Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Processos de punts determinantals generats per ensembles de matrius aleatòries

Autor: Jordi Llop Fernàndez

Director: Dr. Joaquim Ortega Cerdà
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 19 de juny de 2020

Abstract

Random matrices and the distribution of their eigenvalues, is a probability problem that arises from mathematical physics. The eigenvalues are point processes. In some special cases, they are a determinantal point process. This study has been very important over the last century, because it has been used for the distribution of electrons in heavy atoms.

In this work, we will consider the distribution of the eigenvalues of a specific type of random matrix, the complex Gaussian matrix, also known as Ginibre ensemble. The distribution of the eigenvalues of Ginibre ensemble has a determinantal form.

Therefore, we will first study the point processes in general, the distribution function of the Ginibre ensemble and the correlation functions. Secondly, we will also study the relationship between the distribution of point processes and the correlation functions. Thirdly, we will study determinantal point process and their properties in a general way.

Finally, we will see the same types of ensembles matrices that will fulfill this same type of relationship with the determinantal point process. These examples of matrices will develop the processes known as Gaussian Unitary Ensemble (GUE) and the Circular Unitary Ensemble (CUE). We will also perform experiments to see the distribution of the eigenvalues of Ginibre ensemble, GUE and CUE in the complex plane.

Resum

Les matrius aleatòries i la distribució dels seus valors propis, són un problema de probabilitats que sorgeix de la física matemàtica. Els valors propis són processos puntuals. En alguns casos especials, són processos determinantals. Aquest estudi ha estat molt important al llarg del darrer segle, perquè s'han utilitzat per a la distribució d'electrons en àtoms pesats.

En aquest treball, considerarem la distribució dels valors propis d'un tipus específic de matriu aleatòria, la matriu gaussiana complexa, també coneguda com l'ensemble de Ginibre. La distribució dels valors propis de l'ensemble de Ginibre té una forma determinantal.

Per aquesta raó, estudiarem primer els processos puntuals en general, la funció de distribució de l'ensemble de Ginibre i les funcions de correlació. Després, estudiarem la relació entre la distribució dels processos puntuals i les funcions de correlació. Finalment, estudiarem de manera general el procés de punt determinantal i les seves propietats.

Per acabar, veurem alguns tipus similars d'ensembles de matrius que compliran aquest mateix tipus de relació amb el procés de punts determinantal. Aquests exemples de matrius donaran els processos coneguts com a Gaussian Unitary Ensemble (GUE) i Circular Unitary Ensemble (CUE). També produirem experiments per veure la distribució dels valors propis de l'ensemble de Ginibre, el GUE i el CUE al pla complex.

2010 Mathematics Subject Classification. 15B52, 15B57, 28A25, 28A50, 60B20, 60G15, 60G55, 60G57

Agraïments

Aquest treball té un significat especial, en tant que suposa la finalització del meu grau. Arribar aquí ha sigut possible gràcies al suport de moltes persones; a totes elles, el meu agraïment.

En primer lloc el meu agraïment al meu tutor Joaquim Ortega. Sense el seu ajut des del primer moment, aquest treball no hauria sigut possible: gràcies per la seva orientació, gràcies pels reptes plantejats i gràcies per les seves correccions i paciència al llarg d'aquest treball.

En segon lloc gràcies a tots els professors i professores del grau, sense vosaltres aquest treball tampoc hauria sigut possible, ja que aquest treball no és més que la culminació d'un camí.

Finalment, gràcies a totes aquelles persones que, des de la proximitat personal, m'han ajudat i donat suport per a continuar treballant.

A tots vosaltres, gràcies.

Índex

1 Introducció

El projecte

1.1 Motivació

L'àmbit de l'anàlisi, la probabilitat i la programació m'han resultat interessants al llarg del grau. És per això que volia un tema que pogués combinar aquestes àrees. Per tant agraeixo al meu tutor que em proposés estudiar matrius aleatòries, ja que he pogut treballar i ampliar aquests conceptes de gran interès per mi.

A part de l'interès personal pels àmbits que m'han agradat al llarg del grau, està el fet que els processos determinantals i, encara més, les matrius aleatòries i les seves distribucions, són un tema relativament modern, cosa que es pot comprovar a la bibliografia del treball. Això m'ha donat una motivació extra pel fet d'estudiar un tema que podríem dir que està viu, ja que encara s'investiga i s'estudien matrius aleatòries que desemboquen a un procés determinantal de punts.

Finalment, poder veure diverses funcions especials, llargament estudiades, que acaben tenint relació amb el meu procés i veure com es comporten aquestes funcions, sigui numèricament o analíticament, dóna un motiu extra per treballar amb les matrius aleatòries i els processos determinantals.

1.2 Objectius

L'objectiu d'aquest treball es centra a estudiar un tipus concret de matriu aleatòria, la matriu aleatòria gaussiana complexa, aquestes matrius van ser estudiades per Jean Ginibre el 1965. L'interès d'aquest tipus de matriu està en els seus valors propis, ja que arriben a ser un bon model al pla complex de processos a la física. A partir d'aquestes matrius, calcularem la funció de densitat dels valors propis i veurem que la seva expressió té una forma especial, com un determinant. Això ens donarà peu a estudiar els processos determinantals de punts. Tot això ens farà arribar a veure com estan distribuïts els valors propis de l'ensemble de Ginibre i veure'n d'altres ensembles de matrius que donin un procés determinantal de punts. Aquests ensembles que veurem són els coneguts com Gaussian Unitary Ensemble (GUE) i Circular Unitary Ensemble (CUE). A partir de simulacions, veurem com es distribueixen els valors propis d'aquests ensembles.

1.3 Estructura de la memòria

El treball està estructurat en 6 capítols; sent el tercer i quart capítol on comença el cos de l'estudi.

En primera instància, al capítol 2, presentarem un seguit de definicions i proposicions que ens resultaran útils al llarg de tot l'estudi de matrius aleatòries i les distribucions dels seus valors propis. A més, en aquest capítol, iniciem l'estudi de l'exemple que marcarà tot l'estudi posterior: la matriu aleatòria gaussiana complexa. Veurem d'on prové la llei d'escollir una matriu aleatòria complexa, quines propietats bàsiques té i com és la seva constant de normalització.

A continuació, al capítol 3 veurem una relació entre la llei d'una matriu aleatòria complexa i la funció de distribució dels valors propis d'aquesta. Amb aquesta relació, farem una sèrie de càlculs i descomposicions, com la descomposició de Schur, per trobar la funció de densitat d'aquests valors propis. Un cop trobada, ens adonarem que aquesta funció de densitat es pot escriure d'una manera molt especial, a partir d'un determinant. Finalment i utilitzant aquesta expressió determinantal, calcularem la constant de normalització de la funció densitat.

Al capítol 4 ens centrarem a veure el perquè d'aquella forma determinantal de la funció densitat de la matriu complexa aleatòria. En primera instància, veurem els processos de punts en general. Tot seguit veurem les funcions de correlació i la relació que tenen amb la distribució d'un procés de punts. A més veurem un tipus de procés de punts, el procés determinantal. En aquest estudi dels processos determinantals veurem una classificació de tots els nuclis que donen lloc a un procés determinantal, tot veient el teorema de Macchi-Soschnikov. Un cop vista aquesta teoria, definirem un estadístic lineal relacionat amb un procés determinantal i veurem com són les expressions de l'esperança i la variància. Finalment, aplicarem la teoria al nostre exemple particular, l'ensemble de Ginibre.

Finalment, al capítol 5, veurem tot un seguit de simulacions per veure l'esperança d'un estadístic relacionat amb l'ensemble de Ginibre i veurem com estan distribuïts els valors propis d'aquest ensemble al pla complex. A més, buscarem i trobarem dos tipus més d'ensembles de matrius aleatòries que acabin resultant en processos determinantals. Aquests dos exemples són: les matrius hermítiques a partir del **GUE** i les matrius unitàries a partir del **CUE**. El que veurem en aquests dos exemples serà similar al cas de l'ensemble de Ginibre, és a dir, veurem la mesura de probabilitats associada a una matriu d'aquest tipus, utilitzarem la relació entre aquesta mesura i la funció de densitat dels valors propis, calcularem aquesta funció i veurem que la podrem expressar com un determinant. Un cop l'hàgem vist com un determinant, aplicarem la teoria realitzada al capítol 4, amb el que podrem estudiar i buscar les seves funcions de correlació i veurem com són aquestes al pla. Finalment, veurem simulacions de com estan distribuïts els valors propis en aquests dos ensembles i com concorden amb la teoria realitzada.

Al capítol 6 presentarem les conclusions del treball.

Al capítol 7, l'annex, es presentaran tot un seguit de codis en C++ que representaran els codis utilitzats als diferents gràfics de la funció gamma incompleta i la primera funció de correlació del cas hermític, les diferents taules de les esperances associades a un estadístic lineal a l'ensemble de Ginibre i les distribucions dels valors propis dels tres tipus d'ensembles escollits. A més, presentem també el codi en gnuplot utilitzat per dibuixar les diferents gràfiques i distribucions esmentades anteriorment.

2 Conceptes bàsics

Començarem definint alguns tipus de matrius i propietats que sorgiran al llarg d'aquest treball. Les matrius amb les quals treballarem seran matrius quadrades de dimensió $N \times N$, on N serà un nombre natural i relativament gran.

Dit això, comencem definint alguns tipus de matrius:

Definició 2.1. *La matriu transposada conjugada d'una matriu complexa A, és l'obtinguda de conjugar la matriu A^T. Per referir-nos a la matriu transposada conjugada utilitzarem la notació: A^*.*

Proposició 2.2. *Sigui A una matriu complexa i A^* la matriu transposada conjugada d'A. Aleshores es compleix:*

$$\det(A^*) = \overline{\det(A)}$$

Demostració. Podem escriure el determinant de la matriu A^*, de dimensió $N \times N$, de la següent forma extensiva:

$$\det(A^*) = \sum_{\pi \in S_N} \prod_{k=1}^{N} \overline{a_{k,\pi(k)}}$$

Per altra banda, podem escriure el conjugat del determinant de la matriu A com:

$$\overline{\det(A)} = \overline{\sum_{\pi \in S_n} \prod_{k=1}^{n} a_{k,\pi(k)}} = \sum_{\pi \in S_n} \prod_{k=1}^{n} \overline{a_{k,\pi(k)}}$$

Com veiem les dues expressions són iguals, amb el que la igualtat es compleix. □

Definició 2.3. *Una matriu complexa U es diu unitària si: $U^*U = UU^* = Id$.*

Definició 2.4. *Una matriu complexa H es diu hermítica si: $H^* = H$.*

Definició 2.5. *Una matriu aleatòria és una variable aleatòria a valors matricials.*

Definició 2.6. *Diem que V és una matriu de Vandermonde de mida $n \times n$ si és de la forma:*

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ . & . & . & \dots & . \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \alpha_3^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Proposició 2.7. *El determinant d'una matriu de Vandermonde es pot expressar com:*

$$\det(V) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)$$

Demostració. Ho veurem a partir d'inducció sobre el grau de la matriu:

El cas inicial és n=2. Aquest cas és absolutament trivial, ja que la matriu de Vandermonde és de la forma: $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{pmatrix}$. Amb el que el seu determinant queda: $\det(V) = (\alpha_2 - \alpha_1)$.

Suposem ara que la fórmula és certa fins a grau $n-1$. Hem de veure que la fórmula és certa per grau n.

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & ... & \alpha_n \\ . & . & ... & . \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & ... & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & \alpha_2 - \alpha_1 & ... & \alpha_n - \alpha_1 \\ . & . & ... & . \\ 0 & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2 - \alpha_1) & ... & \alpha_n^{n-2}(\alpha_n - \alpha_1) \end{pmatrix}$$

On el que hem fet ha sigut: primer restar la primera columna a les altres columnes i després $fila(j) - \alpha_1 fila(j-1) \quad j = 2, ..., n$.

Gràcies a aquesta transformació, calcular el determinant de la matriu V és el mateix que calcular el determinant de la matriu:

$$V' = \begin{pmatrix} \alpha_2 - \alpha_1 & ... & \alpha_n - \alpha_1 \\ . & ... & . \\ \alpha_2^{n-2}(\alpha_2 - \alpha_1) & ... & \alpha_n^{n-2}(\alpha_n - \alpha_1) \end{pmatrix}$$

Si a aquesta matriu li traiem el factor comú $\alpha_j - \alpha_1 \quad j = 2, ..., n$ obtenim una matriu de Vandermonde d'un grau més petit. Aplicant la hipòtesi d'inducció, resulta el següent:

$$\det(V) = (\alpha_n - \alpha_1) \cdots (\alpha_2 - \alpha_1) \prod_{2 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)$$

□

2.1 Definició de l'ensemble de Ginibre

Un cop hem definit els diferents tipus de matrius que utilitzarem, definirem l'ensemble de Ginibre. Aquesta definició consta de dues parts: el conjunt sobre el qual treballar i una mesura de probabilitats adequada al conjunt. Aquestes dues parts són:

1. Definir un conjunt de matrius Z. En el nostre cas escollim el conjunt de matrius complexes de mida $N \times N$.

2. La tria d'una mesura de probabilitats sobre Z. Escollim la donada per J. Ginibre al seu treball [8]. Aquesta és:

$$d\mu(S) = K \exp\Big(- \mathrm{Tr}(S^* S)\Big) d\mu_L(S) \quad \forall S \in Z \tag{2.1}$$

   amb K una constant de normalització de la mesura, i on $d\mu_L$ és la mesura:

$$d\mu_L(S) = \prod_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{N} dS_{ij} d\overline{S_{ij}}$$

   La mesura (2.1) satisfà dues propietats:

   (a) És invariant sota transformacions de matrius unitàries, és a dir, $\forall U \in Z$, amb U matriu unitària, es compleix que $d\mu(S) = d\mu(U^* S U)$

   Demostració. Hem de veure com podem expressar $(U^*SU)^*(U^*SU)$. Com $(U^*SU)^* = U^*S^*U$. Aleshores: $(U^*SU)^*(U^*SU) = U^*S^*UU^*SU = U^*S^*SU = (SU)^*(SU)$

Vist això, hem de veure com podem escriure la traça. A partir de la commutativitat de la traça:

$$\mathrm{Tr}((SU)^*(SU)) = \mathrm{Tr}((SU)(SU)^*) = \mathrm{Tr}(SUU^*S^*) = \mathrm{Tr}(SS^*) = \mathrm{Tr}(S^*S)$$

Ens falta veure que $d\mu_L(S) = d\mu_L(U^*SU)$. Però això és cert gràcies al fet que, al fer SU, estem fent un canvi de variables, on el jacobià d'aquest canvi té per determinant 1. En fer ara U^*SU desfem el canvi de variable que havíem realitzat, obtenint que la igualtat és certa. □

(b) Si escollim una matriu S amb la llei (2.1), cadascuna de les seves entrades són independents.

Demostració. Cal veure que la mesura es pot escriure com el producte dels elements d'una matriu S qualsevol de Z. Escriurem $S = (S_{ij})_{\{1\leq i,j\leq N\}}$.
Definim $B = S^*S$. D'aquesta matriu només ens interessen els elements de la diagonal, ja que són els termes que intervenen a la traça. Anomenarem a aquests elements b_{ii} per $i = 1, ..., N$. Aquests elements es poden escriure de la forma següent:

$$b_{ii} = \sum_{j=1}^{N} \overline{S_{ji}} S_{ji} = \sum_{j=1}^{N} |S_{j,i}|^2$$

I per tant:

$$\exp(-\operatorname{Tr} S^*S) = \exp\left(\sum_{i=1}^{N} -b_{ii}\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} -|S_{ij}|^2\right) = \prod_{i=1}^{N}\prod_{j=1}^{N} \exp(-|S_{ij}|^2)$$

Finalment, a partir de l'expressió de $d\mu_L$, podem escriure $d\mu(S)$ com:

$$d\mu(S) = K \prod_{i=1}^{N}\prod_{j=1}^{N} \exp(-|S_{ij}|^2) dS_{ij} d\overline{S_{ij}} \tag{2.2}$$

Amb això tenim que les entrades de la matriu S són independents i, a més, són gaussianes. □

Aquesta última expressió, la (2.2), ens permet generar d'una manera més senzilla matrius complexes aleatòries i gaussianes a partir d'entrades gaussianes independents.

2.2 Càlcul de la constant de normalització de la mesura

Utilitzant el resultat de l'equació (2.2), tenim una manera més senzilla d'obtenir la constant de normalització de la mesura de probabilitat (2.1). Per trobar-la cal imposar el següent:

$$\int d\mu(S) = 1$$

Veiem llavors el valor de K:

$$\int d\mu(S) = \int K \exp\Big(-\operatorname{Tr}(S^*S)\Big) d\mu_L(S) =$$

$$= K \int \prod_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{N} \exp\left(-|S_{ij}|^2\right) dS_{ij} d\overline{S_{ij}} =$$

$$= K \prod_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{N} \int \exp\left(-|S_{ij}|^2\right) dS_{ij} d\overline{S_{ij}}$$

On les integrals a calcular són totes de la forma:

$$\int \exp\left(-|z|^2\right) dz d\overline{z}$$

repetida N^2cops.

Ara bé, hem de tenir en compte que la mesura $dzd\overline{z}$ no és una mesura positiva. Per fer-la positiva, cal ficar la constant $-i$. A partir del canvi $z = x + iy$ tenim $-idzd\overline{z} = 2dxdy$, quedant les integrals reals següent:

$$\int \exp\left(-|z|^2\right) dz d\overline{z} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-(x^2 + y^2)\right) dxdy$$

Per calcular aquestes integrals, farem un canvi a coordenades polars, és a dir, que $x = r\cos(\theta)$ i $y = r\sin(\theta)$. Aquest canvi de variables té per Jacobià:

$$J(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r \tag{2.3}$$

Aplicant aquest canvi de variable, obtenim:

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-(x^2 + y^2)\right) dxdy = 2 \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\infty} r \exp\left(-r^2\right) dr d\theta =$$

$$= 4\pi \int_{0}^{\infty} r \exp\left(-r^2\right) dr = 4\pi(1/2) = 2\pi$$

Amb el que la constant de normalització és

$$K = (2\pi)^{-N^2}$$

I l'expressió (2.1) s'escriurà com:

$$d\mu(S) = (2\pi)^{-N^2} \exp\Big(-\operatorname{Tr}(S^*S)\Big) d\mu_L(S) \quad \forall S \in Z \tag{2.4}$$

3 Funció de densitat dels valors propis

Com hem vist, escollim de manera aleatòria una matriu S complexa, i per tant els valors propis associats a la matriu aleatòria són aleatoris. Ara, ens interessa veure com és la funció de densitat dels valors propis de l'ensemble de Ginibre.

Definició 3.1. *Donats $z_1, ..., z_N$ i S matriu qualsevol a Z que tingui per valors propis $z_1, ..., z_N$. Definim la funció de densitat dels valors propis de S a partir de la igualtat:*

$$\int_A P_N(z_1, ..., z_N) \prod_{i=1}^{N} dz_i d\overline{z_i} = \int_B d\mu(S) \tag{3.1}$$

on A el conjunt de N valors complexos a $\mathbb{C}$ i B és el conjunt de matrius que tenen per valors propis $z_1, ..., z_N$.

A partir d'aquesta definició tenim una relació per obtenir la funció de densitat dels valors propis. L'objectiu és veure l'expressió de $P_N(z_1, ..., z_N)$ en termes dels $z_1, ..., z_N$.

Lema 3.2 (Descomposició de Schur)**.** *Tota matriu S a Z es pot descompondre com:*

$$S = U(D + T)U^* \tag{3.2}$$

amb U matriu unitària, D matriu diagonal i T matriu triangular superior estricte.

Aquesta descomposició no és única, ja que $D = \mathrm{diag}(z_1, ..., z_n)$ està determinada llevat de permutació dels z_i.

Demostració. Demostrarem l'existència d'aquesta descomposició. Per fer-ho, considerarem una matriu S qualsevol dins el conjunt Z. El primer pas és trobar un valor propi qualsevol que anomenarem λ_1. Aquest valor propi es pot trobar de diferents formes, com a partir del mètode de la potència entre d'altres. Un cop hem trobat λ_1, trobem v_1 vector propi de valor propi λ_1 i diferent del vector nul. Escollim ara $n-1$ vectors $w_2, ..., w_n$ tals que $v_1, w_2, ..., w_n$ formin una base ortonormal a $\mathbb{C}^n$. Definim V_1 la matriu que té per columnes els vectors $v_1, w_2, ..., w_n$. Aleshores:

$$V_1^* S V_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & S_{12}^{(1)} \\ 0 & S_{22}^{(1)} \end{pmatrix}$$

On $S_{12}^{(1)}$ és una matriu de dimensió $1 \times (n-1)$ i $S_{22}^{(1)}$ és de dimensió $(n-1) \times (n-1)$. Repetim el procés per $S_{22}^{(1)}$, és a dir, trobem un valor propi de $S_{22}^{(1)}$, que anomenarem λ_2, un vector propi v_2, diferent del vector nul, i uns vectors $w_3, ..., w_n$ tals que $v_2, w_3, ..., w_n$ formin base ortonormal de $\mathbb{C}^{n-1}$. Definim V_2 la matriu de mida $(n-1) \times (n-1)$ que té per columnes els vectors $v_2, w_3, ..., w_n$. Aleshores:

$$V_2^* S_{22}^{(1)} V_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & S_{12}^{(2)} \\ 0 & S_{22}^{(2)} \end{pmatrix}$$

Si reiterem aquest procés, obtindrem $V_1, ..., V_n$ matrius quadrades de mida decreixent, és a dir, la primera té mida $n \times n$, la segona $(n-1) \times (n-1)$, i l'última tindrà mida 1×1.

Definim les matrius $U_1 = V_1$, $U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}$,..., $U_n = \begin{pmatrix} Id_n & 0 \\ 0 & V_n \end{pmatrix}$. Aquestes matrius són unitàries i compleixen:

$$U_n^* \cdots U_1^* S U_1 \cdots U_n = T$$

on T és una matriu triangular superior que hem anat obtenint a cada pas amb els valors propis a la diagonal. Si anomenem $U = U_1 \cdots U_n$, tenim $S = UTU^*$. Finalment, separem la matriu triangular T en dues matrius: una matriu D diagonal i una matriu T' triangular superior estricte. Amb això obtenim l'existència de la descomposició de Schur

$$S = U(D + T')U^*$$

□

Ens interessa trobar una descomposició de la matriu S de manera única a partir de la descomposició de Schur. El primer pas és fixar la matriu diagonal. Per fer-ho utilitzarem l'ordre sobre els complexos, és a dir, que $x + iy \leq x' + iy'$ si $x < x'$ o bé si $x = x'$ i $y \leq y'$. Aleshores podem ordenar els valor propis de la manera següent: $z_1 \leq z_2 \leq ... \leq z_N$. En el nostre cas, a més, ometrem la possibilitat que dos valors propis siguin iguals, i per tant $z_1 < z_2 < ... < z_N$.

Un cop hem fixat la matriu D, les matrius U i T poden ser reemplaçades per $V\Theta$ i $\Theta^* T \Theta$, on $\Theta = \text{diag}(e^{i\theta_1}, ..., e^{i\theta_N})$ és una matriu diagonal i unitària. L'única font ara de no unicitat és que tots els valors propis siguin diferents. Podem recuperar la unicitat de la descomposició imposant: $U_{ii} \geq 0$.

A partir de la descomposició de Schur, escrivim la matriu S de la forma $S = U(D + T)U^*$. Ara volem veure com escriure la matriu dS a partir de les matrius U,D i T i les seves matrius diferencials. A partir de la descomposició de Schur, podem escriure dS com:

$$dS = dU(D+T)U^* + Ud[(D+T)U^*] = dU(D+T)U^* + U(dD+dT)U^* + U(D+T)dU^* =$$
$$= dU(D + T)U^* + U(dD + dT)U^* - U(D + T)U^* dUU^* =$$
$$= U[U^* dU(D + T) + (dD + dT) - (D + T)U^* dU]U^*$$

On hem utilitzat que $dU^* = -U^* dUU^*$. Veiem aquesta igualtat:

Demostració. Com U matriu unitària:

$$U^* U = I$$

Diferenciant aquesta igualtat obtenim:

$$dU^* U + U^* dU = 0$$

Aïllant dU^*, traiem de manera directa la igualtat desitjada.

□

Per alleugerir la notació, definim aquestes noves matrius:

$$\Lambda = U^* dSU \tag{3.3}$$

$$\Omega = U^* dU \tag{3.4}$$

$$A = (D + T) \tag{3.5}$$

A partir d'aquesta notació, la igualtat matricial és:

$$\Lambda = \Omega A + dA - A\Omega \tag{3.6}$$

El següent pas és veure com podem expressar els elements dS_{ij} en termes dels elements de D, T i U. A partir de l'equació (3.3) i recordant que estem fent dos canvis de variables que s'anul·len entre ells, obtenim:

$$\prod_{i,j} dS_{i,j} d\overline{S_{ij}} = \bigwedge_{i,j} \lambda_{i,j} \overline{\lambda_{i,j}} \tag{3.7}$$

A partir de (3.6), escrivim els elements de Λ de la forma següent:

$$\lambda_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \omega_{ik} A_{kj} - \sum_{k=1}^{N} A_{ik} \omega_{kj} + dA_{ij}$$

Utilitzant ara (3.5) i $dA = dT + dD$, agrupem els λ_{ij} de la següent manera:

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} (z_j - z_i)\omega_{ij} + \sum_{k=1}^{j-1} T_{kj}\omega_{kj} - \sum_{k=i+1}^{N} T_{ik}\omega_{kj} & \text{si } i > j \\ dz_i + zi|\omega_{ii} - \omega_{ii}| + \sum_{k=1}^{i} T_{ki}\omega_{ik} - \sum_{k=i+1}^{N} T_{ik}\omega_{ki} & \text{si } i = j \\ dT_{ij} + T_{ij}|\omega_{ii} - \omega_{jj}| + \sum_{k=1,k\neq i}^{i} T_{ki}\omega_{ik} - \sum_{k=i+1,k\neq j}^{N} T_{ik}\omega_{ki} & \text{si } i < j \end{cases} \tag{3.8}$$

Ja tenim les expressions dels λ_{ij}. Necessitem ara ordenar d'alguna manera aquests coeficients. Escollim la següent: $\lambda_{N,1}, ..., \lambda_{N,N}, \lambda_{N-1,1}, ...\lambda_{N-1,N}, ..., \lambda_{1,1}, ...\lambda_{1,N}$

Amb aquest ordre i l'equació (3.8) tenim:

$$\bigwedge_{ij} \lambda_{ij}\overline{\lambda_{ij}} = \Big(\prod_{i>j} |z_i - z_j|^2\Big) \bigwedge_{i>j} \omega_{ij}\overline{\omega_{ij}} \bigwedge_{i} dz_i d\overline{z_i} \bigwedge_{i<j} \Big(dT_{ij} + T_{ij}(\omega_{ii} - \omega_{jj})\Big)\overline{\Big(dT_{ij} + T_{ij}(\omega_{ii} - \omega_{jj})\Big)} \tag{3.9}$$

Aquesta expressió pot ser reduïda a partir de la proposició següent.

Proposició 3.3. *Per a tot $k \leq N$ es compleix:*

$$\omega_{kk} \bigwedge_{i>j} \omega_{ij}\overline{\omega_{ij}} = 0$$

Demostració. Definim $M = \{U : U^*U = I, 0 \leq U_{ii}, \forall i = 1, ...N\}$ el conjunt de les matrius unitàries amb entrades no negatives a la diagonal. Volem veure que $\{U_{i,j} : i > j\}$ parametritza a M. Aleshores donades $\{U_{i,j} : i > j\}$ i les propietats d'aquesta matriu unitària U:

1. $U^*U = I$

2. U té per columnes una base ortonormal.

Traurem inductivament $U_{1,1}, \{U_{1,2}, U_{2,2}\}, ..., \{U_{1,N}, ..., U_{N,N}\}$. Traiem primer $U_{1,1}$:

Per la propietat 1 tenim:

$$\sum_{k=1}^{N} |U_{k,1}|^2 = 1$$

D'aquí, expressem $U_{1,1}$ com:

$$|U_{1,1}| = \sqrt{1 - \sum_{k=2}^{N} |U_{k,1}|^2}$$

A més, $U_{i,i} \geq 0$ i real. Per tant expressem $U_{1,1}$ com: $U_{1,1} = \sqrt{1 - \sum_{k=2}^{N} |U_{k,1}|^2}$

i amb això hem tret $U_{1,1}$. Veiem ara com treure $\{U_{1,2}, U_{2,2}\}$:

Per ortonormalitat tenim:

$$U_{1,1}U_{1,2} + U_{2,1}U_{2,2} + ... + U_{N,1}U_{N,2} = 0$$

Aquesta equació és complexa, amb el que obtenim 2 equacions, una per la part real, i una per la part imaginaria. Aïllant $U_{1,2}$ tindrem la seva expressió real i complexa.

Ara per 1 tenim:

$$\sum_{k=1}^{N} |U_{k,2}|^2 = 1$$

Amb el que tenim 3 incògnites i 3 equacions. Reiterant aquest procés obtindrem les expressions de $\{U_{1,3}, U_{2,3}, U_{3,3}\}, ..., \{U_{1,N}, ..., U_{N,N}\}$. Fent un còmput, hem calculat $N^2 - N$ elements, i per tant el grau de M és justament $N^2 - N$.

Ara bé, sabent la dimensió de M i que $\omega_{kk} \bigwedge_{i>j} \omega_{ij}\overline{\omega_{ij}}$ és una forma de grau $N^2 - N + 1$, gràcies al fet que cada forma ω_{ij} té grau 1, i que tenim només la part superior de la matriu, és a dir, $N^2 - N$ formes. El grau de la forma $\omega_{kk} \bigwedge_{i>j} \omega_{ij}\overline{\omega_{ij}}$ és superior al grau de M, i per tant linealment dependents, amb el que l'única possibilitat és la trivial, és a dir, 0. □

Utilitzant aquesta proposició, l'equació (3.9) ens queda reduïda a:

$$\bigwedge_{ij} \lambda_{ij}\overline{\lambda_{ij}} = \Big(\prod_{i>j} |z_i - z_j|^2\Big) \bigwedge_{i>j} \omega_{ij}\overline{\omega_{ij}} \bigwedge_{i} dz_i d\overline{z_i} \prod_{i<j} dT_{ij} d\overline{T_{ij}} \tag{3.10}$$

Per acabar i obtenir tot el necessari hem de veure com podem expressar $\mathrm{Tr}(S^*S)$ en termes de les matrius D i T de la descomposició de Schur. Recordem, a més, que $\mathrm{Tr}((U^*SU)^*(U^*SU)) = \mathrm{Tr}(S^*S)$, vista a la propietat de la mesura de l'ensemble de Ginibre 2 :

$$\mathrm{Tr}(S^*S) = \mathrm{Tr}((D+T)^*(D+T)) = \mathrm{Tr}(D^*D)\,\mathrm{Tr}(T^*T) \tag{3.11}$$

On l'última igualtat es compleix, ja que D^*T i T^*D tenen els elements de la diagonal idènticament 0, i per tant, no contribueixen. Això és fàcil de demostrar a causa del fet que la matriu D és diagonal i la matriu T no té cap element diagonal, resultant que els termes siguin 0.

Amb tot això tenim les eines necessàries per trobar una expressió de la funció de distribució d'una matriu en l'ensemble de Ginibre. Trobem-la.

Escollim a Z una matriu que compleixi que els seus valors propis siguin $z_1, ...z_N$. Utilitzant la descomposició de Schur a aquesta matriu (3.2) i les equacions (3.7), (3.10) i (3.11):

$$d\mu(S) = \Big(\prod_{i<j} |z_i - z_j|^2 \prod_{i=1}^{N} \exp{(-|z_i|^2)} dz_i d\overline{z_i}\Big)\Big(\prod_{i<j} \exp{(-|T_{ij}|^2)} dT_{ij} d\overline{T_{ij}}\Big)\Big(\bigwedge_{i>j} \omega_{ij}\overline{\omega_{ij}}\Big) \tag{3.12}$$

Integrant l'equació (3.12) i separant pels productes, que ho podem fer gràcies a la independència de les entrades de S, tenim les següents integrals:

$$\int \prod_{i<j} \exp{(-|T_{ij}|^2)} dT_{ij} d\overline{T_{ij}} \tag{3.13}$$

$$\int \bigwedge_{i>j} \omega_{ij}\overline{\omega_{ij}} \tag{3.14}$$

$$\int \Big(\prod_{i<j} |z_i - z_j|^2\Big) \prod_{i=1}^{N} \exp{(-|z_i|^2)} dz_i d\overline{z_i} \tag{3.15}$$

On les integrals (3.13) i (3.14) les reduïm a una constant C que calcularem posteriorment. A partir de la fórmula (3.1), la descomposició trobada a (3.12) i la reducció d'aquestes dues integrals, tenim la igualtat:

$$\int P_N(z_1, ...z_N) dz_i d\overline{z_i} = C \int \Big(\prod_{1 \le i < j \le N} |z_i - z_j|^2\Big) \prod_{i=1}^{N} \exp{(-|z_i|^2)} dz_i d\overline{z_i}$$

on immediatament:

$$P_N(z_1, ...z_N) = C\Big(\prod_{1 \le i < j \le N} |z_i - z_j|^2\Big) \prod_{i=1}^{N} \exp{(-|z_i|^2)} \tag{3.16}$$

3.1 La funció de densitat vista com un determinant

En aquesta subsecció, veurem que la funció de densitat (3.16) trobada es pot escriure d'una manera especial. Aquesta forma especial és com un determinant. Això es deurà al fet que la part $|z_i - z_j|^2$ s'assembla a l'expressió del determinant de Vandermonde, vista a la proposició 2.7.

Teorema 3.4. *Sigui S una matriu de mida $N \times N$ de l'ensemble de Ginibre, i siguin $z_1, ..., z_N$ els valors propis de S. Aleshores*

$$P(z_1, ..., z_N) = C \det(K(z_i, z_j))_{\{i,j \le N\}}$$

on $K(z_i, z_j) = \sum_{j=0}^{N-1} (\overline{z_i} z_j)^j \exp(-\frac{1}{2}(|z_i|^2 + |z_j|^2))$ i C constant de normalització.

Demostració. De (3.16) tenim l'expressió de $P_N(z_1, ..., z_N)$ com:

$$P_N(z_1, ..., z_N) = C \prod_{1 \le i < j \le N} |z_i - z_j|^2 \prod_{i=1}^{N} \exp(-|z_i|^2)$$

Volem ara veure com expressar P_N com un determinant. Si ens fixem, $\prod_{1\leq i<j\leq N}|z_i - z_j|^2$, és similar al determinant de Vandermonde al quadrat, vist a la proposició 2.7. Definim V la matriu de Vandermonde tal que els seus elements $\{V_{ij}\}$ s'escriuen com $(V_{ij}) = z_j^{i-1}$. Aleshores:

$$\prod_{1\leq i<j\leq N}|z_i - z_j|^2 = (det(V))^2 = det(\sum_{j=1}^{N}\overline{V_{ji}}V_{jk})_{\{1\leq i,k\leq N\}} =$$

$$= det(\sum_{j=1}^{N}\overline{z_i}^{j-1}z_k^{j-1})_{\{1\leq i,k\leq N\}} = det(\sum_{j=0}^{N-1}\overline{z_i}^{j}z_k^{j})_{\{1\leq i,k\leq N\}}$$

Ens falta ficar l'exponencial dins el determinant. Afegint-la dins el determinant ens queda:

$$P_N(z_1,...,z_N) = C\det\Big(\sum_{k=0}^{N-1}\overline{z_i}^k z_j^k \exp(-\frac{1}{2}(|z_i|^2+|z_j|^2))\Big)_{\{1\leq i,k\leq N\}} = C\det(K(z_i,z_j))_{\{i,j\leq N\}} \tag{3.17}$$

amb $K(z_i,z_k) = \sum_{j=0}^{N-1}(\overline{z}w)^j\exp(-\frac{1}{2}(|z|^2+|w|^2))$ □

3.2 Càlcul de la constant de normalització de la funció de densitat

En aquesta subsecció l'objectiu és calcular el valor concret de la constant C. Hem esperat fins a aquest moment perquè, en veure la funció de densitat com un determinant, ens resultarà més senzill arribar a calcular aquesta constant.

Recordem que tota funció de densitat compleix:

$$\int P_N(z_1,...,z_N)\prod_{i=1}^{N}dz_i d\overline{z_i} = 1$$

Per afavorir notació, escriurem $K(x,y)$ com $K(x,y) = \sum_{j=0}^{N-1}\phi_j(x)\overline{\phi_j(y)}$ amb $\phi_j(x) = x^j\exp(\frac{-|x|^2}{2})$.

Ara, necessitem una forma d'expressar aquesta funció K, com el producte de dues matrius. Fem-ho a partir del següent lema.

Lema 3.5. *Per $z_1,...,z_N$ tenim $K(z_i,z_j)_{\{i,j\leq N\}} = AA^*$, amb A matriu tal que les seves components A_{ij} es poden expressar com $A_{ij} = \phi_j(z_i)$, on $\phi_j(z_i) = z_i^{j-1}\exp(\frac{-|z_i|^2}{2})$*

Demostració. Veiem com és el producte de AA^*:

$$B = AA^* = \begin{pmatrix} \phi_1(z_1) & \phi_2(z_1) & ... & \phi_N(z_1) \\ \phi_1(z_2) & \phi_2(z_2) & ... & \phi_N(z_2) \\ . & . & ... & . \\ \phi_1(z_N) & \phi_2(z_N) & ... & \phi_N(z_N) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{\phi_1(z_1)} & \overline{\phi_1(z_2)} & ... & \overline{\phi_1(z_N)} \\ \overline{\phi_2(z_1)} & \overline{\phi_2(z_2)} & ... & \overline{\phi_2(z_N)} \\ . & . & ... & . \\ \overline{\phi_N(z_1)} & \overline{\phi_N(z_2)} & ... & \overline{\phi_N(z_N)} \end{pmatrix}$$

cada component d'aquest producte s'expressa com:

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \phi_k(x_i)\overline{\phi_k(z_j)}$$

Aquesta expressió és justament l'expressió de la funció K. $\square$

A partir de la nova notació de K, i del lema 3.5 podem reescriure $\det(K(z_i, z_j))_{\{i,j \leq N\}}$, de la forma:

$$\det(K(z_i, z_j))_{\{i,j\leq N\}} = \det(AA^*) = \det(\phi_i(z_j)_{\{i,j\leq N\}})\det(\phi_j(z_i)_{\{i,j\leq N\}})$$

Amb aquesta notació i expandint els determinants de les matrius A i A^*, tenim que l'integral a calcular és la següent:

$$C\int \det(K(z_i, z_j))_{\{i,j\leq N\}} \prod_{i=1}^{N} dz_i d\overline{z_i} = C\int \det(\phi_i(z_j))_{\{i,j\leq N\}} \det(\phi_j(z_i))_{\{i,j\leq N\}} \prod_{i=1}^{N} dz_i d\overline{z_i} =$$

$$= C\int \Big(\sum_{\pi\in S_N} \mathrm{sign}(\pi) \prod_{k=1}^{N} \phi_{\pi(k)}(z_k)\Big)\Big(\sum_{\tau\in S_N} \mathrm{sign}(\tau) \prod_{k=1}^{N} \overline{\phi_{\tau(k)}(z_k)}\Big) \prod_{i=1}^{N} dz_i d\overline{z_i} =$$

$$= C\int \sum_{\pi,\tau\in S_N} \mathrm{sign}(\pi)\mathrm{sign}(\tau) \prod_{k=1}^{N} \phi_{\pi(k)}(z_k)\overline{\phi_{\tau(k)}(z_k)} \prod_{i=1}^{N} dz_i d\overline{z_i}$$

Fent un còmput, tenim $(N!)^2$ sumands. Ara bé, si les permutacions són diferents, és a dir, si $\pi(k) \neq \tau(k)$, aleshores:

$$\int \phi_{\pi(k)}(z_k)\overline{\phi_{\tau(k)}(z_k)} dz_k d\overline{z_k} = 0 \tag{3.18}$$

gràcies al fet que les ϕ_k són ortogonals. Comprovem-ho. Si fem el canvi de variable a polars, la integral respecte a l'angle és la següent:

$$\int_0^{2\pi} \exp(i\theta(k-j))d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ 2\pi & \text{si } k = j \end{cases} \tag{3.19}$$

Per tant, només contribueixen els termes tals que $\pi(k) = \tau(k)$.

Fixem, doncs, $\pi \in S_N$. L'única possibilitat que la integral no sigui 0 és, que per a tot k, $\pi(k) = \tau(k)$. Amb això tindrem que $\mathrm{sign}(\pi) = \mathrm{sign}(\tau)$ (i $\mathrm{sign}(\pi)\mathrm{sign}(\tau) = 1$). Al fixar aquesta permutació, tindrem ara només $N!$ sumands. Aquests sumands són:

$$C\int \sum_{\pi,\tau\in S_N} \mathrm{sign}(\pi)\mathrm{sign}(\tau) \prod_{k=1}^{N} \phi_{\pi(k)}(z_k)\overline{\phi_{\tau(k)}(z_k)} \prod_{i=1}^{N} dz_i d\overline{z_i} =$$

$$= C\sum_{\pi\in S_N} \prod_{k=1}^{N} \int \phi_{\pi(k)}(z_k)\overline{\phi_{\pi(k)}(z_k)} \prod_{i=1}^{N} dz_i d\overline{z_i}$$

Falta veure el valor d'aquestes integrals. Ho farem a partir del canvi de variables a coordenades polars. La integral respecte a l'angle ja l'hem calculada a (3.19). Ens queda calcular les integrals respecte al radi. Aquestes integrals són les següents:

$$2\int_0^\infty r^{2k+1}\exp(-r^2)dr \quad per \quad k=0,...,N-1$$

Per veure el valor d'aquestes integrals utilitzarem següent lema:

Lema 3.6. *Per a tot $k=1,...,N$, tenim:*

$$\int_0^\infty r^{2k+1}\exp(-r^2)dr = \frac{k!}{2}$$

Demostració. Demostrem-ho per inducció. El cas inicial és per $k=1$:

$$\int_0^\infty r^3\exp(-r^2)dr$$

Integrant per parts resulta:

$$\int_0^\infty r^3\exp(-r^2)dr = -\frac{r^2\exp(-r^2)}{2}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty r\exp(-r^2)dr$$

Avaluant i resolent:

$$\int_0^\infty r^3\exp(-r^2)dr = \frac{1}{2} = \frac{1!}{2}$$

Suposem ara que és cert fins a k, és a dir, es compleix:

$$\int_0^\infty r^{2k+1}\exp(-r^2)dr = \frac{k!}{2}$$

Volem veure que:

$$\int_0^\infty r^{2(k+1)+1}\exp(-r^2)dr = \frac{(k+1)!}{2}$$

Integrem per parts aquesta integral:

$$\int_0^\infty r^{2(k+1)+1}\exp(-r^2)dr = -\frac{r^{2(k+1)}\exp(-r^2)}{2}\Big|_0^\infty + 2(k+1)\int_0^\infty \frac{r^{k+1}\exp(-r^2)}{2}dr$$

I per hipòtesi d'inducció:

$$\int_0^\infty r^{2(k+1)+1}\exp(-r^2)dr = (k+1)\int_0^\infty r^{k+1}\exp(-r^2)dr = \frac{(k+1)k!}{2} = \frac{(k+1)!}{2}$$

□

Aplicant aquest lema, ens queda:

$$C\sum_{\pi\in S_N}\prod_{k=1}^N\int \phi_{\pi(k)}(z_k)\overline{\phi_{\pi(k)}(z_k)}\prod_{i=1}^N dz_i d\overline{z_i} = C(2\pi)^N\sum_{\pi\in S_N}\prod_{k=0}^{N-1}k!$$

I, com tenim $N!$ sumands iguals:

$$C(2\pi)^N \sum_{\pi \in S_N} \prod_{j=0}^{N-1} j! = C(2\pi)^N \prod_{j=0}^{N} j! = 1$$

Aleshores, la nostra constant de normalització és:

$$C = \frac{1}{(2\pi)^N \prod_{j=0}^{N} j!} \tag{3.20}$$

Amb aquest càlcul podem retocar una mica l'expressió de la fórmula (3.17), tot ficant el producte de factorial dins el determinant. La nova expressió és:

$$P_N(z_1, ..., z_N) = \frac{1}{N!}(2\pi)^{-N} \det(K(z_i, z_j))_{\{i,j \leq N\}} \tag{3.21}$$

amb

$$K(z_i, z_j) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(\overline{z_i} z_j)^k}{k!} \exp(-\frac{1}{2}(|z_i|^2 + |z_j|^2)) \tag{3.22}$$

4 Processos determinantals

En aquesta part estudiarem les configuracions o col·leccions aleàtories de punts a l'espai, també conegudes com a processos de punts.

Aquests processos s'utilitzen en molts models a la física, com per exemple, veure com estan repartits els electrons en àtoms pesats o la distribució dels astres en un sistema.

Per definir el procés de punts, tindrem punts a un conjunt Λ i μ serà la mesura de referència respecte de la qual expressarem la funció de densitat. Agafarem com a Λ un conjunt obert de $\mathbb{R}^d$ i la mesura μ serà la mesura de Lebesgue a $\mathbb{R}^d$ restringida a Λ. Amb això tindrem que Λ és completament separable i podrem definir els conjunts de Borel $B(\Lambda)$. Si mirem ara la configuració de la teoria de probabilitat, necessitem tindre un espai mostral que sigui mètric, separable i complet. En general, els subconjunts de Λ no seran d'aquesta forma. Tanmateix, un subconjunt discret de Λ pot identificar-se amb la mesura comptadora en el subconjunt. Definim doncs ara que és la mesura comptadora.

Definició 4.1. *Definim la mesura comptadora com la mesura de la forma:*

$$\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} \delta_\lambda$$

on la funció δ_λ és la funció que assigna 1 si λ pertany al conjunt o 0 si no pertany, és a dir, és de la forma:

$$\delta_\lambda = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \notin \Lambda \\ 1 & \text{si } \lambda \in \Lambda \end{cases}$$

Definició 4.2. *Definim un procés de punts X com una variable aleatòria que pren valors sobre l'espai $M(\Lambda)$ de les mesures σ-finites de Borel a Λ.*

Definició 4.3. *Direm que un procés de punts X és simple si no tenim punts repetits i el conjunt de mesures associades de la forma $\mu = \sum_{\lambda \in X} \delta_\lambda$ tenen probabilitat 1.*

Definició 4.4. *Donat X un procés de punts simple sobre Λ i sigui D un subconjunt de Λ. Definim el nombre de punts de X sobre D com:*

$$X(D) = \#\{x : x \in X \cap D\} = \mu_X(D)$$

Ens falta descriure la distribució dels processos de punts. Donats $D_1, ..., D_k$ amb $m \geq 1$ conjunts de Borel a Λ i els intervals oberts $I_1, ..., I_m \subset [0, \infty)$, definim un subconjunt sobre $M(\Lambda)$ que és el conjunt de mesures μ que satisfan $\mu(D_k) \subset I_k \quad \forall k \leq m$. A aquests conjunts els anomenem cilindres. La distribució del procés de punts X està determinada per la probabilitat dels cilindres, és a dir, per:

$$\mathbb{P}[X(D_k) = n_k, 1 \leq k \leq m]$$

També podem definir el procés de punts X a partir d'assignar probabilitats consistents als cilindres. La consistència significa que $\sum_{0 \leq n_k < \infty} \mathbb{P}[X(D_k) = n_k, 1 \leq k \leq m]$ ha de ser la mateixa que $\mathbb{P}[X(D_k) = n_k, 1 \leq k \leq m-1]$.

4.1 Funcions de correlació

Com hem vist, podem especificar les funcions de distribució dels processos de punts a partir de comptar els elements dins dels subconjunts de Λ. Malgrat això, n'hi ha una altra forma de descriure aquestes funcions de distribució dels processos de punts. Aquesta és a partir de les **funcions de correlació**.

Definició 4.5. *Sigui X un procés de punts simple. Les funcions de correlació de X respecte a la mesura de referència μ, són funcions $\rho_k : \Lambda^k \to [0, \infty) \quad k \geq 1$, tals que:*

$$\mathbb{E}[\prod_{i=1}^{k} X(D_i)] = \int_{\prod_{i=1}^{k} D_i} \rho_k(x_1, ..., x_k) d\mu(x_1) \cdots d\mu(x_k)$$

on els D_i són subconjunts disjunts de Λ.

Aquestes funcions són importants perquè ens donen una forma més clarificadora per entendre la distribució dels punts. Una primera aproximació a la distribució dels punts, és la primera intensitat, és a dir, $\mathbb{E}(X)$.

Definició 4.6. *Definim la mesura de la primera intensitat μ_1 sobre un conjunt D com:*

$$\mu_1(D) = \mathbb{E}[X(D)]$$

A més, si aquesta mesura és absolutament continua, la seva derivada ρ_1 s'anomena funció de la primera intensitat. A aquesta funció ρ_1 també s'anomena ***primera funció de correlació****.*

Si mirem més detingudament l'expressió de $\mathbb{E}[X(D)]$ respecte ρ_1, tenim:

$$\mathbb{E}[X(D)] = \int_D \rho_1 d\mu = \int_\Lambda \mathbb{1}_D \rho_1 d\mu$$

D'aquesta expressió, podem obtenir una manera d'expressar ρ_1 respecte del conjunt D. Aquesta és:

$$\rho_1 = d\mu_1(D)\mathbb{1}_D$$

Definició 4.7. *Un estadístic lineal és una variable aleatòria de la forma:*

$$X_\phi = \int_\Lambda \phi d\mu_X$$

on ϕ és una funció a $C^k(\Lambda)$

Vist això, cal preguntar-se com serà l'esperança d'un estadístic lineal qualsevol X_ϕ. A partir de la definició de la funció de correlació, escrivim l'esperança de l'estadístic com:

$$\mathbb{E}(X_\phi) = \int_\Lambda \phi \rho_1 d\mu_X$$

L'objectiu ara és veure si tenim alguna relació entre les funcions de densitat i les funcions de correlació. Assumirem que X sigui un procés de punts simple. Amb això podem entendre les funcions de correlació com el següent:

1. Si Λ és finit i μ és la mesura comptadora, aleshores per $x_1, ..., x_n$ punts diferents de Λ, la funció $\rho_n(x_1, ..., x_n)$ és la probabilitat de què $x_1, ..., x_n$ siguin a X.
2. Si Λ és obert i μ és la mesura de Lebesgue, aleshores per $x_1, ..., x_n$ punts diferents de Λ, i $\epsilon > 0$ suficientment petit perquè les boles $B_\epsilon(x_i)$ siguin disjuntes, tenim la relació següent:

$$\int_{\prod_{i=1}^{k} B_\epsilon(x_i)} \rho_n(x_1, ..., x_n) d\mu(x_1) \cdots d\mu(x_n) = \mathbb{E}\Big[\prod_{i=1}^{n} X(B_\epsilon(x_i))\Big] =$$

$$= \sum_{n_i \geq 1} \mathbb{P}\Big[X(B_\epsilon(x_i)) = n_i, \quad i \leq n\Big] \prod_{j=1}^{n} n_j$$

Amb això ja tenim una forma de relacionar les funcions de correlació i les funcions de distribució. Ens falta veure com poder obtenir d'una manera senzilla aquestes funcions de correlació a partir de les funcions de densitat. Per fer-ho, veurem el següent teorema.

Teorema 4.8. *Donades $X_1, ..., X_n$ variables aleatòries complexes idènticament distribuïdes amb funció de densitat conjunta $P(x_1, ..., x_n)$ respecte la mesura de Lebesgue en $\mathbb{C}^n$. Definim X com el procés $X = \sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i}$, és a dir, el procés a $\mathbb{C}$ que assigna un pes a cada X_i. Aleshores les funcions de correlació de X són expressades per:*

$$\rho_k(x_1, ..., x_k) = \frac{n!}{(n-k)!} \int P(x_1, ..., x_n) \prod_{j=k+1}^{n} d\mu(x_j) \tag{4.1}$$

Demostració. Cal veure que

$$\frac{n!}{(n-k)!} \int P(x_1, ..., x_n) \prod_{j=k+1}^{n} d\mu(x_j)$$

és funció de correlació del procés X, és a dir, que es compleix:

$$\mathbb{E}(\prod_{i=1}^{k} X_i) = \int \rho_k(x_1, ..., x_k) \prod_{j=1}^{k} d\mu(x_j) =$$

$$= \int \frac{n!}{(n-k)!} P(x_1, .., x_n) \prod_{j=1}^{n} d\mu(x_j)$$

Aquesta última expressió és una esperança? La resposta és sí. Aquesta esperança és la d'escollir k de les n variables que tenim. En altres paraules, és la integral de la funció $\binom{n}{k} k! P(x_1, ..., x_n)$, i per tant la igualtat es compleix. $\square$

Corol·lari 4.9. *Per a tot $k \geq 2$ tenim:*

$$\rho_k(x_1, ..., x_k) = \frac{1}{(n-k)!} \int_{\Lambda^{n-k}} \rho_n(x_1, ..., x_n) \prod_{i=k+1}^{n} d\mu(x_i) \tag{4.2}$$

Demostració. Pel teorema anterior, podem escriure la funció ρ_k com:

$$\rho_k(x_1, ..., x_k) = \frac{n!}{(n-k)!} \int_{\Lambda^{n-k}} P(x_1, ..., x_n) \prod_{i=k+1}^{n} d\mu(x_i)$$

Per altra banda, hem de veure com escriure rho_n en termes de la funció de distribució. A partir del teorema anterior, podem escriure rho_n com:

$$\rho_n(x_1, ..., x_n) = n! P(x_1, ..., x_n)$$

Ajuntant les dues expressions obtingudes obtenim:

$$\rho_k(x_1, ..., x_k) = \frac{1}{(n-k)!} \int_{\Lambda^{n-k}} \rho_n(x_1, ..., x_n) \prod_{i=k+1}^{n} d\mu(x_i)$$

quedant demostrada la igualtat. $\square$

4.2 Processos determinantal de punts

Un cop hem vist els processos de punts, podem veure el procés de punts que ens interessa: **el procés determinantal de punts** o simplement procés determinantal.

El primer que cal preguntar-se és d'on ve, quina és la seva motivació. La resposta ve per part de la física quàntica, més en particular de l'estudi de la posició dels electrons, que es representa a partir de la funció d'ona ψ que compleix: $\int |\psi|^2 = 1$. D'aquí obtenim que $|\psi|^2$ dóna la funció de densitat de la posició de l'electró. Però això és només per un electró, què passa si tenim n electrons? La forma més simple, és considerar:

$$(\psi_1 \psi_2 \cdots \psi_n)(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} \psi_i(x_i)$$

on cada posició és una variable aleatòria independent.

Però n'hi ha un problema, això no captura del tot el realisme que n'hi ha darrere, ja que ens falta la repulsió dels mateixos electrons (en ser càrregues iguals es repulsen), i que cada electró serà indistingible dels altres electrons. Per tenir en compte aquest fet, utilitzem el **Principi d'exclusió de Pauli**. És per això que considerarem l'antisimetrització d'aquesta funció de densitat, on se segueix:

$$\sum_{\pi \in S_n} \prod_{i=1}^{n} \psi_i(x_i) = \det(\psi_j(x_i))_{\{1 \leq i,j \leq n\}}$$

Amb el que hem aconseguit expressar un procés de punts com un determinant.

Vista la idea i la motivació darrera aquest tipus de procés, podem començar a definir què és un procés determinantal. Per fer-ho, utilitzarem la mateixa notació emprada en els processos de punts.

Definició 4.10. *Donat X un procés de punts sobre Λ, direm que X és un procés determinantal amb nucli K si el procés és simple i la seva funció de densitat respecte de la seva mesura satisfà:*

$$P(x_1, ..., x_n) = \det(K(x_i, x_j))_{\{1 \leq i,j \leq n\}} \quad \forall x_1, ..., x_n \in \Lambda$$

De la definició podem extreure el següent:

1. $\det(K(x_i, x_j))_{\{1 \leq i,j \leq n\}} \geq 0$

   Demostració. Directe de la definició, pel fet que $P(x_1, ..., x_n) \geq 0$ és funció de densitat i, per tant, positiva. $\square$

2. Suposem X procés determinantal amb nucli K respecte a una mesura μ. Sigui $h : \Lambda \to \mathbb{C}$ funció continua i tal que $\frac{1}{h}$ és localment $\mathbb{L}^2(\mu)$. Definim $K_h(x,y) = h(x)\overline{h(y)}K(x,y)$ i $d\mu_h(x) = \frac{d\mu(x)}{|h(x)|^2}$. Aleshores X és un procés determinantal amb nucli K_h respecte de la mesura $d\mu_h$.

   Demostració. Cal veure que podem passar del $\det(K(y,x))$ a $\det(K_h(y,x))$ fent un canvi de mesures.

$$\det(K(x_i,x_j))_{\{1\leq i,j\leq n\}}\prod_{i=1}^{n} d\mu(x_i) = \det(K(x_i,x_j))_{\{1\leq i,j\leq n\}}\prod_{i=1}^{n}|h(x_i)|^2 d\mu_h(x_i)$$

   Aquesta igualtat és certa perquè hem expressat $d\mu(x)$ com $|h(x)|^2 d\mu_h(x)$. Si fiquem ara la funció $h(x)$ dins el determinant ens resulta a l'expressió del nucli K_h:

$$\det(K(x_i,x_j))_{\{1\leq i,j\leq n\}}\prod_{i=1}^{n}|h(x_i)|^2 d\mu_h(x_i) = \det(K_h(x_i,x_j))_{\{1\leq i,j\leq n\}}\prod_{i=1}^{n} d\mu_h(x_i)$$

   I per tant hem vist que X és un procés determinantal amb nucli K_h respecte de la mesura $d\mu_h$. □

Aquesta segona propietat és molt important perquè ens mostra una manera de canviar l'expressió del nucli d'un procés determinantal a partir de canviar la mesura sobre la qual treballarem.

A la definició 4.4, no hem dit res sobre l'existència o unicitat del nucli K. El nostre objectiu serà arribar a veure si podem generar un procés determinantal a partir d'un nucli amb unes certes característiques. Una d'aquestes característiques és que el nucli ha de ser hermític. Definim que vol dir que un nucli sigui hermític.

Definició 4.11. *Direm que un nucli K és hermític, si* $\forall x, y \in \Lambda$

$$K(x,y) = \overline{K(y,x)}$$

Amb el que hem fet, no tenim massa clar si el nucli és continu. Igualment, és natural treballar amb condicions més fluixes. Per nosaltres serà suficient el següent:

Definició 4.12. *Direm que un nucli K és localment de quadrat integrable sobre Λ^2, si $\forall D \in \Lambda$*

$$\int_{D^2} |K(x,y)|^2 d\mu(x) d\mu(y) < \infty$$

Escriurem K és de $\mathbb{L}^2(\Lambda)$

A partir d'ara treballarem sempre amb nuclis localment de quadrat integrable. Amb això ja podem començar a veure com construir un procés determinantal a partir d'un nucli hermític. Aquests nuclis hermítics són una "barreja"de processos determinantals projectats. Entendrem per "barrejaüna combinació convexa de mesures, i per procés determinantal projectat com un procés determinantal tal que el seu nucli defineix un operador a un subespai de $\mathbb{L}^2(\Lambda,\mu)$.

Abans de treballar amb aquests nuclis projectats, necessitem el següent lema tècnic que ens ajudarà a arribar als següents resultats. Aquest lema és conegut com a **fórmula de Cauchy-Binet**.

Lema 4.13 (Fórmula de Cauchy-Binet)**.** *Donades A matriu de dimensió $m \times n$ i B matriu de dimensió $n \times m$. Escriurem $[n]$ com el conjunt $\{1, ..., n\}$ i $\binom{[n]}{m}$ el conjunt de m combinacions de $[n]$. Per $s \in \binom{[n]}{m}$, entendrem $A_{[m],s}$ com la matriu de dimensió $m \times m$ que té per columnes les de la matriu A i per índexs els de s, i $B_{s,[m]}$ la matriu de dimensió $m \times m$ que té per files les de B i els índexs de s. Aleshores:*

$$\det(AB) = \sum_{s \in \binom{[n]}{m}} \det(A_{[m],s}) \det(B_{s,[m]})$$

Demostració. Volem provar la fórmula de Cauchy-Binet. Per fer-ho, tindrem en compte el següent:

- Per $1 \leq k \leq n$ el coeficient z^{n-k} en el polinomi $\det(zI + X)$ és la suma dels $k \times k$ menors principals de la matriu X.

A més, necessitem *la identitat determinantal de Sylvester.* Aquesta identitat és la següent: per A matriu de dimensió $k \times n$ i B matriu de dimensió $n \times k$ es compleix:

$$\det(I_k + AB) = \det(I_n + BA)$$

A partir d'aquesta igualtat, podem trobar l'expressió dels polinomis característics. Aquests s'expressen com:

$$\det(zI_n + BA) = z^{n-k} \det(zI_k + AB)$$

Aquesta igualtat ens dóna una relació entre els polinomis característics de la matriu AB i la matriu BA. Si mirem el cas $n = k$ i comparem els coeficient a coeficient, obtenim les identitats bàsiques, com $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ i $\det(AB) = \det(BA)$. Ara bé, en el nostre cas ens interessa per $n > k$, i en especial el coeficient de z^{n-k}. La part dreta de la igualtat, és a dir, $z^{n-k} \det(zI + AB)$ dóna un terme igual a constant. Aquesta constant és exactament el $\det(AB)$. Mirem ara la part esquerra. Buscar el coeficient de z^{n-k} és el mateix que fer la suma de tots els menors principals de la matriu BA, és a dir, sumes de la forma:

$$\sum_{s \in \binom{[n]}{k}} \det(B_{s,[k]}) \det(A_{[k],s})$$

Aleshores:

$$\det(AB) = \sum_{s \in \binom{[n]}{k}} \det(B_{s,[k]}) \det(A_{[k],s}) =$$

$$= \sum_{s \in \binom{[n]}{k}} \det(A_{[k],s}) \det(B_{s,[k]})$$

i per tant es compleix la fórmula de Cauchy-Binet. □

Lema 4.14. *Suposem que tenim $\{\phi_k\}_{k=1}^{n}$ conjunt de vectors ortonormals de $\mathbb{L}^2(\Lambda)$. Aleshores existeix un procés determinantal amb nucli*

$$K(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \phi_k(x) \overline{\phi_k(y)}$$

Demostració. Per a cada $x_1, ..., x_n$ tenim $K(x_i, x_j)_{\{i,j\leq n\}} = AA^*$, amb $(A_{ij}) = (\phi_j(x_i))$. Aquesta descomposició la vam veure al lema 3.5. Aleshores podem escriure $\det(K(x_i, x_j))_{\{i,j\leq n\}}$ com: $\det(K(x_i, x_j))_{\{i,j\leq n\}} = \det(A)\det(A^*)$, on a més es compleix $\det(K(x_i, x_j))_{\{i,j\leq n\}} > 0$ pel fet que $\overline{\det(A)} = \det(A^*)$. Integrant i expandint aquests determinants obtenim l'-expressió:

$$\int_{\Lambda^n} \det(K(x_i, x_j)) \prod_{k=1}^{n} d\mu(x_k) = \int_{\Lambda^n} \sum_{\pi,\tau\in S_n} \mathrm{sign}(\pi)\mathrm{sign}(\tau) \prod_{k=1}^{n} \phi_{\pi(k)}(x_k)\overline{\phi_{\tau(k)}(x_k)} \prod_{k=1}^{n} d\mu(x_k)$$

Ara bé, si $\pi(k) \neq \tau(k)$ tenim $\int_\Lambda \phi_{\pi(k)}(x_k)\overline{\phi_{\tau(k)}(x_k)}d\mu(x_k) = 0$, perquè les ϕ_k són ortonormals. Ara bé si $\pi(k) = \tau(k)$, tindrem que $\int_\Lambda \phi_{\pi(k)}(x_k)\overline{\phi_{\tau(k)}(x_k)}d\mu(x_k) = 1$, per la mateixa ortonormalitat. Aleshores les permutacions π i τ han de ser idèntiques (en cas contrari aquella combinació serà 0). Obtenim:

$$\int_{\Lambda^n} \det(K(x_i, x_j)) \prod_{k=1}^{n} d\mu(x_k) = \sum_{\pi\in S_n} \int \prod_{k=1}^{n} \phi_{\pi(k)}(x_k)\overline{\phi_{\tau(k)}(x_k)} \prod_{k=1}^{n} d\mu(x_k) =$$

$$= \sum_{\pi\in S_n} 1 = n!$$

Com hem vist, el $\det(K(x_i, x_j))$ és no negatiu. Aleshores resulta que $\frac{1}{n!}\det(K(x_i, x_j))$ és funció de densitat a Λ^n. Com volíem veure l'existència d'un procés determinantal, si trobem les funcions de correlació associades a aquesta funció densitat, demostrarem l'existència del procés. A partir de l'equació (4.1), es compleix la igualtat següent:

$$\rho_n(x_1, ..., x_n) = n!P(x_1, ..., x_n) = \det(K(x_i, x_j))_{\{i,j\leq n\}}$$

Tenim doncs l'expressió de la n-èsima funció de correlació. Ens interessa trobar, a més, les altres funcions de correlació. Ho farem a partir del corol·lari 4.9. Aquest corol·lari ens donava la relació següent:

$$\rho_k(x_1, ..., x_k) = \frac{1}{(n-k)!} \int_{\Lambda^{n-k}} \rho_n(x_1, ..., x_n) \prod_{j=k+1}^{n} d\mu(x_j)$$

Trobarem doncs ρ_{n-1} i les altres funcions de correlació es trobaran de manera molt similar. Pel corol·lari 4.9, la relació entre rho_{n-1} i rho_n és la següent:

$$\rho_{n-1}(x_1, ..., x_{n-1}) = \int_\Lambda \rho_n(x_1, ..., x_n)d\mu(x_n) = \int_\Lambda \det(K(x_i, x_j))_{\{i,j\leq n\}}d\mu(x_n)$$

Expandim aquest determinant:

$$\rho_{n-1}(x_1, ..., x_{n-1}) = \sum_{\pi\in S_n} \prod_{k=1}^{n-1} \phi_{\pi(k)}(x_k)\overline{\phi_{\pi(k)}(x_k)} \int_\Lambda \phi_{\pi(n)}(x_n)\overline{\phi_{\pi(n)}(x_n)}d\mu(x_n)$$

i com $\int_\Lambda \phi_k(x_n)\overline{\phi_k(x_n)}d\mu(x_n) = 1$, ρ_{n-1} és de la forma:

$$\rho_{n-1}(x_1, ..., x_{n-1}) = \sum_{\pi\in S_n} \prod_{k=1}^{n-1} \phi_{\pi(k)}(x_k)\overline{\phi_{\pi(k)}(x_k)}$$

Recordem que aquestes $\{\phi_k\}$ provenien d'unes matrius A. En aquest cas hem extret una part d'aquestes matrius, amb el que podrem aplicar la fórmula de Cauchy-Binet, donada al lema 4.13, per obtenir de nou una forma determinantal de la funció de correlació. Aleshores ρ_{n-1} és:

$$\rho_{n-1}(x_1, ..., x_{n-1}) = \det(K(x_i, x_j))_{\{i,j \leq n-1\}}$$

Reiterant aquestes passes trobarem les altres funcions de correlació. Trobades totes aquestes funcions de correlació, obtenim que K defineix un procés determinantal. □

Lema 4.15. *Suposem X un procés determinantal sobre Λ, amb nucli $K(x,y) = \sum_{j=1}^{n} \phi_k(x)\overline{\phi_k(y)}$ on $\{\phi_k\}_{k=1}^{n}$ és un conjunt ortonormal a $\mathbb{L}^2(\Lambda)$. Aleshores el nombre de punts a X és n quasi segurament.*

Demostració. Cal veure que $\mathbb{E}[X(\Lambda)] = n$. Ho farem a partir de les funcions de correlació. En aquest cas necessitem rho_1. Al teorema anterior, hem trobat com expressar les funcions de correlació d'aquest mateix tipus de procés, i per tant, sabem que $rho_1(x) = K(x,x)$. Veiem ara que val aquesta esperança.

$$\mathbb{E}[X(\Lambda)] = \int_\Lambda K(x,x) d\mu(x)$$

$$= \int_\Lambda \sum_{j=1}^{n} |\phi_j(x)|^2 d\mu(x) = \sum_{j=1}^{n} \int_\Lambda |\phi_j(x)|^2 d\mu(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} 1 = n$$

On $\int_\Lambda |\phi_j(x)|^2 d\mu(x) = 1$ perquè les ϕ_k són ortonormals a $\mathbb{L}^2(\Lambda)$. □

Lema 4.16. *Tot nucli de la forma: $K(x,y) = \sum_{j=1}^{n} c_k \phi_k(x)\overline{\phi_k(y)}$ amb $c_k \in \mathbb{R} \quad \forall k = 1, ..., n$ és hermític.*

Demostració. Un nucli és hermític si:

$$K(x,y) = \overline{K(y,x)}$$

Per una banda, $K(x,y)$ s'expressa com:

$$K(x,y) = \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k(x)\overline{\phi_k(y)}$$

Per altra banda, expressem $\overline{K(y,x)}$ com:

$$\overline{K(y,x)} = \overline{\sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k(y)\overline{\phi_k(x)}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{c_k}\,\overline{\phi_k(y)}\phi_k(x)$$

Com les constants c_k són reals per tot k, es compleix que $c_k = \overline{c_k}$. Aleshores aquesta última expressió resulta:

$$\overline{K(y,x)} = \sum_{k=1}^{n} c_k \overline{\phi_k(y)}\phi_k(x) = K(x,y)$$

i per tant el nucli és hermític. □

Aquest lema ens ajudarà en els dos teoremes següents, ja que, a partir d'ara, considerarem només nuclis de la forma $K(x,y) = \sum_{j=1}^{n} c_k\phi_k(x)\overline{\phi_k(y)}$ amb $\{\phi_k\}_{k=1}^{n}$ conjunt ortonormal i per tant obtindrem, de gratis, que aquest nucli serà hermític.

Teorema 4.17. *Sigui X un procés determinantal, amb nucli no negatiu i de classe traça de la forma:*

$$K(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\phi_k(x)\overline{\phi_k(y)}$$

amb $\{\phi_k\}_{k=1}^{n}$ conjunt ortonormal de vectors propis de l'operador $T : \mathbb{L}^2(\Lambda) \to \mathbb{L}^2(\Lambda)$ i que té per valors propis $\lambda_k \in [0,1]$. Definim $B_k \quad 1 \leq k \leq n$ les variables aleatòries independents que segueixen una distribució $Be(\lambda_k)$. Definim:

$$K_B(x,y) = \sum_{k=1}^{n} B_k\phi_k(x)\overline{\phi_k(y)}$$

i X_B com el procés determinantal amb nucli K_B. Aleshores X i X_B tenen la mateixa llei de densitat i, en particular, el total de punts del procés X segueix una distribució de sumes $Be(\lambda_k)$ independents.

Demostració. Pel lema anterior, tenim que el nucli del procés determinantal X és hermític, i a més sabem que el procés X_B existeix (pel lema 4.14).

Hem de veure que els dos processos X i X_B tenen la mateixa funció de densitat. El que veurem és que els dos processos tenen les mateixes m-èsimes funcions de correlació. Si considerem $m > n$ tindrem que les $m-$funcions de correlació de X i X_B són clarament 0. Veiem que passa per $m \leq n$. Considerem $x_1, ..., x_m \in \Lambda$. Com ja hem vist, les funcions de correlació del procés X són de la forma:

$$\rho_m(x_1, ..., x_m) = \det(K(x_i, x_j))_{\{i,j \leq m\}}$$

Cal veure ara que el procés X_B té les seves funcions de correlació d'aquesta forma. Primer de tot, escriurem K_B com: $K_B = MN$, amb M matriu de la forma $(M_{ij}) = (B_j\phi_j(x_i))$ i N matriu de la forma $(N_{ij}) = (\overline{\phi_i(x_j)})$. Integrant i expandint els determinants tenim:

$$\int_{\Lambda^n} \det(K_B(x_i,x_j)) \prod_{k=1}^{n} d\mu(x_k) = \int_{\Lambda^n} \sum_{\pi \in S_n} \prod_{k=1}^{n} B_{\pi(k)}\phi_{\pi(k)}(x_k)\overline{\phi_{\pi(k)}(x_k)} \prod_{k=1}^{n} d\mu(x_k) =$$

$$= \sum_{\pi \in S_n} \prod \lambda_{\pi(k)} = n! \prod \lambda_{\pi(k)}$$

Però això és exactament igual a l'expressió del procés X, i per tant

$$P_B(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{n!} \det(K(x_i, x_j))_{\{i,j \leq n\}}$$

i les funcions de correlació del procés X_B seran exactament com les del procés X.

Falta veure que el total de punts de X té distribució de sumes Bernoulli. Pel lema 4.15 teníem que un procés determinantal amb nucli $K(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \phi_k(x)\overline{\phi_k(y)}$ tenia n punts quasi segurament. En el nostre cas, el nucli del procés X és $K(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\phi_k(x)\overline{\phi_k(y)}$ i per tant:

$$\mathbb{E}(X(\Lambda)) = \int_{\Lambda} K(x,x)d\mu(x) =$$

$$= \int_\Lambda \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |\phi_j(x)|^2 d\mu(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j$$

□

Finalment, donarem una manera de trobar un procés determinantal a partir d'un nucli hermític i integrable.

Teorema 4.18 (Macchi, Soschnikov). *Un nucli hermític K defineix un procés determinantal si, i només si, l'operador integral $T_K : \mathbb{L}^2(\Lambda) \to \mathbb{L}^2(\Lambda)$ té tots els valors propis a* $[0, 1]$

Demostració. Mirem la implicació d'esquerra a dreta, és a dir, suposem que existeix un procés determinantal X amb nucli K. A conseqüència de l'existència del procés X, les funcions de densitat existeixen i són no-negatives, aleshores el nucli K és també no negatiu. Definim ara l'operador T com l'operador que té per nucli K. Hem de veure que tots els valors propis de T estan a $[0, 1]$. Suposem que existeix almenys un valor propi λ que no, és a dir, $\exists\lambda$ valor propi de T tal que $\lambda > 1$.

Definim un nou procés X_λ. Aquest nou procés és el d'escollir cada punt del procés X amb probabilitat $\frac{1}{\lambda}$ i de manera independent. Fer això és com construir el procés X_B del teorema anterior, però en aquest cas els $B_i \sim Be(\frac{1}{\lambda})$. Per tant, X_λ és un procés determinantal amb nucli $\frac{1}{\lambda}K(x, y)$.

El nucli del procés X_λ és una restricció del nucli K, aleshores l'operador T amb aquesta restricció tindrà tots els seus valors propis a $[0, 1]$, amb almenys un valor propi igual a 1. Pel teorema anterior tenim que les funcions de densitat de X i X_λ són iguals i aleshores tenim per una banda que

$$\mathbb{P}(X(\Lambda) > 0) > 0$$

i per una altra

$$\mathbb{P}(X(\Lambda) \geq 1) = \mathbb{P}(X_\lambda(\Lambda) \geq 1) = 1$$

arribant a contradicció.

Veiem ara l'altra implicació. Suposem que tenim $T : \mathbb{L}^2(\Lambda) \to \mathbb{L}^2(\Lambda)$ operador tal que té tots els valors propis a $[0, 1]$. A aquests valors propis els anomenem λ_k. Definim K el nucli de l'operador. Aquest nucli serà de la forma:

$$K(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \phi_k(x) \overline{\phi_k(y)}$$

amb $\{\phi_k\}$ conjunt de vectors ortonormals de $\mathbb{L}^2(\Lambda)$. Hem de veure que K és hermític i defineix un procés determinantal, però això ja ho hem vist als lemes 4.14 i 4.16. Amb el que tenim que l'operador T defineix un procés determinantal. □

4.3 L'esperança i la variància d'estadístics lineals relacionats amb els processos determinantals

En aquesta subsecció, veurem maneres d'expressar l'esperança i la variància d'un estadístic lineal relacionat amb un procés determinantal a partir del seu nucli i les funcions de correlació del procés. Per fer-ho, necessitem parlar dels cumulants i veure com podem expressar aquests cumulants a partir dels nuclis.

Definició 4.19. *Sigui X una variable aleatòria. Definim el cumulant de X, $C(t)$, com el logaritme natural de la funció generatriu de moments:*

$$C(t) = \log \mathbb{E}(\exp(tX))$$

Lema 4.20. *Podem escriure els cumulants d'un estadístic lineal X_ϕ que conta els punts en un conjunt d'un procés determinantal X de nucli K com:*

$$C_K^n(X_\phi) = \sum_{l=1}^{n} \frac{(-1)^{l+1}}{l} \sum_{m_1,\ldots,m_l \geq 1, m_1+\ldots m_l = n} \frac{n!}{m_1! \cdots m_l!} \operatorname{Tr}(\phi^{m_1} K \cdots \phi^{m_l} K) \tag{4.3}$$

Aquesta fórmula ens serà útil per poder calcular d'una manera senzilla els moments d'un estadístic lineal, i en particular per trobar una expressió de la variància de l'estadístic. La demostració d'aquest lema està al primer capítol de la referència [9].

Corol·lari 4.21. *Sigui X_ψ un estadístic lineal, respecte d'un procés determinantal amb nucli $K(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \phi_k(x)\overline{\phi_k(y)}$. Aleshores podem expressar la seva variància com:*

$$Var(X_\psi) = \frac{1}{2} \int_\Lambda \int_\Lambda (\psi(x) - \psi(y))^2 |K(x,y)|^2 d\mu(x) d\mu(y)$$

Demostració. Apliquem la fórmula (4.3) pel cas $n = 2$. Resultant el següent:

$$Var(X_\psi) = \int_\Lambda \psi^2(x) K(x,x) d\mu(x) - \int_\Lambda \int_\Lambda \psi(x)\psi(y) K(x,y) K(y,x) d\mu(x) d\mu(y)$$

Com treballem amb nuclis hermítics, ens resulta el següent resultat:

$$K(x,y)K(y,x) = K(x,y)\overline{K(x,y)} = |K(x,y)|^2$$

aleshores el càlcul de la variància queda com:

$$Var(X_\psi) = \int_\Lambda \psi^2(x) K(x,x) d\mu(x) - \int_\Lambda \int_\Lambda \psi(x)\psi(y) |K(x,y)|^2 d\mu(x) d\mu(y)$$

Aquesta segona integral la podem escriure de la següent forma:

$$\int_\Lambda \int_\Lambda \psi(x)\psi(y)|K(x,y)|^2 d\mu(x)d\mu(y) = \frac{1}{2} \int_\Lambda \int_\Lambda (\psi(x) - \psi(y))^2 |K(x,y)|^2 d\mu(x) d\mu(y) -$$

$$- \int_\Lambda \int_\Lambda \psi(x)^2 |K(x,y)|^2 d\mu(x) d\mu(y)$$

i per tant la variància ens queda:

$$Var(X_\psi) = \int_\Lambda \psi^2(x) K(x,x) d\mu(x) + \frac{1}{2} \int_\Lambda \int_\Lambda (\psi(x) - \psi(y))^2 |K(x,y)|^2 d\mu(x) d\mu(y) -$$

$$- \int_\Lambda \int_\Lambda \psi(x)^2 |K(x,y)|^2 d\mu(x) d\mu(y)$$

Ara bé, la primera i la tercera integrals són exactament iguals gràcies al fet següent:

$$\int_\Lambda |K(x,y)|^2 d\mu(y) = K(x,x)$$

Vegem-ho:

$$\int_\Lambda |K(x,y)|^2 d\mu(y) = \int_\Lambda \Big(\sum_{i=0}^{N-1} \phi_i(x)\overline{\phi_(y)} \Big) \Big(\sum_{k=1}^{n} \phi_k(y)\overline{\phi_k(x)} \Big) d\mu(y)$$

$$= \int_\Lambda \sum_{i=j} \phi_i(x)\phi_j(y)\overline{\phi_j(x)\phi_i(y)} d\mu(y) + \int_\Lambda \sum_{i\neq j} \phi_i(x)\phi_j(y)\overline{\phi_j(x)\phi_i(y)} d\mu(y)$$

$$= \int_\Lambda \sum_{i=j} \phi_i(x)\phi_j(y)\overline{\phi_j(x)\phi_i(y)} d\mu(y) = \sum_{i=j} \phi_i(x)\overline{\phi_j(x)} = K(x,x)$$

i per tant obtenim:

$$Var(X_\psi) = \frac{1}{2} \int_\Lambda \int_\Lambda (\psi(x) - \psi(y))^2 |K(x,y)|^2 d\mu(x) d\mu(y) \tag{4.4}$$

□

Exemple 4.22. Suposem que tenim X un procés determinantal amb nucli K. Sigui $A \subset \Lambda$, definim la funció ψ com la funció indicadora sobre el subconjunt A, i X_ψ l'estadístic lineal sobre el procés X amb funció ψ. Volem veure com són l'esperança i la variància d'aquest estadístic.

Veurem primer com és l'esperança de l'estadístic. Per la definició de l'esperança d'un estadístic tenim:

$$\mathbb{E}(X_\psi) = \int_\Lambda \psi(x) K(x,x) d\mu(x) =$$

$$= \int_\Lambda \mathbb{1}_A(x) K(x,x) d\mu(x) = \int_A K(x,x) d\mu(x)$$

Veiem ara com podem expressar la variància d'aquest procés. Per l'equació trobada (4.4), podem expressar la variància com:

$$Var(X_\psi) = \frac{1}{2} \int_\Lambda \int_\Lambda (\psi(x) - \psi(y))^2 |K(x,y)|^2 d\mu(x) d\mu(y) =$$

$$= \frac{1}{2} \int_\Lambda \int_\Lambda (\mathbb{1}_A(x) - \mathbb{1}_A(y))^2 |K(x,y)|^2 d\mu(x) d\mu(y)$$

Ara bé, tenim 4 possibilitats respecte els punts x, y, aquest són:

1. $x, y \in A$
2. $x, y \notin A$
3. $x \in A, y \notin A$
4. $x \notin A, y \in A$

Podem separar doncs la variància en aquestes 4 parts. Malgrat això, en els dos primers casos tindrem que aquestes integrals són 0, amb el que les dues úniques possibilitats són la 3 i la 4, que a més són exactament iguals. Obtenim doncs:

$$Var(X_\psi) = \int_\Lambda \int_\Lambda ((\mathbb{1}_A(x) - \mathbb{1}_{A^C}(y))^2 |K(x,y)|^2 d\mu(x) d\mu(y) =$$

$$= \int_A \int_{A^C} |K(x,y)|^2 d\mu(x) d\mu(y)$$

4.4 L'ensemble de Ginibre com a procés determinantal

Com ja hem vist al capítol 3, teníem que donada S una matriu aleatòria a partir de la llei de Ginibre, podíem trobar la funció densitat dels valors propis de la matriu, i no només això, sinó que vam veure que es podia expressar aquesta funció de densitat com un determinant. Ara sabem que això implica que l'ensemble de Ginibre és un possible procés determinantal. Aleshores ens interessa trobar les funcions de correlació d'aquest procés i poder concloure que aquest ensemble és determinantal. Hem de tindre en compte que Λ en aquest cas és $\mathbb{C}$.

L'expressió de la funció densitat dels valors propis en l'ensemble de Ginibre és:

$$P_N(z_1, ..., z_N) = \frac{1}{N!}(2\pi)^{-N} \det(K(z_i, z_j))_{\{i,j \leq N\}}$$

amb $K(z,w) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(\overline{z}w)^j}{j!} \exp(-\frac{1}{2}(|z|^2 + |w|^2))$.

Utilitzant el teorema 4.8 tenim l'expressió de la N-èsima funció de correlació és de la forma:

$$\rho_N(x_1, ..., x_N) = N!P(x_1, ..., x_N) = (2\pi)^{-N} \det(K(z_i, z_j))_{\{i,j \leq N\}}$$

i a partir del corol·lari 4.9, tenim la següent expressió per trobar les k-èsimes funcions de correlació a partir de la N-èsima funció de correlació. Aquesta relació era:

$$\rho_k(x_1, ..., x_k) = \frac{1}{(N-k)!} \int_{\Lambda^{N-k}} \rho_N(x_1, ..., x_N) \prod_{i=k+1}^{N} d\mu(x_i)$$

Trobem doncs l'expressió de ρ_{N-1}. Utilitzant la igualtat obtinguda al corol·lari 4.9, podem expressar ρ_{N-1} com:

$$\rho_{N-1}(z_1, ..., z_{N-1}) = \int_{\Lambda} \rho_N(z_1, ..., z_N) dz_N d\overline{z_N}$$

Utilitzant l'expressió de ρ_N:

$$\rho_{N-1}(z_1, ..., z_{N-1}) = \int_{\Lambda} (2\pi)^{-N} \det(K(z_i, z_j))_{\{i,j \leq N\}} dz_N d\overline{z_N}$$

Escrivim $K(x,y)$ com $K(x,y) = \sum_{j=0}^{N-1} \phi_j(x)\overline{\phi_j(y)}$ amb $\phi_j(x) = \frac{x^j}{\sqrt{j!}} \exp(\frac{-|x|^2}{2})$. Expandint aquests determinants, hem de calcular la integral:

$$(2\pi)^{-N} \sum_{\pi \in S_N} \prod_{j=1}^{N} \int \phi_{\pi(j)}(z_j)\overline{\phi_{\pi(j)}(z_j)} dz_N d\overline{z_N}$$

Recordem que només utilitzem una permutació pel fet que el conjunt $\{\phi_k\}$ és normal i, per tant, compleix que $\int \phi_j(z_k)\overline{\phi_i(z_k)} dz_k d\overline{z_k} = 0 \quad si \quad i \neq j$. Traiem ara les z_i que no intervenen en la integració, i que $\int \phi_j(z_k)\overline{\phi_i(z_k)} dz_k d\overline{z_k} = 2\pi$. Resulta:

$$(2\pi)^{-N} \sum_{\pi \in S_N} \prod_{j=1}^{N-1} \phi_{\pi(j)}(z_j)\overline{\phi_{\pi(j)}(z_j)} \int \phi_{\pi(N)}(z_i)\overline{\phi_{\pi(N)}(z_N)} dz_N d\overline{z_N} =$$

$$= (2\pi)^{1-N} \sum_{\pi \in S_N} \prod_{j=1}^{N-1} \phi_{\pi(j)}(z_j)\overline{\phi_{\pi(j)}(z_j)}$$

i a partir de la fórmula de Cauchy-Binet, donada al lema 4.13, l'expressió de ρ_{N-1} és:

$$\rho_{N-1}(z_1, ..., z_{N-1}) = (2\pi)^{1-N} \det(K(z_i, z_j))_{\{i,j \leq N-1\}}$$

Recursivament podem calcular les expressions de les k-èsimes funcions de correlació. Aquestes tenen l'expressió següent:

$$\rho_k(z_1, ..., z_k) = (2\pi)^{-k} \det(K(z_i, z_j))_{\{i,j \leq k\}}$$

Amb això queda demostrat que l'ensemble de Ginibre és un procés determinantal.

El següent pas és veure que la primera funció de correlació de l'ensemble de Ginibre és una funció especial, la funció gamma incompleta. Per veure-ho, escriurem primer l'expressió de la primera funció de correlació. A partir de l'expressió general, la primera funció de correlació és:

$$\rho_1(z_1) = (2\pi)^{-1} \exp(-|z_1|^2) \sum_{j=0}^{N-1} \frac{|z_1|^{2j}}{j!} \tag{4.5}$$

Definim ara la funció gamma incompleta.

Definició 4.23. *Definim la funció gamma incompleta superior com*

$$\Gamma(s, x) = \int_x^\infty t^{s-1} \exp(-t) dt$$

i la funció gamma incompleta inferior com:

$$\gamma(s, x) = \int_{-\infty}^x t^{s-1} \exp(-t) dt$$

Aquestes funcions gamma incompletes tenen una propietat molt curiosa. Aquesta és la següent:

Proposició 4.24. *Si definim la funció gamma com $\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} \exp(-t) dt$. Aleshores:*

$$\Gamma(s) = \Gamma(s, x) + \gamma(s, x)$$

Demostració. A partir de la definició tenim:

$$\Gamma(s, x) + \gamma(s, x) = \int_x^\infty t^{s-1} \exp(-t) dt + \int_{-\infty}^x t^{s-1} \exp(-t) dt$$

i per l'additivitat de la integració sobre intervals, ens queda:

$$\Gamma(s, x) + \gamma(s, x) = \int_x^\infty t^{s-1} \exp(-t) dt + \int_{-\infty}^x t^{s-1} \exp(-t) dt =$$

$$= \int_0^\infty t^{s-1} \exp(-t) dt = \Gamma(s)$$

□

A més, la funció gamma incompleta superior es pot expressar com una sèrie. Vegem-ho a partir d'aquesta proposició.

Proposició 4.25. *Per a tot $s > 1$ natural podem escriure la funció gamma incompleta superior com:*

$$\Gamma(s,x) = (s-1)!\exp(-x)\sum_{k=0}^{s-1}\frac{x^k}{k!}$$

Demostració. Veiem-ho per inducció sobre s. El cas inicial és per $s = 1$, en aquest cas tenim:

$$\Gamma(1,x) = \int_x^{\infty} \exp(-t)dt =$$
$$= -\exp(-t)\Big|_{t=x}^{t=\infty} = \exp(-x)$$

amb el que el cas inicial és cert. Suposem ara que és cert fins a s, és a dir, que $\Gamma(s,x) = (s-1)!\exp(-x)\sum_{k=0}^{s-1}\frac{x^k}{k!}$, hem de veure

$$\Gamma(s+1,x) = s!\exp(-x)\sum_{k=0}^{s}\frac{x^k}{k!}$$

Per definició de $\Gamma(s+1,x)$ tenim:

$$\Gamma(s+1,x) = \int_x^{\infty} t^s \exp(-t)dt$$

on a partir d'integrar per parts obtenim:

$$\int_x^{\infty} t^s \exp(-t)dt = -t^s\exp(-t)\Big|_{t=x}^{t=\infty} + \int_x^{\infty} st^{s-1}\exp(-t)dt =$$
$$= x^s\exp(-x) + s\int_x^{\infty} t^{s-1}\exp(-t)dt =$$
$$= x^s\exp(-x) + s\Gamma(s,x)$$

Recordem que per hipòtesi d'inducció teníem: $\Gamma(s,x) = (s-1)!\exp(-x)\sum_{k=0}^{s-1}\frac{x^k}{k!}$. Substituïm-ho:

$$\Gamma(s+1,x) = x^s\exp(-x) + s\Gamma(s,x) = x^s\exp(-x) + s(s-1)!\exp(-x)\sum_{k=0}^{s-1}\frac{x^k}{k!} =$$
$$= \frac{s!x^s}{s!}\exp(-x) + s!\exp(-x)\sum_{k=0}^{s-1}\frac{x^k}{k!} = s!\exp(-x)\sum_{k=0}^{s}\frac{x^k}{k!}$$

□

Corol·lari 4.26. *Sigui ρ_1 la funció de correlació de l'ensemble de Ginibre d'una matriu $N \times N$, aleshores:*

$$\rho_1(x) = (2\pi)^{-1}\frac{\Gamma(N,x^2)}{(N-1)!}$$

Demostració. Per l'equació (4.5) tenim que l'expressió de ρ_1 és:

$$\rho_1(z_1) = (2\pi)^{-1}\exp(-|z_1|^2)\sum_{j=0}^{N-1}\frac{|z_1|^{2j}}{j!}$$

Per la proposició anterior, la funció gamma incompleta $\Gamma(N,x)$ es pot expressar en forma de sèrie. Aquesta forma és:

$$\Gamma(N,x) = (N-1)!\exp(-x)\sum_{k=0}^{N-1}\frac{x^k}{k!}$$

Identificant ara $|z_1|^2$ com x, traiem que les dues funcions són la mateixa llevat de constants. Aleshores, podem escriure rho_1 com:

$$\rho_1(z) = \frac{(2\pi)^{-1}}{(N-1)!}\Gamma(N,|z_1|^2)$$

$\square$

Gràcies a aquest corol·lari tenim que és el mateix estudiar la primera funció de correlació de l'ensemble de Ginibre que estudiar la funció gamma incompleta. Estudiarem, doncs, el comportament de la funció gamma incompleta.

Vist això, ens podem plantejar com és l'esperança d'un procés de Ginibre X sobre un conjunt D qualsevol. A partir de la definició 4.5 obtenim:

$$\mathbb{E}(X(D)) = \int_D \rho_1(z)dzd\overline{z} = \int_D \frac{(2\pi)^{-1}}{(N-1)!}\Gamma(N,|z|^2)dzd\overline{z} \tag{4.6}$$

és a dir, hem canviat el càlcul de l'esperança, per calcular la integral sobre la funció gamma incompleta, i encara més, si identifiquem D com el disc unitat podem veure calcular com és l'esperança sota aquest disc. En aquest últim cas tindrem l'expressió:

$$\mathbb{E}(X(D(0,1))) = \int_0^1 \frac{\Gamma(N,r^2)}{(N-1)!}2rdr$$

Amb això, ens podem preguntar si podem expressar també la variància d'un estadístic sota l'ensemble de Ginibre a partir de la funció gamma incompleta. Pel que hem vist, la variància d'un estadístic lineal X_ϕ amb $\phi(x) = \mathbb{1}_A(x)$ sobre un procés de Ginibre era de la forma següent:

$$Var(X_\psi) = \int_A\int_{A^C}|K(x,y)|^2 d\mu(x)d\mu(y)$$

Volem veure si podem expressar $|K(x,y)|^2$ com una funció gamma incompleta. Si recordem, l'expressió de $K(x,y)$ és de la forma següent:

$$K(x,y) = \sum_{j=0}^{N-1}\frac{(\overline{y}x)^j}{j!}\exp(-\frac{1}{2}(|x|^2+|y|^2))$$

si multipliquem i dividim per un factor $\exp(-x\overline{y})$, obtenim la següent expressió:

$$K(x,y) = \sum_{j=0}^{N-1}\frac{(\overline{y}x)^j}{j!}\exp(-\frac{1}{2}(|x|^2+|y|^2))\frac{\exp(-x\overline{y})}{\exp(-x\overline{y})} =$$

$$= \frac{\Gamma(N,x\overline{y})}{(N-1)!}\exp(-\frac{1}{2}(|x|^2+|y|^2))\exp(x\overline{y}) =$$

$$= \frac{\Gamma(N, x\overline{y})}{(N-1)!} \exp(-\frac{|x-y|^2}{2})$$

Amb el que obtenim que calcular la variància es pot reduir a veure la integral següent:

$$Var(X_\psi) = \int_A \int_{A^C} \Big(\frac{\Gamma(N, x\overline{y})}{(N-1)!} \exp(-\frac{|x-y|^2}{2}) \Big)^2 d\mu(x) d\mu(y)$$

Ja hem vist com poder calcular l'esperança i la variància. Però, cap on tendirà el valor d'aquesta esperança quan N és suficientment gran? Per veure-ho definim la variable aleatòria $\chi = \#D(0,r) \cap X$, on X és el nostre procés de Ginibre. Aquesta variable aleatòria el que fa és comptar quants valors propis tenim al disc de radi r. Veurem cap on tendirà aquesta variable per N suficientment grans. A partir de la igualtat (4.6) tenim:

$$\lim_{N \to \infty} \int_0^r \frac{\Gamma(N, x^2)}{(N-1)!} 2x dx = \int_0^r \lim_{N \to \infty} \exp(-x^2) 2x \sum_{k=0}^{N-1} \frac{x^2 k}{k!} dx$$

I com $\lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{x^{2k}}{k!} = \exp(x^2)$ obtenim que aquest límit es redueix al següent:

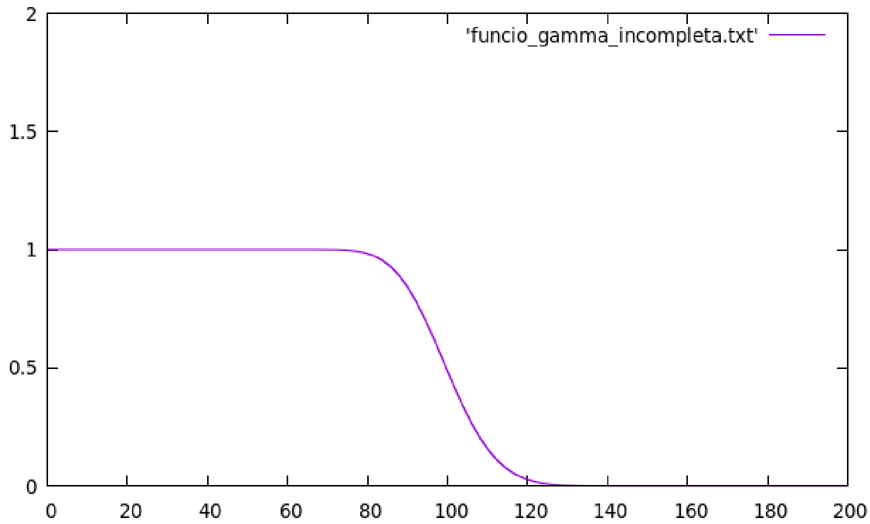
$$\lim_{N \to \infty} \int_0^r \frac{\Gamma(N, x^2)}{(N-1)!} 2x dx = \int_0^r 2x dx = r^2$$

Amb el que obtenim, que per N suficientment gran, l'esperança d'un disc qualsevol és d'obtenir r^2 punts. Això ens fa plantejar el següent: si el radi és proper a $\sqrt{N}$, aquesta esperança hauria de ser propera el nombre de valors propis. En altres paraules volem veure si el valor d'aquesta integral:

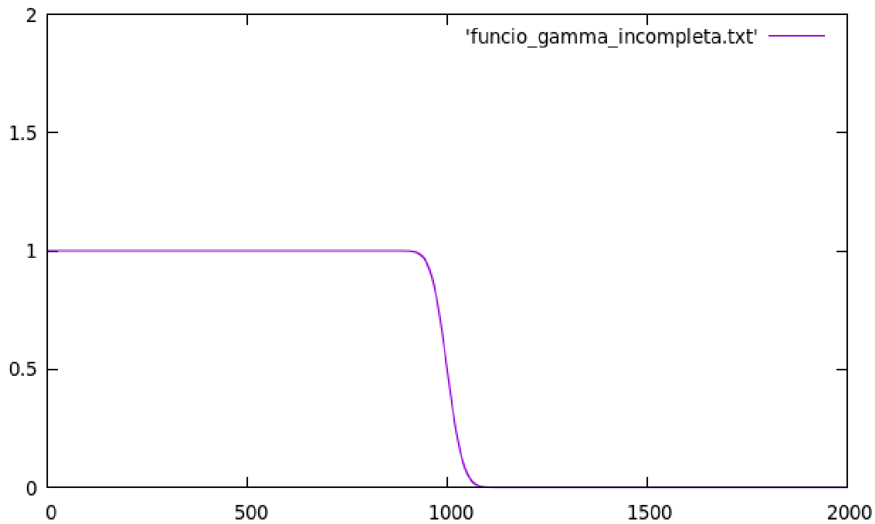
$$\int_0^{\sqrt{N}} \frac{\Gamma(N, x^2)}{(N-1)!} 2x dx$$

és propera a N. Per veure-ho, mirarem com són les gràfiques de la funció gamma per N cada cop més grans.

Per fer-ho crearem un programa en C++ i representarem aquesta funció. Cal comentar, que en el nostre cas ometrem la constant $(2\pi)^{-1}$ per afavorir el càlcul dels punts. Podem començar veient com és aquesta funció per $N = 100$, en aquest cas obtenim la gràfica següent:



Per aquest avlor no tenim massa idea com pot actuar la funció, hem d'augmentar el grau. Si provem, per exemple, per $N = 1000$, tenim el gràfic:



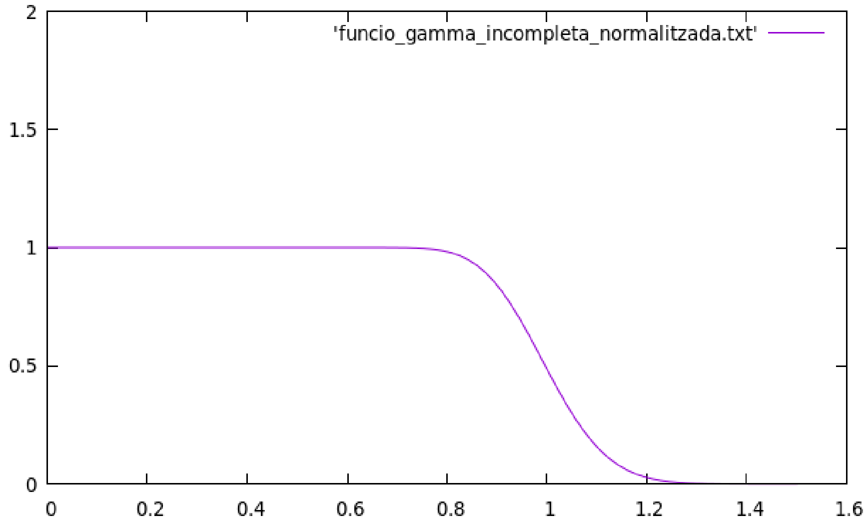
Això ens dóna la idea que, com més augmentem el grau, l'àrea de la funció s'apropará més al grau. Ara bé, si a la integral:

$$\int_0^{\sqrt{N}} \frac{\Gamma(N, x^2)}{(N-1)!} 2x dx$$

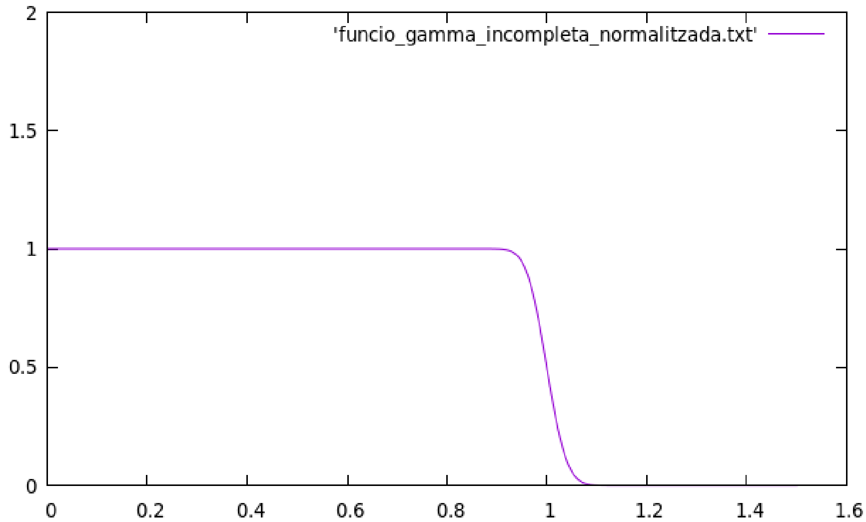
li fem el canvi de variable $x^2 = Nt$ obtenim $2xdx = Ndt$, i la integral ens queda de la següent manera:

$$N \int_0^1 \frac{\Gamma(N, Nt)}{(N-1)!} dt$$

Amb això tenim la sospita que la funció gamma incompleta normalitzada ha de ser pràcticament 1 quan la N és gran. Ho comprovarem empíricament a partir de la gràfica d'aquesta funció. En el primer cas, per $N = 100$ obtenim la gràfica següent:



si fem el mateix per un N més gran, $N = 1.000$, obtindrem la gràfica:



Com veiem, com més augmentem el grau de la matriu, més s'apropa l'àrea de la funció a 1. Per tant, sembla plausible que, si N és suficientment gran, sota el disc $D(0, \sqrt{N})$ contingui pràcticament tots els valors propis de l'ensemble.

Per veure els detalls dels codis d'aquests programes veure la Secció 7.2.

5 Exemples de l'ensemble de Ginibre i d'altres ensembles

En aquesta part intentarem veure de manera gràfica i numèrica, els resultats que hem anat obtenint al llarg d'aquest estudi. Mirarem primer si es compleix, de manera numèrica, el resultat sobre l'esperança del procés. Per fer-ho, definim X_ψ l'estadístic que contarà el nombre de punts de l'ensemble de Ginibre sota un disc. El primer cas que mirarem és sota el disc unitat. Obtenim la taula següent:

N	Esperança
10	0.9999999891
50	1.0000000000
100	1.0000000000
400	1.0000000000
500	1.0000000000
1000	1.0000000000

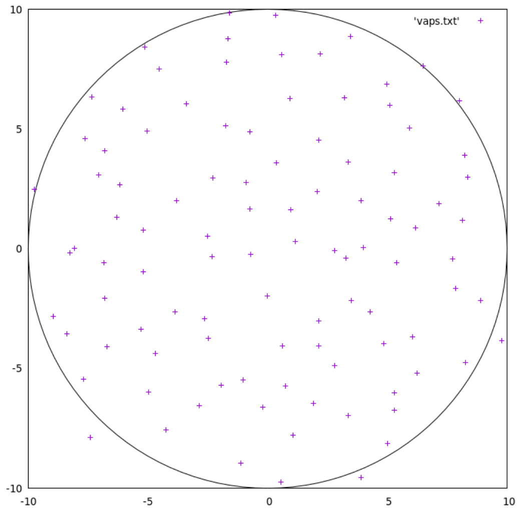
Com veiem, quadra amb els resultats obtinguts. Si ara considerem X_ψ l'estadístic que conta els punts de l'ensemble de Ginibre al disc $D(0, \sqrt{N})$. En aquest cas, vam veure que els resultats haurien de ser propers al valor de N. Els resultats obtinguts són els següents:

N	Esperança
10	8.7488996423
50	47.1837496835
100	99.9999999999
400	392.0228164779
500	491.0808660652
1000	987.3853889513

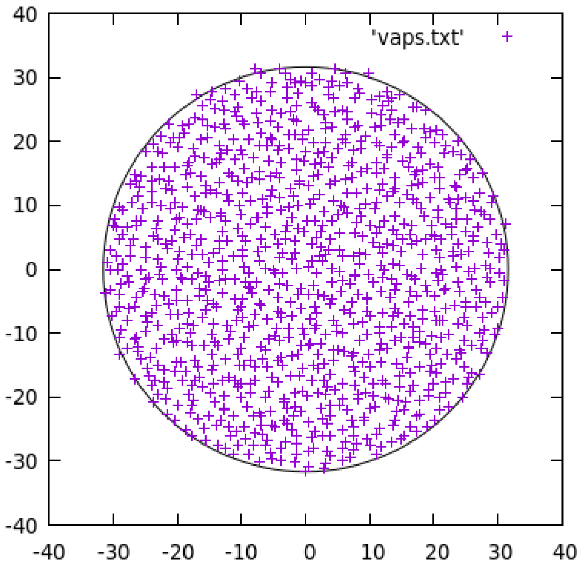
Com veiem, aquests resultats són molt propers a N quadrant amb els resultats vists i esperats anteriorment. Per veure el codi que hem utilitzat per calcular aquesta esperança hem de mirar la secció 7.3.

Vist això, podem veure com es distribueixen els valors propis de l'ensemble de Ginibre. Per fer-ho, crearem una matriu aleatòria complexa i gaussiana i dibuixarem els valors propis al pla complex. A més, veurem de manera gràfica si tenim la majoria d'aquests valors propis al disc $D(0, \sqrt{N})$ per diferents N.

El primer cas que veurem serà per $N = 100$. Com hem comentat, dibuixarem, a més, el disc $D(0, 10)$ per comprovar que la majoria dels valors propis estan a aquest disc. En aquest cas la distribució resultant és la següent:



i com veiem, pràcticament tots els valors propis estan dins el disc $D(0, 10)$. Mirem un cas més gran, per exemple, per $N = 1000$. En aquest cas la distribució és:



on un altre cop obtenim que la majoria dels valors propis són dins el disc $D(0, \sqrt{1000})$ com esperàvem. Per veure el codi darrere aquestes distribucions dels valors propis veure la Secció 7.1.

5.1 Exemples d'altres tipus d'ensembles

Hem vist amb detall que l'ensemble de Ginibre és un procés determinantal de punts. El que volem veure a continuació és si n'hi ha altres tipus d'ensembles que generin un procés determinantal de punts. La resposta és sí, i els dos exemples que veurem són una mostra d'aquest fet: les matrius hermítiques i les matrius unitàries circulars.

5.1.1 L'ensemble de les matrius hermítiques

El cas d'una matriu hermítica aleatòria és molt semblant al cas complex. Aquest cas és el conegut com l'ensemble de gaussianes unitàries o **GUE**. Ara bé, com generem aquestes matrius?

Considerarem H una matriu hermítica $N \times N$ que volem generar. Aquesta matriu la podrem expressar de la forma següent:

$$H = R + iS$$

On la matriu R és una matriu real i simètrica, i la matriu S és una matriu real i antisimètrica, és a dir, $\forall i, j \leq N$ tindrem el següent:

$$R_{ij} = R_{ji} \quad , \quad S_{ij} = -Sji$$

Per definir aquest ensemble, necessitem la mesura de probabilitats associades a aquest tipus de matrius. Escollim la mesura donada per Mehta al seu llibre [12]:

$$\begin{aligned} d\mu(H) &= K \exp(-\frac{1}{2} \operatorname{Tr}(H * H)) d\mu_L(H) = \\ &= K \exp(-\frac{1}{2} \operatorname{Tr} H^2) d\mu_L(H) \end{aligned}$$

on $d\mu_L(H) = dh_{ij}$ Aquesta mesura de probabilitat segueix complint que cadascuna de les seves entrades són independents. Veiem com podem expressar-la:

Demostració. Volem veure com poder expressar els elements de la diagonal de la matriu $B = H^2$. Aquests elements b_{ii} els podem expressar de següent manera:

$$b_{ii} = \sum_{j=1}^{N} h_{ij}^2$$

Per tant podem expressar aquesta mesura de la manera següent:

$$\begin{aligned} d\mu(H) &= K \exp(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} b_{ii}) d\mu_L(H) = \\ &= K \exp(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} h_{ij}^2) d\mu_L(H) = \\ &= K \prod_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{N} \exp(-\frac{1}{2} h_{ij}^2) dh_{ij} \end{aligned}$$

Amb això hem vist que les entrades són independents i, a més, que les entrades són gaussianes. □

Ens falta veure quin valor té la constant de normalització d'aquesta mesura. Per això necessitem imposar el següent:

$$\int d\mu(H) = 1$$

Utilitzant l'última expressió trobada, el càlcul es redueix al següent càlcul integral:

$$K\prod_{i=1}^{N}\prod_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\frac{1}{2}h_{ij}^2)dh_{ij}=1$$

Per tant cal calcular el valor de la següent integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\frac{1}{2}x^2)dx$$

Aquesta integral sense la constant $\frac{1}{2}$ és una integral coneguda com a **la integral de Gauss** i té per valor $\sqrt{\pi}$. Si afegim aquesta constant, el valor d'aquesta integral és $\sqrt{2\pi}$. Com aquesta integral la tenim repetida N^2 cops obtenim que la constant de normalització d'aquesta mesura de probabilitats és:

$$K=2\pi^{\frac{-N^2}{2}}$$

I la mesura ens queda com:

$$d\mu(H)=2\pi^{\frac{-N^2}{2}}\prod_{i=1}^{N}\prod_{j=1}^{N}\exp(-h_{ij}^2)dh_{ij}$$

Vist això, volem veure la funció de densitat dels valors propis d'aquest ensemble. En aquest cas, podem seguir utilitzant la mateixa definició 3.1. A més, en ser el cas hermític una reducció del cas complex, podem seguir utilitzant la descomposició de Schur, i per tant obtindrem una funció de densitat dels valors propis similar a la que ja vam obtenir respecte a les matrius complexes. Vegem-ho:

Primer de tot anomenem H la matriu hermítica. Per la descomposició de Schur, donada al lema 3.2, podem expressar H com:

$$H=U(Z+T)U^*$$

on recordem que U és una matriu unitària, Z una matriu diagonal i T una matriu triangular superior estricte.

Volem veure ara com expressar dH en termes de les matrius U, Z, T i les seves matrius diferencials. En aquest cas podem escriure H com:

$$dH=dU(Z+T)U^*+U(dZ+dT)U^*+U(Z+T)U^*$$

pel següent pas traurem un factor comú Ui U^* i utilitzarem que $dU^*=U^*dUU^*$ (directe de diferenciar la propietat $U^*U=I$). Aleshores:

$$dH=U(U^*dU(Z+T)+(dZ+dT)-(Z+T)U^*dU)U^*$$

i per tant:

$$U^*dHU=U^*dU(Z+T)+(dZ+dT)-(Z+T)U^*dU$$

A la matriu de la banda dreta l'anomenem M, hem de veure com són els elements d'aquesta matriu. Aquests elements es poden escriure com:

$$M_{ij}=\begin{cases}(x_j-x_i)U^*dU+combiancions(T,U^*,dU) & \text{si } i>j\\ dx_i+combinacions(T,U^*,dU) & \text{si } i=j\\ combinacions(T,U^*,dU) & \text{si } i<j\end{cases}$$

Aquestes combinacions no ens importen perquè a l'aplicar la mesura i integrar, reduirem aquestes combinacions a constants que més tard calcularem. Dit això podem aplicar la mesura, quedant-nos el següent:

$$d\mu(H) = \Big(\prod_{i<j} |x_i - x_j|^2 \prod_{i=1}^{N} \exp(-\frac{x_i}{2})\Big)\Big(combinacions(T, U^*, dU)\Big)$$

Integrant la mesura obtenim la funció de probabilitat dels valors propis. Aquesta és la següent:

$$P(x_1, ..., x_N) = C \exp(\sum_{i=1}^{N} -\frac{x_i^2}{2}) \prod_{1\leq i<j\leq N} (x_i - x_j)^2$$

amb C una constant de normalització.

Com passava al cas complex, tenim el factor $\prod_{1\leq i<j\leq N} |x_i - x_j|^2$, que com vam veure, prové del quadrat d'una matriu de Vandermonde, i per tant sabem que aquest procés també serà determinantal, ja que:

$$\prod_{1\leq i<j\leq N} |x_i - x_j|^2 = \det\Big((x_i^{j-1})_{\{1\leq i,j\leq N\}}(x_j^{i-1})_{\{1\leq i,j\leq N\}}\Big)$$

En aquest cas els x_i no són complexos, i aquest producte de matrius donarà una matriu amb polinomis. Es pot demostrar que aquests polinomis són **els polinomis d'Hermite**, obtenint doncs la següent expressió del producte:

$$\prod_{1\leq i<j\leq N} |x_i - x_j|^2 = \det(K_H(x_i, x_j))_{\{1\leq i,j\leq N\}}$$

on $K(x_i, x_j) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{h_h(x_i)h_k(x_j)}{k!}$ i els $\{h_k(x)\}$ són els polinomis d'Hermite. Ficant l'exponencial dins el determinant obtenim que la llei de probabilitat és:

$$P(x_1, ..., x_N) = C \det(K_H(x_i, x_j))_{\{1\leq i,j\leq N\}} \tag{5.1}$$

amb $K_H(x_i, x_j) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{h_h(x_i)h_k(x_j)}{k!} \exp(-\frac{1}{4}(x_i^2 + x_j^2))$.

Definició 5.1. *Definim el k-èsim polinomi d'Hermite h_k com:*

$$h_h(x) = (-1)^k \exp(\frac{x^2}{2})\Big(\frac{d}{dx^k} \exp(-\frac{x^2}{2})\Big)$$

Els polinomis d'Hermite tenen la següent propietat de normalitat:

$$\int_{\mathbb{R}} h_n(x)h_m(x) \exp(-\frac{x^2}{2})dx = \begin{cases} \sqrt{2\pi}n! & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases} \tag{5.2}$$

Amb això ja tenim tot per poder calcular la constant de normalització de la funció de densitat. Recordem que la funció de densitat ha de complir:

$$C \int_{\mathbb{R}^N} \det(K_H(x_i, x_j))_{\{i,j\leq N\}} \prod_{i=1}^{N} dx_i = 1$$

Expandint aquest determinant obtenim:

$$C \int_{\mathbb{R}^N} \det(K_H(x_i, x_j))_{\{i,j \leq N\}} \prod_{i=1}^{N} dx_i = C \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{\tau \in S_N} \prod_{k=0}^{N-1} \frac{h_{\tau(k)}(x_k) h_{\tau(k)}(x_k)}{k!} \exp(-\frac{x_k^2}{2}) \prod_{i=1}^{N} dx_i =$$

$$C \sum_{\tau \in S_N} \prod_{k=0}^{N-1} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{h_{\tau(k)}(x_k) h_{\tau(k)}(x_k)}{k!} \exp(-\frac{x_k^2}{2}) \prod_{i=1}^{N} dx_i$$

Aquestes integrals sabem quan valen per (5.2). Resulta:

$$C \sum_{\tau \in S_N} \prod_{k=0}^{N-1} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{h_{\tau(k)}(x_k) h_{\tau(k)}(x_k)}{k!} \exp(-\frac{x_k^2}{2}) \prod_{i=1}^{N} dx_i = C \sum_{\tau \in S_N} \prod_{k=0}^{N-1} \sqrt{2\pi}$$

$$= C \sum_{\tau \in S_N} (2\pi)^{\frac{N}{2}} = CN!(2\pi)^{\frac{N}{2}}$$

Amb el que obtenim que la constant de normalització és $C = \frac{(2\pi)^{-\frac{N}{2}}}{N!}$ i la funció (5.1) com:

$$P(x_1, ..., x_N) = \frac{(2\pi)^{-\frac{-N}{2}}}{N!} \det(K_H(x_i, x_j))_{\{1 \leq i,j \leq N\}}$$

amb $K_H(x_i, x_j) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{h_h(x_i) h_k(x_j)}{k!} \exp(-\frac{1}{4}(x_i^2 + x_j^2))$.

Ja tenim que el procés GUE és determinantal i, per tant, podem aplicar tota la teoria sobre els processos determinantals i, en particular, podem obtenir les funcions de correlació del procés. Pel teorema 4.8, obtenim fàcilment l'N-èsima funció de correlació:

$$\rho_N(x_1, ..., x_N) = N! P(x_1, ..., x_N) = (2\pi)^{\frac{-N}{2}} \det(K_H(x_i, x_j))_{\{1 \leq i,j \leq N\}}$$

Per obtenir les següents funcions de correlació ho farem recursivament. Calcularem la (N-1)-èsima funció de correlació i les següents les anirem traient per recursió. Per fer-ho, emprarem el corol·lari 4.9, que ens dóna la relació següent:

$$\rho_{N-1}(x_1, ..., x_{N-1}) = \int_{\mathbb{R}} \rho_N(x_1, ..., x_N) dx_N =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} (2\pi)^{\frac{-N}{2}} \det(K_H(x_i, x_j))_{\{1 \leq i < j \leq N\}} dx_N$$

Per facilitar la notació, escriurem $K_H(x_i, x_j)$ com $K_H(x_i, x_j) = \sum_{k=0}^{N-1} \phi_k(x_i) \phi_k(x_j)$ amb $\phi_k(x_i) = \frac{h_k(x_i)}{\sqrt{k!}} \exp(-\frac{x_i^2}{4})$. Expandim aquest determinant:

$$\int_{\mathbb{R}} (2\pi)^{\frac{-N}{2}} \det(K_H(x_i, x_j))_{1 \leq i < j \leq N} = (2\pi)^{\frac{-N}{2}} \sum_{\tau \in S_N} \int_{\mathbb{R}} \prod_{k=0}^{N-1} \phi_{\tau(k)}(x_k) \phi_{\tau(k)}(x_k) dx_N =$$

$$= (2\pi)^{\frac{-N}{2}} \sum_{\tau \in S_N} \prod_{k=0}^{N-1} \phi_{\tau(k)}(x_k) \phi_{\tau(k)}(x_k) \int_{\mathbb{R}} \phi_{\tau(N)}(x_N) \phi_{\tau(N)}(x_N) dx_N$$

Considerem $\tau(N) = k$, amb $k = 0, ..., N-1$. Les integrals a calcular resulten ser de la forma:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{h_k(x_N)^2}{k!} \exp(-\frac{x_i^2}{2})$$

Aquesta integral sabem quant val per (5.2). Obtenim que ρ_{N-1} és:

$$\rho_{N-1}(x_1, ..., x_{N-1}) = (2\pi)^{\frac{1-N}{2}} \sum_{\tau \in S_N} \prod_{k=0}^{N-1} \phi_{\tau(k)}(x_k)\phi_{\tau(k)}(x_k)$$

Aplicant ara la fórmula de Cauchy-Binet, donada al lema 4.13, obtenim finalment l'expressió de ρ_{N-1}:

$$\rho_{N-1}(x_1, ..., x_{N-1}) = (2\pi)^{\frac{1-N}{2}} \det(K_H(x_i, x_j))_{\{1 \leq i < j \leq N-1\}}$$

Recursivament podem calcular les expressions de les k-èsimes funcions de correlació. Aquestes tenen la següent expressió:

$$\rho_k(x_1, ..., x_k) = (2\pi)^{\frac{k-N}{2}} \det(K_H(x_i, x_j))_{\{1 \leq i < j \leq k\}}$$

amb aquesta expressió, la primera funció de correlació és:

$$\rho_1(x_1) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} K_H(x_1, x_1) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{h_k(x_1)^2}{k!} \exp(-\frac{x_1^2}{2})$$

El nostre objectiu és comprovar que la primera funció de correlació del GUE és exactament la llei del semicercle de Wigner.

Definició 5.2. *Anomenem la llei del semicercle de Wigner a la funció:*

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4 - x^2}$$

Per veure de manera teòrica que la nostra primera funció de correlació és aquesta llei del semicercle de Wigner utilitzarem l'anomenat teorema de Wigner.

Teorema 5.3 (Wigner)**.** *Sigui A una matriu hermítica amb entrades gaussianes independents. Aleshores la distribució dels valors propis de la matriu A convergeix quasi segurament a la distribució del semicercle, és a dir, per $x \in \mathbb{R}$ tenim:*

$$F_A(x) \to^{q.s.}_{N \to \infty} F(x)$$

on $F_A(x)$ és la funció de distribució dels valors propis d'A, i que té la següent expressió:

$$F_A(x) = \frac{1}{N} \#\{i : x_i < x; 1 \leq i \leq N\}$$

Per veure la demostració d'aquest teorema, hem de veure la referència [4]. Dit això, el teorema de Wigner ens dóna una relació entre la nostra funció de distribució i la funció de distribució del semicercle. Per veure-la una mica amb més deteniment, veurem com és la primera funció de correlació per diversos N i veurem que coincidirà bastant bé amb la funció del semicercle de Wigner. Per poder programar-la d'una manera més eficient, utilitzarem el teorema de Christoffel-Darboux.

Teorema 5.4 (Christoffel-Darboux)**.** *Sigui* $\{f_j(x)\}$ *un conjunt de polinomis ortonormals tals que* $\int_{\mathbb{R}} f_j(x)^2 dx = h_j$. *Aleshores:*

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{f_j(x) f_j(y)}{h_j} = \frac{k_n}{h_n k_{n+1}} \frac{f_n(y) f_{n+1}(x) - f_{n+1}(y) f_n(x)}{x - y}$$

on k_n *és el coeficient líder de* $f_n(x)$.

Demostració. Veure [1] de la bibliografia. □

D'aquest teorema, obtenim un corol·lari directe quan els punts són iguals. Aquest és el següent:

Corol·lari 5.5. *Sigui* $\{f_j(x)\}$ *un conjunt de polinomis ortonormals tals que* $\int_{\mathbb{R}} f_j(x)^2 dx = h_j$. *Aleshores:*

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{f_j(x)^2}{h_j} = \frac{k_n}{h_n k_{n+1}} (f'_{n+1}(x) f_n(x) - f'_n(x) f_{n+1}(x))$$

on k_n *és el coeficient líder de* $f_n(x)$.

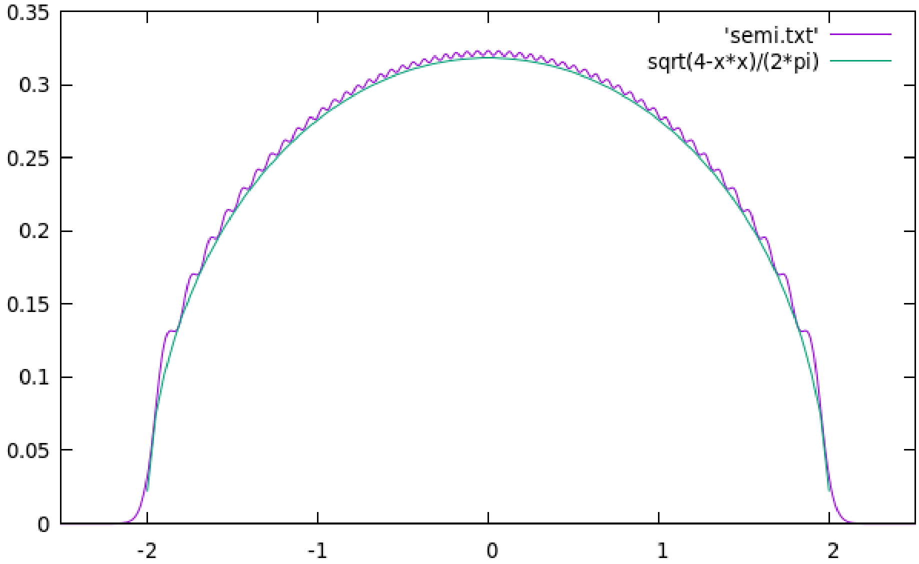
Aplicant aquest corol·lari a la primera funció de correlació, tenim que podem escriure ρ_1 com:

$$\rho_1(x_1) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{h_k(x_1)^2}{k!} \exp(-\frac{x_1^2}{2}) =$$

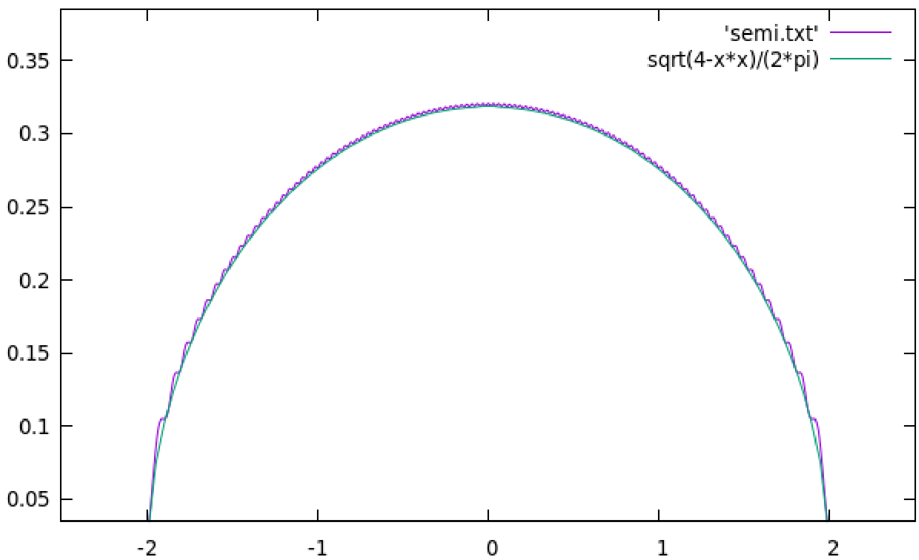
$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{x_1^2}{2}) \frac{1}{N!} (N h_{N-1}(x_1)^2 - (N-1) h_{N-2}(x_1) h_N(x_1))$$

on hem utilitzat que els coeficients líders del polinomi d'Hermite són tots 1, i $h'_n(x) = n h_{n-1}(x)$.

Amb aquesta manera d'expressar la primera funció de correlació tenim una forma més senzilla per programar aquesta funció. El que veurem ara és com és aquesta funció a l'anar augmentant el grau de la funció i comprovarem que va coincidint amb la llei del semicercle de Wigner. El cas que veurem primer és per $N = 50$. En aquest cas tenim el gràfic següent:

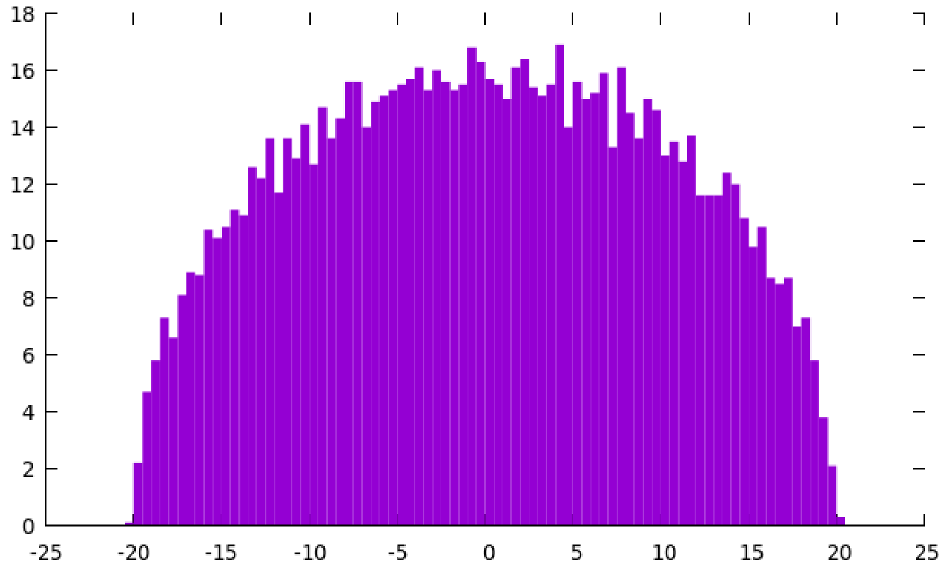


Observem que la gràfica de la funció fa una mena de semicercle i coincideix bastant bé sobre la llei del semicercle de Wigner. Si augmentem més el grau, per $N = 100$, el gràfic és:

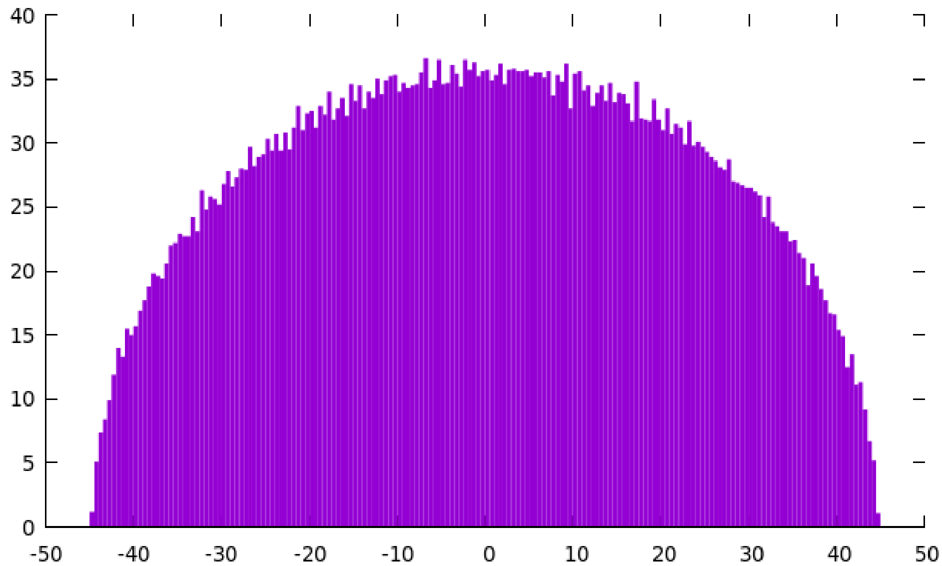


On aquest cop s'assembla molt més al semicercle de Wigner, coincidint pràcticament a tot arreu. Per veure detalls del programa hem de veure la Secció 7.4 .

Exemples 5.6. Com hem fet amb l'ensemble de Ginibre, veurem com tenim distribuïts els valors propis del GUE. Aquests valors propis són reals, i per tant, en comptes de veure com estan distribuïts com a tal a l'eix real, veurem la quantitat de valors propis en petits intervals. Aquests valors propis haurien de seguir una mena de semicercle. Per veure-ho amb més claredat, farem l'experiment 100 cops i redimensionarem la quantitat de valors propis. El primer cas que veurem és per $N = 100$, on hem obtingut el següent gràfic:



Com veiem fa una espècie de semicercle. Si augmentem el grau de la matriu, aquesta mena de semicercle hauria de ser encara més. Mirem, doncs, un cas més gran com $N = 500$. En aquest cas el gràfic és



en aquest cas s'aprecia encara més la forma semicircular que segueix la distribució dels valors propis. Per veure el codi darrere aquests dibuixos, cal veure la Secció 7.5.

5.1.2 L'ensemble de les matrius unitàries

Un altre tipus de matriu que donarà un procés determinantal són les conegudes com l'ensemble de matrius circulars unitàries o **CUE**. Per parlar d'aquest tipus de matrius hem de definir primer una mesura adequada. Aquesta mesura és la **mesura de Haar**.

Definició 5.7. *Definim la mesura de Haar μ_H sobre el conjunt de les matrius unitàries com l'única probabilitat de Borel que és invariant sobre multiplicacions de matrius unitàries. En altres paraules, si considerem S una matriu qualsevol i U una matriu unitària, ales-*

hores:

$$\mu_H(US) = \mu_H(S) = \mu_H(SU)$$

Un cop definida aquesta mesura, necessitem una forma de descompondre la matriu unitària en una matriu diagonal. Per fer-ho utilitzarem el següent teorema:

Teorema 5.8 (Teorema espectral per matrius normals)**.** *Sigui A una matriu $n \times n$ aleshores:*

A és normal $\iff$ A és unitàriament diagonalitzable, és a dir, podem expressar A com $A = UDU^*$ amb D matriu diagonal i U matriu unitària.

Demostració. Per la descomposició de Schur teníem:

$$A = UTU^*$$

amb U unitària i T matriu triangular superior. Si suposem que A és normal tenim el següent:

$$AA^* = UTT^*U^* = U^*T^*TU = AA^*$$

i per tant obtenim les següents equivalències: A normal $\iff$ T és normal i triangular $\iff$ T diagonal $\iff$ A unitàriament diagonalitzable. □

Si considerem doncs U una matriu unitària qualsevol. Pel teorema espectral per matrius normals podem escriure U com:

$$U = VDV^* \tag{5.3}$$

amb D matriu diagonal amb els valors propis de la matriu U i V matriu unitària que té per columna el vector propi del valor propi corresponent.

Ara bé, volem la unicitat d'aquesta descomposició. Escriurem com λ_j els valors propis de la forma $\lambda_j = e^{i\alpha_j}$ de la matriu U. Podem assignar el següent ordre: $0 < \alpha_1 < ... < \alpha_N < 2\pi$. Amb aquest ordre, tenim D de manera única. Per determinar V de manera única, ho fem com al cas complex, podem reemplaçar V per la matriu $V\Theta$ amb $\Theta = diag(e^{i\theta_1}, ..., e^{i\theta_N})$. L'única font de no unicitat és que tots els valors propis siguin diferents. Aquest és el cas que considerarem. Recuperem la unicitat d'aquesta matriu imposant $V_{ii} \geq 0$.

Com vam fer als altres casos, veiem com podem expressar dU en termes d'aquesta descomposició.

$$dU = VdDV^* + dVDV^* + VDdV^* = VdDV^* + dVDV^* - VDdVV^*$$

on l'última igualtat es compleix perquè $dV^* = -V^*dVV^*$. Veiem aquesta igualtat:

Demostració. Com V és unitària:

$$V^*V = I$$

Diferenciant aquesta igualtat obtenim:

$$dV^*V + V^*dV = 0$$

Aïllant dV^*, obtenim la igualtat buscada. □

Considerem ara U^* i la seva descomposició pel teorema espectral. Aleshores U^*dU s'escriu com:

$$U^*dU = VD^*dDV^* + VDV^*dVDV^* - DVV^*$$

i d'aquí:

$$VU^*dUV^* = D^*dD + DV^*dVD - V^*DV$$

Anomenant M la matriu resultant de la part dreta de la igualtat anterior, podem escriure els elements d'aquesta matriu de la següent forma:

$$M_{jk} = \begin{cases} id\alpha_j & \text{si } j = k \\ (e^{-i\alpha_j}e^{i\alpha_k} - 1)V * dV & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

En aquest cas, no ens interessa els valors de les matrius V^* i dV. Si ara apliquem la mesura de Haar a les dues bandes de la igualtat matricial obtenim:

$$\mu_H(U)dU = i^N \Big(\bigwedge_j d\alpha_j \Big) \wedge \Big(|e^{-i\alpha_j}e^{i\alpha_k} - 1|^2 (V^*dV) \wedge (V^*dV) \Big)$$

Integrant i reduint l'integral sobre V^*dV a una certa constant C, obtenim la següent funció de densitat dels valors propis:

$$P(\alpha_1, ..., \alpha_N) = C \prod_{1 \leq j < k \leq N} |e^{i\alpha_j} - e^{i\alpha_k}|^2$$

on C és aquesta constant de normalització que prové de les integrals no calculades.

Com veiem, tornem a tenir una expressió d'una matriu de Vandermonde al quadrat. Aquesta matriu de Vandermonde V és de la forma $V = (e^{ir\alpha_s})_{\{1 \leq r,s \leq N\}}$. Aquesta funció de densitat pot ser expressada com un determinant, com en els casos anteriors. Obtenim doncs:

$$P(\alpha_1, ..., \alpha_N) = C \det(K_U(\alpha_j, \alpha_k))_{\{1 \leq j,k \leq N\}}$$

amb $K_U(\alpha_j, \alpha_k) = \sum_{l=0}^{N-1} e^{il\alpha_j}e^{-il\alpha_k}$

Amb aquesta expressió podem calcular d'una manera més senzilla la constant de normalització de la funció densitat. Recordem que aquesta ha de complir:

$$\int_{S^1} \cdots \int_{S^1} P(\alpha_1, ..., \alpha_N) \prod_{j=1}^{N} d\alpha_j = 1$$

Com hem vist, aquesta funció de densitat era un determinant. Expandint aquest determinant ens queda el càlcul de les següents integrals:

$$C \sum_{\tau \in S_N} \prod_{j=1}^{N} \int_{S^1} \cdots \int_{S^1} e^{i\tau(j)\alpha_j} e^{-i\tau(j)\alpha_j} \prod_{k=1}^{N} d\alpha_k = 1$$

Aquestes integrals són immediates i donen un valor de 2π. Aleshores la constant de normalització és:

$$C = \frac{(2\pi)^{-N}}{N!}$$

i per tant la nostra funció de densitat dels valors propis és:

$$P(\alpha_1, ..., \alpha_N) = \frac{(2\pi)^{-N}}{N!} \det(K_U(\alpha_j, \alpha_k))_{\{1\leq j,k\leq N\}} \tag{5.4}$$

amb $K_U(\alpha_j, \alpha_k) = \sum_{l=0}^{N-1} e^{il(\alpha_j-\alpha_k)}$

Com hem vist, aquest procés és un procés determinantal. Per tant és interessant veure com són les funcions de correlació d'aquest procés. A partir de la teoria feta, podem treure l'expressió de l'N-èsima funció de correlació. A partir del teorema 4.8 tenim l'expressió:

$$\rho_N(\alpha_1, ..., \alpha_N) = N!P(\alpha_1, ..., \alpha_N) = (2\pi)^{-N} \det(K_U(\alpha_j, \alpha_k))_{\{1\leq j,k\leq N\}}$$

L'objectiu és trobar les expressions de les m-èsimes funcions de correlació. Començarem traient l'expressió de l'$(N-1)$-èsima funció de correlació. Si recordem, per treure l'expressió de ρ_{N-1} ho fem a partir del corol·lari 4.9. Aquest corol·lari ens donava la relació següent:

$$\rho_{N-1}(\alpha_1, ..., \alpha_{N-1}) = \int \rho_N(\alpha_1, ..., \alpha_N)d\alpha_N$$

Expandint la forma determinantal de la funció ρ_N tenim el següent:

$$\rho_{N-1}(\alpha_1, ..., \alpha_{N-1}) = (2\pi)^{-N} \sum_{\tau\in S_N} \prod_{j=0}^{N-1} e^{i\tau(j)\alpha_j} e^{-i\tau(j)\alpha_j} \int_{S^1} e^{i\tau(N)\alpha_N} e^{-i\tau(N)\alpha_N} d\alpha_N$$

Aquesta integral és immediata i dóna 2π. L'expressió de ρ_{N-1} és:

$$\rho_{N-1}(\alpha_1, ..., \alpha_{N-1}) = (2\pi)^{1-N} \sum_{\tau\in S_N} \prod_{j=0}^{N-1} e^{i\tau(j)\alpha_j} e^{-i\tau(j)\alpha_j}$$

Aplicant la fórmula de Cauchy-Binet, donada al lema 4.13, l'expressió resulta com:

$$\rho_{N-1}(\alpha_1, ..., \alpha_{N-1}) = (2\pi)^{1-N} \det(K_U(\alpha_j, \alpha_k))_{\{1\leq j,k\leq N-1\}}$$

amb $K_U(\alpha_j, \alpha_k) = \sum_{l=0}^{N-1} e^{il(\alpha_j-\alpha_k)}$. Si reiterem aquests càlculs obtindrem les expressions de les m-èsimes funcions de correlació de l'ensemble. Aquesta expressió és:

$$\rho_m(\alpha_1, ..., \alpha_m) = (2\pi)^m \det(K_U(\alpha_j, \alpha_k))_{\{1\leq j,k\leq m\}} \tag{5.5}$$

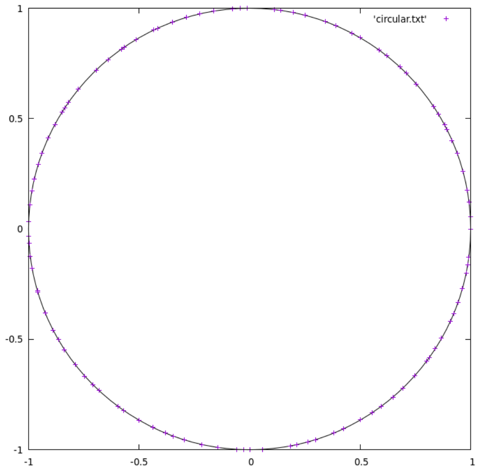
amb $K_U(\alpha_j, \alpha_k) = \sum_{l=0}^{N-1} e^{il(\alpha_j-\alpha_k)}$.

De l'expressió (5.5), podem treure l'expressió de la primera funció de correlació:

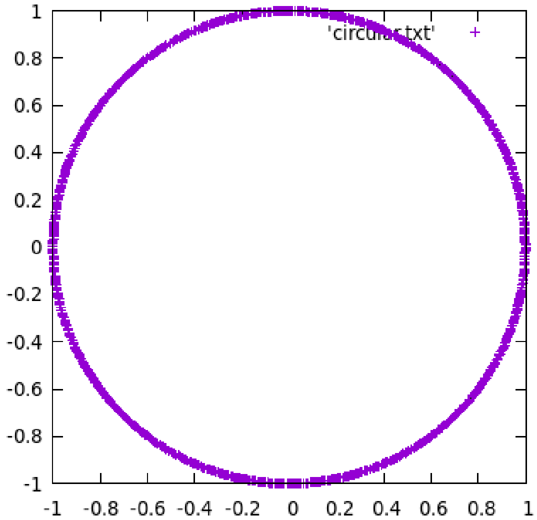
$$\rho_1(\alpha) = (2\pi)^{-1}K(\alpha, \alpha) = N(2\pi)^{-1}$$

Com veiem, en aquest cas, la primera funció de correlació és constant.

Exemples 5.9. Vista la teoria, volem veure com queden distribuïts els valors propis d'aquest ensemble per diferents mides de la matriu. Per veure-ho, utilitzarem un programa en C++, on calcularem els valors propis d'una matriu d'aquest ensemble. El primer cas que veurem és per $N = 100$. En aquest cas la distribució dels valors propis és:



Com esperàvem, la distribució dels valors propis d'aquest ensemble està distribuït sobre el cercle unitat. Si augmentem el grau de la matriu el que hauríem veure és que cada cop més omple la frontera d'aquest disc. Augmentem la mida de la matriu per $N = 1000$. En aquest cas el gràfic és:



Com veiem, la distribució en aquest cas és pràcticament tot el cercle unitat.

El codi d'aquestes distribucions es troba a la Secció 7.6.

6 Conclusions

En aquest estudi hem desenvolupat tota una teoria dels processos determinantals a partir de la visualització de la funció densitat d'una matriu dins l'ensemble de Ginibre. Gràcies a l'estudi d'aquest exemple, ens han sorgit dubtes de si hi havien més matrius que complien que les seves funcions de densitat determinaven també un procés determinantal.

Els objectius, per tant, han sigut complerts, ja que hem estudiat i desenvolupat la teoria del procés que volíem estudiar, l'ensemble de Ginibre, i això ha comportat a un ampli estudi d'un tipus de procés molt útil en diversos àmbits, com la física. Gràcies al fet que aquest àmbit no és únic només de les matemàtiques, també he pogut trobar informació d'aquest tema des d'un punt de vista no matemàtic.

A més el dubte de veure si teníem altres processos determinantals que provenien de matrius aleatòries ha sigut provat, tot veient no només un tipus d'ensemble, sinó que hem vist tres tipus d'ensembles que desemboquen en processos determinantals. Aquests tres ensembles són els coneguts com l'ensemble de Ginibre, el GUE i el CUE.

Finalment, no m'agradaria tancar aquest treball sense dir que fer-lo m'ha donat l'excusa perfecta per estudiar i aprendre més. En primer lloc m'ha exigit desenvolupar el rigor propi d'un treball universitari: la recerca de fonts bibliogràfiques, comprendre les idees que he estudiat, en com tractar i exposar la informació trobada; en segon lloc, l'oportunitat d'ampliar els meus coneixements dins l'àmbit de les matemàtiques, en especial, de l'anàlisi i la probabilitat.

7 Apèndix

Durant aquest treball hem necessitat l'ajut de la programació per veure d'una manera més clara alguns conceptes. Alguns d'aquests conceptes són: la distribució dels valors propis d'una matriu, com és certa funció, el càlcul numèric d'alguna quantitat important, etcètera. Per poder realitzar aquests programes, hem emprat algunes llibreries matemàtiques que ens han ajudat a realitzar aquesta tasca de manera més senzilla. Aquestes llibreries són: **Armadillo** [18] i **Boost**[19]

7.1 Programa per calcular els valors propis d'una matriu de l'ensemble de Ginibre

```
#include<iostream>
#include<stdlib.h>
#include<fstream>
#include<armadillo>

using namespace std;
using namespace arma;

int main(){
    int N=100;

     mat A(N,N, fill::randn);
     mat B(N,N, fill::randn);

     cx_mat S(A,B);

     for(int i=0;i<N;i++){
             for(int j=0; j<N;j++){
                     S(i,j)=S(i,j)/sqrt(2);
             }
    }

     cx_vec evap;
     eig_gen(evap,S);

     ofstream arxiu;
     arxiu.open("vaps.txt",iostream::out);
     if(arxiu.fail()){
             cout<<"no s'ha pogut obrir fitxer de dades"<<endl;
             exit(1);
    }
    for(int i=0; i<N; i++){
        arxiu<<evap[i].real()<<"  "<<evap[i].imag()<<endl;
    }
    arxiu.close();
    return 0;
}
```

Aquest programa el que fa és crear dues matrius aleatòries utilitzant el tipus **mat** d'Armadillo. A partir d'aquestes dues matrius, creem una tercera matriu complexa utilitzant el tipus **cx_mat**. Per definir aquesta matriu, el que fem és fer la següent operació $S = A+iB$. Després normalitzem cada element de la matriu perquè segueixin una distribució N(0,1). Després, creem un vector complex del tipus **cx_vec** i li apliquem la funció **eigen_gen**, la qual ens calcularà els valors propis de la matriu S i els guardarà al vector evap. Un cop calculats els valors propis els escrivim a un fitxer. A partir d'aquest fitxer i el gnuplot dibuixarem com estan distribuïts els valors propis d'aquesta matriu al pla complex. Utilitzarem les següents comandes:

```
set size square
set object circle at 0,0 size 10
plot 'vaps.txt' w p
```

7.2 Programa per dibuixar la funció gamma incompleta

```
#include<iostream>
#include<stdlib.h>
#include<fstream>
#include<boost/math/special_functions/gamma.hpp>

using namespace std;

int main(){

    int N=100;
    ofstream arxiu;
    arxiu.open("gamma_incompleta.txt",iostream::out);
    if(arxiu.fail()){
            cout<<"no s'ha pogut obrir fitxer de dades"<<endl;
            exit(1);
    }

    for(double x=0; x<=200; x+=0.001){
        double y=boost:math::gamma_q(N,x)
        arxiu<<x<<"   "<<y<<endl;
    }
    arxiu.close();


    arxiu.open("gamma_incompleta_norm.txt",iostream::out);
    if(arxiu.fail()){
            cout<<"no s'ha pogut obrir fitxer de dades"<<endl;
            exit(1);
    }

    for(double x=0; x<=1.5; x+=0.001){
        double z= N*x;
        double y=boost:math::gamma_q(N,z)
        arxiu<<x<<"   "<<y<<endl;
```

```
    }
    arxiu.close();
    return 0;
}
```

Aquest programa únicament calcula el valor de la funció gamma incompleta següent $\frac{\Gamma(N,z)}{\Gamma(N)}$ a partir de la funció **gamma_q** de la llibreria Boost, que és la funció que tenim nosaltres com a funció de correlació. A més calculem una normalització d'aquesta funció per veure una forma més de com és la funció. Per dibuixar aquestes funcions utilitzem les comandes següents al gnuplot:

```
set yrange[0:2]
plot 'gamma_incompleta.txt' w l
```

7.3 Programa per fer una taula de valors de l'esperança d'un estadístic lineal relacionat amb l'ensemble de Ginibre

```
#include<iostream>
#include<stdlib.h>
#include<fstream>
#include<boost/math/special_functions/gamma.hpp>
#include<armadillo>
#include<iomanip>

using namespace std;
using namespace arma;

double func(int N,double z);
double esperanza(double liminf,double limsup, int N);

int main(){

    ofstream arxiu;
    arxiu.open("esp_var.txt",iostream::out);
    if(arxiu.fail()){
        cout<<"no s'ha pogut obrir fitxer de dades"<<endl;
        exit(1);
    }
    arxiu<<"N"<<"     "<<"Esp"<<endl;
    double espe,var;

    n=10;
    espe=esperanza(0,1,n);
    arxiu<<n<<"   "<<fixed<<setprecision(10)<<espe<<endl;

    n=50;
    espe=esperanza(0,1,n);
    arxiu<<n<<"   "<<fixed<<setprecision(10)<<espe<<endl;
```

```
    n=100;
    espe=esperanza(0,1,n);
    arxiu<<n<<"   "<<fixed<<setprecision(10)<<espe<<endl;

    n=400;
    espe=esperanza(0,1,n);
    arxiu<<n<<"   "<<fixed<<setprecision(10)<<espe<<endl;

    n=500;
    espe=esperanza(0,1,n);
    arxiu<<n<<"   "<<fixed<<setprecision(10)<<espe<<endl;

    n=1000;
    espe=esperanza(0,1,n);
    arxiu<<n<<"   "<<fixed<<setprecision(10)<<espe<<endl;

    arxiu.close();
    return 0;
}

double func(int N, double z){
    return z*boost::math::gamma_q(N,z*z);
}

double esperanza(double linf,double lsup,int N){
    double n=1e3;
    double sum= func(N,linf);
    double h=(lsup-linf)/n;
    for(int i=1; i<n; i++){
        sum += 2*func(N,h*i);
        }
    sum +=func(N,lsup);
    return h*sum/2;

}
```

Aquest programa calcula, per diferents graus de la matriu, l'esperança sobre un disc. En aquest cas el disc és el disc unitat. Per calcular aquesta esperança fem ús de dues funcions. La primera la funció **func** només calcula el valor de la funció a avaluar. Pel que fa a la funció **esperanza** el que fem és calcular el valor de la integral $\int_0^1 \frac{\Gamma(N,r^2)}{(N-1)!} r dr$ utilitzant el mètode de Simpson i la funció **func**.

7.4 Programa per dibuixar la funció ρ_1 del cas hermític

```
#include<iostream>
#include<stdlib.h>
#include<fstream>
#include<math.h>
#include<boost/math/special_functions/hermite.hpp>
```

```
using namespace std;
double rho(int n, large double x);

int main(){

    int N=50;

    ofstream arxiu;
    arxiu.open("rho.txt",iostream::out);
    if(arxiu.fail()){
            cout<<"no s'ha pogut obrir fitxer de dades"<<endl;
            exit(1);
    }
    long double fact=sqrt(acos(-1.));
    for(int i=1; i<=N; i++){
        fact= fact*i*2;
    }

    for(long double x=-N; x<=N; x+=0.01){
        arxiu<<sqrt(2)*x/sqrt(N)<<"  "<<rho(N,x,fact)/sqrt(2*N)<<endl;
    }

    arxiu.close();
    return 0;
}

double rho(int n,long double x, long double fact){

    long double h1=boost::math::hermite(n+1,x);
    long double h2=boost::math::hermite(n,x);
    long double h3=boost::math::hermite(n-1,x);
    long double y=((n+1)*h2*h2)-(n*h3*h1);

    return y*exp(-1*x*x)/(fact);
}
```

Aquest programa calcula l'expressió trobada de la funció de correlació del GUE i la pinta. Per fer-ho utilitzem la funció **hermite** que calcula el valor del polinomi d'Hermite "físics"de grau N en el punt x. A la funció **rho**, calculem aquesta primera funció de correlació del GUE amb l'expressió trobada a partir de l'expressió trobada de Christoffel-Darboux. En aquest cas, a més, normalitzem la primera funció de correlació per comprovar la coincidència amb la funció semicercle de Wigner. Per pintar aquesta funció i la funció del semicercle de Wigner utilitzarem les comandes:

```
set xrange[-2.5:2.5]
plot 'rho.txt' w l
replot sqrt(4-x*x)/2*pi
```

7.5 Programa per calcular els valors propis d'una matriu del GUE

```
#include<iostream>
```

```
#include<stdlib.h>
#include<fstream>
#include<armadillo>

using namespace std;
using namespace arma;

int main(){

    ofstream arxiu;
    arxiu.open("herm.txt",iostream::out);
    if(arxiu.fail()){
            cout<<"no s'ha pogut obrir fitxer de dades"<<endl;
            exit(1);
    }
    for(int k=0; k<100,k++){
        int N=100;

        mat A(N,N, fill::randn);
         mat B(N,N, fill::randn);

        cx_mat H(A,B);

        for(int i=0;i<N;i++){
            for(int j=i; j<N;j++){
                    if(i==j){
                        H(i,j)=A(i,j);
                    }else{
                        H(i,j)=H(i,j)/sqrt(2);
                        H(j,i)=conj(H(i,j));
                    }
            }
    }
        vec evap;
        eig_sym(evap,H);


        for(int i=0; i<N; i++){
            arxiu<<evap[i]<<endl;
        }
    }
    arxiu.close();
    return 0;
}
```

En aquest programa fem el mateix que al primer programa però amb un parell de diferències. El primer canvi és que omplim la matriu hermítica H igual que abans, però després en normalitzar tornem a assignar un valor real a la diagonal que segueix una distribució N(0,1) i on hem de tenir que $H(i,j) = \overline{H(j,i)}$, cosa que fem amb la funció

conj d'Armadillo. El segon canvi ve del vector de valors propi. En el cas hermític els valors propis són reals, per tant utilitzem el tipus **vec** per guardar els valors propis. La funció per calcular els valors propis també és diferent, justament pel fet de ser hermítica, i per això utilitzem la funció **eig_sym** la qual està optimitzada per a aquest cas. Un cop guardats els valors propis, podem utilitzar el gnuplot i les següents comandes per obtenir els gràfics vistos:

```
set key off
set border 3
set boxwidth 0.5
set style fill solid 1.0 noborder
bin_width=0.5;
bin_number(x)=floor(x/bin_width)
rounded(x)=bin_width(bin_number(x)+0.5)
plot 'herm_vaps.txt' using (rounded($1)):(0.1) smooth frequency
with boxes
```

7.6 Programa per calcular els valors propis d'una matriu del CUE

```
#include<iostream>
#include<stdlib.h>
#include<fstream>
#include<armadillo>

using namespace std;
using namespace arma;

int main(){
    int N=100;

     mat A(N,N, fill::randn);
     mat B(N,N, fill::randn);

     cx_mat U(A,B);

     for(int i=0;i<N;i++){
            for(int j=i; j<N;j++){
                 U(i,j)=U(i,j)/sqrt(2);
            }
    }
    cx_mat Q;
    cx_mat R;
    qr(Q,R,U)

    cx_vec a=R.diag(0);

    for(int i=0;i<N;i++){
        a[i]=a[i]/sqrt((a[i].real()*a[i].real())*(a[i].imag()a[i].imag()));
    }
    for(int i=0;i<N; i++){
```

```
        for(int j=0;j<N;j++){
            R(i,j)=Q(i,j)*a[i];
            U(i,j)=0.;
        }
    }
    for(int i=0;i<N; i++){
        for(int j=0;j<N;j++){
            for(int k=0;k<N; k++){
                U(i,j)+= R(i,k)Q(k,j);
            }
        }
    }
    cx_vec evap;
    eig_gen(evap,U);

     ofstream arxiu;
     arxiu.open("circular.txt",iostream::out);
     if(arxiu.fail()){
            cout<<"no s'ha pogut obrir fitxer de dades"<<endl;
            exit(1);
    }
    for(int i=0; i<N; i++){
        arxiu<<evap[i]<<endl;
    }
    arxiu.close();
    return 0;
}
```

El programa fa el mateix que el programa anterior però generant primer una matriu aleatòria unitària. Per crear aquesta matriu utilitzem el mètode utilitzat a [13]. En aquest cas, els valors propis tornen a ser complexos, amb el que tornem a utilitzar **cx_vec**. Un cop tenim els valors propis calculats, veiem com estan distribuïts aquests valors propis utilitzant les següents comandes de gnuplot:

```
set size square
set object circle at 0,0 size 1
plot 'circular.txt' w p
```

Referències

[1] Andrews, G., Richard, R.,(1999) *Special functions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **71**, Cambridge University Press.

[2] Ben Hough, J.,Krishnapur, M.,Peres, Y.,Virág, B.(2009): *Zeros of Gaussian Analytic Functions and Determinantal Point Processes.* Estats Units:American Mathematical Society.

[3] Chafaï, D.(2010): *Aspects of the Complex Ginibre Ensemble.* Recuperat el 22 d'abril del 2020, de `http://djalil.chafai.net/blog/2010/11/02/aspects-of-the-complex-ginibre-ensemble/`.

[4] Domínguez, J.A., Rocha, A. (2009): *El Teorema de Wigner para Matrices Aleatòrias.* Recuperat el 22 de maig del 2020, de `https://www.cimat.mx/reportes/enlinea/I-09-08.pdf`

[5] Dyson, F.J.(1970): *Correlation between Eigenvalues of a Random Matrix.* Recuperat el 26 de març del 2020, de `https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.cmp/1103842703`.

[6] Edelman, A.,La Croix, M.(2015): *The Singular Values of the GUE (less is more).* Recuperat el 15 de maig del 2020, de `https://arxiv.org/pdf/1410.7065.pdf`.

[7] Feier, A.(2012): *Methods of Proof in Random Matrix.* Recuperat el 17 de maig del 2020, de `https://www.math.harvard.edu/media/feier.pdf`.

[8] Ginibre, J.(1965): Statistical Ensembles of Complex, Quaternion and Real Matrices, *Journal Mathematical and Physics* **6**, 440-449.

[9] Johansson,K., Lambert, G. (2019): *Gaussian and non-Gaussian Fluctuations for Mesoscopic Linearstatistics in Determinantal Processes.* Recuperat 29 de abril del 2020, de `https://arxiv.org/pdf/1504.06455.pdf`.

[10] Lee, J. O. *Universality in Random Matrix Theory.* Recuperat el 17 de maig del 2020, de `http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~ito/MPHP/confs/rims13/Proc/Lee1.pdf`.

[11] Livan, G., Novaes, G., Vivo, P.(2018):*Introduction to Random Matrix: Theory and Practice.* Estats Units: Springer.

[12] Mehta, M.L.(2004): *Random Matrices*(ed.3). Estats Units: Elsevier Science Publishing Co. Inc.

[13] Mezzadri, F.. Recuperat el 25 de maig del 2020, de `http://www.ams.org/notices/200705/fea-mezzadri-web.pdf`.

[14] Rider, B., Virág, B.(2007): *Complex Determinantal Processes and* H^1 *Noise* Recuperat el 3 de maig del 2020, de `https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.ejp/1464818516`.

[15] Rising, J.K. (2013): *Advances in the Theory of Determinantal Point Processes.* Recuperat el 10 d'abril del 2020, de `https://repository.upenn.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1951&context=edissertations`.

[16] Tao, T.(2009): *Determinantal Processes*. Recuperat el 15 d'abril de 2020, de `https://terrytao.wordpress.com/2009/08/23/determinantal-processes/` .

[17] Tao, T.(2012): *Topics in Random Matrix Theory*. Estats Units:American Mathematical Society.

Altres referències:

[18] Armadillo. Recuperat el dia 4 de maig del 2020, de `http://arma.sourceforge.net/`

[19] Boost. Recuperat el dia 9 de maig del 2020,de `https://www.boost.org/`