Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Passeig aleatori

Autor: Marc Jovaní Bertran

Director: Dr. Carles Rovira Escofet
Realitzat a: Departament de matemàtiques i informàtica

Barcelona, 21 de juny de 2020

Abstract

In this project first we will study the Markov chains, a type of stochastic process in discrete time, that will be useful to us to study the random walk, which is a type of Markov chain, form which will see some important results. We are also going to see the Brownian Motion, an stochastic process in continuous time, and we are going to study the relation between the random walk and the Brownian motion. Finally we will show some simulations related with the processes that we have seen.

Resum

En aquest treball primer estudiarem les cadenes de Markov, un tipus de procés estocàstic discret, que ens servira per estudiar posteriorment el passeig aleatori que és un tipus de cadena de Markov, de qual veurem alguns resultats importants. També veurem el moviment Brownià, un procés estocàstic continu, i estudiarem la relació que hi ha entre el passeig aleatori i el moviment Brownià. Finalment mostrem algunes simulacions relacionades amb els processos que hem vist.

2010 Mathematics Subject Classification. 60G50, 60G22, 60F17

Agraïments

Vull agrair al meu tutor Carles Rovira per ajudar-me i guiar-me en el desenvolupament del treball. També voldria agrair a la meva família i amics per haver-me recolzat i animat durant el treball.

Índex

1 Introducció

En aquest treball veurem diferents processos estocàstics. Els processos estocàstics són de gran importància en múltiples disciplines científiques com la física, la biologia, la química, i també en branques de la enginyeria i la economia, ja que permeten l'estudi de models de sistemes que aparentment tenen un comportament aleatori.

Els processos estocàstics es poden dividir en diverses categories en funció de les seves propietats matemàtiques. Tots els processos que veurem en aquest treball són d'un tipus anomenat processos de Markov. La característica principal d'aquest tipus de procés és que no guarden memòria de on han estat en el passat. Això vol dir que només l'estat actual del procés influeix en on anirà posteriorment.

Els processos de Markov es poden dividir en dos categories, depenent de si el temps és discret o continu. En el cas que el temps és discret els processos s'anomenen cadenes de Markov.

El treball està dividit en tres seccions.

En la primera estudiarem les cadenes de Markov, il·lustrant algunes de les seves propietats amb exemples. Això ens servira en la següent secció on ens centrarem en un tipus concret de cadena de Markov, el passeig aleatori.

Finalment presentarem un procés continu, el moviment Brownià, que originalment va ser creat per modelitzar el moviment d'una partícula de pol·len en un liquid. I veurem la relació que hi ha entre el passeig aleatori i el moviment Brownià a traves d'un resultat molt important de la teoria de probabilitat, el Teorema Central del Límit Funcional.

Abans de començar però definirem formalment que és un procés estocàstics i veurem algunes propietats d'aquests que farem servir més endavant.

1.1 Processos estocàstics

Un procés estocàstic és una família de variables aleatòries reals $\{X_t,\ t \in T\}$ definides en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, indexades per un conjunt T.

El conjunt de paràmetres T representa el temps, si $T = \mathbb{N}$ es diu que el procés és discret, si T no és numerable aleshores diem que el procés és continu, per exemple $T = [0, \infty)$ o $T = [a, b] \subset \mathbb{R}_+$.

Un procés $\{X_t,\ t \in T\}$ es diu que és de segon ordre si $E(X_t^2) < \infty$ per a tot $t \in T$. La mitjana i la covariància d'un procés de segon ordre $\{X_t,\ t \in T\}$ es defineixen com

$$m_X(t) = E(X_t) \tag{1.1}$$

$$\Gamma_X(s,t) = Cov(X_s, X_t) = E((X_s - m_X(s))(X_t - m_X(t))) \tag{1.2}$$

La variància del procés es defineix com

$$\sigma_X^2 = \Gamma_X(t,t) = Var(X_t)$$

Les distribucions en dimensió finita del procés $\{X_t,\ t \in T\}$ consisteixen en les lleis de probabilitat multi-dimensionals de qualsevol família finita de vectors aleatoris $X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}$, on $t_1, \ldots, t_n \in T$ i $n \geq 1$ és arbitrari.

El següent resultat conegut com el Teorema d'existència de Kolmogorov, assegura que existeix un procés estocàstic associat a una família de distribucions en dimensió finita que satisfacin una condició de compatibilitat.

Teorema 1.1. *Considerem una família de probabilitats*

$$\{P_{t_1,\ldots,t_n};\ 0 \leq t_1 < \cdots < t_n, n \geq 1\}, \tag{1.3}$$

tals que:

1. $P_{t_1,\ldots,t_n}$ *és una probabilitat en* $\mathbb{R}^n$.
2. *Si* $\{0 \leq s_1 < \cdots < s_m\} \subset \{0 \leq t_1 < \cdots < t_n\}$, *aleshores*

$$P_{t_1,\ldots,t_n} \circ \pi^{-1} = P_{s_1,\ldots,s_m}$$

on $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *és la projecció natural associada als dos conjunts d'índexs.*

Aleshores, existeix un procés estocàstic $\{X_t,\ t \in T\}$ *que té la família* $\{P_{t_1,\ldots,t_n}\}$ *com a distribucions de dimensió finita.*

Per a cada $\omega \in \Omega$ fixat, l'aplicació

$$t \to X_t(\omega)$$

definida per tot $t \in T$, s'anomena realització o trajectòria del procés $\{X_t,\ t \in T\}$.

2 Cadenes de Markov

Les cadenes de Markov són un tipus de proces estocàstic discret que es caracteritzen per la propietat de que no tenen "memòria"d'on han estat anteriorment. Es a dir que l'estat actual és l'únic que influeix a on anirà el proces. El fet de que es digui que un proces és discret ve donat pel fet que el conjunt d'estats que pot prendre el proces és un conjunt finit o numerable.

La importància d'aquests tipus de processos sorgeix de la seva utilitat a l'hora de modelar gran quantitat de fenòmens, i també que la propietat de no tenir "memòria"permet predir més fàcilment el comportament de les cadenes de Markov, i calcular les esperances i probabilitats en els diferents estats. Comencem amb algunes definicions.

2.1 Definicions i propietats bàsiques

Sigui I un conjunt numerable, que anomenem *espai d'estats*. Cada $i \in I$ s'anomena *estat*. Diem que $\lambda = (\lambda_i : i \in I)$ és una mesura en I si $0 \leq \lambda_i < \infty$ per tot $i \in I$. Si a més es compleix que $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$, diem que λ és una distribució.

Diem que la matriu $P = (p_{ij} : i, j \in I)$ és *estocàstica* si tota fila $(p_{ij} : j \in I)$ és una distribució, es a dir si $\sum_{i \in I} p_{ij} = 1, \ \forall j \in I$.

Definició 2.1. *Diem que un procés $(X_n)_{n \geq 0}$ és una cadena de Markov amb distribució inicial λ i matriu de transició P si*

1. *X_0 té distribució λ.*
2. *$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n), \quad \forall n \geq 0, i_0, i_1, \ldots, i_{n+1} \in I$.*

Definició 2.2. *Una cadena de Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ es diu que és homogènia si*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}.$$

Notació 1. *Diem que $(X_n)_{n \geq 0}$ és $Markov(\lambda, P)$ per abreviar.*

A la segona part de la definició 2.1 es veu aquesta falta de memòria de les cadenes de Markov, ja que la probabilitat d'anar a un estat concret en el següent pas només depèn de l'estat actual. El següent teorema ens dona una altre definició de cadena de Markov que ens serà útil per fer alguns càlculs.

Teorema 2.3. *Un procés $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$ és $Markov(\lambda, P)$ si i només si $\forall i_1, \ldots, i_N \in I$*

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_N = i_N) = \lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{N-1} i_N}. \tag{2.1}$$

Demostració.

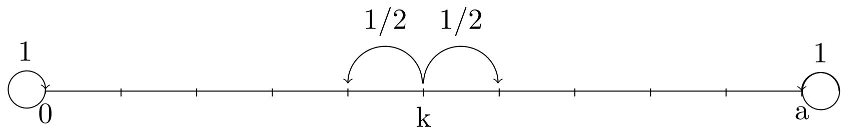
$$\begin{aligned} \Rightarrow] \quad & \mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_N = i_N) \\ &= \mathbb{P}(X_0 = i_0)\mathbb{P}(X_1 = i_1 | X_0 = i_0)\mathbb{P}(X_N = i_N | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{N-1} = i_{N-1}) \\ &= \lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{N-1} i_N}. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$] Si es compleix (2.1) per N si sumem a banda i banda per tot $i_n \in I$ tenim que també es compleix per $N-1$. Per inducció es compleix per tot $n = 0, \dots, N$, en particular $\mathbb{P}(X_0 = i_0) = \lambda_{i_1}$ i

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) \\ &= \mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n, X_{n+1} = i_{n+1}) / \mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) \\ &= p_{i_n i_{n+1}}. \end{aligned}$$

Per tant $(X_n)_{0 \le n \le N}$ és $Markov(\lambda, P)$. □

Exemple 2.4. [Passeig aleatori amb barreres absorbents] Sigui $a > 1$ un enter, considerem una partícula sobre els enters entre 0 i a, on per tot enter $0 < k < a$ es té una probabilitat de 1/2 de que la partícula vagi a $k-1$ o a $k+1$. I si k és 0 o a aleshores el proces es manté en 0 o a respectivament amb probabilitat 1. A aquest proces se'l anomena passeig aleatori amb barreres absorbents.



Sigui X_n una variable aleatòria que es igual a la posició de la partícula en l'instant n, llavors $(X_n)_{n \ge 0}$ és una cadena de Markov, ja que donats $X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$ el comportament de X_n només depèn de X_{n-1}. A més com que les probabilitats de transició no depenen de n, el proces és homogeni.

Per remarcar que les cadenes de Markov no tenen memòria dels estats passats tenim el següent teorema. Escrivim $\delta_i = (\delta_{ij} : j \in I)$ on δ_{ij} és la delta de Kronecker,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

Teorema 2.5. *Sigui $(X_n)_{n \ge 0}$ $Markov(\lambda, P)$. Aleshores, condicionat a $X_m = i$, $(X_m + n)_{n \ge 0}$ és $Markov(\delta_i, P)$ i és independent de $X_0, \dots, X_m$.*

Demostració. Hem de veure que per a qualsevol esdeveniment A determinat per $X_0, \dots, X_m$ tenim que

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\{X_m = i_m, \dots, X_{m+n} = i_{m+n}\} \cap A | X_m = i) \\ &= \delta_{i i_m} p_{i_m i_{m+1}} \cdots p_{i_{m+n-1} i_{m+n}} \mathbb{P}(A | X_m = i). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Comencem considerant l'esdeveniment elemental $A = \{X_0 = i_0, \dots, X_m = i_m\}$, en aquest cas tenim que

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\{X_m = i_m, \dots, X_{m+n} = i_{m+n}\} \cap A | X_m = i) \\ &= \mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_{m+n} = i_{m+n},\ i = i_m) / \mathbb{P}(X_m = i) \\ &= \delta_{i i_m} p_{i_m i_{m+1}} \cdots p_{i_{m+n-1} i_{m+n}} \times \mathbb{P}(X_0 = i_0, \dots, X_m = i_m,\ i = i_m) / \mathbb{P}(X_m = i). \end{aligned}$$

En general tot esdeveniment A determinat per $X_0, \dots, X_m$ es pot escriure com la unió numerable d'esdeveniments simples $A_k = \{X_0 = i_{0,k}, \dots, X_m = i_{m,k}\}$, disjunts,

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Llavors A compleix la igualtat (2.2), ja que $\forall k$, A_k la compleix i A és el resultat de sumar-les totes. $\square$

Notació 2. *Sigui A un esdeveniment escrivim $\mathbb{P}_i(A)$ per referir-nos a $\mathbb{P}(A|X_0 = i)$, si $\lambda_i > 0$.*

Ens interessa poder calcular la probabilitat d'estar en un estat concret després de n passos. Per fer-ho veurem, en el següent teorema, que només necessitem calcular les entrades de l'n-esima potencia de P.

Per calcular P^n quan hi ha un nombre finit d'estats usem el producte de matrius usual. Però quan el conjunt d'estats I és numerable cal generalitzar el producte de matrius de la següent manera:

$$(P^2)_{ij} = \sum_{k\in I} p_{ik}p_{kj}, \quad (P^3)_{ij} = \sum_{k_1\in I} p_{ik_2}(P^2)_{k_2 j} = \sum_{k_1\in I} p_{ik_2}\left(\sum_{k\in I} p_{ik}p_{kj}\right). \tag{2.3}$$

De manera similar definim P^n. Per conveni P^0 és la matriu identitat Id.

Notació 3. *Utilitzem $(P^n)_{ij} = p_{ij}^{(n)}$ per referir-nos al valor (i, j) de la matriu p^n.*

Teorema 2.6. *Sigui $(X_n)_{n\geq 0}$ $Markov(\lambda, P)$. Llavors $\forall n, m \geq 0$*

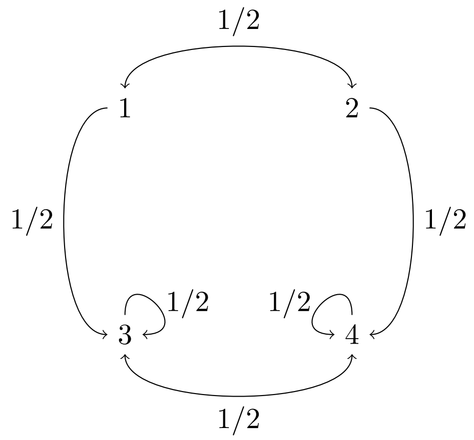
1. $\mathbb{P}(X_n = j) = (\lambda P^n)_j$,
2. $\mathbb{P}_i(X_n = j) = \mathbb{P}(X_{n+m} = j|X_m = i) = p_{ij}^{(n)}$.

Demostració. 1. Pel teorema 2.3

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = j) &= \sum_{i_1\in I}\cdots\sum_{i_{n-1}\in I}\mathbb{P}(X_0 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = j)\\ &= \sum_{i_1\in I}\cdots\sum_{i_{n-1}\in I}\lambda_i p_{i_1 i_2}\cdots p_{i_{n-1}i_n} = (\lambda P^n)_j.\end{aligned}$$

2. Per el teorema 2.5, $(X_{n+m})_{n\geq 0}$ és $Markov(\delta_i, P)$, per tant canviat $\lambda_i = \delta_i$ al resultat anterior ja estaríem. $\square$

Exemple 2.7. Considerem la cadena de Markov amb quatre estats:



que té per matriu de transició

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Volem calcular una formula general per a saber la probabilitat de que sortint de i després de n passos tornem a estar a j.

Primer de tot calculem els valors propis de P, amb el polinomi característic.

$$\lambda^4 - \lambda^3 - \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda}{4} = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2}, \quad \lambda_4 = 0.$$

Calculem els vectors propis.

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 1, 1, 1,) \\ v_1 &= (1, 1, 0, 0,) \\ v_1 &= (-1, 1, 0, 0), \\ v_1 &= (-1, 1, -1, 1), \end{aligned}$$

Com que els valors propis són diferents P diagonalitza i per tant

$$P^n = S \begin{pmatrix} -\frac{1}{2^n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} S^{-1}$$

on

$$S = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

I per tant ens queda

$$P^n = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} \\ \frac{1}{2^n} & 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matriu P^n ens dona la formula general que buscàvem.

2.2 Estructura de classe

A vegades les cadenes de Markov es poden dividir en parts més petites més fàcils d'entendre, i ajuntant-les ens donen una idea del total.

Definició 2.8. *Diem que i va a j si* $\mathbb{P}_i(X_n = j,\ \textit{per algun } n \geq 0) > 0$*, i ho escrivim com* $i \to j$.

Diem que i està comunicat amb j si $i \to j$ *i* $j \to i$*, i ho escrivim com* $i \leftrightarrow j$.

Observem que la relació $\to$ és transitiva i $\leftrightarrow$ és d'equivalència, per tant podem fer una partició de I en *classes comunicants*. Aquesta divisió de la cadena en classes comunicants ens diu que dins d'una mateixa classe la cadena pot anar d'un estat a un altre i tornar amb probabilitat positiva, però quan dos estats estan en classes diferents això no és possible.

Definició 2.9. *Diem que una classe* C *és tancada si* $i \in C,\ i \to j\ \Rightarrow j \in C$*, es a dir tot estat de* C *va a un estat de* C*, per tant quan la cadena "entra"a* C *sempre es queda dins, no en surt, d'aquí que se li digui tancada.*

Definició 2.10. *Un estat i és absorbent si* $\{i\}$ *és una classe tancada.*

A l'exemple 2.4 donat que quan la cadena està en l'estat 0 o a no es mou, $\{0\}$ i $\{a\}$ són dues classes comunicants i tancades ja que el proces un cop hi entra ja no en surt, per tant 0 i a són estats absorbents. Per altra banda $\{1, \ldots, a-1\}$ és també una classe comunicant ja que pots anar entre dos estats qualsevol amb probabilitat positiva, però no és tancada ja que des de 1 es pot anar a 0 i des de $a-1$ es pot anar a a que són classes diferents.

A l'exemple 2.7 l'estat 1 pot anar al 2 i tornar amb probabilitat positiva, el 1 pot anar al 3 però no tornar i el mateix passa amb el 2 i el 4, per tant $\{1, 2\}$ és una classe comunicant no tancada. Mentre que $\{3, 4\}$ és una classe, ja que es pot anar del 3 al 4 i tornar, i a més és tancada.

Definició 2.11. *Una cadena on* I *és una única classe diem que és irreductible.*

2.3 Temps d'arribada i probabilitat d'absorció

A continuació estudiarem com calcular la probabilitat d'anar a un estat o un subconjunt d'estats sortint d'un estat concret, i també quin és el temps mitja per arribar-hi.

Definició 2.12. *Sigui* $(X_n)_{n\geq 0}$ *una cadena de Markov amb matriu de transició* P*. Sigui* A *un subconjunt de* I*. Definim el temps d'arribada a* A *com la variable aleatòria* H^A : $\{0, 1, 2, \ldots\} \cup \{\infty\}$ *donada per*

$$H^A(\omega) = \inf\{n \geq 0 : X_n(\omega) \in A\}. \tag{2.4}$$

I amb aquesta la probabilitat de que des de i $(X_n)_{n\geq 0}$ *arribi a* A *és*

$$h_i^A = \mathbb{P}_i(H^A < \infty).$$

Quan A *és una classe tancada*

Teorema 2.13. *El vector de probabilitats d'arribada $h^A = (h_i^A : i \in I)$ és la solució minimal no negativa del sistema d'equacions lineals*

$$\begin{cases} h_i^A = 1 & \text{for } i \in A, \\ h_i^A = \sum_{j \in I} p_{ij} h_j^A & \text{for } i \notin A, \end{cases} \tag{2.5}$$

Demostració. Primer veiem que h^A satisfà (2.5). Si $X_0 = i \in A$, llavors $H^A = 0 \Rightarrow h_i^A = 1$. Si $X_0 = i \notin A$, llavors $H^A \geq 1$, aixi que utilitzant la propietat de Markov

$$\mathbb{P}_i(H^A < \infty | X_1 = j) = \mathbb{P}_j(H^A < \infty) = h_j^A.$$

de manera que

$$\begin{aligned} h_i^A = \mathbb{P}_i(H^A < \infty) &= \sum_{j \in I} \mathbb{P}_i(H^A < \infty, X_1 = j) \\ &= \sum_{j \in I} \mathbb{P}_i(H^A < \infty | X_1 = j) \mathbb{P}_i(X_1 = j) = \sum_{j \in I} p_{ij} h_j^A. \end{aligned}$$

Ara veiem que és minimal. Sigui $x = (x_i : i \in I)$ una altra solució de (2.5). Si $i \in A$, tenim que $h_i^A = x_i = 1$. Suposem per tant que $i \notin A$, llavors

$$x_i = \sum_{j \in I} p_{ij} x_j = \sum_{j \in A} p_{ij} + \sum_{j \notin A} p_{ij} x_j.$$

Substituint x_j obtenim

$$\begin{aligned} x_i &= \sum_{j \in A} p_{ij} + \sum_{j \notin A} p_{ij} \left(\sum_{k \in A} p_{jk} + \sum_{k \notin A} p_{jk} x_k \right) \\ &= \mathbb{P}_i(X_1 \in A) + \mathbb{P}_i(X_1 \notin A, X_2 \in A) + \sum_{j \notin A} \sum_{k \notin A} p_{ij} p_{jk} x_k. \end{aligned}$$

Repetint aquesta substitució de l'ultim x, després de n passos obtenim

$$x_i = \mathbb{P}_i(X_1 \in A) + \cdots + \mathbb{P}_i(X_1 \notin A, \ldots, X_{n-1} \notin A, X_n \in A) + \sum_{j_1 \notin A} \cdots \sum_{j_n \notin A} p_{ij_1} \ldots p_{j_{n-1} j_n} x_{j_n}.$$

Llavors si x no és negatiu, tampoc ho és l'ultim terme de la dreta, i la resta de termes sumen $\mathbb{P}_i(H^A \leq n)$. Per tant $x_i \geq \mathbb{P}_i(H^A \leq n) \quad \forall n$, per tant

$$x_i \geq \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}_i(H^A \leq n) = \mathbb{P}_i(H^A < \infty) = h_i.$$

□

Definició 2.14. *Definim el temps mitja per arribar a A com*

$$k_i^A = \mathbb{E}_i(H^A) = \sum_{n < \infty} n \mathbb{P}(H^A = n) + \infty \mathbb{P}(H^A = \infty).$$

Teorema 2.15. *El vector de temps mitjans d'arribada $k^A = (k_i^A : i \in I)$ és la solució minimal no negativa del sistema d'equacions lineals*

$$\begin{cases} k_i^A = 0 & \text{for } i \in A, \\ k_i^A = 1 + \sum_{j \notin I} p_{ij} k_j^A & \text{for } i \notin A, \end{cases} \tag{2.6}$$

Demostració. Primer veiem que k^A satisfà ((2.6)). Si $X_0 = i \in A$, llavors $H^A = 0 \Rightarrow k_i^A = 0$. Si $X_0 = i \notin A$, llavors $H^A \geq 1$, i utilitzant la propietat de Markov

$$\mathbb{E}_i(H^A | X_1 = j) = 1 + \mathbb{E}_j(H^A).$$

de manera que

$$k_i^A = \mathbb{E}_i(H^A) = \sum_{j \in I} \mathbb{E}_i(H^A \mathbb{1}_{X_1 = j}) = \sum_{j \in I} \mathbb{E}_i(H^A | X_1 = j) \mathbb{P}_i(X_1 = j) = 1 + \sum_{j \notin A} p_{ij} k_j^A.$$

Ara veiem que és minimal. Sigui $y = (y_i : i \in I)$ una altra solució de (2.6). Si $i \in A$, tenim $k_i^A = y_i = 0$. Suposem que $i \notin A$, llavors

$$\begin{aligned} y_i &= 1 + \sum_{j \notin A} p_{ij} y_j = 1 + \sum_{j \notin A} p_{ij} \left(1 + \sum_{k \notin A} p_{jk} y_k \right) \\ &= \mathbb{P}_i(H^A \geq 1) + \mathbb{P}_i(H^A \geq 2) + \sum_{j \notin A} \sum_{k \notin A} p_{ij} p_{jk} y_k. \end{aligned}$$

Repetint la substitució de la y ultim a l'ultim terme, després de n passos obtenim

$$y_i = \mathbb{P}_i(H^A \geq 1) + \cdots + \mathbb{P}_i(H^A \geq n) + \sum_{j_1 \notin A} \cdots \sum_{j_n \notin A} p_{ij_1} \cdots p_{j_{n-1} j_n} y_{j_n}.$$

Llavors si y és no negatiu

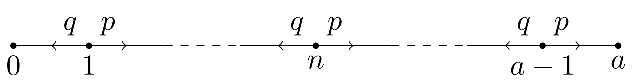
$$y_i \geq \mathbb{P}_i(H^A \geq 1) + \cdots + \mathbb{P}_i(H^A \geq n).$$

I si fem tendir $n \to \infty$,

$$y_i \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(H^A \geq n) = \mathbb{E}_i(H^A) = k_i^A.$$

$\square$

Exemple 2.16. Considerem una variant del proces plantejat a l'exemple 2.4, en el que la probabilitat d'anar a l'esquerra és de $p \in [0, 1]$ i la probabilitat d'anar a la dreta és $q = 1 - p$.



Segueix sent una cadena de Markov, i les probabilitats de transició són

$$\begin{aligned} &p_{00} = p_{aa} = 1, \\ &p_{n,n+1} = p, p_{n,n-1} = q, \quad \forall n \in \{1, 2, \ldots, a-1\}. \end{aligned}$$

Suposem que la partícula surt des del punt $n \in \{0, 1, \ldots, a\}$. Utilitzant el teorema 2.13 la probabilitat de que el proces arribi a l'estat a, és la solució minimal no negativa del sistema

$$\begin{aligned} &h_a = 1, \\ &h_n = p h_{n+1} + q h_{n-1}, \quad \forall n \in \{1, 2, \ldots, a-1\}, \\ &h_0 = 0, \end{aligned}$$

On $h_n = ph_{n+1} + qh_{n-1}$ és una equació amb diferencies, i $h_0 = 0$, $h_a = 1$ són les condicions de frontera de h_n. Suposem que la solució és de la forma $h_n = \lambda^n$. Llavors ens queda $p\lambda^2 - \lambda + q = 0$ que té per arrels $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = q/p$. Si $p \neq q$ tenim que donades dues constants arbitraries A i B la solució general és

$$h_n = A + B\left(\frac{q}{p}\right)^n. \tag{2.7}$$

Les condicions de frontera només es compleixen si

$$A + B = 0, \quad A + B\left(\frac{q}{p}\right)^a = 1.$$

per tant de la primera igualtat obtenim que $A = -B$ i utilitzant-ho a la segona

$$-B + B\left(\frac{q}{p}\right)^a = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{\left(\frac{q}{p}\right)^a - 1}.$$

per tant

$$h_n = -\frac{1}{\left(\frac{q}{p}\right)^a - 1} + \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^n}{\left(\frac{q}{p}\right)^a - 1} = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^n - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^a - 1}. \tag{2.8}$$

Per veure que aquesta és la probabilitat que buscàvem hem de comprovar que és la solució minimal no negativa, per fer-ho veiem que la solució és única, això és perquè totes les solucions de $h_n = ph_{n+1} + qh_{n-1}$ són de la forma (2.7). Donada una solució arbitraria x_n de $h_n = ph_{n+1} + qh_{n-1}$, les constants A i B es poden triar de manera que $x_0 = h_0$ i $x_1 = h_1$. Llavors per tot n

$$(h_{n-1} - x_{n-1}) = p(h_n - x_n) + q(h_{n-2} - x_{n-2}) \Rightarrow h_n = x_n.$$

per tant les dues solucions coincideixen.

Si $p = q = 1/2$ la solució (2.7) no funciona ja que $\lambda_1 = 1 = \lambda_2$, però fent el limit quan $p \to 1/2$ a (2.8) tenim

$$\lim_{p\to\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^a - 1} = \frac{0}{0}.$$

aplicant la regla de l'Hopital

$$\lim_{p\to\frac{1}{2}} \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^n - 1}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^a - 1} = \lim_{p\to\frac{1}{2}} \frac{n\left(\frac{1-p}{p}\right)^{n-1}\left(-\frac{1}{p^2}\right)}{a\left(\frac{1-p}{p}\right)^{a-1}\left(-\frac{1}{p^2}\right)} = \frac{n}{a}.$$

De manera similar podem solucionar el sistema

$$\begin{aligned} &h_0 = 1, \\ &h_n = ph_{n+1} + qh_{n-1}, \quad \forall n \in \{1, 2, \ldots, a-1\}, \\ &h_a = 0. \end{aligned}$$

per tal de trobar la probabilitat de que el proces sigui absorbit pel 0.

Quan el proces arriba a 0 o a podem dir que el proces s'ha "acabat"ja que la particular ja no es mourà més. Així que podem calcular el temps mitja que tarda el proces en acabar quan surt des de $n \in \{0, 1, \ldots, a\}$, utilitzant el teorema 2.15, només hem de trobar la solució minimal no negativa del sistema

$$\begin{aligned} &k_0 = k_a = 0, \\ &k_n = pk_{n+1} + qk_{n-1} + 1, \quad \forall n \in \{1, 2, \ldots, a-1\}, \end{aligned}$$

Tornem a tenir una equació amb diferencies $k_n = pk_{n+1} + qk_{n-1} + 1$, amb valors frontera $k_0 = 0 = k_a$, però ara l'equació k_n no és homogènia. Veiem que $n/(q-p)$ és una solució forma de k_n, efectivament

$$\begin{aligned} pk_{n+1} + qk_{n-1} + 1 &= \frac{(n+1)q + (n-1)p}{q-p} + 1 = \frac{np + p + nq - q + q - p}{q-p} \\ &= \frac{n(p+q)}{q-p} = \frac{n}{q-p} = k_n. \end{aligned}$$

Siguin x_n, Y_n dues solucions de k_n, llavors $d_n = x_n - y_n$,

$$d_n = pd_{n+1} + qd_{n-1}. \tag{2.9}$$

que és una equació amb diferencies igual que la que teníem quan hem calculat les probabilitats, i per tant sabem que té per solució $A + B\left(\frac{q}{p}\right)^n$. Si $p \neq q$ la solució general de k_n és de la forma

$$k_n = \frac{n}{q-p} + A + B\left(\frac{q}{p}\right)^n.$$

Aplicant les condicions de fontera

$$k_0 = 0 = A + B, \quad k_a = 0 = \frac{a}{q-p} + A + B\left(\frac{q}{p}\right)^a.$$

tenim que

$$-A = B = -\frac{a}{q-p}\frac{1}{\left(\frac{q}{p}\right)^a - 1}.$$

per tant

$$k_n = \frac{n}{q-p} - \frac{a}{q-p}\frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a}.$$

Igual que abans aquesta solució no ens serveix quan $p = q = 1/2$, però en aquest cas la solució formal és $-n^2$, efectivament

$$-\frac{1}{2}(z+1)^2 - \frac{1}{2}(z-1)^2 + 1 = \frac{-z^2 - 2z - 1 - z^2 + 2z - 1 + 2}{2} = -z^2.$$

Llavors totes les solucions de k_n quan $p = q$ són de la forma

$$k_n = -z^2 + A + Bz.$$

aplicant les condicions de frontera tenim que

$$k_0 = 0 = A, \quad k_a = 0 = -a^2 + A + Ba = -a^2 + Ba \Rightarrow B = a.$$

per tant

$$k_n = n(a-n).$$

2.4 Temps d'aturada i cadenes de Markov

Hem vist que les cadenes de Markov no tenen memòria en el sentit que per qualsevol temps n , condicionant a $X_n = i$, el proces després de n passos torna a començar des de i com si no hagués passat res. Si en comptes de condicionar a $X_n = i$, esperem a que el proces arribi a l'estat i en un temps aleatori T, que podem dir del proces després del temps T?

Per contestar aquesta pregunta primer hem de veure com és aquest temps T.

Definició 2.17. *Una variable aleatòria $H : \Omega \to \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$ és un temps d'aturada si $\{H = n\}$ nomes depèn de $X_0, X_1, \dots, X_n$.*

Aquesta definició ens diu que un temps d'aturada pots saber quan passa només mirant el proces. Això és que el necessitàvem que complís el temps T. El següent teorema ens diu com es comporten les cadenes de Markov quan estan condicionades per un temps d'aturada, i respon a la pregunta que ens hem fet abans. Aquest resultat és una versió del que es coneix com a propietat forta de Markov.

Teorema 2.18. *Sigui $(X_n)_{n\geq 0}$ $Markov(\lambda, P)$ i sigui T un temps d'aturada de $(X_n)_{n\geq 0}$. Llavors $(X_{T+n})_{n\geq 0}$ condicionat a $T < \infty$ i $X_T = i$ és $Markov(\lambda_i, P)$ i és independent de $X_0, X_1, \dots, X_T$.*

Demostració. Si B es un esdeveniment determinat per $X_0, \dots, X_T$, llavors $B \cap \{T = m\}$ està determinat per $X_0, \dots, X_T$, aplicant la propietat de Markov al temps T

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\{X_T = j_0, X_{T+1} = j_1, \dots, X_{T+n} = j_n\} \cap B \cap \{T = m\} \cap \{X_T = i\})\\ &= \mathbb{P}_i(X_0 = j_0, X_1 = j_1, \dots, X_n = j_n)\mathbb{P}(B \cap \{T = m\} \cap \{X_T = i\}).\end{aligned}$$

On hem utilitzat la condició de que $T = m$ per tal de canviar m per T. Ara sumat per $m = 0, 1, 2, \dots$ i dividint per $\mathbb{P}(T < \infty, X_T = i)$ obtenim

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\{X_T = j_0, X_{T+1} = j_1, \dots, X_{T+n} = j_n\} \cap B | T < \infty, X_T = i)\\ &= \mathbb{P}_i(X_0 = j_0, X_1 = j_1, \dots, X_n = j_n)\mathbb{P}(B | T < \infty, X_T = i).\end{aligned}$$

□

2.5 Recurrència i transitivitat

Definició 2.19. *Sigui $(X_n)_{n\geq 0}$ $Markov(\lambda, P)$, diem que l'estat i és recurrent si*

$$\mathbb{P}_i(X_n = i, \text{ per un nombre infit de } n's) = 1.$$

Si amés es compleix que el temps mitja de retorn $m_i = \mathbb{E}_i(T_i)$ és finit llavors diem que és positivament recurrent.

I diem que és transitiu si

$$\mathbb{P}_i(X_n = i, \text{ per un nombre infit de } n's) = 0.$$

Definició 2.20. *El temps de la primera passada per l'estat i és la variable aleatòria*

$$T_i(\omega) = \inf\{n \geq 1 : X_n(\omega) = i\}.$$

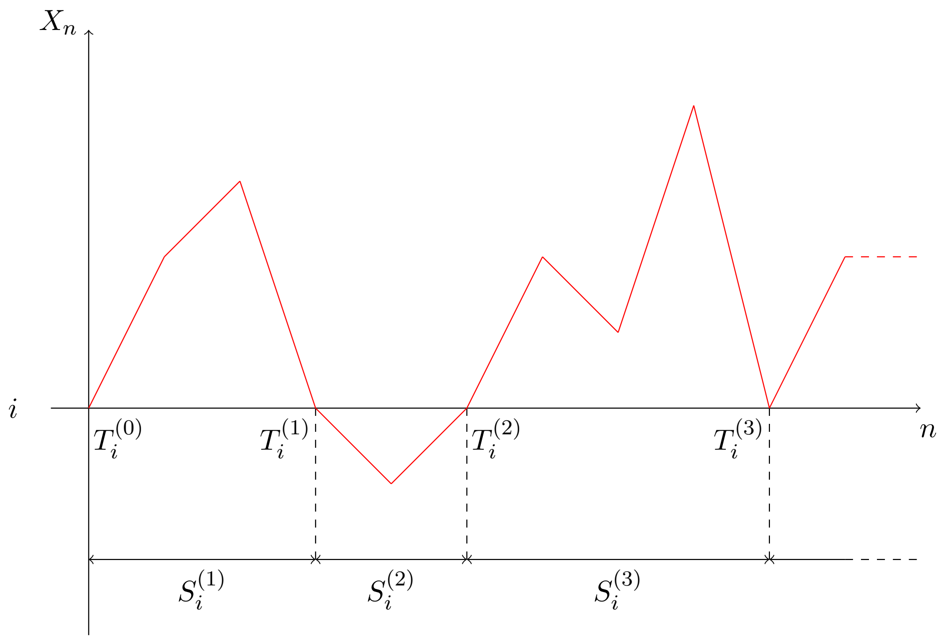
I inductivament definim el temps de la $j-essima$ passada $T_i^{(j)}$ com:

$$T_i^{(0)}(\omega) = 0, \qquad T_i^{(1)}(\omega) = T_i(\omega), \qquad T_i^{(j+1)}(\omega) = \inf\{n \geq T_i^{(j)}(\omega) + 1 : X_n(\omega) = i\}.$$

Definició 2.21. *La durada de la $j-$essima passada per l'estat i esta definida per*

$$S_i^{(j)} = \begin{cases} T_i^{(j)} - T_i^{(j-1)} & \text{si } T_i^{(j-1)} < \infty, \\ 0 & \text{altrament,} \end{cases}$$

El següent gràfic intenta les definicions anteriors



Teorema 2.22. *Es compleix que:*

1. $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) = 1 \ \Rightarrow i$ *és recurrent i* $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$.
2. $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) < 1 \ \Rightarrow i$ *és transitiu i* $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$.

En particular tot estat és o bé transitiu o bé recurrent.

Per la demostració del teorema necessitem un parell de lemes.

Lema 2.23. *Per a tot $r = 2, 3, \ldots,$ condicionat a $T_i^{(r-1)} < \infty$, es té que $S_i^{(r)}$ és independent de $\{X_m : m \leq T_i^{(r-1)}\}$ i*

$$\mathbb{P}(S_i^{(r)} = n | T_i^{(r-1)} < \infty) = \mathbb{P}_i(T_i = n).$$

Demostració. Utilitzant la propietat forta de Markov en el temps d'aturada $T = T_i^{r+1}$, està clar que $X_T = i$ en $T < \infty$. Per tant condicionada a $T < \infty$, $(X_{T+n})_{n\geq 0}$ és $Markov(\delta_i, P)$ i independent de $X_0, X_1, \ldots, X_T$.. Llavors

$$S_i(r) = \inf\{n \geq 1 : X_{T+n} = i\}.$$

i per tant $S_i(r)$ és el temps de la primera passada de $(X_{T+n})_{n\geq 0}$ per l'estat i. $\square$

Sigui $V_i = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n = i\}}$.

Lema 2.24. *Sigui $f_i = \mathbb{P}_i(T_i < \infty)$. Es compleix que $\mathbb{P}_i(V_i > r) = f_i^r$ $\forall r = 0, 1, 2, \ldots$*

Demostració. Observem que si $X_0 = i$ aleshores $\{V_i > r\} = \{T_i^{(r)} < \infty\}$. Per $r = 0$ el resultat es evident. Per hipòtesis d'inducció suposem que es cert per r, llavors

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_i(V_i > r+1) = \mathbb{P}_i(T_i^{(r+1)} < \infty) \\
&= \mathbb{P}_i(S_i^{(r+1)} < \infty, T_i^{(r)} < \infty) \\
&= \mathbb{P}_i(S_i^{(r+1)} < \infty | T_i^{(r)} < \infty)\mathbb{P}_i(T_i^{(r)} < \infty) \\
&= f_i f_i^r = f_i^{r+1}.
\end{aligned}$$

Pel lema 2.23, per tant per inducció tenim que és cert per a tot r. □

Demostració (Teorema 2.22)**.** Si $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) = 1$, llavors pel lema 2.24,

$$\mathbb{P}_i(V_i = \infty) = \lim_{r\to\infty} \mathbb{P}_i(V_i > r) = 1.$$

per tant i és recurrent i

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \mathbb{E}_i(V_i) = \infty.$$

Per altra banda, si $f_i = \mathbb{P}_i(T_i < \infty) < 1$, llavors pel lema 2.24

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \mathbb{E}_i(V_i) = \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{P}_i(V_i > r) = \sum_{r=0}^{\infty} f_i^r = \frac{1}{1-f_i} < \infty.$$

i per tant i és transitiu. □

Teorema 2.25. *Sigui C una classe comunicant. O bé tots els seus estats són transitius o bé són tots recurrents.*

Demostració. Siguin $i, j \in C$, suposem que i és transitiu. Existeixen $n, m \geq 0$ tals que $p_{ij}^{(n)} > 0$ i $p_{ji}^{(m)} > 0$, i per tot $r \geq 0$

$$p_{ii}^{(n+r+m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jj}^{(r)} p_{ji}^{(m)}.$$

Per tant

$$\sum_{r=0}^{\infty} p_{jj}^{(r)} \leq \frac{1}{p_{ij}^{(n)} p_{ji}^{(m)}} \sum_{r=0}^{\infty} p_{ii}^{(n+r+m)} < \infty.$$

pel teorema 2.22, i per aquest mateix teorema tenim que j també és transitiu.

Ara suposem que i és recurrent, pel teorema 2.22 j només pot ser recurrent o transitiu, però si fos transitiu llavors pel que acabem de demostrar i també hauria de ser transitiu, això contradiu la suposició que i és recurrent i per tant, j necessàriament ha de ser recurrent. □

Donat aquest teorema té sentit parlar de classes recurrents o transitives.

Teorema 2.26. *Tota classe recurrent és tancada*

Demostració. Sigui C una classe no tancada i veiem que C no és recurrent. Llavors existeix $i \in C$, $j \notin C$ i $m \geq 1$ tal que

$$\mathbb{P}_i(X_m = j) > 0.$$

Per tant $i \to j$, i donat que $j \notin C$ tenim que $\mathbb{P}_j(X_n = i) = 0$ per tot n i llavors

$$\mathbb{P}_i(\{X_m = j\} \cap \{X_n = i \text{ per un nombre infinit de n's}\}) = 0.$$

i això implica que

$$\mathbb{P}_i(X_n = i \text{ per un nombre infinit de n's}) < 1.$$

per tant i no és recurrent, i tampoc ho és C. $\square$

Teorema 2.27. *Tota classe finita i tancada és recurrent.*

Demostració. Sigui C una classe finita i tancada de $(X_n)_{n\geq 0}$, i suposem que $(X_n)_{n\geq 0}$ comença en C. Llavors existeix algun $i \in C$ tal que

$$0 < \mathbb{P}(X_n = i \text{ per un nombre infinit de n's}).$$

i per la propietat forta de Markov això és equivalent a

$$\mathbb{P}(X_n = i \text{ per algun n})\mathbb{P}_i(X_n = i \text{ per un nombre infinit de n's}) > 0.$$

Per tant i és recurrent, i pel teorema 2.25 la classe C també ho és.

Teorema 2.28. *Si P és irreductible i recurrent. Aleshores $\forall j \in I$ tenim que $\mathbb{P}(T_j < \infty) = 1$.*

Demostració. Utilitzant la propietat de Markov tenim

$$\mathbb{P}(T_j < \infty) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(X_0 = i)\mathbb{P}_i(T_j < \infty).$$

Per tant és suficient demostrar que $\mathbb{P}_i(T_j < \infty) = 1$ per a tot $i \in I$. Triem un m tal que $p_{ji}^{(m)} > 0$. Pel teorema 2.23, com que j és recurrent, tenim que

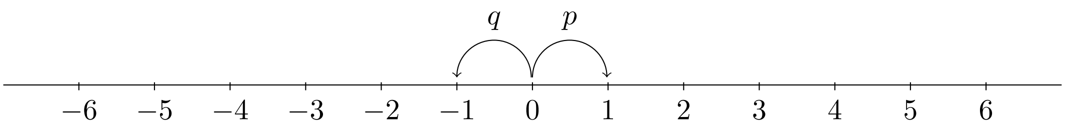
$$\begin{aligned}
1 &= \mathbb{P}_j(X_n = j \text{ per un nombre infinit de n's}) \\
&= \mathbb{P}_j(X_n = j \text{ per un per algun } n \geq m+1) \\
&= \sum_{k\in I} \mathbb{P}_j(X_n = j \text{ per un per algun } n \geq m+1 \mid X_m = k)\mathbb{P}_j(X_m = k) \\
&= \sum_{k\in I} \mathbb{P}_k(T_j < \infty)p_{jk}^{(m)}.
\end{aligned}$$

Però com $\sum_{k\in I} p_{jk}^{(m)} = 1$ llavors necessàriament $\mathbb{P}_i(T_j < \infty) = 1$. $\square$

3 Passeig aleatori

3.1 Passeig aleatori en una dimensió

Considerem una partícula que es mou sobre els enters de la recta real, de manera que en cada pas avança o retrocedeix una unitat amb probabilitat p i $q = 1 - p$ respectivament. Cada pas ocorre en intervals iguals de temps.



Aquest model correspon a una cadena de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$:

$$X_n = X_{n-1} + \xi_n = X_0 + S_n,$$

on ξ_n pren valors 1 o -1 amb probabilitat p o q respectivament, i $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$. Els estats representen la posició en l'instant n de la partícula en la recta.

Notem que $(X_n)_{n\geq 0}$ té per matriu de probabilitats $P = (p_{ij} : i, j \in \mathbb{Z})$ donada per

$$\begin{cases} p_{ij} = p & \text{si } j = i+1, \\ p_{ij} = q = 1 - p & \text{si } j = i-1, \qquad \forall i \in \mathbb{Z} \\ p_{ij} = 0 & \quad \text{altrament,} \end{cases}$$

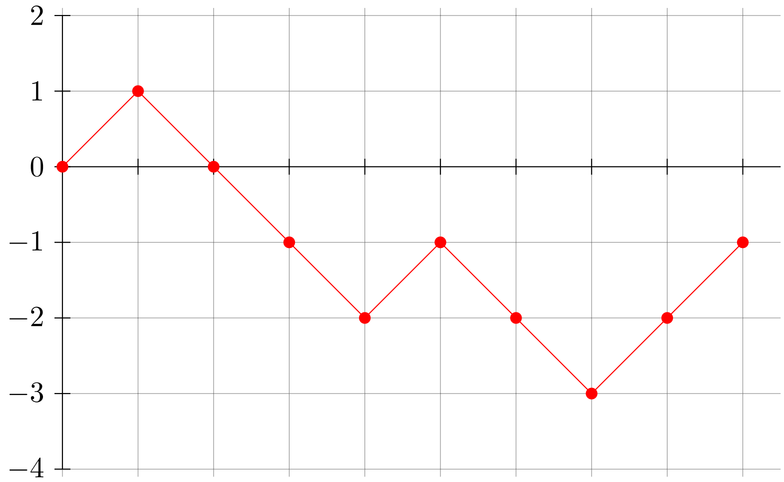
Per exemple, suposem que la partícula estava originalment en el 0 i que les variables ξ_i prenen valors

$$\begin{array}{lllll} \xi_1 = 1, & \xi_2 = -1, & \xi_3 = -1, & \xi_4 = -1, & \xi_5 = 1, \\ \xi_6 = -1, & \xi_7 = -1, & \xi_8 = 1, & \xi_9 = 1, & \ldots \end{array}$$

en aquest cas les variables que donen la posició prendran els següents valors

$$\begin{aligned} &X_0 = 0, \\ &X_1 = S_1 = \xi_1 = 1, \\ &X_2 = S_2 = \xi_1 + \xi_2 = 0, \\ &X_3 = S_3 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = -1, \\ &X_4 = S_4 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = -2, \\ &X_5 = S_5 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5 = -1, \\ &X_6 = S_6 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5 + \xi_6 = -2, \\ &X_7 = S_7 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5 + \xi_6 + \xi_7 = -3, \\ &X_8 = S_8 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5 + \xi_6 + \xi_7 + \xi_8 = -2, \\ &X_9 = S_9 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5 + \xi_6 + \xi_7 + \xi_8 + \xi_9 = -1, \\ &\ldots \end{aligned}$$

Podem representar aquesta sèrie en un gràfic on l'alçada de cada punt de l'eix x representa el punt on està el proces en aquell instant de temps.



3.1.1 Recurrència de la passejada aleatòria

Ens interessa saber si aquest proces és recurrent i si ho és per tot valor de p i q.

Podem considerar $X_0 = 0$ sense pèrdua de generalitat, ja que $(X_n)_{n\geq 0}$ és irreductible i pel lema 2.25 només cal veure que un estat és recurrent.

Per veure si el proces és recurrent utilitzant el teorema 2.22 només hem d'estudiar la convergència de $\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(n)} = \infty$. Es fàcil veure que tornar a un punt requereix un nombre parell de passos, ja que si fem per exemple $2n+1$ passos tenim que S_{2n+1} serà senar, per tant $p_{00}^{(2n+1)} = 0$ per a tot n. Llavors ens queda calcular $\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(2n)}$.

Veiem que $p_{00}^{(2n)} = \mathbb{P}_0(S_{2n} = 0)$, i $S_{2n} = 0$ si n de les variables ξ_i valen 1 i les altres n valen -1, es a dir si la partícula ha fet n passos a la dreta i n a l'esquerra), i aquesta seqüencia ve donada de triar n $1's$ entre $2n$. Per tant

$$p_{00}^{(2n)} = \mathbb{P}_0(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} p^n q^n.$$

Donat que la formula anterior és poc útil per a fer operacions, sobretot quan n és gran, utilitzarem la formula de Stirling, que ens diu que quan n és prou gran podem aproximar $n!$ per $(\frac{n}{e})^n \sqrt{2n\pi}$. Això és resultat de que

$$k! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}.$$

On $\sim$ es el símbol que s'utilitza per dir que el quocient de dues expressions tendeix a 1, quan n tendeix a infinit. Es a dir,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}} = 1.$$

I aquesta és una aproximació molt important tant teòricament com numèricament ja que té un error relativament petit fins i tot per n's petits. Per exemple per $10! = 3628800$ i la aproximació és 3598600 que representa un error del $0,8\%$, i per 100! l'error és només de $0,08\%$.

Aplicant la formula de Stirling a $\mathbb{P}_0(S_{2n} = 0)$ tenim

$$\begin{aligned} p_{00}^{(2n)} &= \binom{2n}{n} p^n q^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} p^n q^n \\ &\sim \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4n\pi}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2n\pi} p^n q^n = 2^{2n} \frac{1}{\sqrt{n\pi}} p^n q^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{n\pi}} (4pq)^n . \end{aligned}$$

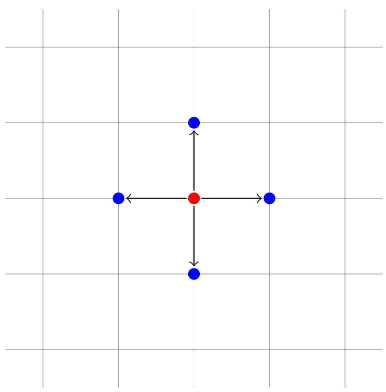
Ara per estudiar la convergència de $\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(2n)}$, primer hem veure que passa amb $\beta(p) = 4pq = 4p(1-p)$, $\forall p \in [0,1]$. Tenim que $\frac{d}{dp}\beta(p) = 4 - 8p = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$ i $\frac{d^2}{dp^2}\beta(p) = -8 < 0$ per tant la funció $\beta(p)$ assoleix un màxim en $p = \frac{1}{2}$, on $\beta\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, i en la resta de punts tenim que $\beta(p) \in [0,1)$. Aixo implica que si $p \neq 1/2$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(2n)}$ convergeix i per tant $(X_n)_{n\geq 0}$ és transitiu. Però si $p = 1/2$ tenim que $p_{00}^{2n} \sim 1/\sqrt{\pi n}$ i per tant la serie $\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(2n)}$ divergeix, cosa que implica que el passeig aleatori amb $p = q = 1/2$ és recurrent.

La conseqüència de que per tot $p \neq 1/2$ el proces sigui transitiu és que la partícula tornar de mitjana un nombre finit de vegades a l'origen, que vol dir que a partir d'un cert moment ja mai tornar a 0. La partícula "desviara"a la dreta o a l'esquerra depenent de si p és més petit o més gran que 1/2.

Ara que sabem que quan $p = q = 1/2$ el proces és recurrent, volem saber quina és la probabilitat de que la partícula torni a l'origen. Donat que $(X_n)_{n\geq 0}$ és una cadena de Markov irreductible i recurrent podem utilitzar el teorema 2.28, el qual ens diu que la probabilitat de que la partícula torni a l'origen és 1, a més aquest teorema ens diu que la probabilitat de visitar qualsevol altre punt de la recta també és 1.

3.2 Passeig aleatori en dues dimensions

Considerem el problema en dues dimensions, és a dir, la partícula ja no es mourà sobre una recta sinó sobre infinites rectes verticals i horitzontals que s'intersequen només en els enters. La partícula ara es troba sobre una intersecció i a cada pas pot anar a qualsevol de les quatre interseccions adjacents amb la mateixa probabilitat $p = 1/4$ per cadascuna d'elles.



El punt vermell del gràfic representa la posició de la partícula i els punts blaus són els punts on pot anar amb probabilitat 1/4 a cada un d'ells.

Igual que en el cas en una dimensió X_n denota la posició de la partícula,

$$X_n = X_{n-1} + \xi_n = X_0 + \sum_{i=0}^{n} \xi_i = X_0 + S_n,$$

on ara cada ξ_n és una variable aleatòria bidimensional que pren valors

$$e_1 = (1,0), \quad e_2 = (0,1), \quad -e_1 = (-1,0), \quad -e_2 = (0,-1),$$

amb

$$\mathbb{P}(\xi_n = e_1) = \mathbb{P}(\xi_n = e_2) = \mathbb{P}(\xi_n = -e_1) = \mathbb{P}(\xi_n = -e_2) = \frac{1}{4}.$$

Volem veure si el passeig aleatori en dues dimensions també és recurrent.

Sense pèrdua de generalitat suposem que el proces comença al punt $X_0 = \vec{0} = (0,0)$. Utilitzant el teorema 2.22 hem de veure si la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} p_{\vec{0}\vec{0}}^{(n)}$ divergeix. Veiem que és impossible tornar a l'origen en un nombre senar de passos, per tant tenim que $p_{\vec{0}\vec{0}}^{(2n+1)} = 0$ per tot n.

Tenim que $p_{\vec{0}\vec{0}}^{(2n)} = \mathbb{P}(S_{2n} = \vec{0})$ i $S_{2n} = 0$ si la partícula ha anat el mateix nombre de vegades cap a dalt, que cap a baix i les mateixes vegades cap a la dreta que cap a l'esquerra.

Es a dir, si denotem per k el nombre de moviments horitzontals que fa el proces i $n-k$ el nombre de moviments verticals, per tal que $S_{2n} = \vec{0}$ s'ha de complir que k ξ_i's valguin e_1 i k valguin $-e_1$, i que $(n-k)$ valguin e_2 i $(n-k)$ valguin $-e_2$. Per tant k pren valors entre 0, quan no fa cap pas horitzontal, i n, quan no fa cap pas vertical. Fixat k el nombre de camins que pot fer la partícula per arribar en $2n$ passos a $\vec{0}$, coincideix amb quantes maneres diferents tenim de treure $2n$ boles d'una urna amb k boles blanques, k boles negres, $(n-k)$ boles vermelles i $(n-k)$ boles blaves, i això és

$$\frac{(2n)!}{k!k!(n-k)!(n-k)!}.$$

Finalment com totes les trajectòries de longitud $2n$ tenen probabilitat $\frac{1}{4^{2n}}$, tenim que

$$p_{\vec{0}\vec{0}}^{(2n)} = \mathbb{P}(S_{2n} = \vec{0}) = \frac{1}{4^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{k!k!(n-k)!(n-k)!}.$$

Anem a intentar simplificar aquest nombre abans de substituir-lo a la sèrie,

$$\begin{aligned}
p_{\vec{0}\vec{0}}^{(2n)} &= \frac{1}{4^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{k!k!(n-k)!(n-k)!} \\
&= \frac{1}{4^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{n!n!} \frac{n!n!}{k!k!(n-k)!(n-k)!} \\
&= \frac{1}{4^{2n}} \binom{2n}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \\
&= \frac{1}{4^{2n}} \binom{2n}{n}^2.
\end{aligned}$$

On a la ultima igualtat utilitzem que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Per justificar aquesta igualtat, recordem que el binomi de Newton per a dos nombres reals a, b i un natural n és

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

Aplicant el binomi de Newton a $(x+1)^{2n}$ obtenim

$$(x+1)^{2n} = \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} x^i. \tag{3.1}$$

Però també tenim que

$$(x+1)^{2n} = (x+1)^n (x+1)^n = \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i \right) \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j \right). \tag{3.2}$$

Per tant els termes de la dreta de (3.1) i (3.2) han de coincidir. Fixem-nos només en els coeficients del terme x^n. A l'expressió (3.1) el coeficient és $\binom{2n}{n}$, i a l'expressió (3.2) és el producte de tots els termes tals que $i + j = n$,

$$\binom{2n}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \binom{n}{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \binom{n}{j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2.$$

Ara utilitzant la formula de Stirling tenim

$$\begin{aligned} p_{\vec{0}\vec{0}}^{(2n)} &= \frac{1}{4^{2n}} \binom{2n}{n}^2 = \frac{1}{4^{2n}} \left(\frac{(2n)!}{n!n!} \right)^2 \\ &\sim \frac{1}{4^{2n}} \left(\frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2\pi n} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4^{2n}} \left(2^{2n} \frac{\sqrt{\pi n}}{\pi n} \right)^2 = \frac{1}{\pi n}. \end{aligned}$$

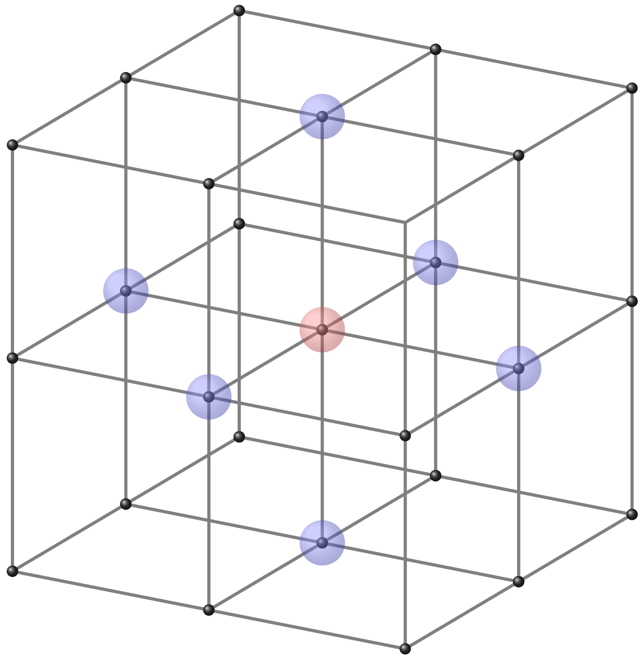
Per tant

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{\vec{0}\vec{0}}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{\vec{0}\vec{0}}^{(2n)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} = +\infty.$$

De manera que el proces és recurrent i com que $(X_n)_{n\geq 0}$ és una cadena de Markov irreductible utilitzant el teorema 2.28, tenim que la probabilitat de tornar a l'origen val 1, igual que la probabilitat de visitar qualsevol altre punt del pla.

3.3 Passeig aleatori en tres dimensions

Considerem ara el passeig aleatori en tres dimensions, de manera que ara la partícula es mourà dins l'espai i des de cada punt podrà anar en 6 direccions, cap a dalt, a baix, a la dreta, a l'esquerra, endavant o enrere, amb la mateixa probabilitat per anar a cadascuna de les direccions, $p = 1/6$.



El punt vermell del gràfic representa la posició de la partícula i els punts blaus són els punts on pot anar al següent pas.

Denotem la posició de la partícula en l'instant de temps n per X_n, de manera que

$$X_n = X_{n-1} + \xi_n = X_0 + \sum_{i=1}^{n} \xi_i = X_0 + S_n,$$

on ara cada ξ_n és una variable aleatòria bidimensional que pren valors

$$\begin{array}{ccc} \vec{e}_1 = (1,0,0), & \vec{e}_2 = (0,1,0), & \vec{e}_3 = (0,0,1), \\ -\vec{e}_1 = (-1,0,0), & -\vec{e}_2 = (0,-1,0), & -\vec{e}_3 = (0,0,-1), \end{array}$$

amb

$$\mathbb{P}(\xi_n = \pm\vec{e}_1) = \mathbb{P}(\xi_n = \pm\vec{e}_2) = \mathbb{P}(\xi_n = \pm\vec{e}_3) = \frac{1}{6}.$$

Veurem que el passeig aleatori en tres dimensions és transitiu.

Igual que amb els anteriors suposem que el proces comença al punt $X_0 = \vec{0} = (0,0,0)$. Pel teorema 2.22 hem de veure si $\sum_{n=0}^{\infty} p_{\vec{0}\vec{0}}^{(n)}$ convergeix. Igual que en els altres casos la partícula no pot tornar en un nombre senar de passos i per tant $p_{\vec{0}\vec{0}}^{(2n+1)} = 0$.

Per calcular $p_{\vec{0}\vec{0}}^{(2n)} = \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$ hem de calcular quina és la probabilitat de que la partícula torni al $\vec{0}$.

Denotem per k, j, el nombre de vegades que $\xi = \vec{e}_1$, $\xi = \vec{e}_2$, respectivament, llavors necessàriament hi ha d'haver k ξ's prenent el valor $-\vec{e}_1$ i j ξ's prenent el valor $-\vec{e}_2$, amés s'ha de complir que $k + j \leq n$ i per tant ens queda que hi ha $n - k - j$, $\xi = \vec{e}_3$ i les mateixes que valen $-\vec{e}_3$. Fixant k i j hem de comptar quantes trajectòries diferents que hi ha complint que fan aquest nombre de passos en cada direcció. Això és el mateix que treure $2n$ boles d'una urna amb k boles negres, k blanques, j boles blaves, j vermelles i $n - k - j$ boles grogues i $n - k - j$ verdes

$$\frac{(2n)!}{k!k!j!j!(n-k-j)!(n-k-j)!},$$

formes diferents.

Llavors sumant per tots els valors possibles de k i j, i tenint en compte que totes les trajectòries de $2n$ passos tenen una probabilitat de $\frac{1}{6^{2n}}$, tenim que

$$\begin{aligned} p_{\vec{0}\vec{0}}^{(2n)} &= \frac{1}{6^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(2n)!}{k!k!j!j!(n-k-j)!(n-k-j)!} \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \frac{1}{3^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(2n)!}{n!n!} \frac{n!n!}{k!k!j!j!(n-k-j)!(n-k-j)!} \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \left(\frac{1}{3^n} \frac{n!}{k!j!(n-k-j)!} \right)^2. \end{aligned}$$

Però

$$\sum_{i,j,k \geq 0,\ i+j+k=n} \binom{n}{i\ j\ k} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 1. \tag{3.3}$$

ja que és la probabilitat total de la distribució trinomial. Si n és múltiple de 3, $n = 3m$, el màxim del nombre combinatori de (3.3) s'assoleix quan i, j, k prenen el valor m, de manera que per a tot $i, j, k \geq 0$ tals que $i + j + k = n$ tenim que:

$$\binom{n}{i\ j\ k} = \frac{n!}{i!j!k!} \leq \binom{n}{m\ m\ m}, \tag{3.4}$$

llavors podem acotar $p_{\vec{0}\vec{0}}^{(2n)}$ de la següent manera,

$$\begin{aligned} p_{\vec{0}\vec{0}}^{(2n)} &= \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \left(\frac{1}{3^n} \frac{n!}{k!j!(n-k-j)!} \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \left(\frac{1}{3^n} \frac{n!}{k!j!(n-k-j)!} \right) \left(\frac{1}{3^n} \frac{n!}{m!m!m!} \right) \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{3^n} \frac{n!}{m!m!m!} \right) \end{aligned}$$

on a l'ultima igualtat hem utilitzat (3.3).

Per tant, fent us de la formula de Stirling,

$$\begin{aligned} p_{\vec{0}\vec{0}}^{(2n)} &\leq \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}\binom{n}{m\ m\ m}\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \frac{1}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{n!n!}\frac{1}{3^n}\frac{n!}{(m!)^3} \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\frac{1}{3^n}\frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}}{\left(\left(\frac{n}{3e}\right)^{\frac{n}{3}}\sqrt{\frac{2\pi n}{3}}\right)^3} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\frac{3\sqrt{3}}{2\pi n} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi\sqrt{\pi}}\frac{1}{n\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Llavors utilitzant que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}} < +\infty,$$

tenim que la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} p_{\vec{0}\vec{0}}^{(n)}$ divergeix i per tant el proces és transitiu.

3.4 Passeig aleatori dimensions superiors

En dimensions superiors a tres, com és d'esperar, el passeig és transitiu. Montroll [4] va demostrar que es pot representar la sèrie $\sum_{n=0}^{\infty} p_{\vec{0}\vec{0}}^{(n)}$ en forma d'integral.

Concretament va demostrar que si denotem per $k \geq 3$ la dimensió del passeig aleatori, aleshores

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{\vec{0}\vec{0}}^{(n)} = \frac{k}{(2\pi)^k}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{d-\sum_{i=0}^{k}\cos(x_j)}dx_1dx_2\cdots dx_k$$

En el cas $k = 3$ la resolució de la integral la va donar Watson i és

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} p_{\vec{0}\vec{0}}^{(n)} &= \frac{3}{(2\pi)^3}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{3-\cos(x)-\cos(y)-\cos(z)}dxdydz \\ &= \frac{\sqrt{6}}{32\pi^3}\Gamma\left(\frac{1}{24}\right)\Gamma\left(\frac{5}{24}\right)\Gamma\left(\frac{7}{24}\right)\Gamma\left(\frac{11}{24}\right) \end{aligned}$$

que val aproximadament 1.516386059. On hem utilitzat que Γ és la funció gamma d'Euler.

Llavors com hem vist a la demostració del teorema 2.22, la probabilitat de que el passeig aleatori en tres dimensions torni a l'origen és

$$\mathbb{P}_0(T_0 < \infty) = f_0 = 1 - \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(n)}} \approx 0.340537329$$

Per dimensions superiors a 3 no es coneix cap solució explicita de la integral, però es poden calcular aproximacions numèriques d'aquestes. La següent taula dona les aproximacions de les probabilitats de tornar a l'origen, f_0, per alguns valors de k.

k	f_0
3	0.340537329
4	0.193201673
5	0.1351786099
6	0.1047154954
7	0.0858449345
8	0.0729126499
9	0.0634477493
10	0.0561975361

4 Relació entre el passeig aleatori i el moviment Brownià

4.1 Moviment Brownià

Un procés estocàstic $\{X_t,\ t \geq 0\}$ es diu que és gaussià o normal si les seves distribucions en dimensió finita són lleis normals o gaussianes. Observem que la llei del vector $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ està determinada per els paràmetres

$$m_X(t_1, t_2, \ldots, t_n) = E(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}) = (E(X_{t_1}), E(X_{t_2}), \ldots, E(X_{t_n})),$$
$$\Gamma_X(t_1, t_2, \ldots, t_n) = (Cov(X_{t_i}, X_{t_j}))_{1 \leq i,j \leq n}$$

Un procés estocàstic $\{X_t,\, t \geq 0\}$ es diu que és equivalent a un altre procés $\{X'_t,\, t \geq 0\}$ si per a tot $t \geq 0$

$$\mathbb{P}(X_t = X'_t) = 1$$

També és diu que $\{X_t,\ t \geq 0\}$ és una versió de $\{X'_t,\ t \geq 0\}$. Dos processos equivalents poden tenir trajectòries diferents.

El següent resultat ens dona una condició suficient per la continuïtat de les trajectòries d'un procés.

Proposició 4.1 (**Criteri de continuïtat de Kolmogorov**). *Sigui $\{X_t,\ t \in T\}$ un procés estocàstic i sigui T finit. Suposem que existeixen constants $a > 1$ i $p > 0$ tals que*

$$E(|X_t - X_s|^p) \leq C_T |t - s|^a,$$

per a tot $t, s \in T$. Llavors existeix una versió del procés $\{X_t,\ t \in T\}$ que té trajectòries contínues.

Al 1828 el botànic Robert Brown va estudiar el moviment d'una partícula de pol·len suspesa en un liquid. Al 1905 Einstein va proposar que el moviment erràtic de la partícula es degut als xocs aleatoris entre les molècules del liquid i la partícula. Posteriorment al 1920 el matemàtic Norbert Wiener va modelitzar aquest fenomen utilitzant la teoria dels processos estocàstics, on la posició de la partícula en cada instant de temps $t \geq 0$ ve donada per un vector aleatori B_t. Per això el moviment Brownià s'anomena també proces de Wiener.

En una dimensió el model que defineix el moviment Brownià és:

Definició 4.2. *Un proces estocàstic $B = \{B_t,\ t \geq 0\}$ és un moviment Brownià si es compleix que:*

(i) $B_0 = 0$

(ii) B té increments independents: fixats n instants $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ els increments

$$B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \ldots, B_{t_2} - B_{t_1}$$

són variables aleatòries independents.

(iii) B té increments Gaussians: $B_{t+u} - B_t$ té una llei normal amb esperança 0 i variància u, $B_{t+u} - B_t \sim \mathcal{N}(0, u)$.

Observació 4.3. Per $0 \leq u, v$, suposant que $v > u$, tenim que

$$\begin{aligned} Cov(B_u, B_v) &= E[B_u B_v] - E[B_u]E[B_v] \\ &= E[B_u B_v] \\ &= E[(B_v - B_u)B_u + B_u^2] \\ &= E[B_v - B_u]E[B_u] + E[B_u^2] \\ &= u = \min(u, v). \end{aligned}$$

On hem utilitzat que els increments $B_v - B_u$ i $B_u - B_0 = B_u$ són independents,

$$E[B_u] = E[B_u - B_0] = 0$$

i que

$$E[B_u^2] = Var(B_u) + E[B_u]^2 = Var(B_u) = u.$$

Observació 4.4. A partir de *(ii)* i *(iii)* podem veure que la densitat conjunta de $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$, si $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, és

$$f_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n) = f_{t_1}(x_1) f_{t_2 - t_1}(x_2 - x_1) \cdots f_{t_n - t_{n-1}}(x_n - x_{n-1}),$$

on $f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)$.

Anem a veure-ho,

$$(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}),$$

té densitat

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = f_{t_1}(y_1) f_{t_2 - t_1}(y_2) \cdots f_{t_n - t_{n-1}}(y_n)$$

Fem el canvi

$$\begin{array}{ccl} (B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}) & \longrightarrow & (B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_n}) \\ (y_1, y_2, \ldots, y_n) & \longrightarrow & (x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_1 = x_1 & & x_1 = y_1 \\ y_2 = x_2 - x_1 & & x_2 = y_2 + y_1 \\ \vdots & \leftrightarrow & \vdots \\ y_n = x_n - x_{n-1} & & x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n, \end{array}$$

i fent el canvi funciona.

A partir de $f_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n)$ podem trobar les funcions marginals del procés, $F_{t_1,\ldots,t_n}$, que és fàcil comprovar que forma una família consistent. I per tant pel teorema de Kolmogorov existeix el proces de Wiener.

Proposició 4.5. *Les trajectòries del procés Brownià són continues quasi segurament.*

Demostració. Hem d'utilitzar que si $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^)$, aleshores $\mathbb{E}(X^4) = 3\sigma^4$. Amb aquest resultat tenim que

$$\mathbb{E}[|B_{t+h} - B_t|^4] = 3h^4$$

Pel criteri de continuïtat de Kolmogorov obtenim el resultat. □

Anem a veure la propietat d'*invariància escalada* del moviment Brownià que ens serà útil més endavant.

Lema 4.6. *Sigui $\{B_t,\ t \geq 0\}$ un moviment Brownià i sigui $a > 0$ un escalar. Llavors el proces $\{V_t,\ t \geq 0\}$ definit per $V_t = \frac{1}{a} B_{a^2 t}$ també és un moviment Brownià.*

Demostració. La continuïtat de les trajectòries i la independència dels increments es manté intacta amb la transformació. Clarament $V_0 = 0$. Falta veure que té increments Gaussians,

$$V_t - V_s = \frac{1}{a}(B_{a^2 t} - B_{a^2 s}) \sim \mathcal{N}(0, t - s).$$

□

El següent teorema és una versió de la propietat forta de Markov per al moviment Brownià.

Teorema 4.7. *Per tot temps d'aturada T quasi segurament finit, el procés*

$$\{B_{(T+t)} - B_T,\ t \geq 0\},$$

és un moviment Brownià independent de $\mathcal{F}^+(T)$, on

$$\mathcal{F}^+(T) = \bigcap_{s>T} \sigma\{B(s') :\ 0 \leq s' \leq s\}.$$

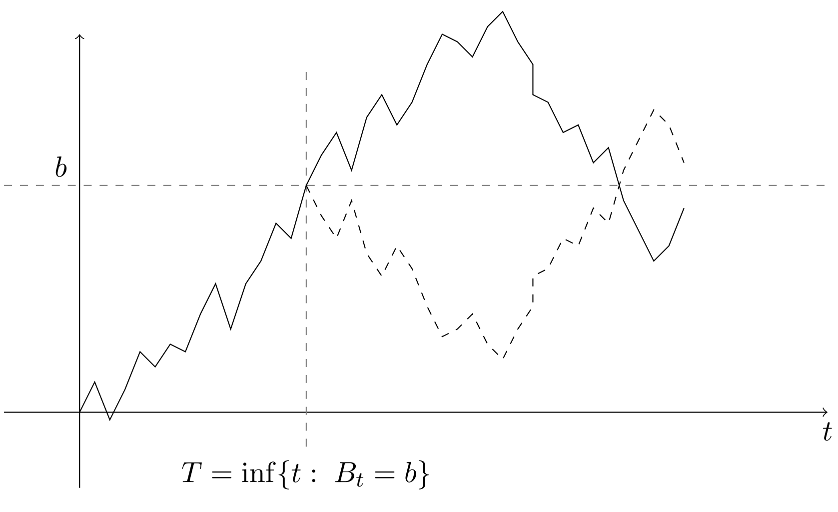
El que ens diu el teorema és que el moviment Brownià després de T és independent dels estats passats.

Una aplicació de la propietat anterior és el principi de reflexió, que diu que el moviment Brownià reflectit en un temps d'aturada T segueix sent un moviment Brownià.

Teorema 4.8. *Si T és un temps d'aturada i $\{B_t,\ t \geq 0\}$ és un moviment Brownià, llavors el proces $\{B_t^*,\ t \geq 0\}$ definit per*

$$B_t^* = B_t \mathbb{1}_{\{t \leq T\}} + (2B_T - B_t)\mathbb{1}_{\{t > T\}},$$

també és un moviment Brownià.



Demostració. Si T és finit per la propietat forta de Markov les dues trajectories

$$\{B_{(t+T)} - B_T,\ t \geq 0\} \text{ i } \{-B_{(t+T)} - B_T,\ t \geq 0\}, \tag{4.1}$$

són moviments Brownians i independents de $\{B_t,\ 0 \leq t \leq T\}$. Observem que concatenant la segona part de (4.1) amb $\{B_t,\ 0 \leq t \leq T\}$ tenim el proces $\{B_t^*,\ t \geq 0\}$ que hem definit a l'enunciat. Falta veure que les trajectòries del proces són continues en el punt T.

Observem que concatenar una funció amb continua $\{g(t),\ t \geq 0\}$ al final del recorregut d'una funció continua $\{f(t),\ 0 \leq t \leq T\}$, de manera que $f(T) = g(0)$, genera una nova funció continua. Donat que el procés que obtenim concatenant la primera part de (4.1) a $\{B_t,\ 0 \leq t \leq T\}$ i el que obtenim de concatenar la segona part de (4.1) amb $\{B_t,\ 0 \leq t \leq T\}$ tenen la mateixa distribució, i el primer és $\{B_t,\ t \geq 0\}$ que és continu en T, llavors el segon també ho és. □

El següent teorema és una conseqüència del principi de reflexió.

Teorema 4.9. *Si $a > 0$ llavors*

$$\mathbb{P}_0\left(\max_{0\leq s\leq t} B_s > a\right) = 2\mathbb{P}_0\left(B_t > a\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int_a^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2t}\right) du.$$

Demostració. Sigui $T = \inf\{t \geq 0 :\ B_t = a\}$ i sigui $\{B_t^*,\ t \geq 0\}$ el moviment Brownià reflectit en el temps d'aturada T. Llavors

$$\left\{\max_{0\leq s\leq t} B_s > a\right\} = \{B_t > a\} \cap \left\{\max_{0\leq s\leq t} B_s > a,\ B_t \leq a\right\}.$$

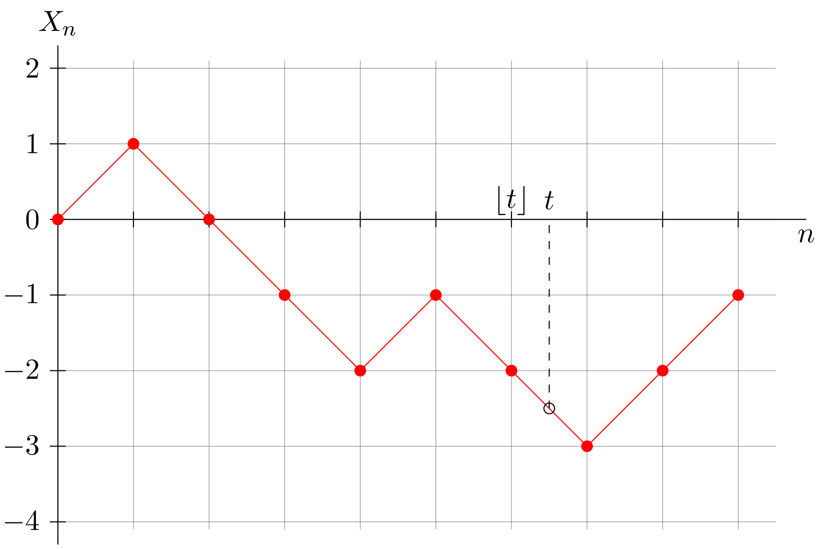
És una unió disjunta i el segon element coincideix amb l'esdeveniment $\{B_t^* \geq a\}$. Per tant pel principi de reflexió ja estem. □

4.2 Del passeig aleatori al moviment Brownià

Tornant al proces X_n que ens donava les trajectòries del passeig aleatori simètric, redefinim aquest proces per tal que el temps continu, $t \geq 0$), mitjançant interpolació lineal:

$$X_t = \sum_{k=1}^{\lfloor t\rfloor} \xi_k + (t - \lfloor t\rfloor)\xi_{\lfloor t\rfloor+1},$$

on $\lfloor t\rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq t\}$. El gràfic següent il·lustra el que vol dir la definició anterior.



Com que

$$E(\xi_k) = \frac{1}{2}1 + \frac{1}{2}(-1) = 0,$$

i

$$Var(\xi_k) = E(\xi_k^2) + E(\xi_k)^2 = E(\xi_k^2) = \frac{1}{2}1^2 + \frac{1}{2}(-1)^2 = 1.$$

Tenim

$$\begin{aligned} E(X_t) &= E\left(\sum_{k=1}^{\lfloor t \rfloor} \xi_k + (t - \lfloor t \rfloor)\xi_{\lfloor t \rfloor + 1}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\lfloor t \rfloor} E(\xi_k) + (t - \lfloor t \rfloor)E(\xi_{\lfloor t \rfloor + 1}) = 0, \end{aligned}$$

i que

$$\begin{aligned} Var(X_t) &= Var\left(\sum_{k=1}^{\lfloor t \rfloor} \xi_k + (t - \lfloor t \rfloor)\xi_{\lfloor t \rfloor + 1}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\lfloor t \rfloor} Var(\xi_k) + (t - \lfloor t \rfloor)^2 Var(\xi_{\lfloor t \rfloor + 1}) \\ &= \lfloor t \rfloor + (t - \lfloor t \rfloor)^2. \end{aligned}$$

On hem utilitzat que les variables ξ_k són independents.

Considerem ara els processos

$$Y_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} X_{nt}.$$

Anem a veure perquè intuïtivament té sentit que aquests tipus de processos convergeixi cap al moviment Brownià quan $n \to \infty$.

Observem que

$$E(Y_t^n) = \frac{1}{\sqrt{n}} E(X_n t) = 0,$$

$$Var(Y_t^n) = \frac{1}{n} Var(X_{nt}) = \frac{1}{n}(\lfloor nt \rfloor + (nt - \lfloor nt \rfloor)^2).$$

Fent el pas al limit quan $n \to \infty$ a les expressions anteriors tenim que

$$\lim_{n \to \infty} E(Y_t^n) = 0,$$

i

$$\lim_{n \to \infty} Var(Y_t^n) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n}(\lfloor nt \rfloor + (nt - \lfloor nt \rfloor)^2\right) = t,$$

on la ultima igualtat ve donada de

$$\frac{(nt - \lfloor nt \rfloor)^2}{n} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0,$$

i de,

$$\frac{\lfloor nt \rfloor}{n} = \frac{nt - nt + \lfloor nt \rfloor}{n} = t - \frac{nt - \lfloor nt \rfloor}{n} \leq t - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \to \infty} t,$$

Observem que

$$Y_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} X_{nt} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \xi_k + \frac{nt - \lfloor nt \rfloor}{\sqrt{n}} \xi_{\lfloor nt \rfloor + 1}. \tag{4.2}$$

El primer terme de l'ultima expressió de (4.2) és una suma de variables aleatòries independents idènticament distribuïdes, v.a.i.i.d., amb variància finita. Per tant el Teorema Central del Límit ens diu que, quan n tendeix a infinit,

$$\frac{1}{\sqrt{\lfloor nt \rfloor}} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \xi_k \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1),$$

on $\xrightarrow{d}$ és refereix a la convergència en llei, i $\mathcal{N}(0,1)$ és la distribució normal amb esperança 0 i variància 1.

Tenim que $nt - \lfloor nt \rfloor < 1$ i per tant quan n tendeix a infinit,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \xi_k &= \frac{\sqrt{\lfloor nt \rfloor}\sqrt{t}}{\sqrt{nt}\sqrt{\lfloor nt \rfloor}} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \xi_k \\ &= \sqrt{t} \frac{1}{\sqrt{\lfloor nt \rfloor}} \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \xi_k \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,t). \end{aligned}$$

El darrer terme de (4.2) convergeix a 0 quan $n \to \infty$ en $L^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} E\left| \frac{nt - \lfloor nt \rfloor}{\sqrt{n}} \xi_{\lfloor nt \rfloor + 1} \right| &\leq \frac{nt - \lfloor nt \rfloor}{\sqrt{n}} E\left|\xi_{\lfloor nt \rfloor + 1}\right| \\ &= \frac{nt - \lfloor nt \rfloor}{\sqrt{n}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \to \infty} 0. \end{aligned}$$

I per tant tenim que Y_t^n convergeix en llei a una variable aleatòria normal amb esperança 0 i variància t,

$$Y_t^n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,t).$$

Per tant el procés al que convergeix Y_t^n, si existeix, hauria de ser un procés Gaussià i centrat. La ultima similitud que li falta amb el moviment Brownià és la covariància, anem a calcular-la.

Suposem $s < t$. Aleshores

$$
\begin{aligned}
&Cov(Y_s^n, Y_t^n) = E(Y_s^n Y_t^n) - E(Y_s^n)E(Y_t^n) = E(Y_s^n Y_t^n) \\
&= E\left[\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{\lfloor ns \rfloor}\xi_k + \frac{ns - \lfloor ns \rfloor}{\sqrt{n}}\xi_{\lfloor ns \rfloor + 1}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor}\xi_k + \frac{nt - \lfloor nt \rfloor}{\sqrt{n}}\xi_{\lfloor nt \rfloor + 1}\right)\right] \\
&= \frac{1}{n}E\left[\left(\sum_{k=1}^{\lfloor ns \rfloor}\xi_k\right)\left(\sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor}\xi_k\right)\right] \\
&+ \frac{1}{n}(ns - \lfloor ns \rfloor)E\left[\xi_{\lfloor ns \rfloor + 1}\left(\sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor}\xi_k\right)\right] \\
&+ \frac{1}{n}(nt - \lfloor nt \rfloor)E\left[\xi_{\lfloor nt \rfloor + 1}\left(\sum_{k=1}^{\lfloor ns \rfloor}\xi_k\right)\right] \\
&+ \frac{1}{n}(ns - \lfloor ns \rfloor)(nt - \lfloor nt \rfloor)E\left[\xi_{\lfloor ns \rfloor + 1}\xi_{\lfloor nt \rfloor + 1}\right].
\end{aligned}
$$

Com que les variables ξ_k són independents, tenim que,

$$
E[\xi_i \xi_j] = \begin{cases} E[\xi_i]E[\xi_j] = 0, & \text{si } i \neq j, \\ E[\xi_i^2] = 1, & \text{si } i = j. \end{cases}
$$

Llavors, si n és prou gran podem suposar que $\lfloor ns \rfloor \neq \lfloor nt \rfloor$ ja que $s < t$, i per tant

$$
\begin{aligned}
&E\left[\left(\sum_{k=1}^{\lfloor ns \rfloor}\xi_k\right)\left(\sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor}\xi_k\right)\right] \\
&= E\left[\left(\sum_{k=1}^{\lfloor ns \rfloor}\xi_k\right)\left(\sum_{k=1}^{\lfloor ns \rfloor}\xi_k + \sum_{k=\lfloor ns \rfloor + 1}^{\lfloor nt \rfloor}\xi_k\right)\right] \\
&= E\left[\left(\sum_{k=1}^{\lfloor ns \rfloor}\xi_k\right)\left(\sum_{i=1}^{\lfloor ns \rfloor}\xi_i\right)\right] + E\left[\left(\sum_{k=1}^{\lfloor ns \rfloor}\xi_k\right)\left(\sum_{i=\lfloor ns \rfloor + 1}^{\lfloor nt \rfloor}\xi_i\right)\right] \\
&= \sum_{k,i=1}^{\lfloor ns \rfloor}E[\xi_k \xi_i] + \sum_{k=1}^{\lfloor ns \rfloor}\sum_{i=\lfloor ns \rfloor + 1}^{\lfloor nt \rfloor}E[\xi_k \xi_i] \\
&= \sum_{k=1}^{\lfloor ns \rfloor} 1 = \lfloor ns \rfloor.
\end{aligned}
$$

i també

$$
\begin{aligned}
&E\left[\xi_{\lfloor ns \rfloor + 1}\left(\sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor}\xi_k\right)\right] = E[\xi_{\lfloor ns \rfloor + 1}\xi_{\lfloor ns \rfloor + 1}] = 1 \\
&E\left[\xi_{\lfloor nt \rfloor + 1}\left(\sum_{k=1}^{\lfloor ns \rfloor}\xi_k\right)\right] = 0 \\
&E\left[\xi_{\lfloor ns \rfloor + 1}\xi_{\lfloor nt \rfloor + 1}\right] = 0.
\end{aligned}
$$

Per tant, quan n és prou gran,

$$Cov(Y_s^n, Y_t^n) = \frac{1}{n}(\lfloor ns \rfloor + (ns - \lfloor ns \rfloor)) = \frac{ns}{n} = s = \min(s,t),$$

i quan el limit de n tendeix a infinit, també ha de ser $s = \min(s,t)$. Per tant la covariància coincideix amb la del moviment Brownià. El teorema Central del Límit Funcional, o Principi d'invariància de Donsker, és la formalització de la idea que acabem de veure.

4.3 Teorema Central del Límit Funcional

Abans de demostrar el teorema necessitarem alguns resultats i definicions. Anem a definir que vol dir que una seqüencia de variables aleatòries convergeixi en distribució en un espai mètric. Intuïtivament $\{X_n,\ n \geq 0\}$ convergeix en distribució a X si la forma de les distribucions de X_n s'assembla a la forma de la distribució de X quan n en gran.

Definició 4.10. *Sigui (E, ρ) un espai mètric i sigui $\mathcal{A}$ la seva σ-àlgebra de Borel. Siguin X_n i X variables aleatòries prenent valors en E. Llavors diem que X_n convergeix en distribució a X si per a tota funció continua i acotada $g : E \to \mathbb{R}$,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[g(X_n)] = \mathbb{E}[g(X)]$$

i ho escrivim com $X_n \Rightarrow X$.

Veiem ara un resultat útil respecte aquest tipus de convergència.

Teorema 4.11 (Teorema de Portmanteau)**.** *Les següents afirmacions són equivalents:*

(i) $X_n \Rightarrow X$.

(ii) Per tot conjunt tancat $K \subset E$, $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\{X_n \in K\} \leq \mathbb{P}\{X \in K\}$.

(iii) Per tot conjunt obert $G \subset E$, $\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\{X_n \in G\} \geq \mathbb{P}\{X \in G\}$.

(iv) Per a tot conjunt de Borel $A \subset E$ tal que $\mathbb{P}\{X \in \delta A\} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{X_n \in A\} = \mathbb{P}\{X \in A\}$.

(v) $\mathbb{E}[g(X_n)] \to \mathbb{E}[g(X)]$ *per tota funció mesurable i acotada $g : E \to \mathbb{R}$ tal que $\mathbb{P}\{X \in \{x :\ g \text{ és continua en } x\}\} = 1$.*

Necessitarem també el fet de que existeix un temps d'aturada del moviment Brownià amb la propietat que $\mathbb{E}[T] < \infty$ i que la llei de $B(T)$ té una distribució uniforme en $\{-1, 1\}$. Si el volem utilitzar amb un passeig aleatori amb increments arbitraris, representats per una variable aleatòria ξ, necessitarem un temps d'aturada T amb $\mathbb{E}[T] < \infty$ tal que $B(T)$ tingui la mateixa llei que ξ.

El següent resultat es coneix com el Teorema de Skorokhod embedding i es pot trobar una demostració a [3].

Teorema 4.12. *Sigui $\{B_t,\ t \geq 0\}$ un moviment Brownià, i sigui ξ una variable aleatòria amb $E[\xi] = 0$ i moment de segon ordre finit. Llavors existeix un temps d'aturada T tal que $B(T)$ té la llei de ξ i $\mathbb{E}[T] = E[\xi^2]$.*

Utilitzant els processos que hem descrit anteriorment

$$Y_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} X_{nt}$$

recordem que

$$X_t = \sum_{k=1}^{\lfloor t \rfloor} \xi_k + (t - \lfloor t \rfloor)\xi_{\lfloor t \rfloor + 1}.$$

Teorema 4.13 (Principi d'invariància de Donsker). *En l'espai $\mathcal{C}[0,1]$, l'espai de funcions continues en $[0,1]$, amb la mètrica induïda per la norma del suprem, la successió $\{Y_t^n,\ n \geq 1\}$ convergeix en distribució a un moviment Brownià $\{B_t,\ t \geq 0\}$.*

La idea de la demostració és construir les variables aleatòries $\xi_1, \xi_2, \ldots$ dins del mateix espai que el movien Brownià de manera que $\{Y_t^n,\ n \geq 1\}$ estigui amb una probabilitat molt alta "a prop"d'aquest moviment Brownià.

Lema 4.14. *Sigui $\{B_t,\ t \geq 0\}$ un moviment Brownià. Llavors per a qualsevol variable aleatòria ξ amb esperança 0 i variància 1, existeix una successió de temps d'aturada*

$$0 = T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$$

respecte el moviment Brownià, tals que

(i) la successió $\{B_{T_n},\ n \geq 0\}$ té la distribució del passeig aleatori amb els increments donats per la llei de ξ.

(ii) la successió de funcions $\{Y_t^n,\ n \geq 1\}$ construïda a partir d'aquest passeig aleatori satisfà

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left\{ \sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \frac{B_{nt}}{\sqrt{n}} - Y_t^n \right| > \varepsilon \right\} = 0.$$

Demostració. Utilitzant el teorema 4.12, definim un temps d'aturada T_1 amb $\mathbb{E}[T_1] = 1$ tal que $B_{T_1} = \xi$. Per la propietat forta de Markov,

$$\{B_t^{(2)} :\ t \geq 0\} = \{B_{(T_1 - t)} - B_{T_1} :\ t \geq 0\}$$

és un procés Brownià independent de $\mathcal{F}^+(T_1)$ i, en particular, de (T_1, B_{T_1}). Llavors de la mateixa manera podem definir un temps d'aturada T_2' de $\{B_t^2 :\ t \geq 0\}$ tal que $\mathbb{E}[T_2'] = 1$ i $B_{T_2'}^{(2)} = \xi$. Llavors $T_2 = T_1 + T_2'$ és un temps d'aturada del moviment Brownià original amb $\mathbb{E}[T_2] = 2$ i tal que B_{T_2} és el segon valor del passeig aleatori amb increments donats per la llei de ξ. De manera inductiva podem generar la successió $0 = T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ tal que $X_n = B_{T_n}$ i $\mathbb{E}[T_n] = n$.

Per abreviar escriurem $W_t^n = \frac{B_{nt}}{\sqrt{n}}$, i sigui A_n l'esdeveniment de que existeix $t \in [0,1)$ tal que $|Y_t^n - W_t^n| > \varepsilon$. Hem de veure que $\mathbb{P}(A_n) \to 0$. Sigui $k = k(t)$ l'únic enter tal que $(k-1)/n \leq t < k/n$. Llavors com que Y_t^n és lineal en aquest interval tenim

$$\begin{aligned} A_n \subset \{&\exists t \in [0,1) \text{ tal que } |X_k/\sqrt{n} - W_t^n| > \varepsilon\} \\ &\cup \{\exists t \in [0,1) \text{ tal que } |X_{k-1}/\sqrt{n} - W_t^n| > \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Com que $X_k = B_{T_k} = \sqrt{n} W^n_{T_k/n}$, tenim que

$$\begin{aligned} A_n \subset A_n^* &:= \{\exists t \in [0,1) \text{ tal que } |W^n_{T_k/n} - W^n_t| > \varepsilon\} \\ &\cup \{\exists t \in [0,1) \text{ tal que } |W^n_{T_{k-1}/n} - W^n_t| > \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Fixat $0 < \delta < 1$ l'esdeveniment A_n^* està contingut en

$$\{\exists s, t \in [0,2] \text{ tal que } |s-t| < \delta,\ |W^n_s - W^n_t| > \varepsilon\} \tag{4.3}$$

$$\cup \{\exists t \in [0,1) \text{ tal que } |T_k/n - t| \vee |T_{k-1}/n - t| \geq \delta\}. \tag{4.4}$$

Notem que la probabilitat de (4.3) no depèn de n. Agafant $\delta > 0$ prou petita, podem fer la probabilitat tant petita com vulguem, ja que el moviment Brownià és uniformement continu en $[0,2]$. Falta veure si per una $\delta > 0$ fixada la probabilitat de (4.4) convergeix a 0 quan $n \to \infty$. Per provar-ho fem servir que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (T_k - T_{k-1}) = 1 \ q.s.$$

Això és la llei dels grans nombres per la successió $\{T_k - T_{k-1}\}$ de v.a.i.i.d. amb esperança 0. Observem que per a qualsevol successió $\{a_n\}$ de nombres reals tenim

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq k\leq n} \frac{|a_k - k|}{n} = 0$$

Per tant tenim

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{0\leq k\leq n} \frac{|T_k - k|}{n} \geq \delta \right) = 0. \tag{4.5}$$

Veiem que $t \in [(k-1)/n, k/n)$ i sigui $n > 2/\delta$. Llavors

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\{\exists t \in [0,1) \text{ tal que } |T_k/n - t| \vee |T_{k-1}/n - t| \geq \delta\} \\ &\leq \mathbb{P}\left\{ \sup_{1\leq k\leq n} \frac{(T_k - (k-1)) \vee (k - T_{k-1})}{n} \geq \delta \right\} \\ &\leq \mathbb{P}\left\{ \sup_{1\leq k\leq n} \frac{T_k - k}{n} \geq \frac{\delta}{2} \right\} + \mathbb{P}\left\{ \sup_{1\leq k\leq n} \frac{(k-1) - T_{k-1}}{n} \geq \frac{\delta}{2} \right\}, \end{aligned}$$

i per (4.5) els dos sumands convergeixen a 0. □

Demostració (Del principi d'invariància de Donkser)**.** Agafant la successió de temps d'aturada com en lema 4.14, remarcar que utilitzant la propietat d'invariància escalada, del lema 4.6, les funcions $\{W^n_t,\ 0 \leq t \leq 1\}$ donades per $W^n_t = B_{nt}/\sqrt{n}$ són moviments Brownians també. Suposem que $K \subset \mathcal{C}[0,1]$ és tancat i definim

$$K[\varepsilon] = \{f \in \mathcal{C}[0,1] \ : \ ||f - g||_\infty \leq \varepsilon \text{ per algun } g \in K\}$$

Llavors $\mathbb{P}(Y^n_t \in K) \leq \mathbb{P}(W^n \in K[\varepsilon]) + \mathbb{P}(||Y^n_t - W^n||_\infty > \varepsilon)$. Però quan $n \to \infty$, el segon terme va a 0, mentre que el primer terme no depèn de n i és igual que $\mathbb{P}(B \in K[\varepsilon])$ per un moviment Brownià B. Quan K és tancat tenim que

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \mathbb{P}(B \in K[\varepsilon]) = \mathbb{P}\left(B \in \bigcap_{\varepsilon>0} K[\varepsilon] \right) = \mathbb{P}(B \in K).$$

Amb tot això tenim que $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y^n_t \in K) \leq \mathbb{P}(B \in K)$, que és la condició (ii) del teorema 4.11, per tant hem demostrat el teorema. □

Observació 4.15. Tant en el teorema com en el lema només hem utilitzat que les variables aleatòries que generen el passeig aleatori tenen esperança 0 i variància 1, per tant el teorema es pot aplicar a tot passeig aleatori generat per variables aleatòries arbitraries ξ_n, sempre i quan primer les normalitzem.

Veiem ara un resultat per a passejos aleatoris on utilitzem la relació entre aquests i el moviment Brownià.

Teorema 4.16. *Sigui $\{\xi_n\}_{n\geq 0}$ una successió de v.a.i.i.d. amb $\mathbb{E}[\xi_1] = 0$ i $Var(\xi_1) = 1$. Sigui $(X_n)_{n\geq 0}$ el passeig aleatori associat i*

$$M_n = \max\{X_k : \ 0 \leq k \leq n\}.$$

Llavors per a tot $x \geq 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(M_n \geq x\sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du.$$

Demostració. Sigui $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció continua i acotada. Definim una funció $G : \mathcal{C}[0,1] \to \mathbb{R}$ com

$$G(f) = g\left(\max_{x\in[0,1]} f(x)\right),$$

notem que G és continua i acotada. Llavors, sigui $Y_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} X_{nt}$, tenim

$$\mathbb{E}\left[G(Y_t^n)\right] = \mathbb{E}\left[g\left(\max_{0\leq t\leq 1} \frac{X_{nt}}{\sqrt{n}}\right)\right] = \mathbb{E}\left[g\left(\frac{\max_{0\leq k\leq n} X_k}{\sqrt{n}}\right)\right],$$

i, sigui $B = \{B_t, \ t \geq 0\}$ un moviment Brownià,

$$\mathbb{E}\left[G(B)\right] = \mathbb{E}\left[g\left(\max_{0\leq t\leq 1} B_t\right)\right].$$

Llavors pel principi d'invariància de Donsker sabem que Y_t^n convergeix en distribució a B_t, per la definició 4.10 tenim que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[g\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}}\right)\right] = \mathbb{E}\left[g\left(\max_{0\leq t\leq 1} B_t\right)\right].$$

Utilitzant el teorema 4.11 i el teorema 4.9, tenim

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(M_n \geq x\sqrt{n}) = \mathbb{P}\left(\max_{0\leq t\leq 1} B_t \geq x\right) = 2\mathbb{P}(B_1 \geq x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du.$$

□

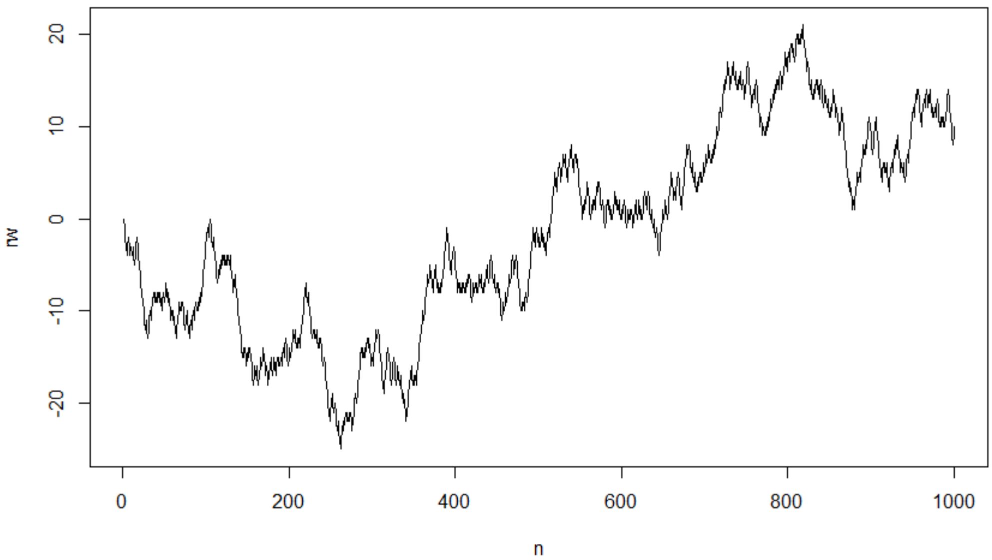
5 Simulacions

En aquesta secció per tal de poder il·lustrar millor alguns dels processos que hem vist i comprovar alguns dels resultats que hem vist anteriorment.

Per a fer les simulacions utilitzarem el llenguatge de programació R que està pensat per a l'anàlisi estadístic i de dades per ordinador, a més permet realitzar gràfics fàcilment per a la visualització de les dades.

Comencem fent simulacions de les trajectòries del passeig aleatori en una dimensió. Fixarem dos paràmetres n que serà el nombre de passos que simularem i p la probabilitat de que la variable aleatòria prengui el valor 1. Utilitzarem la funció de R $sample(x, k, replace = TRUE, prob)$ que tria k elements del vector x amb probabilitat $prob$, on $prob$ és un vector de probabilitats, i $replace = TRUE$ vol dir que hi ha reposició després de cada tria, i un cop fetes n realitzacions de la variable aleatòria que genera el passeig les hem de sumar per tenir la posició en cada pas, per a fer-ho utilitzem la funció $cumsum$ que guarda a la posició k la suma parcial des de 1 fins a k de les variables.

```
{
  n <- 1000

  p <- 1/2

  rw <- cumsum(sample(c(1, -1), n, TRUE, c(p, 1-p)))
  rw <- c("0", rw)

  plot(rw, type="l")
}
```

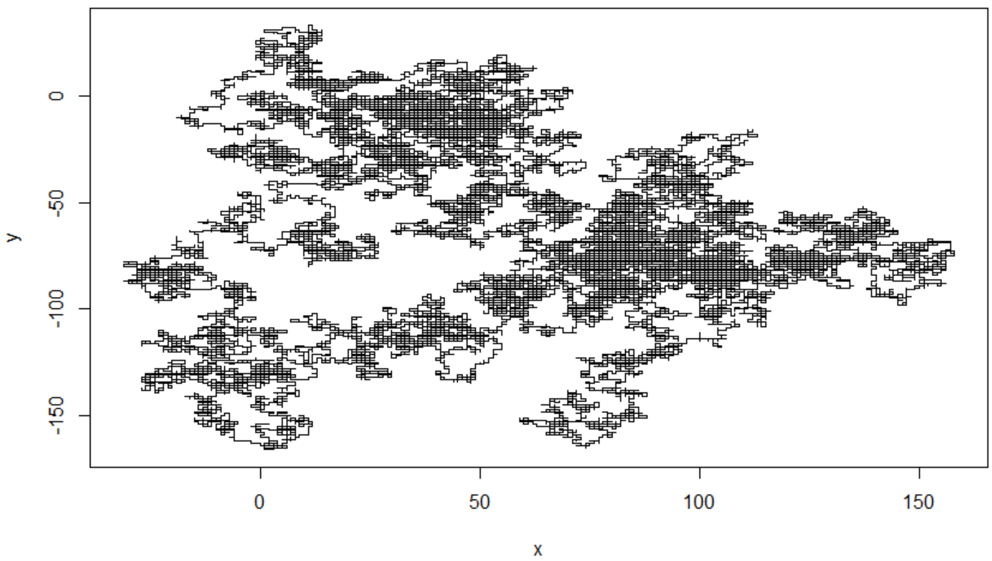


També podem fer que les variables aleatòries que generen el passeig aleatori tinguin densitat normal substituint $sample(\dots)$ per $rnorm(n)$.

Per simular el passeig aleatori en dues dimensions com que la variable pot anar en

4 direccions diferents, el que fem es primer veure quin és l'eix que canviarem o el que és el mateix quina coordenada del vector posició canviarem, això ho fem amb la funció *sample*() i el vector $(1, 2)$. Un cop tenim això fem igual que en una dimensió.

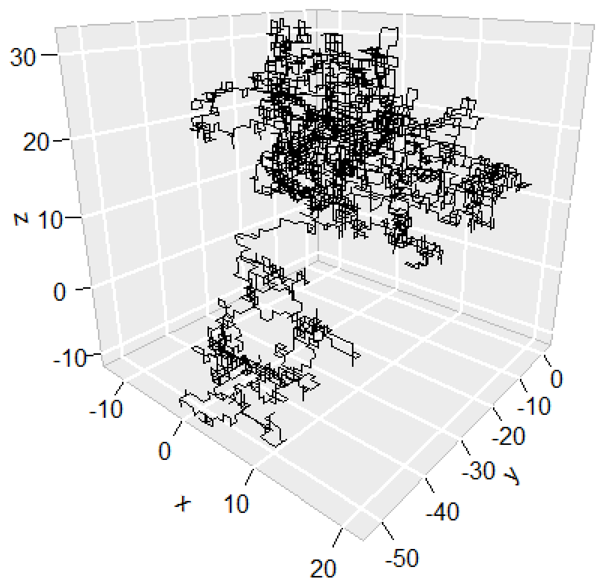
```
{
  n <- 50000
  p <- 1/2

  rw <- matrix(0, ncol = 2, nrow = n)

  indx <- cbind(seq(n), sample(c(1, 2), n, TRUE, c(p, 1-p)))

  rw[indx] <- sample(c(-1, 1), n, TRUE, c(p, 1-p))

  rw[,1] <- cumsum(rw[, 1])
  rw[,2] <- cumsum(rw[, 2])

  plot(rw, type="l", xlab="x", ylab="y")
}
```



I en el cas de tres dimensions és suficient afegir un element més al vector de coordenades i fer que el vector de probabilitats sigui $(1/3, 1/3, 1/3)$. A més per tal de poder generar el gràfic és necessari instal·lar el paquet *plot3D*, ja que fem us de la funció *scatter3D*.

```
{
  library("plot3D")

  n <- 5000
  p <- 1/2
  p_i <- 1/3

  rw <- matrix(0, ncol = 3, nrow = n)
```

```
  indx <- cbind(seq(n), sample(c(1, 2, 3), n, TRUE, c(p_i, p_i, p_i)))

  rw[indx] <- sample(c(-1, 1), n, TRUE, c(p, 1-p))

  rw[,1] <- cumsum(rw[, 1])
  rw[,2] <- cumsum(rw[, 2])
  rw[,3] <- cumsum(rw[, 3])

  scatter3D(rw[,1], rw[,2], rw[,3], colvar=NULL, phi = 20, bty = "g",
            type = "l", ticktype = "detailed", lwd = 0.25)
}
```



Si fem ara m simulacions del passeig aleatori en una dimensió i mirem si el procés torna o no a 0, mirant el percentatge de vegades que torna a 0 veiem que aquest és proper a al 100%, de fet quant més gran la n i la m més proper, però augmentar-les té un cost computacional bastant elevat. Aquest és el codi d'aquesta simulació

```
{
  n <- 50000
  m <- 5000
  p <- 1/2

  zero <- 0

  for(k in 1:m){
```

```
    x <- cumsum(sample(c(1, -1), n, TRUE, c(p, 1-p)))

    for(i in 1:n){
      if(x[i] == 0){
        zero <- zero + 1
        break
      }
    }
  }

  print(zero/m)
}
```

De la mateixa manera podem fer m simulacions de passejos de k dimensions i així veure que les probabilitats de tornar a l'origen que obtenim s'aproximen a les probabilitats que hem vist a la subsecció 3.4,

k	f_0	*simulació*
3	0.340537329	0.325
4	0.193201673	0.204
5	0.135178609	0.127
6	0.104715495	0.084
7	0.085844934	0.078
8	0.072912649	0.068
9	0.063447749	0.075
10	0.056197536	0.048

El codi:

```
{
  n <- 10000
  m <- 1000
  p <- 1/2

  for(k in 3:10){
    p_i <- matrix(1/k, ncol = k, nrow = 1)
    x <- matrix(0, ncol = k, nrow = 1)
    for(i in 1:k){
      x[i] = i
    }

    zero <- 0

    start.time <- Sys.time()

    for(i in 1:m){
      rw <- matrix(0, ncol = k, nrow = 1)

      for(j in 1:n){
        indx <- sample(x, 1, TRUE, p_i)
```

```
        rw[,indx] <- rw[,indx] + sample(c(-1, 1), 1, TRUE, c(p, 1-p))

        control <- TRUE
        for(l in 1:k){
          if(rw[,l] != 0){
            control <- FALSE
            break
          }
        }
        if(control){
          zero <- zero + 1
          break
        }
      }
    }

    print(k)
    print(zero/m)

    end.time <- Sys.time()
    time.taken <- end.time - start.time
    print(time.taken)
  }
}
```

Referències

[1] Norris, J. R. *Markov Chains*. Cambridge University Press, 1997.

[2] Bardina, X. Del passeig aleatori al moviment Brownià. *Article*, 2010.

[3] Mörters, Peter, and Yuval Peres. *Brownian Motion*. Cambridge University Press, 2010.

[4] Montroll, Elliot W. Random Walks in Multidimensional Spaces, Especially on Periodic Lattices. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, vol. 4, no. 4, pp. 241–260, 1956.

[5] Feller, William. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Volume I*. Wiley, 1970.

[6] Borovkov, A. A. *Probability Theory*. Springer, 2013.