$$

- Se dice que dos jugadores son simétricos si hacen las mismas aportaciones a cualquier coalición, es decir, para todo $S \subseteq N \setminus \{i, j\}$:

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}).$$

Ahora bien, el valor de Shapley se caracteriza por los siguientes axiomas:
- Axioma 1: Eficiencia. La solución ϕ es eficiente, es decir, la función asignada distribuye todo el pago del juego:

$$\sum_{i \in N} \phi_i(v) = v(N).$$

- Axioma 2: Simetría. Si los jugadores i, j son simétricos, y por tanto, aportan lo mismo a cada coalición, entonces deben recibir el mismo pago:

$$\phi_i(v) = \phi_j(v).$$

[8] Definición del juego suma: $(v + w)(S) = v(S) + w(S)$

- Axioma 3: Jugador pasivo. Si un jugador i es pasivo y no aporta nada al resto de jugadores, entonces su pago es nulo:

$$\phi_i(v) = 0.$$

- Axioma 4: Aditividad. La función de asignación debe ser invariante a cualquier descomposición arbitraria del juego. Por tanto, si el juego se descompone en suma de dos, los jugadores recibirán una suma de los pagos:

$$\phi(v + w) = \phi(v) + \phi(w).$$

Definición 9. *Sea $v \in G^N$ un juego TU y $\pi \in \Pi(N)$, donde $\pi = (i_1, \ldots, i_n)$ es una ordenación del conjunto de jugadores y $\Pi(N)$ es el conjunto de todas las permutaciones de los elementos de N. Se define el vector de contribuciones marginales asociadas con π, $m^\pi(v) \in \mathbb{R}^N$, como*

$$m_i^\pi(v) := v(P^\pi(i) \cup \{i\}) - v(P^\pi(i)),$$

para cada $i \in N$ y donde $P^\pi(i)$ denota el conjunto de jugadores predecesores de i bajo el orden dado por π, es decir, $j \in P^\pi(i) \iff \pi(j) < \pi(i)$.

La envolvente convexa[9] del conjunto de vectores de contribuciones marginales se conoce comúnmente como el conjunto de Weber.

El conjunto de Weber tiene las siguientes propiedades: es cerrado, acotado, no es vacío, es convexo y contiene el núcleo. Además si el juego es convexo, el conjunto de Weber coincide con el Core.

Por otro lado, se deduce que la fórmula del valor de Shapley es equivalente a

$$\phi_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi(N)} m_i^\pi(v).$$

Teorema 4 (Shapley, 1971)**.** *Todo juego convexo tiene núcleo no vacío y $\phi(v) \in C(v)$.*

Demostración. Solo veremos la idea principal para demostrar el teorema, la demostración completa se puede ver en "Shapley, 1971" [23].
Para $v \in G$ convexo y toda permutación $\sigma \in S_n$ el pago marginal $m^\sigma(v)$, cuyas coordenadas son

$$m^\sigma = v(\sigma(1), \ldots, \sigma(i)) - v(\sigma(1), \ldots, \sigma(i-1))$$

está en $C(v)$, por lo tanto, $C(v) \neq \emptyset$.
Además, como hemos visto de Shapley satisface $\phi(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} m^\sigma(v)$ que, conjuntamente, por la convexidad del núcleo, tenemos que $\phi(v) \in C(v)$. □

Definición 10. *Dentro de la clase de G^N, dado $S \subset N$, se define el juego de unanimidad de la coalición S, w^S, como: Para cada $T \subset N$,*

$$v(T) = \begin{cases} 1 & \textit{si } S \subset T, \\ 0 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

[9]La envolvente convexa de un conjunto dado es el conjunto convexo más pequeño que lo contiene

Estos juegos de unanimidad cumplen dos características importantes:
- Los juegos de unanimidad $U(N) := \{w^S : S \in 2^N \backslash \{\emptyset\}\}$ son un base del espacio vectorial G^N.

Para demostrarlo, tenemos que ver que $U(N)$ es un conjunto de vectores independientes.

Sea $\{\alpha_S\}_{S \in 2^N \backslash \{\emptyset\}} \subset \mathbb{R}$ tal que $\sum_{S \in 2^N \backslash \{\emptyset\}} \alpha_S w^S = 0$ y supongamos que hay un $T \in 2^N \backslash \{\emptyset\}$ con $\alpha_T \neq 0$.

Asumimos, sin pérdida de generalidad, que no hay un $T' \subsetneq T$ tal que $\alpha_{T'} \neq 0$. Entonces, $0 = \sum_{S \in 2^N \backslash \{\emptyset\}} \alpha_S w^S(T) = \alpha_T \neq 0$ con lo que llegamos a una contradicción. Por lo tanto, $U(N)$ es una base.

- Dado un juego (N, v), las coordenadas de v en la base de los juegos de unanimidad vienen determinadas por

$$\alpha_T = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} (-1)^{t-s} v(S), \text{ con } \emptyset \neq T \subseteq N.$$

- Dadas las coordenadas de un juego, $v(S) = \sum_{T \subseteq N} \alpha_T w^T(S)$.

Las demostraciones se encuentran en "Jocs cooperatius i aplicacions econòmiques"[15].

Teorema 5 (Shapley, 1953 [24]). *Existe una única asignación que verifique todos estos axiomas y es el valor de Shapley.*

Demostración. Primero vemos que el valor de Shapley cumple los 4 axiomas:
- Es obvio que ϕ satisface Jugador pasivo ya que si i es un jugador pasivo, $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ y entonces $\phi_i(v) = 0$.
- Respecto a la Simetría también es claro que se cumple porque si i y j son jugadores simétricos, $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$, y entonces, $\phi_i(v) = \phi_j(v)$.
- Por otro lado, el valor de Shapley cumple la Aditividad: Si consideramos el juego $(N, v) = (N, v_1 + v_2)$, para cada $i \in N$ y $S \subseteq N \backslash \{i\}$, tenemos que $v(S \cup \{i\}) - v(S) = (v_1(S \cup \{i\}) - v_1(S)) + (v_2(S \cup \{i\}) - v_2(S))$. Si lo sustituimos en la definición del valor de Shapley obtenemos $\phi_i(v) = \phi_i(v_1) + \phi_i(v_2)$.
- Y, por último, es eficiente dado que el valor de Shapley es la media de los vectores de contribuciones marginales y éstos son eficientes ya que $m_i^\pi(v)(N) = \sum_{j-1}^n m_{i_j}^\pi(v) = v(N)$.

A continuación, tenemos que ver que el valor de Shapley es la única solución que los cumple. Sabemos que un juego cooperativo se puede descomponer de manera única como $v = \sum_{\emptyset \neq S \subset N} \alpha_S w^S$. Por lo tanto, tenemos que ver que si una solución que cumple los 4 axiomas está determinada de manera única, como hemos visto que el valor de Shapley los cumple, habremos acabado.

Sea φ una regla de asignación que satisfaga los 4 axiomas.
- Aditividad: Por la definición anterior de v tenemos que:

$$\varphi(N, v) = \varphi(N, \sum_{\emptyset \neq S \subset N} \alpha_S w^S) = \sum_{\emptyset \neq S \subset N} \varphi(N, \alpha_S w^S).$$

- Simetría: Si i y j son jugadores simétricos en la coalición S, $\forall T \subseteq N\backslash\{i,j\}$,

$$(\alpha_S w^S)(T \cup \{i\}) = v(T \cup \{j\}) \text{ y, por lo tanto, } \varphi_i(N, \alpha_S w^S) = \varphi_j(N, \alpha_S w^S).$$

- Jugador pasivo: Si i es un jugador pasivo, $i \notin S$ y $T \subseteq N\backslash\{i\}$ entonces,

$$(\alpha_S w^S)(T \cup \{i\}) = (\alpha_S w^S)(T) \text{ implica que } \varphi_i(N, \alpha_S w^S) = 0.$$

- Eficiencia: $(\alpha_S w^S)(N) = \alpha_S$ determina φ de manera única:

$$\varphi_i(\alpha_S w^S) = \begin{cases} \frac{\alpha_S}{|S|} & i \in S, \\ \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por lo tanto, esta solución reparte por igual a los agentes que están en la coalición S y 0 a los que no. Así pues, podemos simplificarla de la siguiente manera:

$$\varphi_i(N, v) = \sum_{S \subseteq N \mid i \in S} \frac{\alpha_S}{|S|}.$$

Entonces, φ está unívocamente determinada y, en definitiva, hemos visto que el valor de Shapley es la única solución que satisface los 4 axiomas. □

Ejemplo. *En el ejemplo tratado tenemos que el núcleo es vacío pero aún cuando éste no es vacío, no necesariamente contiene el valor de Shapley.*
Lo calculamos mediante el comando de R:

```
> characteristic_function<-c(570, 475, 400, 300, 990, 900, 855, 855, 760, 665, 1200,
1260, 1170, 1080, 1440)
> Shapley_value(characteristic_function)
        [1] "Shapley Value"
           1          2        3       4
    475.8333   390.8333      305  268.3333
```

Capítulo III

Problemas de bancarrota

Un problema de bancarrota es un ejemplo muy habitual de una situación real que demuestra como la teoría de juegos de utilidad transferible afronta y da solución a un conflicto de intereses que se resuelve mediante la cooperación de los implicados.

Tiene una naturaleza cotidiana, aparecen en casi todos los ámbitos y afectan a cualquiera, ya sean personas, empresas o instituciones.

El problema de bancarrota tiene su origen en que un conjunto de agentes reclaman un bien infinitamente divisible (*Estate*) del que se dispone una cantidad inferior al total de las reclamaciones o demandas efectuadas (*Claims*). El reparto debe tener dos características: Primero, los jugadores no deben recibir más de su reclamación, ni menos de cero. Segundo, se debe repartir toda la cantidad disponible.

Un problema de bancarrota se puede enfocar de dos maneras:

1) A través de un enfoque de distribución en el cual se intenta repartir todo lo que hay, es decir, el *Estate*.

2) Mediante un enfoque de racionalización, en el cual se quiere repartir la *Claim* a cada jugador y como esto excede el *Estate*, se reparte el valor conocido como pérdidas agregadas.

A continuación, citamos algunos problemas de bancarrota:

- Empresas en quiebra: Es el caso más típico y el más conocido. Se plantea cuando se debe repartir un capital del que dispone una empresa entre los N acreedores de ésta. El problema se haya en que la suma de las cantidades demandadas por los acreedores es superior que la cantidad disponible en dicha empresa.

Existe una infinitud de causas por las que una empresa puede tener un problema de bancarrota: una mala gestión o planificación de la empresa, falta de motivación de los trabajadores, insuficiencia de capital o reservas, improductividad, etc.

De la misma manera, puede haber un problema de bancarrota cuando una empresa está en concurso de acreedores (no puede hacer frente a la totalidad de los pagos que debe).

- Reparto presupuestario: Cuando la recaudación del Estado disminuye, por ejemplo, por una recesión económica, los presupuestos se reducen. Por tanto, se lleva a cabo un reparto de pérdidas entre sus distintos organismos.

- Herencias: Supuesto en el que un hombre fallece y la cantidad de bienes a repartir entre sus herederos legítimos es inferior a la cuantía de la suma de las reclamaciones de estos.

Formalmente, se define un problema de bancarrota como un par (E, c) en $\mathbb{R}_+^{n+1}$ que tiene la propiedad de que $\sum_{i \in N} c_i > E$.

Gráficamente, un problema de bancarrota se compone de dos elementos: Un conjunto factible en el cuadrante positivo del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, definido como $\{x \in \mathbb{R}_+^n | \sum_{i=1}^n x_i = E\}$. Y un punto c también de $\mathbb{R}_+^n$ pero que no pertenece al conjunto factible.

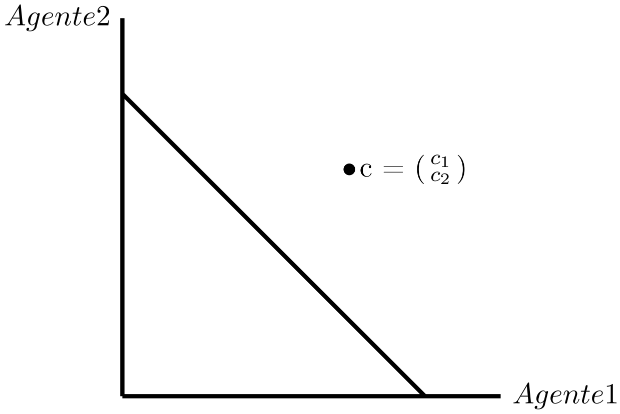

Figura 1: Problema de bancarrota con 2 jugadores.

3.1. Juegos de bancarrota

Para cada problema de bancarrota (E, c), se puede definir un juego cooperativo (N, v). Los jugadores del juego de bancarrota serán los demandantes del problema de bancarrota. El valor de la coalición S en el juego se define como la parte que sobra de haber repartido E entre los agentes que no forman parte de S, es decir, entre $N \backslash S$.

Denotamos $c(S)$ a la suma de las reclamaciones de todos los agentes que forman parte de la coalición, y $c(N \backslash S)$ a la suma de las reclamaciones de todos los agentes que no forman parte de S.

Por tanto, S recibe $E - c(N \backslash S)$. En el caso de que no sobre nada, dando a $N \backslash S$ todo lo que demanda, a S se le asigna 0, ya que el pago de cada agente no puede ser negativo. *O'Neill* (1982) formalizó este concepto en la siguiente definición:

Definición 11. *Dado un problema de bancarrota (E, c), se define el juego de bancarrota $(N, v_{(E,c)})$ asociado a dicho problema como:*

$$v_{(E,c)}(S) = \max\{E - c(N \backslash S), 0\},$$

para todo $S \subset N$.

El juego de bancarrota asigna a cada S la cantidad de E que no reclaman los jugadores que no pertenecen a dicha coalición, y por tanto, se dice que esta definición es pesimista para los agentes. Una definición de juego de bancarrota optimista sería

$$v_{(E,c)}(S) = \text{mín}\{E, c(S)\},$$

para todo $S \subset N$.

La solución a un problema de bancarrota es una regla de reparto, determinada por una función R que asocia un vector $R(E,c) \in \mathbb{R}^N$ a cada par (E,c), donde cada componente $R_i(E,c)$ asigna lo que recibirá el jugador i. Este vector cumple las siguientes propiedades:

1) La cantidad que se asigna a cada jugador debe ser positiva y menor a lo que demanda. Esto es:

$$0 \leq R_i(E,c) \leq c_i.$$

2) Propiedad de eficiencia: La suma de todas las asignaciones es igual a la cantidad del bien a repartir, i.e.,

$$\sum_{i \in N} R_i(E,c) = E.$$

3.1.1. *Propiedades*

1) El juego $v_{(E,c)}$ es monótono, esto es, para todo $T \subseteq S \subseteq N$, $v_{(E,c)}(T) \leq v_{(E,c)}(S)$.

Veámoslo. Sabemos, por definición que, $v_{(E,c)}(T) = \text{máx}\{E - c(N \backslash T), 0\} = \text{máx}\{E - \sum_{j \in N \backslash T} c_j, 0\}$ y $v_{(E,c)}(S) = \text{máx}\{E - c(N \backslash S), 0\} = \text{máx}\{E - \sum_{j \in N \backslash S} c_j, 0\}$.

Así pues, si $T \subseteq S \subseteq N$, tenemos que $\sum_{j \in N \backslash T} c_j \leq \sum_{j \in N \backslash S} c_j$ y, por lo tanto, $E - \sum_{j \in N \backslash T} c_j \leq E - \sum_{j \in N \backslash S} c_j$.

Entonces, existen dos alternativas:
i) Si $E > \sum_{j \in N \backslash T} c_j$ tenemos que, $v_{(E,c)}(T) = E - \sum_{j \in N \backslash T} c_j \leq E - \sum_{j \in N \backslash S} c_j = v_{(E,c)}(S)$.
ii) Si $E \leq \sum_{j \in N \backslash T} c_j$ tenemos que, $v_{(E,c)}(T) = v_{(E,c)}(S) = 0$.

En ambos casos llegamos a la conclusión de que $v_{(E,c)}(T) \leq v_{(E,c)}(S)$.

Para explicar una propiedad, necesitamos la siguiente definición:
Sea v un juego, decimos que las contribuciones marginales aumentan si para cada $S \subseteq N$ y jugadores $i, j \in N \setminus S$, se cumple:

$$v(S \cup \{i,j\}) - v(S \cup \{i\}) \geq v(S \cup \{i\}) - v(S).$$

Así pues, una propiedad de los juegos de bancarrota es:
2) Sea (E,c) un problema de bancarrota con al menos 3 jugadores y sea $v_{(E,c)}$ el juego de bancarrota asociado. Entonces las contribuciones marginales no aumentan.

Para comprobarlo, suponemos, sin pérdida de generalidad, que $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_n$ y consideramos k el mayor índice que cumple: $c_1 + c_2 + \ldots + c_k \leq E \leq c_1 + c_2 + \ldots + c_{k+1}$.

Sean $T \subseteq R \subseteq S$, coaliciones definidas por $T = \{1, \ldots, k-1\}$, $R = \{1, \ldots, k\} = T \cup \{k\}$ y $S\{1, \ldots, k+1\} = R \cup \{k+1\}$.
Por la propiedad anterior tenemos que, $v_{(E,c)}(T) \leq v_{(E,c)}(R) \leq v_{(E,c)}(S)$ y, por lo tanto, $v_{(E,c)}(T \cup \{k\}) - v_{(E,c)}(T) = c_k$ y $v_{(E,c)}(T \cup \{k, k+1\}) - v_{(E,c)}(T \cup \{k\}) = c_{k-1}$.

Como $c_{k-1} < c_k$, llegamos a la conclusión de que las contribuciones marginales no aumentan para el juego $v_{(E,c)}$.

Para demostrar la propiedad siguiente necesitamos una definición y un teorema previos:

Definición 12. *Se define el cubrimiento del núcleo de un juego v, CC, como:*

$CC(v_{(E,c)}) := \{x \in \mathbb{R}^N$ *tal que* $x(N) = E, \text{máx}\{E - C(N \backslash \{i\}), 0\} \leq x_i \leq \text{mín}\{E, c_i\}, \forall i \in N\}$.

Teorema 6. *Sea $v_{(E,c)}$ un juego de bancarrota y v un juego tal que $0 \leq v \leq v_{(E,c)}$ y $v(S) = v_{(E,c)}(S)$ si $|S| \in \{0, n-1, n\}$. Entonces, $C(v) = CC(v)$.*

Se puede encontrar la demostración en "Curiel, Maschler y Tijs, 1987" [8].

3) Toda solución de bancarrota está contenida en el núcleo de un juego cooperativo asociado.

Ahora sí podemos comprobarlo: Tomamos $v = v_{(E,c)}$ y entonces, aplicando el Teorema anterior, $C(v_{(E,c)}) = CC(v_{(E,c)})$.
Por otro lado, de la expresión alternativa de CC, tenemos que los vectores de $CC(v_{(E,c)})$ son solución de bancarrota puesto que cumplen:
- $x(N) = E$ por definición de cubrimiento del núcleo.
- $0 \leq x_i$ dado que $\text{máx}\{E - c(N \backslash \{i\}), 0\} \leq x_i$.
- $x_i \leq c_i$ ya que $x_i \leq \text{mín}\{E, c_i\}$.

Por lo tanto, como estos vectores pertenecen a CC y son solución de bancarrota, queda demostrada la propiedad.

Teorema 7 (Curiel, Maschler y Tijs, 1987 [8])**.** *Todo juego de bancarrota $v_{(E,c)}$ es convexo.*

Demostración. Dado un problema de bancarrota (E, c) y $v_{(E,c)}$ su respectivo juego de bancarrota. Sea $i \in N$, $T \subset S \subset N \backslash \{i\}$ y $C = c(N)$ la suma de todas las demandas, entonces:

$$\begin{aligned} v_{(E,c)}(S \cup \{i\}) + v_{(E,c)}(T) &= \text{máx}\{E - C + c(S) + c_i, 0\} + \text{máx}\{E - C + c(T), 0\} \\ &= \text{máx}\{2(E - C) + c(S) + c(T) + c_i, E - C + c(S) + c_i, E - C + c(T), 0\}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} v_{(E,c)}(T \cup \{i\}) + v_{(E,c)}(S) &= \text{máx}\{E - C + c(T) + c_i, 0\} + \text{máx}\{E - C + c(S), 0\} \\ &= \text{máx}\{2(E - C) + c(S) + c(T) + c_i, E - C + c(T) + c_i, E - C + c(S), 0\}. \end{aligned}$$

Y como $c(S) \geq c(T)$ tenemos que $E - C + c(T) + c_i \leq E - C + c(S) + c_i$.
Además, $c_i \geq 0 \Rightarrow E - C + c(S) \leq E - C + c(S) + c_i$.
Así pues, obtenemos que

$$v_{(E,c)}(S \cup \{i\}) + v_{(E,c)}(T) \geq v_{(E,c)}(T \cup \{i\}) + v_{(E,c)}(S).$$

$\square$

Capítulo IV

Reglas de bancarrota

Una regla de bancarrota es un método para solucionar un problema de bancarrota. En este apartado vamos a estudiar teóricamente 5 reglas clásicas y las aplicaremos al caso práctico.

4.1. Regla proporcional

La regla proporcional reparte el *Estate* (E) entre los demandantes de forma proporcional a sus reclamaciones (c). Por lo tanto, cada participante obtendrá una fracción del *Estate* y esta será proporcional al peso de su demanda en relación con la totalidad de las demandas.

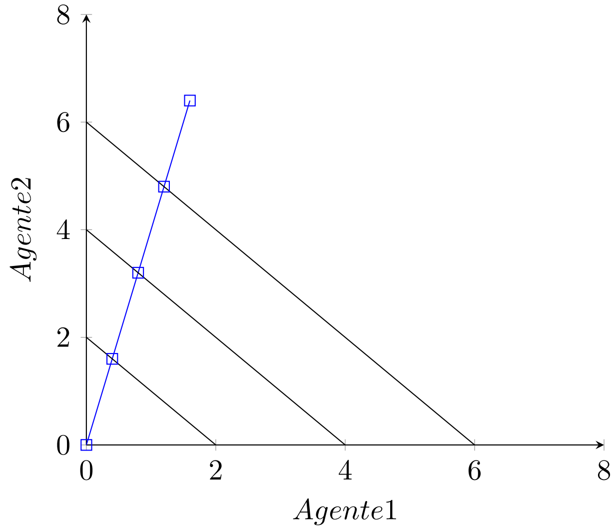

Figura 1: Regla proporcional.

Formalmente,

Definición 13. *Para cada* (E, c)*, la regla proporcional (P de Proportional), será:* $P(E, c) = E \cdot \frac{c}{C}$ *donde* C *es la demanda (Claim) total.*

4.2. Regla de las ganancias igualitarias

La regla de las ganancias igualitarias, o de las mismas ganancias, reparte el *Estate* de manera que a cada demandante le asigna la misma cantidad siempre y cuando ésta no supere la cuantía reclamada por el agente.

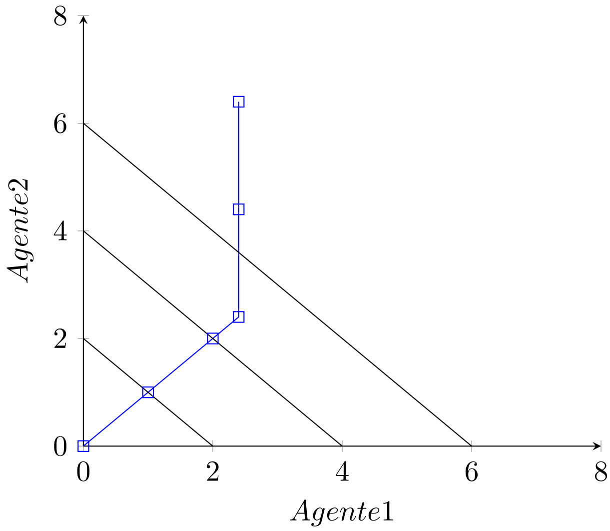

Figura 2: Regla de igual ganancia.

Definición 14. *Para cada* (E, c)*, la regla de igual ganancia (CEA de Constrained Equal Awards), se define como* $CEA_i(E, c) = \text{mín}\{c_i, \lambda\}$ *donde* λ *es el único número real no negativo que cumple* $\sum_{i \in N} \text{mín}\{c_i, \lambda\} = E$*.*

Por tanto, todos los agentes reciben λ excepto aquellos que reclaman menos, que entonces reciben su demanda. En definitiva, los agentes con demandas menores salen beneficiados.
Veamos que la regla está bien definida:
Sea c un vector de demandas fijo y sea f la función $f : \mathbb{R}_+ \to [0, C]$ definida por $f(\lambda) = \sum_{i \in N} \text{mín}\{c_i, \lambda\}$.

Se trata de una función contínua y estrictamente creciente en $[0, \text{máx}_{i \in N}\{c_i\}]$, lo que implica que es inyectiva y, entonces, existe un único número $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$f(\lambda) = \sum_{i \in N} \text{mín}\{c_i, \lambda\} = E.$$

Por lo tanto, la regla está bien definida.

4.3. Regla las mismas pérdidas

La regla de las mismas pérdidas o de las pérdidas igualitarias reparte la pérdida en relación con la demanda por igual entre todos los agentes. Esto es que la cantidad que no reciben de la parte demandada es la misma para todos siempre y cuando se cumpla la condición de que ningún demandante puede perder una cantidad más grande que la que había reclamado, es decir, no puede recibir un pago negativo.

Al contrario que la regla de las mismas ganancias, ésta da prioridad a los agentes con mayores demandas.

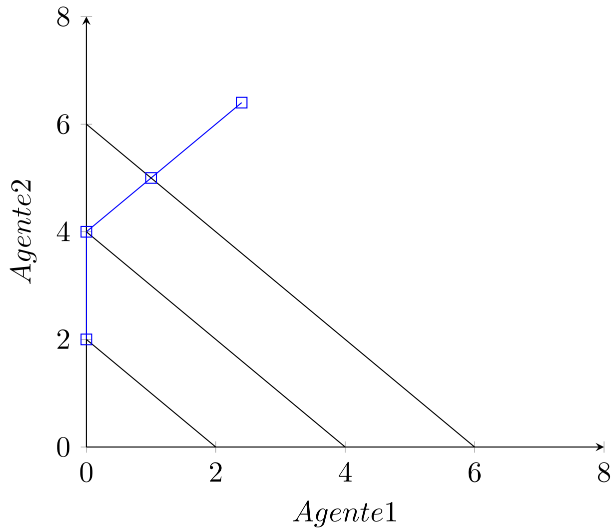

Figura 3: Regla de igual pérdida.

Formalmente, se define esta regla de reparto como:

Definición 15. *Para cada* (E, c) *y para todo* $i \in N$*, la regla de pérdidas igualitarias (CEL de Constrained Equal Losses), viene dada por* $CEL_i(E, c) = \text{máx}\{c_i - \mu, 0\}$ *donde* μ *es el único número real que satisface* $\sum_{i \in N} \text{máx}\{c_i - \mu, 0\} = E$.

4.4. Regla del Talmud

La regla del Talmud o del bien disputado se basa en el principio de Conceder y Dividir. Consiste en que cada agente concede al otro la parte del *Estate* que no reclama y, si queda algo, se lo reparten en partes iguales. Formalmente:

Definición 16. *Para todo* (E, c) *y |N|=2 (2 jugadores), la regla Conceder y Dividir (CD) se define como:*

$$CD_i(E, c) = \text{máx}\{E - c_j, 0\} + \frac{E - \text{máx}\{E - c_i, 0\} - \text{máx}\{E - c_j, 0\}}{2}$$

$\forall i, j \in N$ *con* $i \neq j$.

Esta regla es una mezcla entre la regla CEA y CEL. La cantidad a repartir aumenta progresivamente desde 0 a $\sum_{i \in N} c_i = C, 0 \leq E \leq C$. Cuando la cantidad que se reparte es pequeña ($E \leq C/2$), ésta se reparte igualitariamente entre los agentes hasta que el primero reciba la mitad de lo que había pedido. La cantidad restante se reparte entre los demás demandantes de manera igualitaria. Se continua repartiendo hasta que el segundo agente haya recibido la mitad de su demanda y así sucesivamente mientras haya *Estate* que repartir.

Cuando la cantidad a repartir es mayor ($E \geq C/2$), se piensa en términos de pérdidas.

Entonces, de la misma manera, cuando la pérdida total es pequeña se divide igualitariamente entre todos los demandantes. Así cada agente recibe su demanda menos la pérdida obtenida y se va repartiendo el resto de manera igualitaria hasta que el primer demandante ha perdido la mitad de su demanda, en ese momento deja de perder. A continuación, se divide entre los agentes restantes lo que queda de pérdida total, hasta que el segundo demandante haya perdido la mitad de su demanda. Y así sucesivamente mientras no se agote la pérdida total.

Así pues, Aumann y Maschler (1985) contruyeron la siguiente definición de la regla del Talmud (T):

Definición 17.

$$T_i(E,c) = \begin{cases} \text{mín}\{\frac{c_i}{2}, \alpha\}, & si\ E \leq \frac{C}{2}. \\ \text{máx}\{\frac{c_i}{2}, c_i - \alpha\}, & si\ E \geq \frac{C}{2}. \end{cases}$$

En el primer trozo de la función, α es el único número real que satisface $\sum_{i\in N} \text{mín}\{\frac{c_i}{2}, \alpha\} = E$ y en el segundo es el único número real tal que $\sum_{i\in N} \text{máx}\{\frac{c_i}{2}, c_i - \alpha\} = E$.

Una definición alternativa y más simple de la regla del Talmud es:

Definición 18.

$$T(E,c) = \begin{cases} CEA(E, \frac{c}{2}), & si\ E \leq \frac{C}{2}. \\ \frac{c}{2} + CEL(E - \frac{c}{2}, \frac{c}{2}), & si\ E \geq \frac{C}{2}. \end{cases}$$

Aumann y Maschler demuestran que si aplicamos la regla del Talmud a cualquier problema de bancarrota obtenemos el nucleolo del juego de bancarrota asociado a este problema.

Teorema 8 (Aumann y Maschler, 1985 [3]). *Sea (E,c) un juego y sea $v_{(E,c)}$ su función característica asociada, entonces $T(E,c) = \eta(v_{(E,c)})$.*

Demostración. Suponemos 2 o más jugadores y comenzamos calculando el exceso de una coalicion en cualquier imputación del problema.
Sea $S \subset N$ y $x \in I(v)$, entonces $e(S,x) = v(s) - \sum_{i\in S} x_i$.

Si $E - \sum_{i\notin S} c_i \geq 0$, entonces $v(S) = E - \sum_{i\notin S} c_i$ y por lo tanto, $E = \sum_{i\in N} x_i$ y $e(S,x) = (E - \sum_{i\notin S} c_i) - \sum_{i\in S} x_i = -\sum_{i\notin S}(c_i - x_i)$
Por otro lado, si $E - \sum_{i\notin S} c_i < 0$, entonces $v(S) = 0$ y $e(S,x) = -\sum_{i\in S} x_i$.

Separamos el problema en dos casos:

Caso 1: $\sum_{i\in N} \frac{c_i}{2} \geq E$
En este caso, por la definición de la regla del Talmud, para cada $i \in N$, $T(E,c) \leq \frac{c_i}{2}$. Tenemos que ver que $T(E,c) \in I(v)$.

Para cada $i \neq n$,

$$v(i) = \text{máx}\{0, E - \sum_{j\in N\setminus\{i\}} c_j\} \leq \text{máx}\{0, \sum_{j\in N} \frac{c_j}{2} - \sum_{j\in N\setminus\{i\}} c_j\} = \text{máx}\{0, \sum_{j\in N\setminus\{i\}} (\frac{c_j}{2} - c_j) + \frac{c_i}{2} + \frac{c_n}{2} - c_n\}.$$

Como $c_i \leq c_{n-1} \leq c_n$, el máximo anterior es igual a 0. Entonces, para cada $i \neq n$, $v(i) = 0$ y, por tanto, $T_i(E,c) \geq v(i)$.

Además, dado que, para cada $i \neq n$, $T_i(E,c) \leq \frac{c_i}{2}$, tenemos que:

$$T_n(E,c) \geq \text{máx}\{0, E - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{c_j}{2}\} \geq \text{máx}\{0, E - \sum_{j=1}^{n-1} c_j\} = v(n).$$

Entonces, $T(E,c) \in I(v)$. Llegados a este punto, tenemos que distinguir dos casos:

Caso 1.1: Para cada $i \in N$, $T_i(E,c) < \frac{c_i}{2}$.
Entonces, para cada $i \in N$, $T_i(E,c) = \frac{E}{n}$. En este caso, $v(n) = 0$. Por lo tanto, tenemos que $e(\{i\}, T(E,c)) = -\frac{E}{n}$.
Sea $S \subsetneq N$ tal que $|S| \geq 2$:
- Si $v(S) = 0$, entonces $e(S, T(E,c)) = -\sum_{i \in S} T_i(E,c) = -|S|\frac{E}{n} \leq -\frac{E}{n}$.
- Si $v(S) > 0$, entonces $e(S, T(E,c)) = -\sum_{i \notin S}(c_i - \frac{E}{n}) \leq -\sum_{i \notin S} \frac{c_i}{2} \leq -|N \setminus S|\frac{E}{n} \leq -\frac{E}{n}$.

Por otro lado, consideramos $x \in I(v)$ tal que $x \neq T(E,c)$. Entonces, hay un $j \in N$ tal que $x_j < T_j(E,c)$. Por lo tanto, $e(\{j\}, x) = -x_j > -\frac{E}{n} = e(\{j\}, T(E,c))$.
Dado que, para cada $S \subset N$, $-\frac{E}{n} \geq e(S, T(E,c))$, tenemos que $x \succ_L T(E,c)$ y, por lo tanto, $\eta(v) = T(E,c)$.

Caso 1.2: Para cada $i \in N$, $T_i(E,c) = \frac{c_i}{2}$.
Si consideramos el orden de los jugadores tenemos que $T_1(E,c) = \frac{c_1}{2}$ y $T_j(E,c) \geq \frac{c_1}{2}$ para cada $j \neq 1$. Obviamente, $v(N \setminus \{1\}) = E - c_1 > 0$. Por lo tanto,

$$e(\{1\}, T(E,c)) = -\frac{c_1}{2} = (E - c_1) - (E - \frac{c_1}{2}) = e(N \setminus \{1\}, T(E,c)).$$

Sea $S \subset N, S \neq \{1\}$ y $S \neq N \setminus \{1\}$:
- Si $v(S) = 0$, entonces $e(S, T(E,c)) = -\sum_{i \in S} T_i(E,c) \leq |S|\frac{c_1}{2} \leq -\frac{c_1}{2}$ dado que, $T_i(E,c) \geq \frac{c_1}{2}$.
- Si $v(S) > 0$, entonces $e(S, T(E,c)) = -\sum_{i \notin S}(c_i - T_i(E,c)) \leq -|N \setminus S|\frac{c_1}{2} \leq -\frac{c_1}{2}$.

Sea $x \in I(v)$ tal que $x \neq T(E,c)$.
- Si, para cada $j \in N$, $x_j > T_1(E,c)$, entonces $e(N \setminus \{1\}, x) = -(c_1 - x_1) > -c_1 + \frac{c_1}{2} = -\frac{c_1}{2}$.
- Si hay un $j \in N$ tal que $x_j < T_1(E,c)$, entonces $e(\{j\}, x) = v(j) - x_j > v(j) - T_1(E,c) \geq -T_1(E,c) = -\frac{c_1}{2}$. En cualquier caso, $x \succ_L T(E,c)$ y, por lo tanto, $\eta(v) = T(E,c)$.

Caso 2: $\sum_{i \in N} \frac{c_i}{2} < E$
Definimos $E' := \sum_{i \in N} c_i - E$ y sea (E', c) un problema de bancarrota. Ahora, $\sum_{i \in N} \frac{c_i}{2} > E'$. La relación entre la regla del Talmud del problema original y la de este es:
$T(E,c) = c - T(E',c)$.

Como $\sum_{i \in N} \frac{c_i}{2}$, por definición de la regla del Talmud, $T_i(E',c) = \text{mín}\{\frac{c_i}{2}, \alpha\}$, donde α es el único número que cumple que $\sum_{i \in N} \text{mín}\{\frac{c_i}{2}, \alpha\} = E' = \sum_{i \in N} c_i - E$.

Por otro lado, dado que estamos en el caso que $\sum_{i \in N} \frac{c_i}{2} < E$, tenemos que $T_i(E,c) = c_i - \text{mín}\{\frac{c_i}{2}, \alpha'\}$, donde α' es el único número que cumple que $\sum_{i \in N} c_i - \sum_{i \in N} \text{mín}\{\frac{c_i}{2}, \alpha'\} = E$ o, equivalentemente, $\sum_{i \in N} \text{mín}\{\frac{c_i}{2}, \alpha'\} = \sum_{i \in N} c_i - E = E'$. Vemos que las restricciones para α y α' son las mismas y, por lo tanto, continua cumpliéndose la relación entre $T(E,c)$ y $T(E',c)$.

Consideramos v y v' los juegos correspondientes a los problemas de bancarrota (E, c) y (E', c) y denotamos e y e' a sus respectivas funciones de excesos. Así pues, tenemos que llegar a una relación análoga a la que hemos obtenido anteriormente que sea válida para los nucleolos de los juegos v y v'. Sea $S \subset N$ y $x, x' \in I(v)$, entonces $x := c - x' \in I(v)$ y $x' = c - x \in I(v)$.
Si $v(S) = 0$, entonces:
$E - \sum_{j \notin S} c_j \leq 0$,
$v'(N \setminus S) = \sum_{j \notin S} c_j - E$ y
$v(S) - \sum_{j \in S} x_j = -\sum_{j \in S}(c_j - x'_j) = -\sum_{j \in S} c_j + E' - \sum_{j \notin S} x'_j = v'(N \setminus S) - \sum_{j \notin S} x'_j$.
Por lo tanto, $e(S, x) = e'(N \setminus S, x')$.

Por otro lado, si $v(S) > 0$, entonces:
$E - \sum_{j \in N \setminus S} c_j > 0$,
$v'(N \setminus S) = 0$ y
$v(S) - \sum_{j \in S} x_j = E - \sum_{j \notin S} c_j - \sum_{j \in S}(c_j - x') = v'(N \setminus S) - \sum_{j \notin S} x'_j$.

Entonces, los vectores de excesos ordenados coinciden para x y x', es decir, $\theta(x) = \theta(x')$. Por lo tanto, $\eta(v) = c - \eta(v')$. Aplicando el caso 1 al problema de bancarrota (E', c) y usando la relación encontrada, tenemos que $T(E, c) = c - T(E', c) = c - \eta(v') = \eta(v)$. □

4.5. Regla del orden de llegada

La regla del orden de llegada o de llegada aleatoria (RA de Random Arrival) parte del supuesto de que los agentes van llegando al centro de pago de uno en uno y al primero que llega recibe el mínimo entre su demanda y el *Estate*, lo mismo para el agente que llega segundo pero restando lo que se ha llevado el primero y así sucesivamente hasta que no queda *Estate*. Por lo que los jugadores que llegan primero al centro de llegada salen beneficiados.
Así pues, para conseguir que la regla sea justa, se reparte el promedio de las asignaciones que hubiera recibido cada demandante en cada permutación de los posibles órdenes de llegada.

Sea $\pi \in \Pi(N)$ el orden en el que van llegando los jugadores, matemáticamente, tenemos la siguiente distribución:
$A^{\pi}_{i_1}(E, c) = \text{mín}\{c_{i_1}, E\}$,
$A^{\pi}_{i_2}(E, c) = \text{mín}\{c_{i_2}, E - A^{\pi}_{i_1}(E, c)_+\}$,
$A^{\pi}_{i_3}(E, c) = \text{mín}\{c_{i_3}, (E - A^{\pi}_{i_1}(E, c) - A^{\pi}_{i_2}(E, c)_+\}$,
$\vdots$
$A^{\pi}_{i_n}(E, c) = \text{mín}\{c_{i_n}, (E - \sum_{k=1}^{n-1} A^{\pi}_{i_k}(E, c)_+\}$.

Así pues, si dividimos la suma de estas distribuciones entre $n!$ para dotar a la regla de aletoriedad, tenemos que la regla del orden de llegada (RA) es:

$$RA(E, c) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi(N)} A^{\pi}(E, c).$$

Esta ecuación la podemos desarrollar y obtenemos, formalmente, la definición de la regla.

Definición 19. *Para todo (E, c), la regla de llegada aleatoria (RA), se define como:*

$$RA_i(E,c) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi(N)} \text{mín}\{c_i, \text{máx}\{E - \sum_{j \in N; \pi(i) < \pi(j)} c_j, 0\}\}, \quad \forall i \in N.$$

Recordemos que usamos la notación $\Pi(N)$ para hacer referencia al conjunto de las permutaciones de N. Por lo tanto, $\pi(i) < \pi(j)$ indica que el jugador i ha llegado antes que el jugador j.

Teorema 9 (O'Neill, 1982 [19]). *Sea (E, c) un problema de bancarrota y sea $v_{(E,c)}$ su función característica asociada, entonces $RA(E, c) = \phi(v_{(E,c)})$.*

Demostración. Habíamos visto que el valor de Shapley se puede definir como $\phi(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi(N)} m^\pi(v)$, por otro lado, hemos definido la regla de la llegada aleatoria como $RA(E, c) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi(N)} A^\pi(E, c)$.

Demostraremos que $m^\pi(v) = A^{\pi^{-1}}(E, c)$.
Notamos que es lo mismo ya que si π recorre S, π^-1 también recorre S, es decir, existe una biyección entre π y π^-1 y cuando se suman todos los casos da el mismo resultado.

Así pues, si $\pi = (i_1, \ldots, i_n)$ es una ordenación cualquiera, tenemos que $\pi^-1 = (i_n, \ldots, i_1)$.
Comenzamos por el caso más fácil: Para la componente i_n tenemos que $A^{\pi^{-1}}_{i_n}(E, c) = \text{mín}\{c_{i_n}, E\}$.

Y, por otro lado,
$m^\pi_{i_n}(v) = v(i_1 \ldots i_n) - v(i_1 \ldots i_{n-1}) = \text{máx}\{E - c(N \backslash (i_1 \ldots i_n)), 0\} - \text{máx}\{E - c(N \backslash (i_1 \ldots i_{n-1})), 0\} = \text{máx}\{E - c(N \backslash N), 0\} - \text{máx}\{E - c_{i_n}, 0\} = E - (E - c_{i_n}) = *$
Si $c_{i_n} > E$ entonces es E, sino es c, por lo tanto,
$* = \text{mín}\{E, c_{i_n}\} = A^{\pi^{-1}}_{i_n}(E, c)$.

De la misma manera, para el jugador que llega segundo: $A^{\pi^{-1}}_{i_{n-1}}(E, c) = \text{mín}\{c_{i_{n-1}}, (E - A^{\pi^{-1}}_{i_n}(E, c))\} = \text{mín}\{c_{i_{n-1}}, (E - \text{mín}\{E, c_{i_n}\})\} = ...$
- Si $c_{i_n} > E$, entonces es 0.
- Sino,
  - Si $c_{i_{n-1}} > E - c_{i_n}$, entonces es $E - c_{i_n}$.
  - Sino, es $c_{i_{n-1}}$.

Por otro lado,
$m^\pi_{i_{n-1}}(v) = v(i_1 \ldots i_{n-1}) - v(i_1 \ldots i_{n-2}) = \text{máx}\{E - c(N \backslash (i_1 \ldots i_{n-1})), 0\} - \text{máx}\{E - c(N \backslash (i_1 \ldots i_{n-2})), 0\} = \text{máx}\{E - c_{i_n}, 0\} - \text{máx}\{E - c_{i_{n-1}} - c_{i_n}, 0\} =$

$$= \begin{cases} 0 & si \quad c_{i_n} \geq E \\ E - c_{i_n} & si \quad c_{i_n} \leq E \text{ y } c_{i_{n-1}} \geq E - c_{i_n} \\ c_{i_{n-1}} & si \quad c_{i_n} \leq E \text{ y } c_{i_{n-1}} \leq E - c_{i_n} \end{cases}$$

Y finalmente, en general, tenemos que:
$A^{\pi^{-1}}_{i_k}(E, c) = \text{mín}\{c_{i_k}, (E - \sum_{l=k+1}^n A^{\pi^{-1}}_{i_l}(E, c))\} = ...$
- Si $\sum_{l=k+1}^n A^{\pi^{-1}}_{i_l}(E, c) \geq E$, entonces es 0.
- Sino,

- Si $c_{i_k} \leq E - \sum_{l=k+1}^{n} A_{i_l}^{\pi^{-1}}(E,c)$, entonces es c_{i_k}.
- Sino, es $E - \sum_{l=k+1}^{n} A_{i_l}^{\pi^{-1}}(E,c)$.

$m_{i_k}^{\pi}(v) = v(i_1 \ldots i_k) - v(i_1 \ldots i_{k-1}) = \text{máx}\{E - c(N \backslash (i_1 \ldots i_k)), 0\} - \text{máx}\{E - c(N \backslash (i_1 \ldots i_{k-1})), 0\} =$ $\text{máx}\{E - c_{i_{k+1}} - \ldots c_{i_n}, 0\} - \text{máx}\{E - c_{i_k} - c_{i_{k+1}} - \ldots - c_{i_n}, 0\} =$

$$= \begin{cases} 0 & si \quad \sum_{l=k+1}^{n} c_{i_l} \geq E \\ \\ E - \sum_{l=k+1}^{n} c_{i_l} & si \quad \sum_{l=k+1}^{n} c_{i_l} \leq E \text{ y } \sum_{l=k}^{n} c_{i_l} \geq E \\ \\ c_{i_k} & si \quad \sum_{l=k+1}^{n} c_{i_l} \leq E \text{ y } \sum_{l=k}^{n} c_{i_l} \leq E \end{cases}$$

La condición $\sum_{l=k+1}^{n} A_{i_l}^{\pi^{-1}}(E,c) \geq E$ es equivalente a $\sum_{l=k+1}^{n} c_{i_l} \geq E$ dado que para $A_{i_l}^{\pi^{-1}}$ es como mucho c_{i_l}, para todo $l = 1, \ldots, n$. Por lo tanto, hemos visto que $m^{\pi}(v) = A^{\pi^{-1}}(E,c)$ y, en consecuencia, hemos demostrado el teorema. □

Capítulo V

Propiedades

En esta sección estudiamos propiedades de las reglas de reparto. Comenzamos con las más básicas y seguimos con las más opcionales, se pueden imponer o no dependiendo de diferentes criterios.

5.1. Propiedades básicas

Hablamos de propiedades básicas porque ya vienen implícitas en la definición de regla.

Una propiedad básica de cualquier regla de reparto es la **viabilidad**. Se basa en que, para cada problema, la suma de las recompensas no debe ser superior a la cantidad disponible.

Por otro lado, la **eficiencia** es un requisito imprescindible, implica que toda cantidad disponible debe ser asignada.

También existen dos requisitos que ponen límites a las asignaciones.
- La **no negatividad** implica que cada jugador debe recibir una cantidad no negativa. Por lo tanto, se entiende que existe una frontera superior, es decir, que cada agente debería recibir como máximo su demanda

- Otro requisito es el **límite inferior**, esto es que cada agente debe recibir al menos la diferencia entre la cantidad disponible y la suma de las demandas de los demás agentes, siempre y cuando está diferencia sea positiva. Será 0 en caso contrario. Nos referimos a esta cantidad como el derecho mínimo del reclamante.

Definimos el **derecho mínimo** como: Para cada (E, c) y para cada $i \in N$, $R_i(E, c) \geq \text{máx}\{E - \sum_{N \setminus \{i\}} c_j, 0\}$. Es consecuencia de la eficiencia, no negatividad y la delimitación de las reclamaciones.

5.2. Aseguramiento

La propiedad de aseguramiento es la que exige que cada agente reciba como mínimo una cierta cantidad independientemente de las demandas del resto, es decir, tienen una garantía mínima. Esta garantía depende de la cantidad a repartir, de la reclamación del agente y del número de jugadores.

Si la demanda de un individuo es superior a la cantidad disponible, entonces su asignación será, como mínimo, la cantidad disponible entre el número de agentes. Si se trata de una demanda inferior a la cantidad disponible, entonces la asignación será, como mínimo, la demanda entre el número de agentes.

Esto es:
Sea (E, c) un problema de bancarrota, para todo $i \in N$, R verifica la propiedad del aseguramiento si

$$R_i(E, c) \geq \frac{1}{n} \operatorname{mín}\{c_i, E\}.$$

5.3. Independencia de escala

Esta propiedad nos dice que es lo mismo hacer un reparto entre unos jugadores con ciertas demandas que multiplicar la cantidad a repartir por una constante cualquiera si las demandas de dichos jugadores también está multiplicada por el mismo valor. Es decir, se cumple la propiedad de independencia de escala si, para todo $\lambda > 0$,

$$R(\lambda E, \lambda c) = \lambda R(E, c).$$

Por lo tanto, esta propiedad nos asegura que la unidad de medida no influye en las asignaciones.

5.4. Autodualidad

Un problema de bancarrota también puede ser tratado en términos de pérdidas, es decir, estudiar el reparto de pérdidas asignando a los jugadores la diferencia $C - E$ en función del vector de demandas c.

Para cada regla aplicada a un problema de bancarrota, existe una regla dual a ésta aplicada al mismo problema. Una regla otorga un vector de pagos y ganancias que coincide con las pérdidas proporcionadas por la regla dual.

Antes de definir la propiedad autodual, veamos el concepto de dualidad:
Sea (E, c) un problema de bancarrota y R una regla, definimos su regla dual como $R^*(E, c) = c - R(C - E, c)$.
Por otro lado, si p, p^* son dos propiedades, decimos que son propiedades duales si: R^* satisface $p^* \Leftrightarrow R$ satisface p.

Ahora bien, se dice que p es una propiedad autodual si verifica: R^* satisface $p \Leftrightarrow R$ satisface p.
Y, una regla es autodual si, para cada (E, c), se tiene:

$$R(E, c) = c - R(C - E, c).$$

5.5. Igualdad de trato

Esta propiedad exige que se trate a iguales por igual, es decir que los jugadores que demanden la misma cantidad, deben recibir lo mismo.

Formalmente: Para cada (E, c) y cada $(i, j) \subseteq N$, si $c_i = c_j$, entonces,

$$R_i(E, c) = R_j(E, c).$$

Esta propiedad en la práctica se suele infringir, en problemas de bancarrota reales, algunas reclamaciones tienen una mayor prioridad frente a otras. Dos agentes que tienen la misma prioridad son tratados de manera diferente solo si sus reclamos difieren. Sin embargo, los jugadores en clases de prioridad diferentes, generalmente, se tratan de manera desigual incluso si sus reclamos son los mismos.

5.6. Anonimato

La propiedad de anonimato impone que la identidad de los agentes no debería importar. El vector de pagos elegido debería depender solo de la lista de N reclamaciones.

Esto es: Para cada (E, c), cada $\pi \in \Pi(N)$, donde $\Pi(N)$ es el conjunto de todas las permutaciones de los elementos de N, y cada $i \in N$, entonces,

$$R_{\pi(i)}(E, (c_{\pi(i)})_{i \in N}) = R_i(E, c).$$

Por lo tanto, es imprescindible que se cumpla la propiedad de anonimato para que se pueda dar la propiedad del trato de iguales.

5.7. Preservación del orden

Una regla debe respetar el orden de reclamaciones, es decir, si la demanda del agente i es al menos tan grande como la del agente j, éste debería recibir al menos tanto como el agente j. Además, las diferencias entre los reclamos y los premios también deben ordenarse.

Formalmente, para cada problema de bancarrota (E, c), y cada $(i, j) \subseteq N$, si $c_i \geq c_j$, entonces,

$$R(E, c_i) \geq R(E, c_j) \text{ y } c_i - R(E, c_i) \geq c_j - R(E, c_j).$$

Por lo tanto, una regla de reparto satisface esta propiedad cuando se proporcionan pagos y pérdidas mayores a quienes demandan una cantidad mayor, esto significa que, entonces, estos pagos y pérdidas no son menores a los que obtienen los jugadores con demandas menores dado que lo que reciben los jugadores de demandas superiores no es menor a lo que reciben los jugadores con demandas inferiores.

5.8. Compensación completa

Se suele utilizar el término **sostenibilidad** para asegurar que hay suficiente para compensar a todos los jugadores, independientemente de la cantidad que reclamen. Esto puede verse perturbado si se toma la decisión de compensar primero las demandas menores, ya que son más fáciles de satisfacer, pero determinar cómo de pequeña debe ser esa cantidad para que el jugador que la demanda tenga ese trato preferencial es algo subjetivo.

Para cada problema de bancarrota (E, c) y para cada $i \in N$, la demanda c_j es sostenible si $\sum_{j\in N} \text{mín}\{c_j, c_i\} \leq E$.

Así pues, la propiedad de compensación completa asigna a un agente todo lo que reclama si su demanda es sostenible:

$$R_i(E, c) = c_i.$$

Una alternativa a la propiedad anterior es la **Exención**. Ésta entiende que los repartos para los agentes con demandas menores son prioritarios, es decir, cumple el principio general de **progresividad**.

En definitiva, la exención trata de que se repartan íntegramente las demandan que no lleguen a una cantidad mínima, la definiremos como $\alpha = \frac{E}{n}$.

Así pues, dado un juego (E, c) y un jugador $i \in N$ tal que $c_i \leq \alpha$, entonces $R_i(E, c) = c_i$.

5.9. Compensación nula

De la misma manera que hasta ahora hemos tratado casos en los que se priorizan las demandas menores, se puede ver desde el punto de vista de que el objetivo es dar prioridad a los agentes que han arriesgado cantidades mayores.

De esta manera, nos referimos a la propiedads de Compensación nula cuando decidimos no asignar nada a los agentes con demandas demasiados pequeñas o residuales, entendiendo que una demanda es residual si $(E, \text{máx}\{0, c_1 - c_i\}, \ldots, \text{máx}\{0, c_n - c_i\})$ es un problema de bancarrota.

Por lo tanto, se dice que una regla de reparto cumple la propiedad de compensación nula si para cada juego de bancarrota y cada jugador i con demanda residual,

$$R_i(E, c) = 0.$$

Por otro lado, una alternativa a esta propiedad es el contrario de la propiedad de exención, la propiedad de **Exclusión**. Ésta determina que los jugadores cuyas reclamaciones sean inferiores a un valor $\alpha = \frac{C-E}{n}$ no se tendrán en cuenta.
Formalmente:
Para cada (E, c) y cada $i \in N$, si $c_i \leq \alpha$, entonces $R_i(E, c) = 0$.

5.10. Composición hacia arriba

Esta propiedad tiene lugar cuando inicialmente se hace una estimación del *Estate* superior del que finalmente se dispone: $E' > E$.

La propiedad de compensación hacia arriba nos asegura que se puede solucionar esta situación de dos maneras: Se puede cancelar el reparto inicial y aplicar la regla de reparto al problema modificado, o se pueden conservar las asignaciones iniciales de los agentes y ajustar las demandas según estos valores y aplicar la regla para repartir la diferencia

$E' - E$. Y por tanto, las asignaciones no varían si el reparto se realiza de una vez o secuencialmente.
Formalmente:
Para cada problema de bancarrota (E, c), si $E' > E$, decimos que R cumple la propiedad de compensación hacia arriba si

$$R(E', c) = R(E, c) + R(E' - E, c - R(E, c)).$$

5.11. Composición hacia abajo

Si consideramos la situación contraria, es decir, se ha realizado una estimación al alza del *Estate*, el cual ha resultado ser menor: $E' < E$, tenemos la propiedad de compensación hacia abajo.

Y, de la misma manera, existen dos caminos para solucionarlo: cancelar el reparto original y aplicar la regla al problema actualizado o mantener las asignaciones iniciales como demandas sobre el valor revisado E' y aplicar la regla al problema definido de esta manera. Así pues, la propiedad de composición hacia abajo nos asegura que siguiendo cualquiera de los dos caminos se llega al mismo resultado, es decir, se obtienen las mismas asignaciones.

Formalmente, dado un problema de bancarrota (E, c), si se tiene $E > E'$, se dice que R verifica la propiedad de composición hacia abajo si

$$R(E', c) = R(E', R(E, c)).$$

Por lo tanto, esta propiedad implica que, a la hora de recalcular el reparto, es indiferente tomar como *Claim* las demandas originales o el reparto que resultó del el *Estate* antiguo.

5.12. Consistencia

La propiedad de consistencia trata de que si, una vez hecho el reparto entre los agentes, unos cuantos de ellos se van con sus respectivas asignaciones y consideramos los restantes jugadores, con sus demandas intactas pero con el *Estate* que queda (la diferencia entre la cantidad disponible en un inicio y la suma de las asignaciones que se han llevado los agentes), entonces la regla debe asignar a cada uno de ellos la misma cantidad que al principio.

En resumidas cuentas, la propiedad asegura que la regla de reparto otorgue los mismos resultados si se aplica a todos los jugadores que si se aplica sobre un subconjunto de ellos. Esto favorece evitar discusiones entre los reclamantes ya que el resultado es inalterable.

Matemáticamente, sea (E, c) un problema de bancarrota, $S \subset N$, entonces, para todo $i \in N \backslash S$:

$$R \text{ es consistente } \iff R_i(N, E, c) = R_i(N \backslash S, E - \sum_{i \in S} R_i(N, E, c), (c_i)_{i \in N \backslash S}).$$

5.13. Caracterizaciones de las reglas de reparto

A la hora de seleccionar qué regla aplicar es muy útil conocer qué propiedades satisface cada una ya que, si la persona que toma la decision, da más importancia a unas propiedades que a otras, la cantidad de reglas entre las que se puede elegir se reduce y es más fácil tomar una decisión acertada.

Es fácil ver que, por ejemplo, la propiedad de trato igualitario la cumplen todas las reglas pero quizá lo que se desea es que se cumplan un conjunto de propiedades. Varios autores han ido demostrando que diferentes combinaciones caracterizan las reglas de reparto:

La regla proporcional es la única regla que verifica las propiedades:
- Young (1988) [31]: Trato igualitario, Composición hacia arriba y Autodualidad.
- Herrero y Villar (2001) [14]: Trato igualitario, Composición hacia abajo y Autodualidad.

La regla de las mismas ganancias es la única regla que verifica las propiedades:
- Dagan (1996) [9]: Tratamiento igualitario y Composición hacia arriba.
- Herrero y Villar (2001): Compensación compelta y Composición hacia abajo.
- Yeh (2001) [30]: Compensación completa.
- Chun (2006) [7]: Aseguramiento, Composición hacia arriba y Consistencia.
- Herrero y Villar (2001): Consistencia, Exención y Composición hacia abajo.

La regla de las mismas pérdidas es la única regla que verifica las propiedades:
- Herrero y Villar (2001): Trato igualitario y Composición hacia abajo.
- Herrero y Villar (2001): Compensación nula y Composición hacia arriba.
- Herrero y Villar (2001): Consistencia, Exclusión y Composición hacia arriba.

La regla del Talmud es la única regla que verifica las propiedades:
- Herrero y Villar (2001): Consistencia y Autodualidad.
- Chun (2006): Aseguramiento y Consistencia.

Para concluir, realizamos una tabla-resumen de las propiedades que cumple cada regla de reparto clásica:

	P	CEA	CEL	T	RA
Aseguramiento		✓		✓	✓
Independencia de escala	✓	✓	✓	✓	✓
Autodualidad	✓			✓	✓
Trato igualitario	✓	✓	✓	✓	✓
Anonimato	✓	✓	✓	✓	✓
Preservación del orden	✓	✓	✓	✓	✓
Compensación completa		✓			
Compensación nula			✓		
Composición hacia abajo	✓	✓	✓		
Composición hacia arriba	✓	✓	✓		
Consistencia	✓	✓	✓	✓	

Figura 1: Caracterizaciones.

Capítulo VI

Caso real

El Sistema Nacional de Salud de España es conocido como el conjunto de servicios relacionados con la salud que cada Comunidad Autónoma coordina. Durante mucho tiempo España, en este aspecto, destacó por tener unas tasas de cobertura ejemplares, satisfaciendo a gran parte de la población con servicios de gran calidad técnica.

Tiempo después, hacia el año 2012-2013, comenzaron a aumentar las listas de espera, los servicios se despersonalizaron, había una falta de personal y clara necesidad de mejora en las instalaciones,... Todo ello hizo que el Sistema Sanitario Español se tambaleara. Hay que tener en cuenta que la gestión sanitaria no es más que el resultado de las políticas, reformas y cambios realizados a lo largo de los años.

A pesar de la estabilización ecónomica del país y, consecuentemente, la mejora del sistema sanitario durante este tiempo, la pandemia de COVID-19 ha golpeado fuertemente a España, colapsando hospitales y centros médicos.

Cada vez que aumentan los contagios se necesitan más recursos de atención primaria y salud pública, así como más personal haciendo seguimientos y test. Por otro lado, cada vez que aumentan los casos graves se requieren más recursos hospitalarios, camas, ventiladores, material quirúrgico, etc.

En conclusión, la sanidad española no estaba preparada para una situación de tal gravedad. Además, hay que tener en cuenta que el virus no ha tenido el mismo impacto en todas las Comunidades Autónomas y tampoco todas tenían la misma preparación para afrontarlo.

Esta situación tan crítica que ha afectado a todo el mundo, ha tenido mayor impacto sobre los países que no estaban especialmente preparados en el campo sanitario y a los que tenían unos fondos monetarios insuficientes para cubrir todos los gastos que conlleva. Concretamente, España desde hace más de veinte años tiene un Ministerio de Sanidad despojado de sus competencias y muchas dificultades para gestionar en un mando único las necesidades de las 17 Comunidades Autónomas.

Por tanto, hablamos de un país que no puede dotar a sus Comunidades Autónomas de las cantidades que demandan en concepto de Sanidad ya que la suma de éstas es superior a lo que el país es capaz de ofrecer. Es decir, nos encontramos ante un problema de bancarrota en el que los jugadores del juego de bancarrota son las Comunidades Autónomas ya que son las demandantes.

De los presupuestos generales de las Comunidades Autónomas obtenemos los siguientes datos:

COMUNIDAD AUTÓNOMA	SANIDAD	
	Presupuesto 2020 en miles de euros	Tasa var. 2020/2019
Andalucía	10.824.520,00	4,1%
Aragón	2.061.798,94	3,6%
Principado de Asturias	1.815.602,98	3,6%
Illes Balears	1.724.941,02	0,0%
Canarias	3.132.985,65	4,5%
Cantabria	922.059,24	5,5%
Castilla y León	3.534.049,05	-0,2%
Castilla - La Mancha	2.990.642,88	7,9%
Cataluña	9.733.584,91	10,3%
Extremadura	1.742.520,49	3,0%
Galicia	4.107.323,84	3,1%
Madrid	8.165.992,26	0,7%
Región de Murcia	1.922.556,65	0,1%
C. Foral de Navarra	1.158.559,00	7,1%
País Vasco	3.978.448,39	6,2%
La Rioja	459.646,97	6,6%
C. Valenciana	6.732.208,75	1,6%
Total CC.AA.	**65.007.441,02**	**4,1%**

Figura 1: Presupuesto en sanidad [33].

En definitiva, dado que suponemos que la suma de los presupuestos es todo lo que el Estado tiene para dar, el *Estate* del problema de bancarrota es 65.007.441,02 miles de euros.

Por otro lado, sabemos que el número de personas ingresadas por COVID-19 en cada Comunidad Autónoma, ordenadas de mayor a menor incidencia, es el siguiente:

	Hospitalizados	
CCAA	Ingresados	Camas ocupadas
Total	**10.744**	8,8%
Cataluña	2.666	10,8%
Madrid	1.759	10,7%
C.Valenciana	1.526	13,4%
Andalucía	1.016	6,0%
C. León	589	8,6%
País Vasco	492	10,6%
C. La Mancha	465	9,6%
Baleares	353	10,7%
Aragón	321	7,7%
Galicia	308	3,7%
Asturias	301	8,7%
Canarias	284	5,3%
Murcia	210	5,3%
Extremadura	193	6,1%
Navarra	98	5,2%
Cantabria	88	5,5%
La Rioja	59	7,3%
Melilla	11	6,2%
Ceuta	5	2,5%

Fuente: Ministerio de Sanidad • Creado con Datawrapper

Figura 2: Número de personas hospitalizadas [32].

En este proyecto nos centraremos en la primera columna: número de ingresados en hospitales. Así, una vez ordenadas las CCAA de mayor a menor incidencia de ingresos, realizamos una ponderación en la que la comunidad con más hospitalizados (la número 1) tendrá un 50 %, y la que menos (la número 17) un 20 %.

De esta manera, estimaremos que la Comunidad Autónoma que ha sufrido más la pandemia será la que demande un 50 % más de lo que recibe y la que ha tenido el menor impacto, demandará solamente un 20 % más del presupuesto anteriormente visto.
La ponderación se realiza con la siguiente operación:

$$\frac{0,5-0,2}{1-17} \cdot \mathrm{x} - 17 + 0,2$$

donde x es la posición que ocupa la CCAA en la lista de afectación de la pandemia.
Finalmente, obtenemos el siguiente problema de bancarrota:

COMUNIDAD	SANIDAD	
AUTÓNOMA	PRESUPUESTO	DEMANDA
Andalucía	10.824.520,00	16.033.820,25
Aragón	2.061.798,94	2.783.428,57
Principado de Asturias	1.815.602,98	2.553.191,69
Illes Balears	1.724.941,02	2.199.299,80
Canarias	3.132.985,65	4.053.300,18
Cantabria	922.059,24	1.141.048,31
Castilla y León	3.534.049,05	5.036.019,90
Castilla - La Mancha	2.990.642,88	4.093.442,44
Cataluña	9.733.584,91	14.600.377,37
Extremadura	1.742.520,49	2.189.041,37
Galicia	4.107.323,84	5.467.874,86
Madrid	8.165.992,26	11.942.763,68
Región de Murcia	1.922.556,65	2.523.355,60
C. Foral de Navarra	1.158.559,00	1.411.993,78
País Vasco	3.978.448,39	5.520.097,14
La Rioja	459.646,97	551.576,36
C. Valenciana	6.732.208,75	9.719.626,38
Total CC.AA.	*65.007.441,02*	91.820.257,69

Figura 3: Problema de bancarrota.

6.1. Reglas de reparto

- **Regla proporcional**

Si desarrollamos la fórmula en una hoja de cálculo, obtenemos el siguiente reparto para cada Comunidad Autónoma:

COMUNIDAD AUTÓNOMA	SANIDAD		REGLA
	PRESUPUESTO	DEMANDA	PROPORCIONAL
Andalucía	10.824.520,00	16.033.820,25	11.351.717,48
Aragón	2.061.798,94	2.783.428,57	1.970.627,98
Principado de Asturias	1.815.602,98	2.553.191,69	1.807.623,53
Illes Balears	1.724.941,02	2.199.299,80	1.557.073,09
Canarias	3.132.985,65	4.053.300,18	2.869.679,08
Cantabria	922.059,24	1.141.048,31	807.846,03
Castilla y León	3.534.049,05	5.036.019,90	3.565.430,71
Castilla - La Mancha	2.990.642,88	4.093.442,44	2.898.099,23
Cataluña	9.733.584,91	14.600.377,37	10.336.860,23
Extremadura	1.742.520,49	2.189.041,37	1.549.810,26
Galicia	4.107.323,84	5.467.874,86	3.871.177,90
Madrid	8.165.992,26	11.942.763,68	8.455.307,41
Región de Murcia	1.922.556,65	2.523.355,60	1.786.500,00
C. Foral de Navarra	1.158.559,00	1.411.993,78	999.671,58
País Vasco	3.978.448,39	5.520.097,14	3.908.150,54
La Rioja	459.646,97	551.576,36	390.508,25
C. Valenciana	6.732.208,75	9.719.626,38	6.881.357,72
Total CC.AA.	*65.007.441,02*	91.820.257,69	65.007.441,02

Vemos que el reparto se realizaría de manera proporcional: efectivamente, Andalucía sigue siendo el agente que más recibe y La Rioja el que menos.

• Regla de las ganancias igualitarias

Aplicamos la regla, calculando el factor λ, y obtenemos los siguientes resultados:

COMUNIDAD AUTÓNOMA	SANIDAD		REGLA
	PRESUPUESTO	DEMANDA	GANANCIAS IGUALITARIAS
Andalucía	10.824.520,00	16.033.820,25	6.370.942,75
Aragón	2.061.798,94	2.783.428,57	2.783.428,57
Principado de Asturias	1.815.602,98	2.553.191,69	2.553.191,69
Illes Balears	1.724.941,02	2.199.299,80	2.199.299,80
Canarias	3.132.985,65	4.053.300,18	4.053.300,18
Cantabria	922.059,24	1.141.048,31	1.141.048,31
Castilla y León	3.534.049,05	5.036.019,90	5.036.019,90
Castilla - La Mancha	2.990.642,88	4.093.442,44	4.093.442,44
Cataluña	9.733.584,91	14.600.377,37	6.370.942,75
Extremadura	1.742.520,49	2.189.041,37	2.189.041,37
Galicia	4.107.323,84	5.467.874,86	5.467.874,86
Madrid	8.165.992,26	11.942.763,68	6.370.942,75
Región de Murcia	1.922.556,65	2.523.355,60	2.523.355,60
C. Foral de Navarra	1.158.559,00	1.411.993,78	1.411.993,78
País Vasco	3.978.448,39	5.520.097,14	5.520.097,14
La Rioja	459.646,97	551.576,36	551.576,36
C. Valenciana	6.732.208,75	9.719.626,38	6.370.942,75
Total CC.AA.	*65.007.441,02*	91.820.257,69	65.007.441,02
			λ
			6.370.942,75

Vemos que las Comunidades que más demandan son las que salen más perjudicadas ya que se les asigna λ. Se trata de Andalucía, Cataluña, Madrid y Valencia, a las demás CCAA se les da lo que habían pedido.

• Regla las mismas pérdidas

En nuestro caso, calculando μ tenemos la siguiente lista de repartos:

COMUNIDAD AUTÓNOMA	SANIDAD		REGLA
	PRESUPUESTO	DEMANDA	PÉRDIDAS IGUALITARIAS
Andalucía	10.824.520,00	16.033.820,25	14.340.377,52
Aragón	2.061.798,94	2.783.428,57	1.089.985,84
Principado de Asturias	1.815.602,98	2.553.191,69	859.748,96
Illes Balears	1.724.941,02	2.199.299,80	505.857,07
Canarias	3.132.985,65	4.053.300,18	2.359.857,46
Cantabria	922.059,24	1.141.048,31	0,00
Castilla y León	3.534.049,05	5.036.019,90	3.342.577,17
Castilla - La Mancha	2.990.642,88	4.093.442,44	2.399.999,71
Cataluña	9.733.584,91	14.600.377,37	12.906.934,64
Extremadura	1.742.520,49	2.189.041,37	495.598,64
Galicia	4.107.323,84	5.467.874,86	3.774.432,13
Madrid	8.165.992,26	11.942.763,68	10.249.320,95
Región de Murcia	1.922.556,65	2.523.355,60	829.912,87
C. Foral de Navarra	1.158.559,00	1.411.993,78	0,00
País Vasco	3.978.448,39	5.520.097,14	3.826.654,41
La Rioja	459.646,97	551.576,36	0,00
C. Valenciana	6.732.208,75	9.719.626,38	8.026.183,65
Total CC.AA.	*65.007.441,02*	91.820.257,69	65.007.441,02
			µ
			1.693.442,73

Tal como hemos explicado, efectivamente hemos obtenido resultados inversos a la regla de las ganancias igualitarias. Las Comunidades que más demandaban son las que han sido beneficiadas. En cambio, las Comunidades que reclamaban menos incluso pueden recibir nada, como por ejemplo, Cantabria, Navarra y La Rioja.

• Regla del Talmud

Ahora bien, en el problema de bancarrota planteado, nos encontramos en el segundo tramo de la función a partes de la definición de la regla. A partir de eso, calculamos α y los resultados son los siguientes:

COMUNIDAD AUTÓNOMA	SANIDAD		REGLA
	PRESUPUESTO	DEMANDA	TALMUD
Andalucía	10.824.520,00	16.033.820,25	13.881.966,31
Aragón	2.061.798,94	2.783.428,57	1.391.714,28
Principado de Asturias	1.815.602,98	2.553.191,69	1.276.595,85
Illes Balears	1.724.941,02	2.199.299,80	1.099.649,90
Canarias	3.132.985,65	4.053.300,18	2.026.650,09
Cantabria	922.059,24	1.141.048,31	570.524,15
Castilla y León	3.534.049,05	5.036.019,90	2.884.165,95
Castilla - La Mancha	2.990.642,88	4.093.442,44	2.046.721,22
Cataluña	9.733.584,91	14.600.377,37	12.448.523,42
Extremadura	1.742.520,49	2.189.041,37	1.094.520,68
Galicia	4.107.323,84	5.467.874,86	3.316.020,92
Madrid	8.165.992,26	11.942.763,68	9.790.909,74
Región de Murcia	1.922.556,65	2.523.355,60	1.261.677,80
C. Foral de Navarra	1.158.559,00	1.411.993,78	705.996,89
País Vasco	3.978.448,39	5.520.097,14	3.368.243,20
La Rioja	459.646,97	551.576,36	275.788,18
C. Valenciana	6.732.208,75	9.719.626,38	7.567.772,44
Total CC.AA.	*65.007.441,02*	91.820.257,69	65.007.441,02
			α
			2.151.853,94
			C/2
			45.910.128,84

• **Regla del orden de llegada**

No es posible ejemplificar la regla del orden de llegada con $N = 17$ ya que estamos hablando de $17! = 355{,}687{,}428{,}096{,}000$ posibles permutaciones, es un número que los ordenadores convencionales no soportan.

Por lo tanto, hemos reducido el problema teniendo en cuenta solamente 3 Comunidades Autónomas: Andalucía, Cataluña y Madrid.

COMUNIDAD AUTÓNOMA	SANIDAD	
	PRESUPUESTO	DEMANDA
Andalucía	10.824.520,00	16.033.820,25
Cataluña	9.733.584,91	14.600.377,37
Madrid	8.165.992,26	11.942.763,68
Total CC.AA.	*28.724.097,17*	42.576.961,30

Observamos que sigue siendo un problema de bancarrota pero ahora $N = 3$, por lo que hay $3! = 6$ posibles órdenes de llegada y simplifica muchísimo el procedimiento de cálculo de la regla.

Primeramente, escribimos las 6 posibles ordenaciones con las iniciales de cada CCAA y para cada demanda vamos calculando: Para una i fija y para una ordenación fija, la suma de los c_i con $\pi(i) < \pi(j)$ a la que llamaremos $S(i, \pi)$.
Luego restamos $E - S(i, \pi)$ y hacemos el máximo entre el cálculo anterior y 0. Después, calculamos el mínimo entre el máximo obtenido y c_i. Finalmente, sumamos cada fila de esta i fija y lo dividimos entre 6, es decir, lo promediamos.

Posibles órdenes	ACM	AMC	CAM	CMA	MAC	MCA		RA
Demandas								
16.033.820,25	16.033.820,25	16.033.820,25	14.123.719,81	2.180.956,12	16.033.820,25	2.180.956,12		**11.097.848,80**
14.600.377,37	12.690.276,92	747.513,24	14.600.377,37	14.600.377,37	747.513,24	14.600.377,37		**9.664.405,92**
11.942.763,68	0,00	11.942.763,68	0,00	11.942.763,68	11.942.763,68	11.942.763,68		**7.961.842,45**

Así pues, obtenemos los siguientes repartos:

COMUNIDAD AUTÓNOMA	SANIDAD		REGLA
	PRESUPUESTO	DEMANDA	ORDEN DE LLEGADA
Andalucía	10.824.520,00	16.033.820,25	11.097.848,80
Aragón	2.061.798,94	2.783.428,57	
Principado de Asturias	1.815.602,98	2.553.191,69	
Illes Balears	1.724.941,02	2.199.299,80	
Canarias	3.132.985,65	4.053.300,18	
Cantabria	922.059,24	1.141.048,31	
Castilla y León	3.534.049,05	5.036.019,90	
Castilla - La Mancha	2.990.642,88	4.093.442,44	
Cataluña	9.733.584,91	14.600.377,37	9.664.405,92
Extremadura	1.742.520,49	2.189.041,37	
Galicia	4.107.323,84	5.467.874,86	
Madrid	8.165.992,26	11.942.763,68	7.961.842,45
Región de Murcia	1.922.556,65	2.523.355,60	
C. Foral de Navarra	1.158.559,00	1.411.993,78	
País Vasco	3.978.448,39	5.520.097,14	
La Rioja	459.646,97	551.576,36	
C. Valenciana	6.732.208,75	9.719.626,38	
Total CC.AA.	*65.007.441,02*	91.820.257,69	

6.2. Propiedades

Como hemos explicado, las propiedades básicas vienen implícitas en la propia definición de una regla, por lo tanto, es lógico que, en nuestro caso, se satisfacen los límites de las reclamaciones ya que no se puede asignar un valor negativo de dinero a una CCAA y tampoco se le dará una cantidad superior a la que ha demandado porque se supone que no lo necesitarían. También es lógico que se cumpla la eficiencia dado que el Estado realiza unos presupuestos basándose en lo que puede dar y, por lo tanto, lo distribuirá en su totalidad.

Respecto a las demás propiedades, primero estudiemos las que cumplen todas las reglas:
- El Trato igualitario es obvio que se debe cumplir, dos o más Comunidades Autónomas que reclaman lo mismo, deberían recibir el mismo presupuesto para cada una.
- El Anonimato también es lógico ya que lo único que debería tenerse en cuenta para hacer un reparto es la cantidad que necesita cada Comunidad en concepto de Sanidad, sería injusto que, por ejemplo, Madrid tuviera un trato preferente por ser la capital de España o que Cataluña recibiera más por ser la Comunidad con más turismo.
- La preservación del orden afirma que las Comunidades con mayores demandas no deberían recibir una asignación menor y, efectivamente, debería ser así porque se entiende que piden más dado que necesitan más.
- La Independencia de escala obviamente se debe cumplir ya que, si la cantidad disponible del Estado aumenta o disminuye en la misma proporción que la demanda de una Comu-

nidad, ésta debería recibir la misma asignación que antes multiplicada por el factor.

Ahora pensemos en el resto de las propiedades:
- Aseguramiento: Parece lógico pensar que todas las Comunidades tendrían que recibir una cantidad mínima.
- Autodualidad: Se puede cumplir ya que esta propiedad analiza el problema desde dos perspectivas opuestas ("lo que hay disponible" y "lo que falta") y exige que el reparto sea el mismo desde ambas. Así pues, la regla debe asignar la misma cantidad a las Comunidades dividiendo el *Estate* o la cantidad que le falta al *Estate* para llegar a la *Claim*, en este caso, lo hemos convertido en un problema de pérdidas. Es decir, es lo mismo aplicar una regla sobre un problema que trata de repartir todo lo que hay en base a unas reclamaciones que dar a cada Comunidad todo lo que demanda y descontarle la división de la parte que falta.
- Compensación completa: Se debe asegurar que hay suficiente para compensar a todas las CCAA dado que, en la situación de pandemia que nos encontramos, es necesario que todas ellas reciban algo. Esto descartaría la propiedad de compensación nula ya que ésta podría asignar 0 a las Comunidades con necesidades menores.
- Composición hacia arriba y Composición hacia abajo: En este caso, como se tratan de presupuestos generales del Estado, no suele darse la situación en la cual se cambia el *Estate*. De todas formas, si pasara, deberían cumplirse las propiedades.
- Consistencia: Es una propiedad muy importante ya que asegura que, incluso en una situación de ficción como que algunas Comunidades Autónomas "se vayan", todas recibirán la misma cantidad que al principio, es decir, esta propiedad otorga estabilidad a la decisión de reparto.

6.3. Conclusiones

Existen varios escenarios en los que se debe repartir una cantidad entre agentes cuyas reclamaciones suman más que la totalidad disponible. El objetivo central de este proyecto ha sido estudiar una de esas situaciones, se trata del caso de cómo el Ministerio de Salud central distribuye entre las Autonomías el presupuesto de salud. A pesar de ser un problema real, es muy difícil encontrar según qué datos y por ello, las demandas de cada gobierno autonómico con las que se ha tratado este problema son pura ficción pero lo suficientemente realistas como para haber podido obtener resultados ilustrativos.

Con el estudio de las reglas de reparto buscamos la manera más adecuada de distribuir el presupuesto de salud disponible. La regla proporcional, en mi opinión, no sería la adecuada dado que se trata de un tema de necesidad sanitaria y, como ya comenté en las propiedades, en una situación de pandemia no creo que dividir el presupuesto de salud proporcionalmente a cada reclamación sea la mejor opción, creo que se debería considerar que las Comunidades Autónomas que reclaman más es porque realmente necesitan más, y viceversa.

En cuanto a la regla de las mismas ganancias, según mi parecer, en este caso tiene un pro y un contra. Por un lado, esta regla asegura que todas las Comunidades Autónomas van a recibir algo pero, por otro lado, favorece a aquellas cuyas demandas son menores. De la misma manera, la regla de las mismas pérdidas tiene el pro y contra inversos: Puede asignarle 0 a alguna Comunidad pero a la vez beneficia a aquellas Comunidades que más lo necesitan.

Por lo tanto, vemos que estas dos reglas tienen características tan imprescindibles como inaceptables. Entonces, quizá en este aspecto, la opción más adecuada sería la regla del Talmud ya que es una mezcla de las reglas de las mismas ganancias y la regla de las mismas pérdidas.

Así pues, descartaríamos la regla proporcional y tendríamos que elegir entre la regla del orden de llegada y la regla del Talmud. Basándonos en las propiedades explicadas anteriormente [1], observamos que, en cuanto a propiedades, la diferencia notable entre estas dos reglas es que la talmúdica es consistente, lo cual es un punto a favor. Así pues, de acuerdo con nuestro conjunto de principios y bajo un manto de incertidumbre, la regla del Talmud es la que eligiríamos.

[1] Ver tabla 1

Bibliografía

[1] Aumann, R., *Lectures on game theory*, CRC Press (1988).

[2] Aumann, R.; Gelbaum, B.; Gillies, D.B.; Von Neumann, J., *Contributions to the theory of games*, Princeton University Press (1953).

[3] Aumann, R., Maschler M., *Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud*, Elsevier (1985).

[4] Bergantiños, G.; *Aportaciones a la teoría de juegos* (1993).

[5] Blázquez, M.G.; Gámez, C.V., *Teoría de Juegos y aplicaciones: El dilema del prisionero*

[6] Bondareva, O. N., *Some applications of linear programming methods to the theory of cooperative games*, Princeton University Press (1968).

[7] Chun, Y., *Secured lower bound, composition up, and minimal rights first for bankruptcy problems*, Elsevier (2008).

[8] Curiel, I.; Maschler. M.; Tijs, S., *Bankruptcy games*, Zeitschrift für Operations Research (1987).

[9] Dagan, N.,*New characterizations of old bankruptcy rules*, Social Choice and Welfare (1996).

[10] Driessen, T., *Cooperative games, solutions and applications*, Springer (1988).

[11] Espinel, M.C., *El reparto de lo escaso*, Revista Iberoamericana de Educación Matemática (2007).

[12] García, I.; González, J.; Fiestras, M.G., *An introductory course on mathematical game theory*, American Mathematical Society (2010).

[13] Guillaume, J., *Fixed Point Approaches to the Proof of the Bondareva-Shapley*, Economic Theory Bulletin (2018).

[14] Herrero, C.; Villar, A., *The three musketeers: four classical solutions to bankruptcy problems*, Mathematical Social Sciences (2001).

[15] Izquierdo, J.M.; Marín, J.;Martínez de Albéniz, F.J.; Núñez, M.; Ybern, N., *Jocs cooperatius i aplicacions econòmiques*, Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona (1999).

[16] Inarra, E.; Gallastegui, M.C.; Prellezo, R., *Bankruptcy of fishing resources: The northern european anglerfish fishery*, Marine Resource Economics (2002).

[17] Magaña, A., *Formación de coaliciones en los juegos cooperativos y juegos con múltiples alternativas*, Publicacions i Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya (1996).

[18] Morton, D. *Introducción a la teoría de juegos*, Alianza Editorial (1998).

[19] O'Neill, B., *Game theoretic analysis of bankruptcy problem from the Talmud*, Mathematical Social Sciences (1982).

[20] Peleg, G.; Sudhölter, P., *Introduction to the Theory of Cooperative games*, Springer (2007).

[21] Pulido, M.; Sánchez, J.; Llorca, N., *Game theory techniques for university management: An extended bankruptcy model*, Annals of Operations Research (2002).

[22] Schmeidler, D., *The nucleolus of a characteristic function game*, SIAM Journal on Applied Mathematics (1969).

[23] Shapley, L. S., *Cores of convex games*, International Journal of Game Theory (1971).

[24] Shapley L.S, *A value for n-person games*, Princeton University Press (1953).

[25] Solís, M.J.; Giménez, J.M., *The catalan health budget: A conflicting Claims approach*, Hacienda Pública Española / Review of Public Economics (2019).

[26] Thompson, W., *Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: a survey*

[27] Thomson, W., *Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: an update*, Mathematical Social Sciences (2003).

[28] Villar, A., *Cómo repartir cuando no hay bastante*, Mathematical Social Sciences (2013).

[29] Von Neumann, J.; Morgenstern, O., *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press (1944).

[30] Yeh, C.H., *Sustainability, exemption, and the constrained equal awards rule*, Mathematical Social Sciences (2004).

[31] Young, P., *Distributive justice in taxation*, Journal of Economic Theory (1988).

[32] Número de hospitalizados por Covid-19 a día 24 de diciembre de 2019.
`https://www.eldiario.es/sociedad/mapa-datos-coronavirus-espana-comunidades-autonomas-diciembre-24_1_1039633.html`

[33] Presupuestos generales de las Comunidades Autónomas. Pág. 27.
`https://serviciostelematicosext.hacienda.gob.es/SGCIEF/PublicacionPresupuestos/aspx/MenuREP.aspx`