



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Quadratures de Txebixov a l'interval i Teorema de Bernstein

Júlia Oliver Santacreu

Director: Dr. Jordi Marzo

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 21 de juny de 2020

Abstract

In this work we will prove a theorem that Bernstein proved in 1937. This theorem states that there are no quadrature formulas with equal weights (of Chebyshev) in the interval $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k),$$

that are true for polynomials f of degree $\leq n$, with nodes $x_k \in [-1, 1]$, if $n \geq 10$.

We will also see some results related to the distribution of these nodes when n is large.

Resum

En aquest treball provarem un teorema que va demostrar Bernstein l'any 1937. Aquest teorema ens diu que no existeixen fórmules de quadratura amb pesos iguals (de Txeixov) a l'interval $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k),$$

que siguin certes pels polinomis f de grau $\leq n$, amb els nodes $x_k \in [-1, 1]$, si $n \geq 10$.

Veurem també alguns resultats relacionats amb la distribució d'aquests nodes quan n és gran.

Agraïments

Vull agrair al Dr. Jordi Marzo l'esforç i la paciència per ajudar-me a tirar aquest treball endavant, per acceptar ser el meu tutor a últim moment i proposar-me el tema. Les seves explicacions a allò que no he entés i totes les correccions m'han ajudat a aprendre i millorar.

A tots els companys i companyes de la facultat, pel suport mutu durant aquests anys i pel plaer que ha estat fer aquest camí plegats. En especial al Josep i al Bertran, per aguantar els meus dubtes tant de matemàtiques com de $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$, a la Laura, per fer-me més suportable la redacció d'aquest treball amb la seva companyia i a la Natàlia, per fer-me costat incondicionalment.

I finalment al Max, per confiar en mi en tot moment i ser la persona que més m'ha animat aquests últims mesos.

Índex

1	Introducció	1
2	Polinomis ortogonals	4
2.1	Definicions i propietats bàsiques	4
2.2	Exemples	6
2.2.1	Polinomis de Txebixov	6
2.2.2	Polinomis de Legendre	8
2.3	Interpolació i quadratures	9
3	Polinomis simètrics i fórmules de quadratura	13
3.1	Polinomis simètrics	13
3.2	Fórmules de quadratura	14
3.2.1	Equacions de Newton	15
3.2.2	Alguns casos concrets	18
4	El Teorema de Bernstein	22
4.1	Lemes previs	22
4.2	Comentaris previs	27
4.3	Demostració del teorema de Bernstein	29
4.4	Demostració del teorema A	29
5	Resultats de Kuzmin	31
6	Conclusions	33

1 Introducció

Una fórmula de quadratura és una fórmula d'integració numèrica. En aquest treball considerarem fórmules de quadratura que ens permet calcular una aproximació d'una integral definida d'una funció $f(x)$ a un interval $[a, b]$, mitjançant una suma d'avaluacions de la funció $f(x)$ en punts de l'interval amb uns pesos. Així, tindrem

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad (1.1)$$

on $f(x)$ és una funció que assumirem contínua i integrable a l'interval $[a, b]$, $x_k \in [a, b]$ són els nodes d'integració i A_k és el pes k -èsim, per a tot $k \in \{1, \dots, n\}$.

Aquesta fórmula de quadratura (1.1) conté $2n + 1$ paràmetres: el nombre n , els n coeficients A_k i els n nodes x_k . Cal escollir aquests paràmetres de la millor manera possible per tal que la fórmula (1.1) produeixi un error reduït o zero per a totes les funcions $f(x)$ d'una determinada classe. Sembla clar que com més gran sigui el valor de n , més precisa serà aquesta fórmula. En el nostre cas, qüestions que volem és que la fórmula (1.1) sigui exacta per a polinomis del grau més gran possible.

En aquest treball estudiarem la possibilitat de trobar una fórmula de quadratura, anomenada **fórmula de quadratura de Txeixov**, a l'interval $[-1, 1]$ quan els pesos A_k són tots iguals i només depenen de n : $A_k = c_n$ per a tot $k \in \{1, \dots, n\}$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx c_n \sum_{k=1}^n f(x_k). \quad (1.2)$$

Donat que per quadratures de Txeixov tenim $n + 1$ paràmetres, és natural demanar que la fórmula sigui certa per a polinomis de grau $\leq n$. Per mostrar-ne un exemple, aquest problema es pot resoldre fàcilment al cercle ([5, Exemple 1.1.1]). Veiem-ho.

Sigui $E = C(0, 1)$ el cercle unitat a $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Usant la parametrització $z = x + iy = e^{i\theta}$ on $0 \leq \theta < 2\pi$, prenem $d\sigma = \frac{d\theta}{2\pi}$. Siguin $\zeta_j = e^{i\theta_j} = \cos(\theta_j) + i \sin(\theta_j)$, $1 \leq j \leq n$ les arrels n -èsimes de la unitat, es veu que

$$\begin{aligned} \int_{C(0,1)} z^k d\sigma &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos(k\theta) + i \sin(k\theta)) d\theta \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \zeta_j^k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\cos(k\theta_j) + i \sin(k\theta_j)) \quad \text{per } k = 0, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (1.3)$$

D'això, dedim que la fórmula de quadratura de Txeixov

$$\int_{C(0,1)} f(x, y) d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(\cos \theta_j, \sin \theta_j) \quad (1.4)$$

és exacta per a tots els polinomis de grau $\leq n - 1$. En efecte, per aquests polinomis, $f(\cos \theta, \sin \theta)$ es pot escriure com un polinomi trigonometric de grau $n - 1$.

En efecte, si

$$f(x, y) = \sum_{i+j \leq n-1} a_{ij} x^i y^j,$$

com que tenim $\cos \theta = \frac{z+\bar{z}}{2}$ i $\sin \theta = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, aleshores $f(\cos \theta, \sin \theta)$ és un polinomi en z i \bar{z} de grau $\leq n - 1$. Com que la igualtat a (1.3) també és certa amb conjugats, tenim (1.4). No és difícil veure que amb menys nodes no tenim integració ja que sempre podríem trobar un polinomi que s'anul·la a tots els nodes, si el seu nombre és més petit que la dimensió de l'espai de polinomis.

L'objectiu d'aquest treball és demostrar el teorema de Bernstein [2], que diu que el resultat equivalent a l'interval $[-1, 1]$ no és cert.

Teorema (de Bernstein). *Per $n \geq 10$ no existeix cap fórmula del tipus*

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$$

amb els nodes $x_k \in [-1, 1]$, que sigui exacta, és a dir, amb igualtat, per a tots els polinomis f de grau $\leq n$.

De la demostració d'aquest resultat veurem que es deriva una condició necessària sobre el nombre de nodes per integrar exactament. En efecte, l'any 1938, Bernstein va demostrar [1] el següent resultat.

Teorema A. *Si la fórmula*

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n f(x_j),$$

és exacta per a tots els polinomis de grau $\leq 2m - 1$, aleshores existeix $C > 0$ tal que $n > C m^2$, on n és el nombre de nodes.

De fet, Bernstein també va provar [3] que aquesta condició és suficient i va trobar un conjunt de nodes de cardinal d'ordre m^2 que integren tots els polinomis de grau $\leq 2m - 1$.

Teorema B. *Sigui m un enter positiu i sigui M un enter parell tal que*

$$M \geq N_0(m) = 2 \left[2\sqrt{2}(m+1)(m+4) + 1 \right]$$

on $[\]$ denota la part entera. Aleshores existeixen punts $x_k \in (-1, 1)$, $x_1 > x_2 > \dots > x_{2m-1}$, on $x_{2m-k} = -x_k$ i existeixen enters positius $M_k = M_{2m-k}$ amb $\sum_{k=1}^{2m-1} M_k = M$

tal que

$$\int_{-1}^1 f(x) \frac{1}{2} dx = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{2m-1} M_k f(x_k)$$

per a tots els polinomis $f(x)$ de grau $\leq 2m - 1$.

Veiem doncs que en aquesta fórmula de quadratura els nodes es repeteixen i que només és d'ordre m^2 . Tots aquests treballs de Bernstein es van publicar en rus, així que hem seguit com a referències el llibre de Krylov [6] i un article de Korevaar [5].

Estructura de la Memòria

Al capítol 2 farem un recordatori de conceptes i propietats dels polinomis ortogonals, veient-ne un parell d'exemples i fent especial atenció a resultats que ens seran útils al treball. En particular, demostrarem un resultat sobre fórmules de quadratura amb polinomis ortogonals generals.

Al capítol 3 començarem l'estudi de les fórmules de quadratura de Txebixov. Com que el que volem és trobar els nodes x_1, \dots, x_n de la fórmula de quadratura, considerarem un polinomi $\omega(x)$ que tingui per arrels aquestes nodes i, imposant un seguit de condicions, construirem un sistema d'equacions que tingui per incògnites x_1, \dots, x_n . Com que el sistema resultant no serà lineal, recorrerem a les equacions de Newton que, junt amb la teoria dels polinomis simètrics elementals, ens ajudaran a resoldre'l. Les seves solucions seran els coeficients del polinomi $\omega(x)$, i amb això ja podrem buscar les arrels d'aquest polinomi, és a dir, els punts x_1, \dots, x_n de la fórmula de quadratura.

Com exemple, resoldrem els casos amb alguns n petits i després graficarem els punts a l'interval $[-1, 1]$ i veurem que compleixen les condicions plantejades.

Al capítol 4 demostrarem el teorema de Bernstein. Per això, veurem quatre lemes que seran clau a la demostració i, posteriorment, en farem unes observacions amb casos concrets que s'usen a la demostració. També provarem el Teorema A que hem enunciat anteriorment, que és un resultat immediat que es pot deduir de la prova del teorema de Bernstein.

Finalment, al capítol 5 veurem uns resultats de Kuzmin sobre la localització dels nodes quan en tenim un nombre gran. La fórmula de l'enunciat del teorema de Bernstein no es pot construir amb punts reals, però sempre hi ha solució a \mathbb{C} i aquests resultats de Kuzmin ens diuen com és la distribució d'aquests punts en el pla complex.

2 Polinomis ortogonals

En aquest capítol seguirem la referència [9] i introduïrem els polinomis ortogonals respecte una funció general de pes. També donarem exemples concrets de polinomis ortogonals i veurem algunes de les seves propietats més rellevants, en especial l'Exemple 2.9. Finalment, estudiarem propietats de les fórmules de quadratura amb nodes als zeros dels polinomis ortogonals.

2.1 Definicions i propietats bàsiques

Definició 2.1. *Sigui $\omega : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ una funció mesurable Lebesgue, el suport de ω , $\text{sup}(\omega)$, és la clausura del conjunt $\{x \in \mathbb{R} : \omega(x) \neq 0\}$.*

Definició 2.2. *Diem que ω és una funció pes si $\text{sup}(\omega)$ té mesura de Lebesgue positiva i, a més,*

$$\int |t|^n \omega(t) dt < \infty, \quad \text{per } n = 0, 1, 2, \dots$$

Això vol dir que tots els moments són finits.

A partir d'ara, ω denota una funció pes fixada.

Lema 2.3. *Sigui P un polinomi qualsevol tal que és no negatiu en $\text{sup}(\omega)$ i*

$$\int P(x) \omega(x) dx = 0,$$

aleshores $P(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Demostració. Com que $P(x) \omega(x) \geq 0$ gairebé per a tot, la hipòtesi implica que $P(x) \omega(x) = 0$ gairebé per a tot. Com que el conjunt $\{x \in \mathbb{R} : \omega(x) = 0\}$ és necessàriament un conjunt infinit, això implica que $P(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$. \square

Usant aquest lema, es veu que l'expressió

$$\langle P_1, P_2 \rangle := \int P_1(t) P_2(t) \omega(t) dt \quad P_1, P_2 \text{ polinomis}$$

defineix un producte intern en la classe de tots els polinomis. Per tant, els polinomis ortogonals poden construir-se usant el procés d'ortogonalització de Gram-Schmidt. Veiem-ho amb el següent teorema (teorema 2.5).

Denotem com a Π_n el conjunt de polinomis en \mathbb{R} de grau $\leq n$.

Definició 2.4. Diem que dos polinomis $p(x)$ i $q(x)$ són ortogonals en el segment $[a, b]$ respecte la funció pes $\omega(x)$ si el producte $p(x)q(x)\omega(x)$ és integrable en $[a, b]$ i

$$\int_a^b p(x) q(x) \omega(x) dx = 0.$$

Teorema 2.5. Existeix un únic sistema de polinomis ortogonals

$$p_n(x) := p_n(\omega, x) := \gamma_n x^n + \dots \in \Pi_n, \quad (2.1)$$

on $\gamma_n := \gamma_n(\omega) > 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ tal que

$$\int p_n(x) p_m(x) \omega(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m. \end{cases} \quad (2.2)$$

Demostració. Escrivim

$$p_0(x) := \left(\int \omega(t) dt \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Sabem que tenim definits polinomis p_0, \dots, p_k que satisfan (2.1) i (2.2) per un enter $k \geq 0$ i considerem

$$\begin{aligned} v_{k+1}(x) &:= x^{k+1}, \\ u_{k+1} &= v_{k+1} - \sum_{j=0}^k \langle v_{k+1}, p_j \rangle p_j, \\ p_{k+1} &:= \langle u_{k+1}, u_{k+1} \rangle^{-\frac{1}{2}} u_{k+1}. \end{aligned}$$

Com que el sistema $\{x^n\}$ és linealment independent, $u_k \neq 0 \forall k$. Per tant, el lema 2.3. mostra que $\langle u_k, u_k \rangle > 0$ per a tot enter $k \geq 0$. D'aquesta manera, el procés inductiu defineix una seqüència infinita de polinomis $\{p_k\}$ que verifiquen (2.1) i (2.2).

La unicitat del sistema és evident pel fet que la dimensió del complement ortogonal de Π_n en Π_{n+1} és 1. Veiem-ho. Sigui $\{p_n^* = \gamma_n^* x^n + \dots \in \Pi_n, \gamma_n^* > 0\}_{n=0}^\infty$ un altre sistema de polinomis que satisfan les condicions de l'enunciat. Observem que tant $\{p_k\}_{k=0}^{n-1}$ com $\{p_k^*\}_{k=0}^{n-1}$ són bases de Π_{n-1} per a cada enter $n \geq 1$ i, per tant, (2.2) implica que per qualsevol polinomi $P \in \Pi_{n-1}$

$$\int P(x) p_n(x) \omega(x) dx = \int P(x) p_n^*(x) \omega(x) dx. \quad (2.3)$$

Per no carregar la notació posarem ω enlloc de $\omega(x)$ i igual amb p_n i p_n^* .

Com $\gamma_n^{-1} p_n - \gamma_n^{*-1} p_n^* \in \Pi_{n-1}$, això ens dóna

$$\int \left[\gamma_n^{-1} p_n - \gamma_n^{*-1} p_n^* \right] p_n \omega dx = 0,$$

$$\gamma_n^{-1} \int p_n^2 \omega dx - \gamma_n^{*-1} \int p_n^* p_n \omega dx = 0,$$

$$\gamma_n^{-1} - \gamma_n^{*-1} \int p_n^* p_n \omega dx = 0,$$

i, per tant

$$\int p_n^* p_n \omega dx = \frac{\gamma_n^*}{\gamma_n}.$$

Ara, intercanviant p_n per p_n^* ens queda

$$\int [\gamma_n^{-1} p_n - \gamma_n^{*-1} p_n^*] p_n^* \omega dx = 0,$$

i fent els càlculs de manera anàloga tenim

$$\int p_n^* p_n \omega dx = \frac{\gamma_n}{\gamma_n^*}.$$

Com que γ_n i γ_n^* són ambdós positius, aleshores $\gamma_n = \gamma_n^*$ i

$$\int p_n^* p_n \omega dx = 1.$$

Finalment, tenim

$$\int [p_n - p_n^*]^2 \omega dx = \int p_n^2 \omega dx + \int p_n^{*2} \omega dx - 2 \int p_n p_n^* \omega dx = 0,$$

per ser les dues primeres integrals igual a 1 complint (2.2). Això junt amb el lema 2.3. implica que $p_n^* = p_n$. □

2.2 Exemples

2.2.1 Polinomis de Txebixov

Definim els polinomis de Txebixov a l'interval $[-1, 1]$ mitjançant la fórmula

$$T_n(\cos t) = \cos(nt), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Veiem que $T_n(\cos t)$ és, en efecte, un polinomi en $\cos t$ i que té grau n .

Prenent l'identitat trigonomètrica del cosinus de la suma d'angles

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

amb $\alpha = (n-1)t$, $\beta = t$ i $\alpha = (n-1)t$, $\beta = -t$ tenim

$$\cos((n-1)t + t) = \cos((n-1)t) \cos t - \sin((n-1)t) \sin t$$

$$\cos((n-1)t - t) = \cos((n-1)t) \cos t + \sin((n-1)t) \sin t$$

i, sumant les dues equacions, obtenim

$$\cos(nt) = 2 \cos t \cos((n-1)t) - \cos((n-2)t).$$

Per $n = 2$ tenim $\cos(2t) = 2 \cos t \cos t - \cos 0 = 2 \cos^2 t - 1$.

Per $n = 3$ tenim $\cos(3t) = 2 \cos t \cos(2t) - \cos t = 4 \cos^3 t - 3 \cos t$.

Així doncs, $\cos(2t)$ és un polinomi en $\cos t$ de grau 2 i $\cos(3t)$ és un polinomi en $\cos t$ de grau 3. Anem a veure, per inducció, que $\cos(nt)$ és un polinomi de grau n .

Suposem que $\cos((n-1)t)$ i $\cos((n-2)t)$ són polinomis en $\cos t$ de graus $n-1$ i $n-2$, respectivament. Aleshores,

$$\cos(nt) = 2 \cos t \cos((n-1)t) - \cos((n-2)t)$$

és clarament un polinomi de grau n en $\cos t$.

Proposició 2.6. *Si $T_n(\cos \theta)$ el polinomi de Tchebixov n -èsim, aleshores es compleix*

$$\int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \pi & \text{si } n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n = m \neq 0 \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

Demostració. Fent el canvi de variable $x = \cos \theta$, tenim $dx = -\sin \theta$ i els límits d'integració seran, per $x = 1$, $\theta = 0$ i per $x = -1$, $\theta = \pi$.

$$\int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta$$

- si $n = m = 0$, tenim $\cos 0 = 1$ llavors

$$\int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta = \int_0^\pi d\theta = \theta \Big|_0^\pi = \pi$$

- si $n = m \neq 0$, fent servir la identitat trigonomètrica $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ tenim

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta &= \int_0^\pi \cos^2(n\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta + \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos(2n\theta) d\theta \\ &= \frac{\theta}{2} \Big|_0^\pi + \frac{1}{2} \frac{\sin(2n\theta)}{2n} \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

ja que $\sin 0 = 0$ i $\sin(2\pi n) = 0 \forall n$ natural.

- si $n \neq m$, usant la fórmula trigonomètrica $\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$ tenim

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((n+m)\theta) d\theta + \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((n-m)\theta) d\theta \\ &= \frac{1 - \sin((n+m)\theta)}{2(n+m)} \Big|_0^\pi + \frac{1 - \sin((n-m)\theta)}{2(n-m)} \Big|_0^\pi = 0 \end{aligned}$$

ja que $\sin 0 = 0$ i $\sin(k\pi) = 0 \forall n \in \mathbb{Z}$, i en el nostre cas tenim que tant $n+m$ com $n-m$ pertanyen a \mathbb{Z} . En particular, els denominadors no s'anul·len perquè estem en el cas $n \neq m$ i $n, m > 0$.

□

Amb això, tenim que el sistema

$$\left\{ \sqrt{\frac{1}{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_1(x), \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_2(x), \dots \right\}$$

és un sistema de polinomis ortonormals respecte la funció pes

$$\omega(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

2.2.2 Polinomis de Legendre

Els polinomis de Legendre els podem definir usant la fórmula de Rodrigues:

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \{(1-x^2)^n\} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

Es pot veure fàcilment que $P_0(x) = 1$ i $P_1(x) = x$.

Ara, usant la regla de Leibnitz per derivació, veiem que

$$\left(\frac{d}{dx} \right)^k \{(1-x^2)^n\} \Big|_{x=\pm 1} = 0 \quad \text{si } k < n.$$

Si f és una funció contínua i diferenciable n vegades en $[-1, 1]$ i integrem per parts n vegades, tenim

$$\int_{-1}^1 P_n(x) f(x) dx = (2^n n!)^{-1} \int_{-1}^1 f^{(n)}(x) (1-x^2)^n dx. \quad (2.5)$$

En particular, si $f \in \Pi_{n-1}$, llavors $f^{(n)}(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$ i, per tant

$$\int_{-1}^1 P_n(x) f(x) dx = 0 \quad \text{si } f \in \Pi_{n-1}. \quad (2.6)$$

Usant integració per parts, tenim

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx = \int_{-1}^1 (1-x)^n (1+x)^n dx = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

De la fórmula (2.4), $P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n + \dots \in \Pi_n$ i, usant (2.5) tenim que

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}. \quad (2.7)$$

Els polinomis de Legendre, sovint, també es defineixen com les solucions polinomials de les equacions diferencials de Legendre

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d}{dx} P_n(x) \right] + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

2.3 Interpolació i quadratures

En integració numèrica, recordem que es busca aproximar una integral del tipus $\int f(x) \omega(x) dx$ per una suma finita de la forma $\sum_{k=1}^n \lambda_{k,n} f(x_{k,n})$. Idealment, es vol que tots els $\lambda_{k,n}$ siguin positius i que l'equació

$$\int f(x) \omega(x) dx = \sum_{k=1}^n \lambda_{k,n} f(x_{k,n}), \quad (2.8)$$

sigui certa sempre que f sigui un polinomi de grau el més alt possible.

El sumatori de (2.8) depen de $2n$ paràmetres: $\lambda_{k,1}, \dots, \lambda_{k,n}, x_{k,1}, \dots, x_{k,n}$. Per tant, s'espera que el grau més alt, d , per al qual la fórmula (2.8) sigui vàlida per tots els polinomis en Π_d sigui $d = 2n - 1$.

Per no carregar la notació, quan estudiem aquesta fórmula serà per un grau n fixat, per tant, escriurem λ_k i x_k obviant, quan sigui prou clar, el subíndex n .

Teorema 2.7. *Per cada enter $n \geq 1$, p_n té exactament n zeros simples situats a l'interval més petit contenint $\text{sup}(\omega)$, on p_n denota el polinomi definit al teorema 2.5.*

Demostració. Siguin $a := \min \text{sup}(\omega)$ i $b := \max \text{sup}(\omega)$. Siguin x_1, \dots, x_m els zeros de p_n en $[a, b]$ d'ordre senar i diferents entre ells.

Si $m \leq n - 1$, llavors $P(x) := \prod_{k=1}^m (x - x_k)$ és un polinomi, com a molt, de grau $n - 1$ i $p_n(x) P(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$. Aleshores, el lema 2.3. implica

$$\int P(x) p_n(x) \omega(x) dx > 0,$$

i això contraduï el fet que p_n és ortogonal a Π_{n-1} . Per tant, $m = n$ i necessàriament x_1, \dots, x_n són els únics zeros de p_n i, com són diferents 2 a 2, cada zero és simple. \square

Denotem els zeros de p_n , els polinomis donats al teorema 2.5., per ξ_1, \dots, ξ_n i assumim que $\xi_1 < \dots < \xi_n$, i.e., el zero més gran és ξ_n . Assumim també que $\xi_0 = -\infty$ i $\xi_{n+1} = \infty$. Presentarem ara una fórmula de quadratura basada en la fórmula d'interpolació de Lagrange (2.10) en els zeros de p_n .

Teorema 2.8. *Sigui $n \geq 1$ un enter. Definim*

$$l_{k,n}(x) := \frac{p_n(x)}{p_n'(\xi_k)(x - \xi_k)}. \quad (2.9)$$

Aleshores, per a tot $P \in \Pi_{n-1}$

$$P(x) = \sum_{k=1}^n P(\xi_k) l_k(x), \quad (2.10)$$

i per a tot $P \in \Pi_{2n-1}$

$$\int P(x) \omega(x) dx = \sum_{k=1}^n P(\xi_k) \lambda_{k,n}, \quad (2.11)$$

on definim

$$\lambda_{k,n} = \int l_k(x) \omega(x) dx = \frac{1}{\sum_{j=0}^{n-1} p_j^2(\xi_k)}.$$

Demostració. Observem que

$$l_{k,n}(x) = \frac{(x - \xi_1) \cdots (x - \xi_{k-1})(x - \xi_{k+1}) \cdots (x - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_1) \cdots (\xi_k - \xi_{k-1})(\xi_k - \xi_{k+1}) \cdots (\xi_k - \xi_n)},$$

és clarament un polinomi de grau $n - 1$ ($l_{k,n} \in \Pi_{n-1}$) i

$$l_{k,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j. \end{cases} \quad (2.12)$$

Si $P \in \Pi_{n-1}$, considerem el polinomi $P(x) - \sum_{k=1}^n P(\xi_k) l_{k,n}(x) \in \Pi_{n-1}$. Tenint en compte (2.12), aquest polinomi s'anul·la en els punts ξ_1, \dots, ξ_n . Per tant, tenim provada la igualtat

$$P(x) = \sum_{k=1}^n P(\xi_k) l_{k,n}(x)$$

i, en particular, $\{l_{1,n}, \dots, l_{n,n}\}$ és una base de Π_{n-1} .

Ara, integrant aquest resultat amb una funció pes $\omega(x)$ obtenim

$$\begin{aligned} \int P(x) \omega(x) dx &= \int \sum_{k=1}^n P(\xi_k) l_{k,n}(x) \omega(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^n P(\xi_k) \int l_{k,n}(x) \omega(x) dx = \sum_{k=1}^n P(\xi_k) \lambda_{k,n} \quad \forall P \in \Pi_{n-1}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Ara veurem que (2.13) es compleix per a tot polinomi $P \in \Pi_{2n-1}$. En efecte, si $P \in \Pi_{2n-1}$, aleshores existeixen polinomis Q i $R \in \Pi_{n-1}$ tal que

$$P(x) = Q(x) p_n(x) + R(x).$$

Llavors,

$$\begin{aligned} \int P(x) \omega(x) dx &= \int Q(x) p_n(x) \omega(x) dx + \int R(x) \omega(x) dx \\ &= \int R(x) \omega(x) dx = \sum_{k=1}^n \lambda_{k,n} R(\xi_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_{k,n} [R(\xi_k) + Q(\xi_k) p_n(\xi_k)] \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_{k,n} P(\xi_k) \end{aligned}$$

on a la segona igualtat, la primera integral de la suma s'anul·la per ser Q un polinomi de grau $n - 1$ i p_n un polinomi ortogonal de grau n .

Com $l_{k,n}^2$ té grau $2n - 2$, en particular, $l_{k,n}^2 \in \Pi_{2n-1}$ i tenim

$$\int l_{k,n}^2(x) \omega(x) dx = \sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} l_{k,n}^2(\xi_j) = \lambda_{k,n} \quad (2.14)$$

Per tant, cada $\lambda_{k,n} > 0$.

Si $0 \leq j \leq n - 1$ aleshores la fórmula (2.13) amb $P(x) = l_{k,n}(x) p_j(x) \in \Pi_{2n-2}$ ens dona

$$\int l_{k,n}(x) p_j(x) \omega(x) dx = \sum_{\nu=1}^n l_{k,n}(\xi_\nu) p_j(\xi_\nu) \lambda_{\nu,n} = \lambda_{k,n} p_j(\xi_k)$$

Per tant,

$$\begin{aligned} l_{k,n}(x) &= \sum_{j=0}^{n-1} \left(\int l_{k,n}(t) p_j(t) \omega(t) dt \right) p_j(x) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{k,n} p_j(\xi_k) p_j(x) = \lambda_{k,n} \sum_{j=0}^{n-1} p_j(\xi_k) p_j(x) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Usant les propietats d'ortogonalitat del teorema 2.5.

$$\int p_n(x) p_m(x) \omega(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

junt amb les igualtats (2.14) i (2.15), tenim

$$\begin{aligned}\lambda_{k,n} &= \int l_{k,n}^2(x) \omega(x) dx = \lambda_{k,n}^2 \sum_{\mu,\nu=0}^{n-1} \left(\int p_\mu(x) p_\nu(x) \omega(x) dx \right) p_\mu(\xi_k) p_\nu(\xi_k) \\ &= \lambda_{k,n}^2 \sum_{j=0}^n p_j^2(\xi_k)\end{aligned}$$

i aïllant obtenim

$$\lambda_{k,n} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{n-1} p_j^2(x)}$$

□

Exemple 2.9 (Fórmula de quadratura de Gauss). Sabem que si considerem la fórmula de quadratura (2.11) del teorema anterior a l'interval $[-1, 1]$ i amb funció pes $\omega(x) = 1$, obtenim els polinomis de Legendre $P_n(x)$

$$\int_{-1}^1 P_n(x) dx \approx \sum_{k=1}^n P_n(\xi_k) \lambda_{k,n}.$$

Al llibre [6, 7.2.5.] es demostra que

$$\lambda_{k,n} = \frac{2}{(1 - \xi_k^2) P_n'(\xi_k)^2}, \quad (2.16)$$

on recordem que els ξ_k són els zeros del polinomi de Legendre n -èsim.

3 Polinomis simètrics i fórmules de quadratura

En aquest capítol veurem com són els polinomis simètrics elementals i la relació que tenen amb les arrels d'un polinomi. Això ens servirà per aïllar els coeficients d'un polinomi a través de les equacions de Newton i així poder trobar les seves arrels, que seran els nodes de la fórmula de quadratura.

3.1 Polinomis simètrics

Definició 3.1. *Un polinomi simètric és un polinomi $P(X_1, \dots, X_n)$ en n variables tal que si intercanviem qualssevol de les seves variables, el polinomi segueix sent el mateix. És a dir, per a qualsevol permutació σ del conjunt $\{1, \dots, n\}$ es té que*

$$P(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) = P(X_1, \dots, X_n).$$

Els polinomis simètrics sorgeixen en l'estudi de la relació entre les arrels d'un polinomi en una variable i els seus coeficients, ja que els coeficients poden ser donats per expressions polinòmiques en les arrels. Ara veurem un tipus de polinomis simètrics i en destacarem alguns resultats que ens seran interessants per a la següent secció.

Definició 3.2. *Anomenem polinomi simètric elemental de grau d en n variables al polinomi simètric format per la suma de tots els productes diferents de d variables diferents, amb $d \leq n$*

$$e_d(X_1, \dots, X_n) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_d \leq n} X_{j_1} \cdots X_{j_d} \quad (3.1)$$

Notem que fixat un $n \geq 1$ enter, per cada enter no negatiu $d \leq n$ existeix un polinomi simètric elemental de grau d en n variables. De fet, aquest polinomi és únic.

Si $d > n$, aleshores $e_d(X_1, \dots, X_n) = 0$.

Exemples 3.3. Veiem com són els polinomis simètrics elementals en n variables de grau $k = 1, \dots, n$ per $n = 1, 2, 3, 4$.

- per $n = 1$

$$e_1(X_1) = X_1.$$

- per $n = 2$

$$e_1(X_1, X_2) = X_1 + X_2, \quad e_2(X_1, X_2) = X_1 X_2.$$

- per $n = 3$

$$e_1(X_1, X_2, X_3) = X_1 + X_2 + X_3,$$

$$e_2(X_1, X_2, X_3) = X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3,$$

$$e_3(X_1, X_2, X_3) = X_1X_2X_3.$$

- per $n = 4$

$$e_1(X_1, X_2, X_3, X_4) = X_1 + X_2 + X_3 + X_4,$$

$$e_2(X_1, X_2, X_3, X_4) = X_1X_2 + X_1X_3 + X_1X_4 + X_2X_3 + X_2X_4 + X_3X_4,$$

$$e_3(X_1, X_2, X_3, X_4) = X_1X_2X_3 + X_1X_2X_4 + X_1X_3X_4 + X_2X_3X_4,$$

$$e_4(X_1, X_2, X_3, X_4) = X_1X_2X_3X_4.$$

Aquests polinomis són interessants perquè apareixen en la factorització de polinomis mòncics. Sigui $q(x)$ un polinomi mònic de grau n amb arrels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, aleshores tenim la identitat següent:

$$\begin{aligned} q(x) &= \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i) \\ &= x^n - e_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n)x^{n-1} + e_2(\alpha_1, \dots, \alpha_n)x^{n-2} + \dots + (-1)^n e_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Un resultat important és el que ens diu que qualsevol polinomi simètric es pot expressar en termes de polinomis simètrics elementals. La demostració es pot trobar a [8, Theorem 6.1.].

3.2 Fórmules de quadratura

Sabem que les fórmules de quadratura amb coeficients iguals o fórmules de quadratura de Txeboxov són de la forma:

$$\int_a^b f(x) dx \approx c_n \sum_{k=1}^n f(x_k).$$

Ens centrem en el cas on el segment d'integració és $[-1, 1]$, és a dir:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx c_n \sum_{k=1}^n f(x_k). \tag{3.3}$$

Per trobar els nodes x_k seguirem ara una idea de Txebixov tal com es presenta a [6, Cap.10].

El coeficient c_n i els punts x_k s'han de triar per tal que la fórmula (3.3) sigui exacta per a tots els polinomis de grau $\leq n$. Primer, determinem el coeficient c_n imposant que sigui exacta per $f(x) \equiv 1$. D'aquesta manera, tenim

$$\int_{-1}^1 1 dx = c_n \sum_{i=1}^n 1, \quad (3.4)$$

i com $\int_{-1}^1 1 dx = \frac{1}{2}$ i $\sum_{i=1}^n 1 = n$, obtenim $c_n = \frac{2}{n}$.

Tenint en compte que

$$\int_{-1}^1 x^k dx = \frac{1 - (-1)^{k+1}}{k+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ senar,} \\ \frac{2}{k+1} & \text{si } k \text{ parell,} \end{cases}$$

si imposem que (3.3) sigui exacta pels monòmis $f(x) = x, x^2, \dots, x^n$, tenim el sistema d'equacions següent:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_n &= 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 &= \frac{n}{3} \\ x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 &= 0 \\ x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_n^4 &= \frac{n}{5} \\ &\dots \\ x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n &= \frac{n}{2} \left[\frac{1 - (-1)^{n+1}}{n+1} \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Clarament és un sistema no lineal, per tant, els mètodes habituals per resoldre sistemes d'equacions lineals no ens serveixen. Anem a veure, però, que es pot resoldre utilitzant el següent argument.

3.2.1 Equacions de Newton

Construïm el polinomi $\omega(x)$ de manera que les seves arrels siguin les incògnites del sistema (3.5), és a dir, els punts x_1, \dots, x_n :

$$\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n),$$

i el reescrivim de manera

$$\omega(x) = x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \dots + A_n.$$

Llavors, els coeficients A_1, \dots, A_n els podem relacionar amb els polinomis simètrics elementals mitjançant la identitat (3.2)

$$\begin{aligned} A_1 &= -e_1(x_1, \dots, x_n), \\ A_2 &= e_2(x_1, \dots, x_n), \\ &\dots \\ A_{n-1} &= (-1)^{n-1}e_{n-1}(x_1, \dots, x_n), \\ A_n &= (-1)^ne_n(x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Per trobar aquests coeficients A_1, \dots, A_n , usarem el següent raonament. Com que $\omega(x) = x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \dots + A_n$, la seva derivada és

$$\omega'(x) = nx^{n-1} + A_1(n-1)x^{n-2} + A_2(n-2)x^{n-3} + \dots + A_{n-1},$$

i tenim

$$\frac{\omega'(x)}{\omega(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x - x_i}.$$

Si $|x| > |x_i|$, usant $|\frac{x_i}{x}| < 1$ tenim

$$\frac{1}{x - x_i} = \frac{1}{x(1 - \frac{x_i}{x})} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x_i}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_i^k}{x^{k+1}}.$$

Per tant, si $|x| > |x_i| \forall i = 1, \dots, n$ obtenim la següent expressió:

$$\frac{\omega'(x)}{\omega(x)} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_i^k}{x^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^k}{x^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k}{x^{k+1}},$$

on $s_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k$.

Després, multiplicant a ambdós costats per $\omega(x)$, tenim

$$\omega'(x) = \omega(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k}{x^{k+1}},$$

i igualant coeficients, obtindrem un sistema lineal d'equacions anomenades equacions de Newton

$$nx^{n-1} + A_1(n-1)x^{n-2} + \dots + A_{n-1} = (x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s_k}{x^{k+1}}$$

Així doncs, tenim el sistema d'equacions següent

$$\begin{aligned} s_1 + A_1 &= 0 \\ s_2 + A_1 s_1 + 2A_2 &= 0 \\ \dots \\ s_n + A_1 s_{n-1} + A_2 s_{n-2} + \dots + nA_n &= 0 \end{aligned}$$

De fet, com que sabem el valor de s_k per a tot $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, el nostre sistema es simplifica i ens queda de la següent manera:

$$\begin{aligned} A_1 &= 0 \\ \frac{n}{3} + 2A_2 &= 0 \\ A_3 &= 0 \\ \frac{n}{5} + \frac{n}{3}A_2 + 4A_4 &= 0 \\ A_5 &= 0 \\ \frac{n}{7} + \frac{n}{5}A_2 + \frac{n}{3}A_4 + 6A_6 &= 0 \\ A_7 &= 0 \\ \dots \end{aligned} \tag{3.7}$$

Així doncs, quan el resollem tenim els coeficients de $\omega(x)$ de forma explícita i així podem trobar les seves arrels x_1, \dots, x_n i construir la fórmula (3.3). Per tal que la fórmula (3.3) ens sigui útil, cal que tots els x_k siguin reals, diferents dos a dos i que pertanyin a l'interval $[-1, 1]$. La possibilitat de construir aquesta fórmula, que és exacta per tots els polinomis de grau $\leq n$, està determinada pel fet que les arrels de $\omega(x)$ satisfacin o no els requisits anteriors on els coeficients A_k de $\omega(x)$ són els que hem trobat amb les fórmules de Newton. Del sistema (3.7) deduïm que tots els A_k amb k senar són nuls. Per tant, ens queda el polinomi

$$\omega(x) = x^n + A_2 x^{n-2} + A_4 x^{n-4} + \dots \tag{3.8}$$

Les arrels de $\omega(x)$ són els punts de la fórmula (3.3) i estan situades de forma simètrica a l'interval $[-1, 1]$ respecte l'origen.

- si n és senar, aleshores una de les arrels és $x = 0$.

- si n és parell, aleshores $n = 2m$ i els punts x_k satisfan les equacions

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= 0 \\ &\vdots \\ x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n &= \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

Com $n + 1 = 2m + 1$ és senar i els punts x_k estan situats simètricament respecte $x = 0$, aleshores aquests punts també satisfan

$$x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + \cdots + x_n^{n+1} = 0.$$

En aquest cas, la fórmula

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx c_n \sum_{k=1}^n f(x_k)$$

serà exacta per a un grau superior, és a dir, serà exacta per a tots els polinomis de grau $\leq n + 1$.

3.2.2 Alguns casos concrets

Per mostrar com es poden resoldre aquestes equacions, farem els casos amb $n = 1, 2, 3, 4$. Resolent el sistema lineal (3.7), tenim els coeficients del polinomi $\omega(x)$ (3.8) i amb això podem obtenir les seves arrels, que són els nodes de la fórmula de quadratura de Txeixov. Per tenir una idea visual d'on estan situats aquests punts, mostrarem els gràfics dels nodes de Txeixov amb 2, 3, 4, 5, 6, 7 i 9 punts. Aquests gràfics han estat fets resolent el sistema (3.7) i buscant les arrels del polinomi corresponent amb el programa Octave.

- Per $n = 1$ tenim $c_n = 2$ i $\omega(x) = x$, per tant

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx 2f(0).$$

- Per $n = 2$ tenim $c_n = 1$ i el sistema d'equacions per A_1 i A_2 és

$$\begin{aligned} A_1 &= 0, \\ \frac{2}{3} + 2A_2 &= 0, \end{aligned}$$

d'on obtenim que $A_1 = 0$ i $A_2 = \frac{1}{3}$. Per tant,

$$\omega(x) = x^2 - \frac{1}{3},$$

i aquest polinomi té arrels

$$x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Així doncs, la fórmula que ens queda és

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

- Per $n = 3$ tenim $c_n = \frac{2}{3}$ i el sistema d'equacions per A_1, A_2 i A_3 és

$$\begin{aligned} A_1 &= 0, \\ \frac{2}{3} + 2A_2 &= 0, \\ A_3 &= 0, \end{aligned}$$

d'on obtenim que $A_1 = A_3 = 0$ i $A_2 = -\frac{1}{2}$. Per tant,

$$\omega(x) = x^3 - \frac{1}{2}x,$$

i aquest polinomi té arrels

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Així doncs, la fórmula que ens queda és

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f(0) + f\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) + f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

- Per $n = 4$ tenim $c_n = \frac{1}{2}$ i el sistema d'equacions per A_1, A_2, A_3 i A_4 és

$$\begin{aligned} A_1 &= 0, \\ \frac{2}{3} + 2A_2 &= 0, \\ A_3 &= 0, \\ \frac{4}{5} + \frac{4}{3}A_2 + 4A_4 &= 0, \end{aligned}$$

d'on obtenim que $A_1 = A_3 = 0$, $A_2 = -\frac{4}{45}$ i $A_4 = \frac{1}{45}$. Per tant,

$$\omega(x) = x^4 - \frac{4}{45}x^2 + \frac{1}{45},$$

i aquest polinomi té arrels

$$x_1 = -x_2 = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{15}}, \quad x_3 = -x_4 = \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{15}}.$$

Així doncs, la fórmula que ens queda és

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\right) + f\left(\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{15}}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{15}}\right).$$

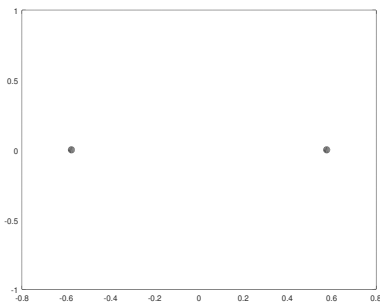


Figura 1: Nodes de la quadratura de Tchebixov amb n=2

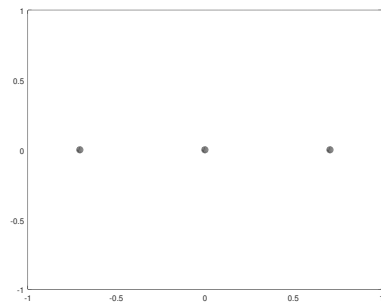


Figura 2: Nodes de la quadratura de Tchebixov amb n=3

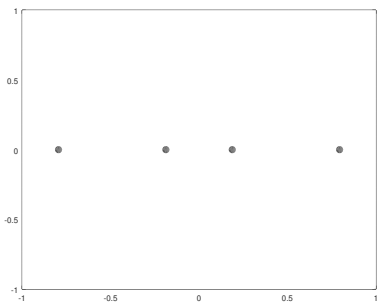


Figura 3: Nodes de la quadratura de Tchebixov amb n=4

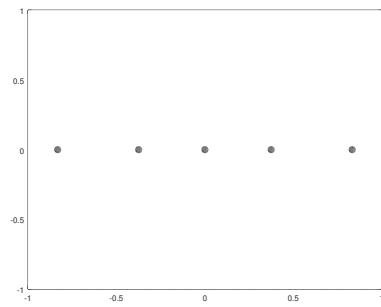


Figura 4: Nodes de la quadratura de Tchebixov amb n=5

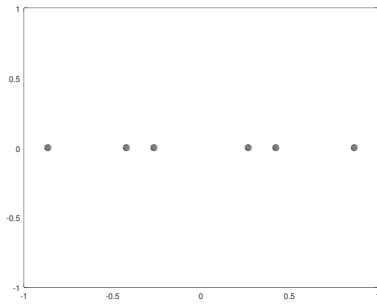


Figura 5: Nodes de la quadratura de Tchebixov amb $n=6$

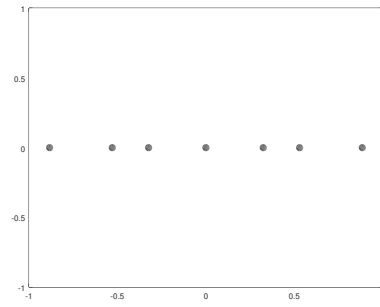


Figura 6: Nodes de la quadratura de Tchebixov amb $n=7$

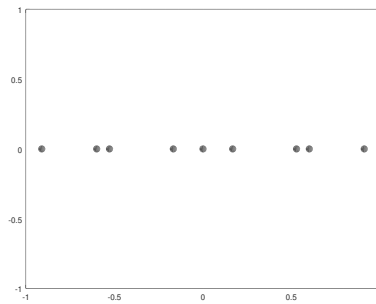


Figura 7: Nodes de la quadratura de Tchebixov amb $n=9$

Com bé havíem dit abans, podem veure que aquests punts estan situats de forma simètrica respecte l'origen i que pertanyen a l'interval $[-1, 1]$.

El cas $n = 8$ no l'hem mostrat perquè quan construïm el polinomi $\omega(x)$ i busquem les seves arrels, en tenim sis de complexes i, per tant, és impossible construir la fórmula de Tchebixov (3.3) amb tots els nodes reals (veure Figura 8).

De fet, l'any 1874 Tchebixov va trobar els nodes per a $n = 1, \dots, 7$ i Radau, l'any 1880 va afegir el cas $n = 9$ i va observar que per $n = 8$ els nodes no eren reals.

4 El Teorema de Bernstein

En aquest capítol presentarem el teorema de Bernstein amb tots els estris necessaris per arribar a la seva demostració, seguint els passos de [6, Cap. 10]. Al final, demostrarem també el Teorema A.

Teorema (de Bernstein). *Per $n \geq 10$ no existeix cap fórmula del tipus*

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \quad (4.1)$$

amb els nodes $x_k \in [-1, 1]$, que sigui exacta, és a dir, amb igualtat, per a tots els polinomis f de grau $\leq n$.

4.1 Lemes previs

Lema 4.1. *Sigui la fórmula*

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \quad (4.2)$$

exacta per tot polinomi f de grau $\leq 2m - 1$, on $m < n$ i sigui ξ_m l'arrel més gran del polinomi de Legendre m -èsim. Aleshores, suposant $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, tenim $x_n > \xi_m$.

Demostració. Sigui $P_m(x)$ el polinomi de Legendre m -èsim, considerem

$$f(x) = \frac{P_m^2(x)}{x - \xi_m}$$

que clarament té grau $2m - 1$.

Com els polinomis de Legendre d'un cert grau són ortogonals als polinomis de grau inferior, tenim:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 0,$$

ja que

$$f(x) = P_m(x) \frac{P_m(x)}{x - \xi_m},$$

i com f té grau $2m - 1$, ha de complir la fórmula de l'enunciat:

$$\sum_{k=1}^n f(x_k) = 0$$

Tenim $f(x) = \alpha(x - \xi_m)(x - \xi_{m-1})^2 \dots (x - \xi_1)^2$, on $\alpha > 0$ és el coeficient líder i $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ són les m arrels diferents de $P_m(x)$. Aleshores, com $m < n$, en el sumatori hi ha termes no nuls, per tant, ha d'haver-hi termes positius i negatius i com que

$(x - \xi_m)$ és l'únic terme no quadràtic de $f(x)$, només pren valors positius quan $x > \xi_m$. Aleshores existeix un $x_k > \xi_m$ i, per tant, $x_n > \xi_m$. \square

Lema 4.2. Si la fórmula

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$$

és exacta per tot els polinomis de grau $\leq 2m - 1$ amb $m < n$, llavors

$$\lambda_m > \frac{2}{n}, \quad (4.3)$$

on λ_m és el coeficient m -èsim de la fórmula de quadratura de Gauss (exemple 2.9.):

$$\lambda_m = \frac{2}{(1 - \xi_m^2) P_m'(\xi_m)^2}$$

Demostració. Sigui

$$f(x) = \left[\frac{P_m(x)}{(x - \xi_m) P_m'(\xi_m)} \right]^2 = \left[\frac{(x - \xi_1)(x - \xi_2) \cdots (x - \xi_{m-1})(x - \xi_m)}{(x - \xi_m) \prod_{k=1}^{m-1} (\xi_m - \xi_k)} \right]^2$$

llavors $f(\xi_m) = 1$ i $f(\xi_i) = 0 \forall i = 1, \dots, m - 1$.

Per tant, usant la fórmula de quadratura de Gauss per f , ens queda

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \lambda_m f(\xi_m) = \lambda_m$$

i com f és un polinomi de grau $2m - 2$, llavors ha de complir (4.2):

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$$

i, per tant,

$$\frac{2}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) = \lambda_m.$$

Com $f(x) \geq 0 \forall x$, tenim

$$\frac{2}{n} f(x_n) \leq \lambda_m.$$

Escrivint $f(x) = [P_m'(\xi_m)]^{-2} (x - \xi_1)^2 \cdots (x - \xi_m)^2$, veiem que per $x \geq \xi_m$, $f(x)$ és una funció creixent en x , i com $x_n > \xi_m$, aleshores $f(x_n) > f(\xi_m) = 1$. Per tant, tenim:

$$\left. \begin{array}{l} 1 < f(x_n) \\ \frac{2}{n} f(x_n) \leq \lambda_m \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{n} < \lambda_m$$

\square

Lema 4.3. Per qualsevol valor de m , l'arrel més gran ξ_m de $P_m(x)$ satisfà la desigualtat

$$1 - \xi_m < \frac{3}{m(m+1)}$$

Demostració. Els polinomis de Legendre satisfan l'equació diferencial

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)P'_m(x)] + m(m+1)P_m(x) = 0 \quad (4.4)$$

Desenvolupem $P_m(x)$ a l'entorn de ξ_m :

$$P_m(x) = \sum_{n=1}^m \frac{P_m^{(n)}(\xi_m)}{n!} (x - \xi_m)^n \quad (4.5)$$

Integrant l'equació (4.4) obtenim

$$\int_{\xi_m}^1 \frac{d}{dx}[(1-x^2)P'_m(x)] dx = -m(m+1) \int_{\xi_m}^1 P_m(x) dx$$

Si anem fent els càlculs i substituïm $P_m(x)$ pel seu desenvolupament de Taylor (4.5), ens queda

$$\begin{aligned} -(1 - \xi_m^2)P'_m(\xi_m) &= -m(m+1) \int_{\xi_m}^1 \sum_{n=1}^m \frac{P_m^{(n)}(\xi_m)}{n!} (x - \xi_m)^n dx \\ (1 - \xi_m^2)P'_m(\xi_m) &= m(m+1) \sum_{n=1}^m \frac{P_m^{(n)}(\xi_m)}{n!} \int_{\xi_m}^1 (x - \xi_m)^n dx \end{aligned}$$

i com

$$\int_{\xi_m}^1 (x - \xi_m)^n dx = \frac{(1 - \xi_m)^{n+1}}{n+1},$$

al final tenim

$$(1 - \xi_m^2)P'_m(\xi_m) = m(m+1) \sum_{n=1}^m \frac{P_m^{(n)}(\xi_m)}{(n+1)!} (1 - \xi_m)^{n+1}.$$

Com que les arrels de $P_m^{(n)}(x)$ son menors que ξ_m tenim $P_m^{(n)}(\xi_m) > 0$ per $n \geq 1$. Prenent els dos primers termes del sumatori i dividint per $(1 - \xi_m)$ a ambdós costats ens queda:

$$(1 + \xi_m)P'_m(\xi_m) > m(m+1) \left[\frac{1}{2} \cdot P'_m(\xi_m)(1 - \xi_m) + \frac{1}{6} \cdot P''_m(\xi_m)(1 - \xi_m)^2 \right] \quad (4.6)$$

Desenvolupant (4.4) i després substituïnt a $x = \xi_m$ tenim:

$$(1 - x^2)P''_m(x) - 2xP'_m(x) + m(m+1) = 0$$

$$(1 - \xi_m^2)P''_m(\xi_m) - 2\xi_m P'_m(\xi_m) = 0.$$

Aïllant, ens queda

$$P''_m(\xi_m) = \frac{2\xi_m}{1 - \xi_m^2} P'_m(\xi_m). \quad (4.7)$$

Substituïnt aquest valor a (4.6) tenim:

$$(1 + \xi_m)P'_m(\xi_m) > m(m+1) \left[\frac{1}{2}P'_m(\xi_m)(1 - \xi_m) + \frac{1}{6} \cdot \frac{2\xi_m}{1 - \xi_m^2} P''_m(\xi_m)(1 - \xi_m)^2 \right]$$

$$(1 + \xi_m) > m(m+1) \left[\frac{1}{2}(1 - \xi_m) + \frac{1}{3} \cdot \frac{\xi_m(1 - \xi_m)}{1 + \xi_m} \right]$$

Com $0 < \xi_m < 1$, tenim $1 + \xi_m < 2$ i aleshores ens queda

$$(1 + \xi_m) > m(m+1) \left[\frac{1}{2}(1 - \xi_m) + \frac{1}{6} \xi_m(1 - \xi_m) \right].$$

Sigui $\delta = m(m+1)$, reescrivim:

$$6(1 + \xi_m) - 3\delta(1 - \xi_m) - \delta\xi_m(1 - \xi_m) > 0$$

$$6 - 3\delta + \xi_m(6 + 3\delta - \delta + \delta\xi_m) > 0$$

$$\delta\xi_m^2 + (6 + 2\delta)\xi_m + (6 - 3\delta) > 0 \tag{4.8}$$

Estudiem l'equació de segon grau:

$$\delta z^2 + (6 + 2\delta)z + (6 - 3\delta) = 0$$

$$z = \frac{-6 - 2\delta \pm \sqrt{4(3 + \delta)^2 - 4\delta(6 - 3\delta)}}{2\delta}$$

$$z = \frac{-3 - \delta \pm \sqrt{9 + 6\delta + \delta^2 - 6\delta + 3\delta^2}}{\delta} = \frac{-3 - \delta \pm \sqrt{4\delta^2 + 9}}{\delta}$$

Si ξ_m satisfà la desigualtat (4.8), aleshores ξ_m ha de ser major que el valor positiu de z :

$$\xi_m > \frac{-3 - \delta\sqrt{4\delta^2 + 9}}{\delta} > \frac{-3 - \delta + \sqrt{4\delta^2}}{\delta} = \frac{\delta - 3}{\delta}$$

$$\xi_m > 1 - \frac{3}{\delta} = 1 - \frac{3}{m(m+1)}$$

$$1 - \xi_m < \frac{3}{m(m+1)}$$

□

Definició 4.4. Recordem que la funció Gamma d'un nombre n enter positiu es defineix com $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Lema 4.5. El valor de la derivada $P'_m(\xi_m)$ del polinomi m -èsim de Legendre $P_m(x)$ a l'arrel més gran $x = \xi_m$ satisfà la desigualtat

$$P'_m(\xi_m) > \frac{2}{3(1 - \xi_m)} \left[1 - \frac{\Gamma(m+4)}{288\Gamma(m+2)} (1 - \xi_m)^3 \right]$$

Demostració. Usant la sèrie de Taylor amb dos termes i la forma integral de la resta, tenim:

$$P_m(x) = P'_m(\xi_m)(x - \xi_m) + \frac{1}{2}P''_m(\xi_m)(x - \xi_m)^2 + \frac{1}{2} \int_{\xi_m}^1 P_m^{(3)}(t)(1-t)^2 dt.$$

A partir de la fórmula de recurrència dels polinomis de Legendre [9, pag.9], es pot demostrar que $P_m(1) = 1$ per a tot m enter positiu.

Per $x = 1$, tenim $P_m(1) = 1$ i, reescrivint:

$$1 = P'_m(\xi_m)(1 - \xi_m) + \frac{1}{2}P''_m(\xi_m)(1 - \xi_m)^2 + \frac{1}{2} \int_{\xi_m}^1 P_m^{(3)}(t)(1-t)^2 dt \quad (4.9)$$

Considerem $P_m^{(3)}(t)$. A la demostració del lema anterior hem vist que totes les arrels de $P''_m(x)$ són més petites que ξ_m . Per tant, $P_m^{(3)}(x)$ és una funció monòtona creixent en $[\xi_m, 1]$, i el valor més gran s'assoleix a $x = 1$. Podem trobar aquest valor ($P_m^{(3)}(1)$) fàcilment usant l'equació diferencial

$$(1 - x^2)P''_m(x) - 2xP'_m(x) + m(m+1) = 0 \quad (4.10)$$

Considerant $x = 1$, trobem $P'_m(1) = \frac{m(m+1)}{2}$.

Derivant (4.10), obtenim

$$\begin{aligned} (1 - x^2)P_m^{(3)}(x) - 2xP''_m(x) - 2xP''_m(x) - 2P'_m(x) + m(m+1)P'_m(x) &= 0, \\ (1 - x^2)P_m^{(3)}(x) - 4xP''_m(x)(m+2)(m-1)P'_m(x) &= 0, \end{aligned} \quad (4.11)$$

i substituint $x = 1$ ens queda

$$P''_m(1) = \frac{(m+2)(m-1)m(m+1)}{8}.$$

Ara, derivant (4.11), obtenim:

$$\begin{aligned} (1 - x^2)P_m^{(4)}(x) - 2xP_m^{(3)}(x) - 4xP_m^{(3)}(x) - 4P''_m(x) + (m+2)(m-1)P''_m(x) &= 0, \\ (1 - x^2)P_m^{(4)}(x) - 6xP_m^{(3)}(x) + (m+3)(m-2)P''_m(x) &= 0, \end{aligned}$$

i substituint $x = 1$ ens queda

$$P_m^{(3)}(1) = \frac{(m+3)(m-2)(m+2)(m-1)m(m+1)}{48} = \frac{\Gamma(m+4)}{48\Gamma(m-2)}.$$

Prenent les expressions (4.7) i (4.9), tenim:

$$1 = P'_m(\xi_m)(1 - \xi_m) + \frac{\xi_m}{1 - \xi_m^2}P'_m(\xi_m)(1 - \xi_m)^2 + \frac{1}{2} \int_{\xi_m}^1 P_m^{(3)}(t)(1-t)^2 dt$$

$$1 = P'_m(\xi_m)(1 - \xi_m) \left[1 + \frac{\xi_m}{1 + \xi_m^2} \right] + \frac{1}{2} \int_{\xi_m}^1 P_m^{(3)}(t)(1 - t)^2 dt$$

Com $P_m^{(3)}(x)$ és monòtona creixent en $[\xi_m, 1]$, $\forall x \in [\xi_m, 1]$ tenim

$$P_m^{(3)}(1) = \frac{\Gamma(m+4)}{48\Gamma(m-2)} \geq P_m^{(3)}(x)$$

i, per tant

$$\begin{aligned} 1 &< P'_m(\xi_m)(1 - \xi_m) \left[1 + \frac{\xi_m}{1 + \xi_m^2} \right] + \frac{1}{2} \int_{\xi_m}^1 \frac{\Gamma(m+4)}{48\Gamma(m-2)} (1 - t)^2 dt, \\ 1 &< P'_m(\xi_m)(1 - \xi_m) \left[1 + \frac{\xi_m}{1 + \xi_m^2} \right] + \frac{\Gamma(m+4)}{96\Gamma(m-2)} \frac{(\xi_m - 1)^3}{3}, \\ 1 &< P'_m(\xi_m)(1 - \xi_m) \left[1 + \frac{\xi_m}{1 + \xi_m^2} \right] + \frac{\Gamma(m+4)}{288\Gamma(m-2)} (\xi_m - 1)^3, \\ P'_m(\xi_m) &> \frac{1}{(1 - \xi_m) \left[1 + \frac{\xi_m}{1 + \xi_m^2} \right]} \left[1 - \frac{\Gamma(m+4)}{288\Gamma(m-2)} (\xi_m - 1)^3 \right]. \end{aligned}$$

Com $0 < \xi_m < 1$, llavors $1 < 1 + \xi_m < 2$

$$\frac{\xi_m}{1 + \xi_m} = 1 - \frac{1}{1 + \xi_m} < 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

i el fet que $1 + \frac{\xi_m}{1 + \xi_m} < 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ens dóna la desigualtat desitjada

$$P'_m(\xi_m) > \frac{2}{3(1 - \xi_m)} \left[1 - \frac{\Gamma(m+4)}{288\Gamma(m-2)} (1 - \xi_m)^3 \right].$$

□

4.2 Comentaris previs

Ara donarem una cota superior del coeficient λ_m . Sabem que

$$\lambda_m = \frac{2}{(1 - \xi_m^2) P'_m(\xi_m)^2}.$$

Del lema 4.5 tenim la desigualtat

$$P'_m(\xi_m) > \frac{2}{3(1 - \xi_m)} \left[1 - \frac{\Gamma(m+4)}{288\Gamma(m-2)} (1 - \xi_m)^3 \right] \quad (4.12)$$

i substituint $P'_m(\xi_m)$ pel seu valor més petit en aquesta desigualtat, tenim

$$\lambda_m < \frac{2}{(1 - \xi_m^2)} \left[\frac{2}{3(1 - \xi_m)} \left[1 - \frac{\Gamma(m+4)}{288\Gamma(m-2)} (1 - \xi_m)^3 \right] \right]^{-2}$$

Per tant, reescrivint, la desigualtat és la següent:

$$\lambda_m < \frac{9(1 - \xi_m)}{2(1 + \xi_m)} \left[1 - \frac{\Gamma(m+4)}{288\Gamma(m-2)}(1 - \xi_m)^3 \right]^{-2} \quad (4.13)$$

Serà suficient usar una aproximació de λ_m per $m \geq 6$. A mesura que m augmenta, el valor de ξ_m també augmenta i com que tenim $\xi_6 = 0.93246\dots$, podem assumir que $1 + \xi_m > 1.93$

Al lema 4.3. hem vist

$$1 - \xi_m < \frac{3}{m(m+1)}$$

Ara, acotem el valor de dins el claudàtor:

$$(m+3)(m-2) = m(m+1) - 6 < m(m+1),$$

$$(m+2)(m-1) = m(m+1) - 2 < m(m+1),$$

$$\frac{\Gamma(m+4)}{\Gamma(m-2)} = (m+3)(m+2)(m+1)m(m-1)(m-2) < m^3(m+1)^3.$$

Aleshores,

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(m+4)}{288\Gamma(m-2)}(1 - \xi_m)^3 &< \frac{m^3(m+1)^3}{288} \frac{3^3}{m^3(m+1)^3} = \frac{27}{288}, \\ 1 - \frac{\Gamma(m+4)}{288\Gamma(m-2)}(1 - \xi_m)^3 &> 1 - \frac{27}{288} = \frac{29}{32}. \end{aligned}$$

Amb això, l'expressió (4.13) queda fitada de la següent manera:

$$\lambda_m < \frac{9(1 - \xi_m)}{2(1 + \xi_m)} \left(\frac{32}{29} \right)^2 < \frac{9 \cdot 3}{2(1 + \xi_m)m(m+1)} \left(\frac{32}{29} \right)^2.$$

Hem vist que per $n = 6$ tenim $1 + \xi_m > 1.93$, per tant:

$$\lambda_m < \frac{27 \cdot (32)^2}{2 \cdot (29)^2 \cdot 1,93m(m+1)} \approx \frac{8.517}{m(m+1)}. \quad (4.14)$$

Cas $m = 6$

Per provar el teorema de Bernstein ens interessa saber el coeficient λ_6 , per tant, anem a calcular-lo. Tenint en compte que el sisè polinomi de Legendre és

$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$$

aleshores la seva derivada és

$$P_6'(x) = \frac{1}{8}(693x^5 - 630x^3 + 105x).$$

Hem vist que $\xi_6 = 0.93246\dots$ i en prenem una aproximació: $\xi_6 = 0.932$. Aleshores, fent ús de la fórmula que hem vist a l'exemple 2.9 del segon capítol

$$\lambda_m = \frac{2}{(1 - \xi_m^2)P'_m(\xi_m)^2}$$

obtenim $\lambda_6 = 0.17248\dots$

4.3 Demostració del teorema de Bernstein

Demostració. Considerem els valors de n pels quals la fórmula (4.1) existeix.

Suposem n senar: $n = 2m - 1$, aleshores $m = \frac{1}{2}(n + 1)$ i $m(m + 1) = \frac{1}{4}(n + 1)(n + 3)$.

λ_m ha de complir (4.3) i (4.14):

$$\frac{2}{n} < \lambda_m < \frac{4 \cdot (8.517)}{(n + 1)(n + 3)}$$

per tant,

$$n^2 - 13.034n + 3 < 0.$$

Resolent, veiem que $n < 13$. Per tant, la fórmula no existeix per $n \geq 13$. Per $n = 11$ tampoc existeix ja que per $m = 6$, $A_6 = 0.172\dots$ i $\frac{2}{11} = 0.1818\dots$ llavors la desigualtat $\frac{2}{n} < \lambda_6$ no se satisfà.

Suposem ara n parell, llavors la fórmula (4.1) ha de ser exacta per tots els polinomis de grau $\leq n + 1$. Sigui $n + 1 = 2m - 1$, aleshores $m = \frac{1}{2}(n + 2)$ i $m(m + 1) = \frac{1}{4}(n + 2)(n + 4)$.

Anàlogament, λ_m ha de complir (4.3) i (4.14):

$$\frac{2}{n} < \lambda_m < \frac{4 \cdot (8.517)}{(n + 2)(n + 4)}$$

per tant,

$$n^2 - 11.034n + 8 < 0.$$

Resolent, tenim $n < 11$, per tant, la fórmula no existeix per $n > 10$. Per $n = 10$ tampoc existeix ja que $\lambda_6 = 0.172\dots$ i $\frac{2}{10} = 0.2$, i la desigualtat $\lambda_6 > \frac{2}{n}$ no és certa. \square

4.4 Demostració del teorema A

Demostració. De les desigualtats (4.3) i (4.14) tenim

$$\frac{2}{n} < \lambda_m < \frac{8.517}{m(m + 1)}$$

i reordenant,

$$\frac{2m(m+1)}{8.517} < n.$$

Si anomenem $K = \frac{2}{8.517}$, clarament $K > 0$ i

$$n > K(m^2 + m) = m^2 \left(K + \frac{K}{m} \right).$$

Per tant, tenim que existeix $C > 0$ complint $n > C m^2$. □

5 Resultats de Kuzmin

Pel teorema de Bernstein sabem que els zeros de la fórmula de quadratura, que són les solucions del sistema no lineal (3.5), en general no es troben a l'interval $[-1, 1]$. De fet, hem vist que quan el polinomi és de grau ≥ 10 , les solucions escapen d'aquest interval. D'aquesta manera és natural preguntar-se si aquests punts estan ubicats de forma aleatòria en el pla o si segueixen alguna distribució concreta. L'any 1938, Kuzmin va respondre a aquesta pregunta a l'article [7] en rus que no ha estat traduït.

En aquest capítol veurem, sense entrar en demostracions, els resultat de Kuzmin que Gautschi va resumir a l'article [4].

Geometria dels zeros de $\omega(x)$ (nodes de Txebixov a $[-1, 1]$).

La distribució dels nodes d'integració en el pla complex quan $d\mu(x) = dx$ a l'interval $[-1, 1]$ està detallat a l'article de Kuzmin.

A [7], es prova que per n grans, tots aquests nodes (excepte $x = 0$ quan n és senar) s'acumulen prop de la corba

$$\gamma(z) = \gamma(1), \quad \gamma(z) = \int_{-1}^1 \ln |z - t| dt, \quad (5.1)$$

que és una corba amb forma d'el·lipse centrada a l'origen i que talla amb l'eix real a -1 i 1 i amb l'eix imaginari a -0.52 i 0.52 (veure Figura 10).

Més precisament, es demostra que per a n suficientment gran i $h = \frac{\sqrt{\ln n}}{n}$, tots els nodes d'integració estan ubicats o bé dins dels cercles de centres -1 i 1 i radi $3h$ o bé a la banda estreta delimitada per les corbes

$$\gamma(z) = \gamma(1) \quad \text{i} \quad \gamma(z) = \gamma(1 - 12h).$$

Aquests punts s'apropen així a la corba logarítmica (5.1) des del centre. Kuzim també prova que el nombre de nodes d'integració reals és $O(\ln n)$.

Per visualitzar aquest resultat, recordem que al capítol 3 hem vist que per $n = 8$ no podem construir la fórmula de Txebixov amb tots els nodes reals, i pel Teorema de Bernstein vist al capítol 4 això tampoc és possible per $n \geq 10$. Així doncs, anàlogament a com hem trobat les arrels del polinomi $\omega(x)$ quan eren totes reals i les hem dibuixat, fem les gràfiques pels casos $n = 8$ i $n = 10$ i veiem com s'apropen a "l'el·lipse" descrita anteriorment.

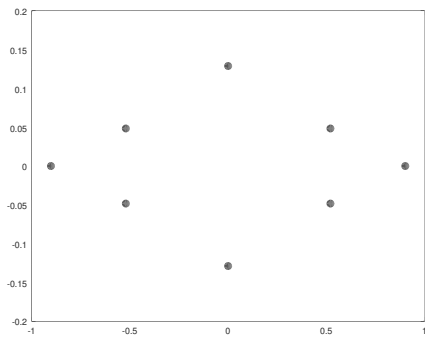


Figura 8: Arrels de $\omega(x)$ per $n = 8$

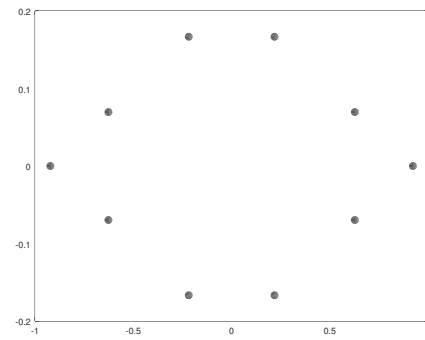


Figura 9: Arrels de $\omega(x)$ per $n = 10$

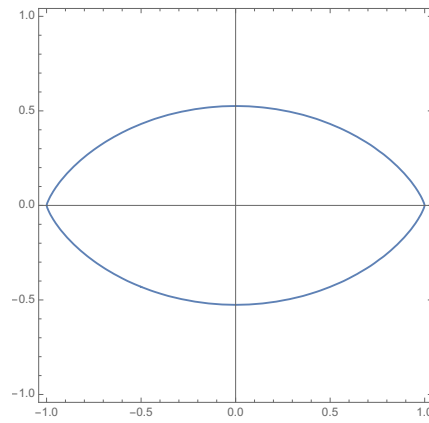


Figura 10: Corba $\gamma(x) = \gamma(1)$

6 Conclusions

Per a la demostració del teorema de Bernstein que volíem provar, hem treballat molts conceptes i estudiat molts resultats per a poder-hi arribar. D'aquesta manera, s'ha fet una feina molt transversal, començant pel repàs de polinomis ortogonals, sobretot els polinomis de Legendre que, junt amb les observacions del comportament de les seves arrels, ens han sigut clau per treballar amb les fórmules de quadratura.

Després de veure com ens quedava la fórmula de quadratura de Txebixov amb n nodes, hem imposat que fos certa pels monòmis $f(x) = x, x^2, \dots, x^n$ i així hem pogut construir un sistema d'equacions. Com que aquest sistema era no lineal, les equacions de Newton ens n'han facilitat la resolució per a trobar les seves solucions: els nodes de la fórmula de quadratura. Per això hem construït un polinomi $\omega(x)$ que tingués com a zeros aquests nodes x_1, \dots, x_n de la fórmula. En acabat, hem vist alguns exemples de forma gràfica per aquests nodes amb n petit. El teorema que es volia provar afirmava la no validesa d'una fórmula de quadratura amb n nodes per a $n \geq 10$, així que amb tot el que hem vist anteriorment i amb les resolucions d'uns lemes, hem vist un cas concret que ens ha ajudat en la demostració del teorema.

Per acabar, hem pogut observar que les n per les quals l'enunciat del teorema no es complia, és a dir, per $n \geq 10$, les solucions del polinomi $\omega(x)$ que hem definit s'apropaven a una cobra concreta del pla complex.

En el treball hem analitzat les fórmules de quadratura en un interval i per a polinomis en una variable, però també s'han fet estudis del rigor d'aquestes fórmules quan les condicions varien. Per anar una mica més enllà, enunciem un resultat força interessant sobre l'ordre dels nodes respecte el grau màxim dels polinomis pel qual la fórmula és certa dependent de l'espai on integrem.

Com bé hem vist al Teorema A, quan usem una fórmula de quadratura (de Txebixov) que ens és vàlida per a polinomis de grau $\leq 2m - 1$, l'ordre dels nodes n és de m^2 . En canvi, quan integrem en el cercle, si la fórmula ens és vàlida per als polinomis de grau $\leq m$, tenim que el nombre de nodes n és de l'ordre de m . L'explicació, que no hem pogut arribar a justificar, és que el cercle és una varietat algebraica i l'interval no.

A nivell personal, aquest treball m'ha ensenyat a fer recerca en llibres i redactar demostracions de forma rigorosa i precisa, així com aprendre a ordenar idees al meu cap per

després escriure-les de manera clara i entenedora. També m'he pogut familiaritzar amb el llenguatge de $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$, que és una eina molt potent i de ben segur que em servirà per a projectes que pugui arribar a realitzar posteriorment.

Referències

- [1] Bernstein, S. N.: *On a system of indeterminate equations*, Collected Works, vol. 2, The Constructive Theory of Functions, Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscow, pp. 236-242, 1954.
- [2] Bernstein, S. N.: *On quadrature formulas of Cotes and Chebyshev*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, Vol. 14, pp. 323-26; Collected Works, Vol. 2, pp. 200-04, 1937.
- [3] Bernstein, S. N.: *On quadrature formulas with positive coefficients*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 4, 479-503, 1937.
- [4] Gautschi, W.: *Advances in Chebyshev Quadrature*. Numerical analysis (Proc. 6th Dundee Conf.), Lect. Notes in Math. 506, p. 100-121, Springer, Berlin, 1976.
- [5] Korevaar, J.: *Chebyshev-type quadratures: use of complex analysis and potential theory*. Notes by Arno B. J. Kuijlaars. NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 439, Complex potential theory (Montreal, PQ, 1993), 325–364, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994.
- [6] Krylov, V.I.: *Approximate Calculation of Integrals*. The Macmillan Company, New York. 1962.
- [7] Kuzmin, R.O.: *Sur la distribution des racines des polynômes dans la méthode de quadrature dem Tchebycheff*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., Volume 2, Issue 4, 427-444, 1938.
- [8] Lang, S.: *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, 211, New York: Spinger-Verlag, 2002.
- [9] Mhaskar, H.N.: *Introduction to the Theory of Weighted Polynomial Approximation*. Series in Approximations and Decompositions, Vol.7. Departament of Mathematics and Computers Science. California State University, Los Angeles, USA. 1996.