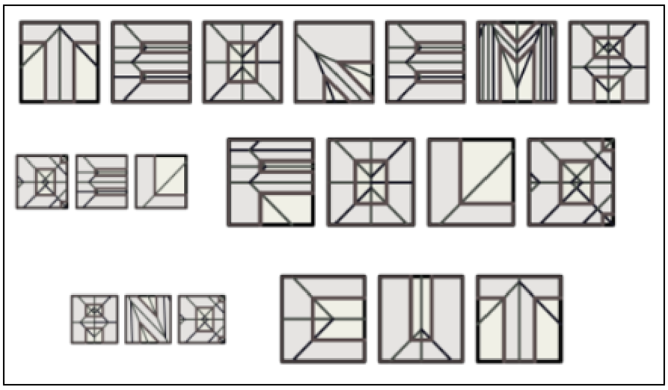
Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Teorema Fold and Cut



Autor: Orriols Trias, Imelda

Director: Font, Jordi
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica. UB

Barcelona, 21 de juny de 2020

Abstract

The fold-and-cut theorem states that any flat figure with straight sides can be obtained by making a single straight cut of a sheet of paper with the appropriate folds. Thus, this project will study the mathematical concepts behind the theorem to solve it. However, the main objective of this project is to develop a series of activities framed in this context and adapted to the secondary education level and respecting the Catalan curriculum. All this, with the intention of bringing more current and fresh mathematics in the classroom to motivate, arouse students' interest, and encourage their curiosity and creativity based on the theorem experimentation.

Resumen

El teorema del Fold and Cut ens diu que qualsevol figura plana que tingui els costats rectes es pot obtenir realitzant un sol tall recte d'un full de paper amb els doblecs adequats. Així doncs, estudiarem els conceptes matemàtics que s'amaguen al darrere per tal de resoldre'l. No obstant això, el principal objectiu d'aquest projecte és desenvolupar un seguit d'activitats emmarcades en aquest context adaptades al nivell de secundària i respectant el currículum català. Tot això, amb la intenció de dur matemàtiques més actuals i fresques a l'aula per tal de motivar, despertar interès i incentivar la curiositat i creativitat de l'alumnat a partir de l'experimentació del teorema.

2010 Mathematics Subject Classification. 97D20, 05C10, 51-03, 51-06, 97Q99, 97U10, 97G20

Escolta pare! Que saps si hi ha una àlgebra vinculada a la papiroflèxia? Que saps quina és? Però no vaig poder. No tenia ni la més lleugera idea que darrere la papiroflèxia hi hagués cap mena de geometria, i molt menys si li corresponia o no una àlgebra. Aquella nit i les següents vaig pensar moltes vegades en la conversa sobre la geometria i l'àlgebra. Com més hi pensava més em convencia que l'important, com deia el pare, no era saber tres vegades més. El que realment importava era aconseguir tres punts de vista d'una mateixa qüestió i ser capaç de relacionar-los. Un bon mestre era el que tenia tres bones perspectives, i un sistema per passar de l'una a l'altra.

Josep Pla i Carrera, "Damunt les espatlles dels gegants" [1]

Agraïments

En primer lloc, agrair a en Jordi Font, el meu tutor, per obrir-me les portes en aquest projecte. Només va caldre una trucada per presentar-me la idea que en penjar vaig córrer a buscar paper i tisores i sense creure'm gaire el que m'havia explicat, vaig començar a plegar-los i fer-hi un tall per observar què passava i quines formes aconseguia. Seguidament, em va compartir un parell de documents que van acabar sent el motor el qual començar a treballar. Tanmateix, la seva orientació, suport i ajuda tècnica, que han estat essencials.

En segon lloc, donar les gràcies a en Sergi Múria, que juntament amb en Jordi, em van ensenyar el petit i a la vegada, tan gran món de la docència matemàtica en un moment el qual estava molt desorientada dels camins que podia seguir posteriorment. Em van saber ajudar molt.

Seguint la mateixa línia i en tercer lloc, un especial i càlid agraïment a la Laura Morera, tutora de les assignatures de pràctiques I i II a l'empresa a l'Associació eXplorium, les quals van superar totes expectatives. Una font d'inspiració i a la vegada, gran professora. Si miro enrere i reculo un any, m'adono de la magnitud que m'ha transmès i ensenyat. Juntament amb la resta de companys n'hem viscut i continuem vivint de tots colors, però en cap cas hem deixat de treure'n cap aprenentatge i sempre hem posat la didàctica de les matemàtiques per davant. Gràcies.

En quart lloc, donar les gràcies als organitzadors de la Matefest-Infofest, la festa divulgativa de la facultat de matemàtiques i informàtica de la Universitat de Barcelona, que malgrat les dificultats d'aquest semestre, van esforçar-se per aconseguir dur-la a terme virtualment i que va resultar ser d'allò més interessant. L'oportunitat de poder-hi presentar el meu treball va ser molt gratificant.

En cinquè lloc, a l'INS Domènec Perramon d'Arenys de Munt, per deixar-los mostrar i portar a la pràctica el resultat del treball, la qual ha estat essencial pel desenvolupament d'aquest.

En sisè lloc, a amics, companys d'eXplorium, d'Innovamat (actual lloc de treball) i sobretot la meva família, per suportar-me doblegar i retallar papers incansablement. En particular, agrair de tot cor a la meva germana, Sílvia.

En setè lloc, a en Ricard, professor de matemàtiques, per ajudar-me a posar una mirada competencial al projecte però especialment, per suportar tres mesos de confinament amb el menjador farcit d'articles, els moments de silenci per les gravacions, edicions de vídeos i sobretot, pels retalls de tots colors, mides i textures escampats per tot el pis. "Demà ho netejaré tot", li deia però mai s'ho acabava de creure. Una peça clau emocionalment.

Per últim, a totes aquelles que han sentit interès pel projecte, que s'hi han creuat i que d'una manera o altra hi han aportat el seu granet de sorra.

Gràcies a tots.

Índex

1 Introducció

El projecte

El present treball parteix del problema del Fold and Cut, el qual té un llarg recorregut històric però que a la vegada tracta d'una matemàtica molt recent, ja que fins a l'any 1999 no se'n va publicar un primer intent de demostració. Així mateix, el problema ha passat per mans de grans mags els quals l'han utilitzat per fer trucs de màgia. Se'n deriva també una llegenda sobre l'origen de la bandera d'estats units i finalment, arriba a mans de matemàtics i experts en geometria computacional els quals fan diversos intents per tal de trobar-ne la solució. Erik Demaine, professor de ciències computacionals a la universitat M.I.T. (Massachussets Institute of Technology) amb només disset anys ja hi va donar voltes, juntament amb el seu pare Martin Demaine, artista i matemàtic també de la universitat M.I.T. i Anna Lubiw, especialitzada també en geometria computacional a la Universitat de Waterloo. No obstant això, no va ésser fins anys més tard, quan es publicar la demostració la qual també hi va participar E.Demaine.

Malgrat tot, avui en dia encara s'està donant a conèixer. De fet, l'autor de tots els articles, blogs, conferències i llibres que han estat utilitzats per a la realització d'aquest projecte és el propi E.Demaine. De tota manera, la doctora Katie Steckles, matemàtica de la universitat de Manchester, i que es dedica principalment a la divulgació de les matemàtiques i creadora de continguts de la pàgina web de Mathigon, dedica uns capítols a la presentació del teorema al canal de Youtube Numperhile, canal dedicat a la divulgació matemàtica. Així doncs, Steckles aconsegueix "reproducció rere reproducció ", donar llum al món d'aquest entretingut i divertit teorema.

Pel que fa al transcurs del treball, al llarg d'aquest es donen diferents enfocaments al teorema. De fet, primer se'n fa un estudi del mètode que proposen els investigadors citats anteriorment i una pinzellada de la demostració. En segon lloc, es fa una proposta d'una seqüència d'activitats inspirades en aquest. Si bé és cert que tot just actualment s'està començant a donar a conèixer el teorema, professors de matemàtiques hi han començat a donar les primeres voltes. Durant la fase de recerca del treball, vaig recórrer a diferents blogs de professors americans els quals han començat a portar-lo a l'aula. No obstant això, a l'entrada del blog corresponent comentaven que no li havien pogut treure del tot profit a causa del poc temps que hi han dedicat a investigar però que havien volgut portar a l'aula per tal que els seus alumnes ho coneguessin i en gaudissin. També m'agradaria remarcar que tots i cadascun d'ells en feien valoracions molt positives dels resultats.

Arribant a la segona part, el qual la didàctica de les matemàtiques és la protagonista, és el moment de comentar que aquest treball s'ha vist greument afectat per la situació emergent que hem viscut durant els darrers mesos a causa del confinament per la Covid-19, ja que els centres on s'havia d'impartir la part pràctica han estat tancats. No obstant això, com a alternativa, s'ha presentat una proposta virtual.

Així mateix, tot i que ja s'havia pensat en la idea de la creació d'un blog, la decisió ha agafat més encert arran de la situació emergent. Pretén d'una banda incentivar l'interès, despertar la curiositat i emoció i esdevenir una font d'informació sobre el teorema, abordant així la manca d'informació en català sobre aquest. D'altra banda, també persegueix ésser un recurs tant per a alumnes com a professors, on es puguin trobar activitats didàctiques diverses i per a diferents edats i ambients inspirades al teorema, ja que el caràcter divers de la proposta permet fer-ho. De fet, es pretén treure-li tot el profit que s'ha pogut aconseguir. Addicionalment, també s'hi poden trobar altres articles d'interès relacionats amb aquest. Finalment, també pretén ésser un recurs on els professors d'arreu de Catalunya puguin utilitzar sobretot en cas que hi hagi segon confinament, ja que la proposta està enfocada per dur-la a terme virtualment.

Per últim, un altre aspecte a remarcar és que s'ha fet una recerca rigorosa tant en la primera part per conèixer-lo amb detall matemàticament, com a la segona, formant-me per saber quins aspectes havia de tenir en compte a l'hora d'elaborar la proposta.

Pel que fa a la primera tal com es pot apreciar a la bibliografia, s'ha emprat a fonts d'informació principalment d'articles originals, llibres i conferències. Així mateix, a la segona part, he portat a la pràctica tot el que vaig aprendre a l'optativa de Didàctica de les matemàtiques, l'aprenentatge de les pràctiques a l'Associació eXplorium, lectures i jornades de formació. Tanmateix, m'agradaria destacar que el llibre "3 professors de matemàtiques. Com fer estimar i aprendre bé les matemàtiques" escrit per Claudi Alsina, Anton Aubanell i Carme Brugués ha estat una font que ha tingut un paper essencial. Així i tot, les publicacions de Josep Pla i Carrera sobre l'estudi de l'àlgebra de la papiroflèxia han estat un recurs d'inspiració en tot moment. Finalment, m'agradaria fer èmfasis que la participació en jornades de formació de didàctica de les matemàtiques també ha tingut un rol essencial a l'elaboració del treball. Concretament, m'agradaria llistar-les i explicar-ne el motiu pel qual han estat de gran utilitat:

- "XVI Jornada d'Educació Matemàtica" celebrada el passat 28 de setembre del 2019 a Barcelona, ja que em va ser de gran ajuda per a comprendre la dificultat de definir l'acrònim STEM.
- "5a Jornada A·PLEC de didàctica del plegat per a educadors" celebrada el 25, 26 i 27 d'octubre del 2019 a Badalona per introduir-me i conèixer el món de l'origami.
- "XXII Jornada didàctica matemàtica d'ABEAM" celebrada el 9 de novembre a Barcelona, per assistir al taller de l'Eulàlia Traumuns i aprendre consells sobre com impartir papiroflèxia a classe i quines matemàtiques se'n poden extreure.
- "XVII Jornada de matemàtiques d'APaMMS", el passat 7 de Març al Tecnocampus de Mataró per conèixer els orígens de l'STEM.
- L'assistència al "Postgrau de didàctica de les matemàtiques" organitzat per la Universitat de Barcelona per conèixer diferents metodologies, punts de vistes i recursos, destacant l'àmbit digital.
- Diverses conferències de grans didàctics de les matemàtiques catalans, com Anton Aubanell, per comprendre'n la filosofia que s'hi amaga al darrere.
- Seguiment dels "Confimaths", vídeos de formació online protoganitzats per Laura Morera i Cecília Calvo i "Webinars" formatius organitzats per N.C.T.M. (National Council of Teachers of Mathematics) duts a terme durant el confinament a causa de la covid-19, els quals m'han ajudat amb la planificació i la gestió de les activitats, tant presencialment com virtualment.

Estructura de la memòria

El fil conductor d'aquest treball és el teorema de Fold and Cut. Primerament, es fa una breu explicació dels objectius que es persegueixen en l'elaboració d'aquest projecte.

Seguidament, es fa referència a diferents trets històrics del teorema. En tercer lloc es tracten els conceptes i resultats matemàtics, els quals s'utilitzen a l'hora de resoldre el problema del Fold and Cut. Tot seguit, es descriu breument el procediment de la demostració. A més, s'expliquen els problemes derivats d'aquest que el dia d'avui encara no s'han resolt i les aplicacions que se n'han derivat. A continuació, es proposen un seguit d'activitats i experiències que han estat dissenyades expressament per tal de satisfer els objectius del treball. Per concloure, es fa una anàlisi de la implementació de les activitats, de manera que s'avalua si s'han aconseguit assolir les fites plantejades inicialment.

2 Objetius

En aquest projecte es persegueixen els següents objectius:

1. Proposar una seqüència d'activitats riques de matemàtiques motivadores que despertin interès per la matèria que estiguin emmarcades al bloc de contingut d'Espai i Forma tot respectant el currículum català [2].
2. Proposar problemes de matemàtiques en un ambient de resolució de problemes on l'experimentació tingui un paper essencial per ajudar a comprendre l'abstracció del concepte que es pretén arribar.
3. Dur matemàtiques més actuals, fresques i innovadores a l'aula.
4. Evidenciar la naturalesa viva de les matemàtiques i comprendre que és una matèria la qual encara s'està construint i té al davant camí per recórrer.
5. Desenvolupar destreses com a futur docent de matemàtiques de secundària.
6. Conèixer i introduir-me a l'àlgebra que s'amaga darrere la papiroflèxia. En particular, a les matemàtiques que s'amaguen darrere el teorema del Fold and Cut.

Obre'l em va dir. Vejam si t'agrada. Era un llibre, més ample i llarg del normal, amb un títol sorprenent: El Mundo de Papel. La coberta plena de figures unes aus, uns vaixells, uns avions, un home fet de peces, un elefant, un molí, .., totes fetes de paper. Et servirà per entretenir-te cada dia que t'hagis d'estar al llit i mentre no puguis anar a l'escola. T'he dut aquests diaris vells perquè vagis practicant. Semblava a punt d'anar-se'n. Ell ja havia complert, però encara em va dir: Espero que t'agradi i que et sigui útil mentre duri aquest episodi de la teva vida.[...]

Josep Pla i Carrera, "Damunt les espatlles dels gegants[1]"

3 El teorema del Fold and Cut

"Qui entre nosaltres, en algun moment o un altre de la vida, no ha fet un plec en un full de paper? I qui no n'ha fet dos, de plecs, que, en tallar-se, generin un punt? Tots, en una ocasió o una altra, ho hem fet. Potser, fins i tot, moltes més vegades que no pas hem determinat un punt del pla tallant una recta i una circumferència. Ara bé, ens hem preguntat mai, encara que només sigui per analogia, quina és l'àlgebra que hi ha sota l'art de la papiroflèxia? En tot cas, n'hi ha alguna? És fàcilment identificable? És clar que per poder respondre aquestes preguntes amb rigor, abans hem d'establir amb precisió, formalment parlant, què és l'art de la papiroflèxia[...]"

Josep Pla i Carrera, "L'àlgebra de la papiroflèxia[15]"
Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 21, núm. 1, 2006. Pàg. 81–155

Hi ha molts llibres, llocs web i articles dedicats a l'origami, cadascun amb la seva pròpia definició de la paraula. L'origen japonès de la paraula significa simplement "doblegar paper". L'art de plegar el paper ha existit des d'almenys el segle VI, portat al Japó per monjos budistes. Quan parlem d'origami, solem representar animals de paper elaborats i bonics. Però també ens adonem que aquest art està estretament relacionat amb les matemàtiques o la geometria. De fet, l'origami ha donat lloc a una interessant col·lecció de problemes per estudiar les matemàticament i computacionalment. Aquest aspecte científic, però, no es va estudiar àmpliament fins prop de 1980, quan les matemàtiques d'Origami van sorgir com a camp. Pel que fa a l'origami computacional, és una branca encara més recent que explora algoritmes per crear origami o resoldre problemes de plegament de paper. Va començar a Amèrica del Nord amb el treball de Robert Lang a TreeMaker (cap a 1993).

Hi ha multitud de maneres de plegar el paper i es poden utilitzar diferents tècniques per aconseguir determinades escultures. En l'estudi de les matemàtiques d'origami, es pretén relacionar aquestes nocions de "paper" i "plecs" amb conceptes matemàtics. D'aquesta manera, aquest treball està centrat a veure un exemple on utilitzem teoremes geomètrics existents per descobrir nous teoremes relacionats amb origami.

Així doncs, de ben segur que estem d'acord amb en Josep Pla i Carrera, tots nosaltres hem jugat a doblegar un full de paper. També hem jugat a fer-hi doblecs diversos fins a aplanar-lo, tallar-lo i desdoblegar el paper per veure quina figura ens ha quedat. No obstant això, què passaria si només se'ns hagués permès fer un tall recte? Està clar que si el tall és recte, els costats de les figures resultants també seran rectes. Però de tots els dibuixos que es poden fer amb talls rectes, quins d'ells es poden obtenir doblegant un paper i fent un sol tall recte? La resposta és TOTS.

De fet, si ho enunciem més formalment, el resultat és el següent:

Teorema 3.1. ***Teorema del Fold and Cut*** *ens diu que qualsevol figura plana que tingui els costats rectes es pot obtenir realitzant un sol tall recte d'un full de paper amb els doblecs adequats.*

4 Recorregut històric del teorema del Fold and Cut

La història del problema del fold and cut tot i ser un teorema molt recent té un llarg recorregut històric. D'aquesta manera, el propòsit d'aquest apartat és fer-ne un petit recorregut.

1721 - Chu Sen

La primera publicació en la qual es fa referència a aquest problema és al llibre japonès Wakoku Chiyekarube escrit per Kan Chu Sen i publicat l'any 1721. Es tracta d'un llibre que conté diferents problemes que tenen la finalitat de determinar el grau de maduresa matemàtica. Així doncs, un dels problemes establerts tracta d'aconseguir tallar un emblema japonès anomenat "Sangaibisi" amb un únic tall recte.

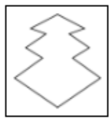


Figura 1: Sangaibisi, traduït com a "3 rombes plegats". Imatge extreta de [3].

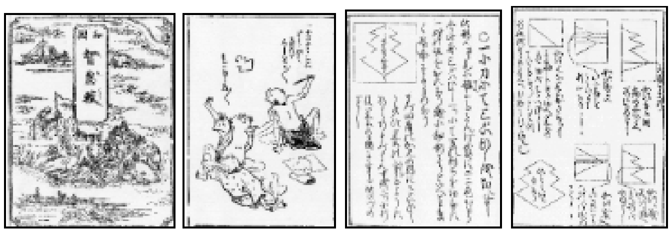


Figura 2: Pàgines del "Wakoku Chiyekarube" referents al problema. Imatge extreta de [4].

1873 - Betsy Ross

La següent referència històrica que trobem va relacionada amb l'origen de la bandera dels Estats Units d'Amèrica. L'any 1873, un article al "Harper's New Monthly Magazine" narra la història de la Betsy Ross, una cosidora de Pensilvània, que rep l'encàrrec del president d'aquella època, George Washington, de dissenyar la que esdevindria la bandera del país i que contenia 13 estrelles de sis puntes. A més, també li va demanar que en cosís 500 amb només tres dies. Així mateix, es diu que Ross, en adonar-se del poc temps que tenia i del temps que li comportaria tallar tots i cadascun dels costats de les estrelles de sis puntes li va proposar si en podien tenir cinc i d'aquesta manera, estalviar-se algun tall. Washington va acceptar i la Ross va anar tallant-les tot optimitzant cada vegada més el procés fins a arribar a aconseguir doblegar l'estrella d'una manera concreta per poder-la tallar amb un sol tall i així avançar més ràpidament la feina.

1920 - Will Blyth

Will Blyth fou un mag anglès que l'any 1920 va utilitzar el problema del Fold and Cut d'inspiració per desenvolupar un truc de màgia titulat "Gains of the Great War". En aquest truc explicava una història relacionada amb la Primera Guerra Mundial i, alhora, anava doblegant diferents papers fins a aconseguir tallar amb un sol tall la creu de Malta, l'estrella de la Victòria i un altar.

1922 - Harry Houdini

Harry Houdini, un mag hongarès, va escriure un llibre titulat "Paper màgic". En aquest llibre va descriure un truc el qual la seva solució és un dels possibles mètodes per tallar una estrella de cinc puntes amb un sol tall.

1955 - Gerald Loe

L'any 1955, el mag Gerald Loe va escriure el llibre Paper Capers, el qual tracta sobre la multitud de formes que es poden doblegar i tallar amb un sol tall. A més, va retallar gairebé totes les lletres de l'abecedari.

1960 - Martin Gardner

Martin Gardner era un mag estatunidenc que l'any 1960, inspirat per l'habilitat de Loe, va presentar el "problema de doblegar i un sol tallçom un problema obert. A més, va tractar-lo en una columna de l'apartat "Jocs Matemàtics"de la revista "Scientific American", en la qual va plantejar diverses activitats relacionades amb el teorema. Per exemple, va proposar separar els quadrats blancs dels negres d'un taulell d'escacs amb només un tall. Un altre problema que va plantejar va ser el truc de màgia anomenat "an old paper-cutting stunt", el qual consisteix a tallar un paper amb un únic tall per aconseguir una creu i les lletres H-E-L-L. El truc va ser presentat de la següent manera:

"Per a aquells que no coneixeu el truc de màgia del Bé i el Mal, la història aniria així: dos éssers, el Bé i el Mal, arriben a les portes del "cel", però només el Bé té un bitllet per entrar. El mal demana ajuda al Bé, de manera que el Bé plega el bitllet (tal com es mostra a les instruccions), el talla i dóna les peces petites al Mal. Així doncs, el Mal les lliura a Sant Pere, el qual ordena les peces tot aconseguint escriure "HELL". Seguidament, el Bé lliura el seu tros de paper restant a Sant Pere, el desplega i en surt una creu."

1999 - Martin i Erik Demaine i Anna Lubiw

La geometria computacional és una branca de les ciències computacionals dedicada a l'estudi d'algoritmes que poden ser expressats en termes de geometria. Així doncs, l'any 1999 Martin Demaine, el seu fill Erik Demaine (17 anys) i Anne Lubiw, recorrent a aquesta disciplina, van presentar el mètode de l'esquelet, el qual es basa en un mètode per aconseguir les diferents formes fent només un tall. Així doncs, aquest mètode es basa a trobar “l’esquelet” del dibuix, la qual cosa és molt intuïtiva i pràctica, ja que permet doblegar moltes formes de manera molt senzilla. No obstant això, el mètode no cobreix tots els dibuixos que es poden fer amb els costats rectes, tot i que és difícil trobar formes que no contempli.

2002 - Marshal Bern, Erik Demaine, David Eppstein i Barry Hayes

Uns anys després de presentar el mètode de l’esquelet, es va demostrar que no cobria totes les possibilitats. Així doncs, E. Demaine, juntament amb Marshall Bern, David Eppstein i Barry Hayes, van desenvolupar el mètode de l’empaquetament de discos, el qual es va publicar l’any 2002.

2008 - Marshal Bern i Barry Hayes

Després d’uns anys de la publicació del mètode de l’empaquetament de discos, Bern i Hayes es van adonar que presentava un error. Així doncs, l’any 2008 el van arreglar i el van presentar de nou en una conferència.

"Tants anys fent ninots de paper i sempre vaig estar in albis de la teoria matemàtica o geomètrica que hi ha associada. Perquè quan fem papiroflèxia fem línies rectes que es tallen en punts. És a dir, la papiroflèxia permet fabricar punts. Podem fer-hi certes figures: els quadrats, el rectangle auri, la diagonal d'un cub de costat unitat... Hi fem geometria, la geometria de la papiroflèxia. Però jo mai no em vaig preguntar quina era la geometria de la papiroflèxia. Què s'hi podia fer i què no s'hi podia fer. Encara trigaria molts anys a saber quina és la geometria que s'amaga darrere d'aquesta art."[...]

Josep Pla i Carrera, "Damunt les espatlles dels gegants"[1]

5 El teorema del Fold and Cut

Tal com s'ha esmentat a l'apartat anterior, actualment es coneixen dos mètodes per afrontar aquest problema. El primer es basa a trobar "l'esquelet" del dibuix i el segon, consisteix en el mètode de l'empaquetament de discos. El primer és molt intuïtiu i pràctic, amb el qual es poden doblegar moltes formes de manera molt senzilla. No obstant això, el mètode no cobreix tots els dibuixos que es poden fer amb els costats rectes, tot i que és difícil que es doni el cas. El segon té una gran importància teòrica, ja que demostra el teorema però a la pràctica és inviable.

5.1 Introducció al teorema

D'aquest amanera, iniciarem l'apartat tot estudiant les particularitats dels casos més simples:

5.1.1 Quadrat centrat a un full de paper

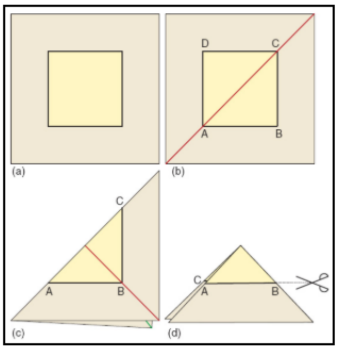


Figura 3: (a) El quadrat que es vol retallar. (b) Plec muntanya de la diagonal AC. Seguidament, un altre plec muntanya a la diagonal oposada (c) i així aconseguir alinear tots els costats (d). Imatge extreta de [5].

Quan es posa a la pràctica el repte de retallar el quadrat, l'objectiu principal a seguir és alinear tots els costats, aconseguint que cap costat estigui sobre aquesta línia. Així doncs, s'aconsegueix retallar només el quadrat i la silueta d'aquest resta al full sobrant.

5.1.2 Estrella centrada a un full de paper

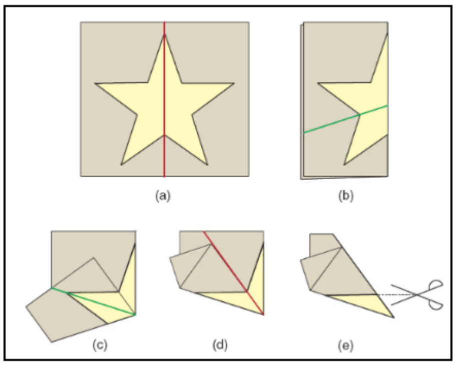


Figura 4: Mètode de Houdini per plegar una estrella regular de 5 puntes amb un sol tall.Imatge extreta de [5].

Pel que fa a l'estrella, el primer plec consisteix a plegar per l'eix de la simetria central d'aquesta, aconseguint alinear la meitat esquerra amb la dreta. Seguidament, tracta d'anar alineant la resta de costats a partir de doblecs des del centre de l'estrella. Així doncs, l'èmfasi està en la regularitat de l'estrella el qual ens facilita molt el plegat.

5.1.3 Rectangle centrat a un full de paper

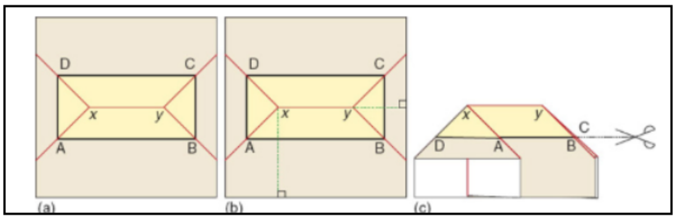


Figura 5: Mètode de Houdini per plegar una estrella regular de 5 puntes amb un sol tall. Imatge extreta de [5].

El rectangle no és regular, ja que els costats son diferents dos a dos. No obstant això, si s'inicia el plegat per les bisectrius dels angles, ja és un començament encertat. De seguida també un s'adona que serà necessari el plec marcat a la figura (a), ja que permetrà alinear els costats AB i CD. No obstant això, no haurem acabat perquè no s'està complint el teorema del grau parell, ja que a x i y només hi ha 3 plecs.

Teorema 5.1. ***Teorema del grau parell:*** *Un vèrtex en un plegament pla té un grau parell.*

Més concretament, també és present el següent resultat:

Teorema 5.2. ***Teorema de Maekawa-Justin:*** *Si els plecs muntanya*[2] *M i els plecs*

[2]Plec muntanya: Plec que visualment sembla una muntanya, és una aresta entre vèrtexs que es projecta cap a l'observador

vall[3] *de* V *es troben en un vèrtex d'un plegament pla, llavors* M *i* V *es diferencien per* 2*: o bé* $M = V + 2$ *o* $V = M + 2$.

D'aquesta manera, per tal de complir les dues condicions i conservar els plecs que ja es tenien, s'introdueixen els plecs anomenats perpendiculars (Més endavant s'explicaran detalladament). Per exemple, es pot introduir, un plec vall des de x i des de y i d'aquesta manera, obtenir $M = 3$ i $V = 1$ a x i y i així satisfer els dos teoremes.

5.1.4 Triangle escalè centrat a un full de paper

L'estratègia que s'ha seguit pel rectangle també funciona al cas del triangle escalè. Primer, es fa un plec muntanya a les bisectrius dels tres angles. Aquestes es tallen a un punt, l'incentre.

Teorema 5.3. ***Teorema de la bisectriu angular:*** *Les tres bisectrius d'un triangle es troben en un punt.*

Aquest teorema segueix de la proposició 4 del llibre IV d'Euclides la qual es refereix a inscriure un cercle en un triangle.

Finalment, s'escull una perpendicular des de x a un dels tres costats.

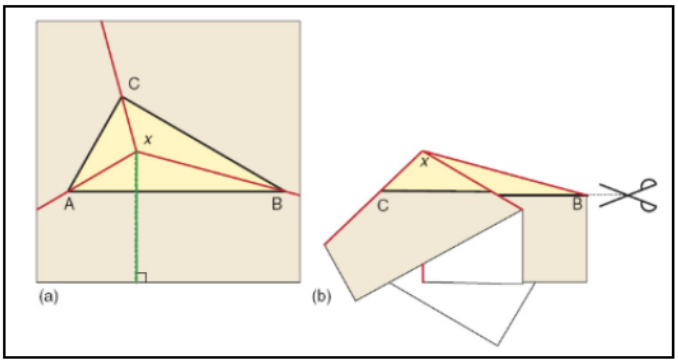


Figura 6: Mètode per plegar el triangle escalè. Imatge extreta de [5].

No obstant això, fins ara s'ha estudiat la solució en formes concretes però el teorema és més genèric, parla de qualsevol forma tal que tingui els costats rectes. Treballant sobre les formes més senzilles, E. Demaine i els seus col·laboradors troben un mètode que sembla funcionar, partint de l'estudi del triangle escalè i basant-se en el conegut mètode d'inducció. Pretenen estudiar si és possible adaptar l'estructura a formes més complicades i s'anomena mètode de l'esquelet recte.

5.2 Mètode de l'esquelet recte

Abans d'iniciar aquest apartat, caldria introduir les següents definicions:

Definició 5.4. *Anomenem* ***graf de tall*** *al conjunt d'arestes i vèrtexs del dibuix que es vol retallar.*

[3] Un plec vall és el contrari d'un plec muntanya

Definició 5.5. *Anomenem* ***arestes de tall*** *al conjunt d'arestes del dibuix que es vol retallar.*

Definició 5.6. *Anomenem* ***vèrtexs de tall*** *al conjunt d'arestes del dibuix que es vol retallar.*

L'esquelet recte és una construcció que generalitza el concepte de bisectriu d'un angle a un graf de tall donat. Tal com s'ha vist anteriorment, si es vol alinear dues arestes adjacents, el que s'ha de fer és doblegar per la bisectriu de l'angle que formen. Així mateix, es veurà que per alinear totes les arestes d'un graf de tall donat, s'haurà de doblegar doncs per totes les arestes del seu esquelet recte (i per més llocs). D'aquesta manera, s'arriba a la següent definició:

Definició 5.7. *L'****esquelet recte*** *d'un graf de tall és el conjunt de les trajectòries dels vèrtexs d'aquest graf en encongir contínuament cadascuna de les cares, de manera que les arestes (encongides) es mantenen paral·leles a les arestes de tall originals i la distància entre qualsevol d'aquestes i l'aresta de tall de la qual prové és la mateixa per a totes elles en un moment donat.*

Exemple 5.8. Dos segments, ressaltats a la Figura 7, delimiten un angle. Si ambdós es mouen de manera que la seva direcció no canvia i a més, la velocitat que porten és la mateixa, llavors en un moment determinat, ambdós estan a la mateixa distància de la seva posició inicial.

L'esquelet recte d'aquesta figura és llavors la trajectòria que segueix el vèrtex de l'angle, és a dir, la intersecció dels segments que es desplacen.

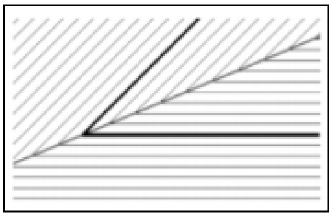


Figura 7: Esquelet recte dels dos segments que s'han anat desplaçant. Imatge extreta de [5].

Cal remarcar que la condició en què en un moment qualsevol ambdós segments es troben a la mateixa distància de les seves respectives posicions inicials fa que la trajectòria de la seva intersecció sigui la bisectriu de tots dos segments.

Així mateix, en un dibuix més complicat es repetiria aquest procés en cada cara de tall, desplaçant els segments de la forma indicada i dibuixant la trajectòria de les seves interseccions.

D'aquesta manera, en encongir una cara, ens van quedant cares més petites, però aquestes poden canviar de forma per tres motius:

1. **Una aresta passa a tenir longitud 0.**
   En aquest cas s'obvia i es continua encongint la figura formada per la resta d'arestes.

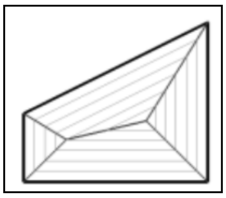


Figura 8: En encongir l'interior d'aquest polígon observem el cas 1 en el moment en què el quadrilàter encongit passa a ser un triangle. Imatge extreta de [6].

2. **Una regió passa a tenir àrea 0, és a dir, l'àrea que comprenia s'ha transformat en el procés d'encongir-se en un segment.**
   Llavors, dibuixem aquest segment i continuem encongint la figura restant.

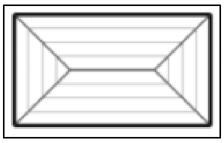


Figura 9: En encongir l'interior d'un rectangle observem el cas 2. Imatge extreta de [6].

3. **La cara que s'encongeix es transforma en dos (o més) cares diferents. En aquest cas, continuem encongint cada una de les cares noves per separat.**
   Així doncs, en cada moment, s'ha d'encongir la cara i, si canvia de forma, continuar-la encongint amb la seva nova forma, considerant com a vèrtexs d'aquesta nova cara tots els punts de la seva frontera que vénen dels vèrtexs de tall amb el procés d'encongir.

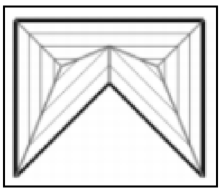


Figura 10: En encongir la cara interior d'aquest polígon observem el cas 3 en el moment en què el pentàgon encongit dóna pas a dos triangles. Imatge extreta de [6].

Vegem un altre exemple del concepte d'esquelet recte, aquesta vegada amb la lletra M el qual es donen lloc els tres casos explicats anteriorment.

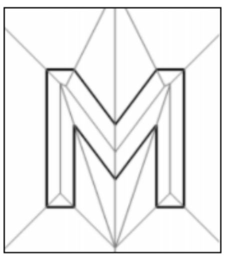


Figura 11: Esquelet recte de la lletra M. Imatge extreta de [7].

De la mateixa manera que s'ha definit en el graf de tall, podem definir les arestes d'esquelet, vèrtexs d'esquelet i cares d'esquelet.

A continuació, es formula un parell de propietats de l'esquelet recte que ens seran molt útils:

Lema 5.9. *Cada cara de l'esquelet recte conté una i només una aresta de tall.*

Lema 5.10. *Tota aresta d'esquelet recte és un subsegment de la bisectriu de les dues arestes de tall contingudes en les dues cares d'esquelet recte que comparteixen aquesta aresta.*

A l'enunciat d'aquest segon lema, cal aclarir a què es refereix per bisectriu de dues arestes de tall paral·leles. Al cas que aquestes arestes de tall són paral·leles i col·lineals, s'entén per bisectriu d'elles una recta perpendicular a les dues i si pel contrari, no són col·lineals, s'entén per bisectriu d'elles la recta paral·lela que està a igual distància de les dues.

Així mateix, es pot veure exemples d'aquests dos casos en el dibuix de la M anterior: Les arestes de tall verticals són paral·leles i no col·lineals; i els dos segments del graf de tall horitzontals de la part superior són paral·leles i la seva bisectriu és l'eix de simetria de la M.

D'aquesta manera, generalitzem el concepte de bisectriu. No obstant això, el problema de doblegar només per les arestes de l'esquelet recte no és suficient perquè el paper quedi pla. Tal com s'ha introduït en casos anteriors, ens cal doblegar les "perpendiculars".

Abans però, cal comentar que s'ha de tenir present que tant com l'esquelet recte com les perpendiculars que es definiran en la següent secció, estan definits en tot el pla, però de fet només es disposa d'un tros de paper (acotat).

El mètode que hem descrit fins ara per obtenir l'esquelet recte d'un graf de tall pot ser una mica dificultós. Tanmateix, existeixen algoritmes que computen l'esquelet de grafs plans qualsevol tal com es veurà en apartats posteriors.

5.2.1 Construcció de les perpendiculars

Si la motivació de l'esquelet recte ve d'alinear totes les arestes de tall, la de les perpendiculars ve de voler fer possible que el diagrama de doblecs donat per les arestes d'esquelet es doblegui pla, sense interferir amb ell. La intuïció diu que si gràcies a l'esquelet recte permet alinear dues arestes de tall, per no fer malbé això i que segueixin alineades l'únic que es pot fer és doblegar a més per perpendiculars a les arestes de tall.

Seguidament, es descriu doncs el mètode de construcció de les perpendiculars:

Des de cada vèrtex V de l'esquelet recte, s'intenta dibuixar en cada cara d'esquelet incident a aquest vèrtex un segment perpendicular a l'aresta de tall continguda en aquesta cara d'esquelet. Es diu que s'intenta "dibuixar"perquè en alguns casos aquest segment perpendicular surt immediatament de la cara d'esquelet en qüestió i no es pot dibuixar. Aquest és el cas, per exemple, del vèrtex d'esquelet C de la Figura 12.

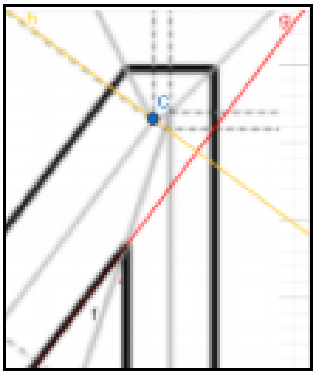


Figura 12: La perpendicular del vèrtex d'esquelet C surt de la cara d'esquelet.

Si el segment perpendicular a dibuixar des de V coincideix amb una aresta d'esquelet adjacent a V, considerem que podem dibuixar la perpendicular en qüestió i passarem a considerar aquesta aresta d'esquelet també com una perpendicular. A la figura 13 es pot veure un exemple d'aquest cas.

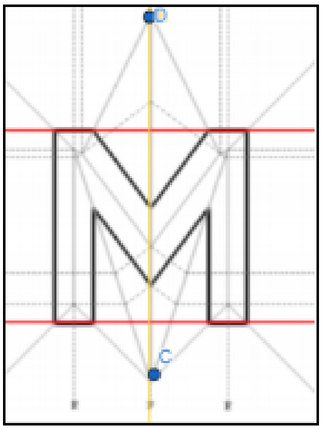


Figura 13: La perpendicular de vèrtex C i D coincideix amb una aresta d'esquelet.

En la Figura 16, es pot veure que estan dibuixades amb línia discontínua per ressaltar el seu caràcter de perpendiculars.

En els casos en els quals s'ha pogut dibuixar el segment perpendicular s en qüestió, també es pot donar el cas que aquesta pot sortir de la cara d'esquelet C en la que està per un dels seus altres vèrtexs (Cas 1), o per un punt p de l'interior d'una de les seves arestes A (Cas 2). Si surt, d'un altre vèrtex, no cal fer més. Suposem doncs que surt per l'interior de la seva aresta A, i sigui C' la cara d'esquelet que comparteix amb C l'aresta A. Llavors, dibuixem C' des de p un segment perpendicular a l'aresta de tall continguda a C'. Això és el mateix que reflectir s per A, ja que A és la bisectriu de les arestes de tall contingudes a C i C', també serà la bisectriu de s i s'. Així doncs, sempre podrem dibuixar un tall s'. En la figura 14 es mostra aquesta situació.

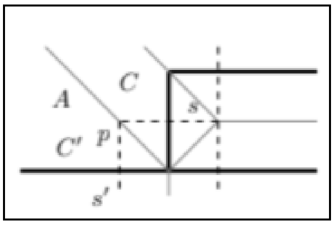


Figura 14: Descripció de com se situa la perpendicular després de tallar l'aresta A. Imatge extreta de [7].

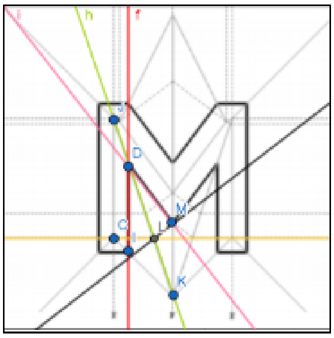


Figura 15: Situació en què es troba primer el Cas 2 i seguidament, el cas 1. Es traça la perpendicular del punt C, respecte a la recta f (vermella), tot obtenint la recta g (groga). Aquesta, talla a la recta h (verda), pel punt L. Fins aquí, s'ha donat el cas 2. Així doncs, es traça una perpendicular al punt L, respecte a la recta i (rosa) tot obtenint la recta j (negra), la qual interseca amb la recta i (rosa) per M. En aquest cas, M és un vèrtex, per tant, es conclou.

Es continua el procés d'allargar la poligonal formada per s i s', fins que un dels dos segments perpendiculars que es vagi dibuixant acabi a un vèrtex, o s'allargui fins a l'infinit, és a dir, que no sigui un segment sinó una semirecta.

Aleshores, se segueix el procés fins a arribar a un vèrtex d'esquelet, fins a haver construït totes les perpendiculars. No obstant això, algunes de les perpendiculars resultants quedaran connectades entre si, donant lloc a diferents components connexes de perpendiculars.

Per últim, es posa nom a les components connexes de perpendiculars com es mostra en el dibuix de l'exemple de la lletra M el qual s'ha anat treballant al llarg de l'apartat.

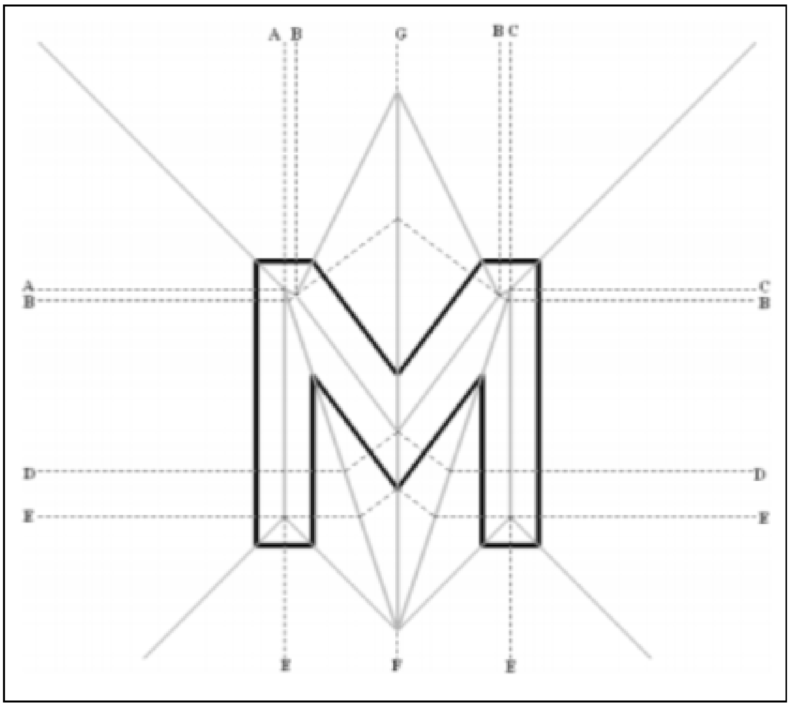


Figura 16: Aquest és el patró que mostra M en dibuixar-li les perpendiculars, traçades amb línia discontínua. A partir d'aquest moment, el graf de tall està en negreta, l'esquelet en línia continua fina i les perpendiculars amb línia discontinua. Imatge extreta de [7].

Així i tot, el procés de construcció de perpendiculars pot no acabar. Concretament, se'n coneixen dos casos:

- **Comportament en espiral:**
  Es pot donar el cas que el procés de construcció de les perpendiculars no acaba, però ja que el paper és acotat, només apareix un nombre finit de perpendiculars. A més, ja que només es doblarà per algunes de les perpendiculars que apareixen en el nostre paper, i només hi ha un número finit d'elles, això no suposarà cap problema. De totes maneres, en aquest cas el nombre de plecs dependrà de la mida de paper.

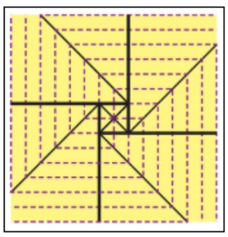


Figura 17: Comportament en espiral. Imatge extreta de [6].

- **Comportament dens:**
  Aquest és el cas en el qual el mètode de l'esquelet no es pot aplicar i conseqüentment no serveix com a mètode per demostrar el teorema. És el cas en què el comportament de construcció de les perpendiculars no acaba i a més, al tros de paper hi ha algun camí d'infinites perpendiculars.

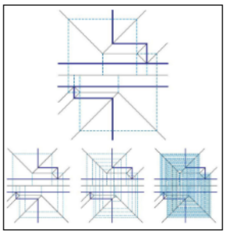


Figura 18: Diferents iteracions en l'algoritme de la construcció de perpendiculars per aquest graf de tall. Imatge extreta de [6].

Afortunadament, el comportament dens és molt estrany. Existeix la conjectura que té probabilitat 0. Malgrat tot, també és cert que la pràctica és dificilíssim que el lector es trobi amb una situació així.

D'ara i en endavant, se suposaran casos diferents del de la densitat, és a dir, que l'algoritme de construcció de perpendiculars acaba (en el nostre paper) i només tenim un número finit d'elles dibuixades.

5.2.2 Passadissos

Tal com es pot apreciar a la figura 16, les perpendiculars divideixen el pla en diferents regions, que es denominaran passadissos. Aquests passadissos tenen "amplada" constant i una o dues parets.

De fet, es poden donar lloc aquests quatre casos:

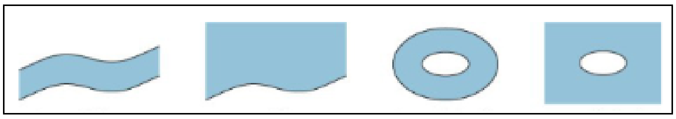


Figura 19: Tipus de passadissos: Lineal de dos parets, lineal d'una paret, circular de dos parets i circular d'una paret. Imatge extreta de [6].

Vegem l'exemple que s'ha estudiat anteriorment, la lletra M, amb els passadissos acolorits per entendre millor els diferents tipus de passadissos i la seva estructura. Tots els passadissos que apareixen son lineals de dues parets, excepte els que estan en les quatre cantonades, que son lineals d'una paret.

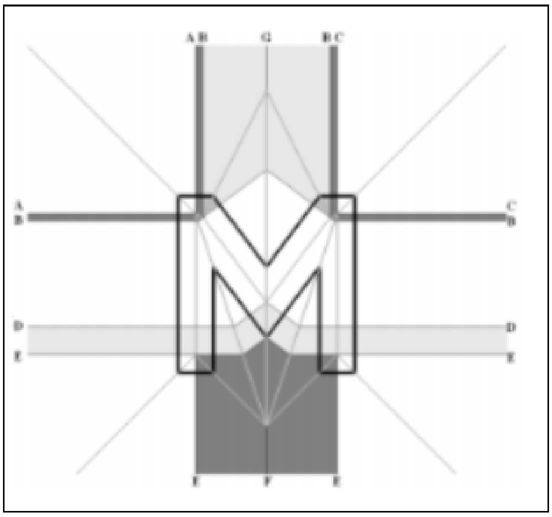


Figura 20: Exemple de lletra M amb passadissos lineals de dues parets i d'una paret. Imatge extreta de [7].

No obstant això, si es dibuixa una M diferent, poden aparèixer altres tipus de passadissos. De fet, a la figura 21 s'ha dibuixat un passadís circular de dues parets (La resta de passadissos no s'han dibuixat per tal de facilitar la comprensió).

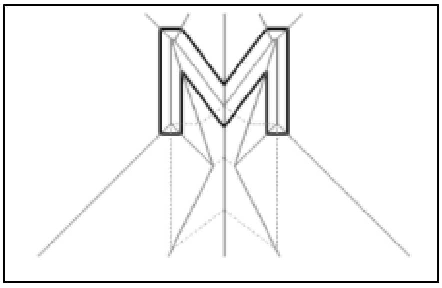


Figura 21: Exemple de lletra M amb un passadís circular de dos parets. Imatge extreta de [7].

Per últim, en la figura 22 tenim un exemple de passadís circular d'una paret degenerat, ja que la seva paret és l'únic vèrtex d'esquelet, no podem dibuixar cap més perpendicular.

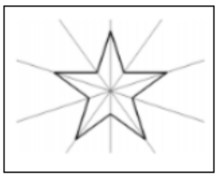


Figura 22: Estrella de cinc puntes la qual presenta un passadís circular d'una paret. Imatge extreta de [6].

5.2.3 Doblegat de paper

El mètode de l'esquelet només serà vàlid en els casos en els quals només es tinguin passadissos lineals, d'una o dues parets. No obstant això, hi ha una conjectura que afirma que en un graf de tall on els vèrtexs tenen grau dos com a màxim, només apareixen passadissos lineals amb probabilitat 1. Malgrat tot, a la figura anterior, els passadissos circulars apareixen per la simetria. Cal notar que encara que s'ha dit que el mètode de l'esquelet només serà vàlid en general en els casos que no es tinguin passadissos circulars, s'ha vist anteriorment com doblegar el paper i tallar l'estrella de cinc puntes a la Figura 4.

A continuació, només es consideraran els casos amb passadissos lineals, i es veurà com es pot doblegar el paper per tots els plecs necessaris perquè quedi pla i a més, s'alineïn totes les arestes de tall i res més.

Per fer-ho, s'explicarà primer el cas de com doblegar un únic passadís (Com si es retallés de la resta de paper) i seguidament, es veurà com es poden doblegar tots els passadissos a la vegada.

Així i fet, s'escull un passadís qualsevol i doblega com si fos un acordió, alternant plecs vall i plecs muntanya per les arestes d'esquelet que estan en aquest passadís.

Llavors, ja que les arestes de l'esquelet son les bisectrius de les arestes de tall contingudes en les cares d'esquelet que comparteixen l'aresta de l'esquelet en qüestió, amb aquest mètode totes les arestes de tall que hi hagi en aquest passadís quedaran alineades i només elles estaran en aquesta línia. A més, tan a sobre com a sota d'aquesta línia de tall ens queden cares de tall diferents. De fet, és el que es pretén. D'aquesta manera, l'objectiu és intentar doblegar cada passadís com un acordió.

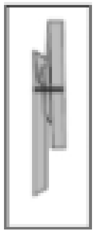


Figura 23: Passadís lineal de dos parets doblegat. En negreta es mostra la part del graf de tall continguda en el passadís, que queda alineat. Imatge extreta de [6].

Convé ressaltar que es recomana començar pel passadís més complicat, intentar adaptar el doblat a la resta de passadissos i una vegada aconseguit, doblegar les fronteres dels passadissos que siguin necessaris perquè el doblegat quedi pla. En el següent, apartat s'explicarà més detalladament.

Vegem-ho amb l'exemple mostrat anteriorment del rectangle:

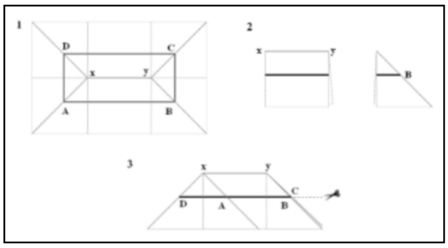


Figura 24: En la imatge 1 es mostra el graf de tall d'un rectangle de vèrtexs A, B, C i D, el seu esquelet amb vèrtex x i y, i les perpendiculars. En la imatge 2, es mostra el passadís central i l'interior dret doblegats per separat com acordions. Per últim, en la imatge 3, es mostra el paper doblegat i a punt, per tallar. Imatge extreta de [7].

Per últim, es comentarà per quines fronteres de passadissos és necessari doblegar exactament, encara que, com s'ha dit anteriorment, aquest pas en la pràctica es fa de manera intuïtiva.

Aleshores, construïm el graf mètric (graf en el qual tenim en compte la longitud de les arestes) que té tants vèrtexs com components connexes de perpendiculars. S'haurà de tenir en compte que en el cas que entre dues d'aquestes components hi hagi un passadís, llavors els corresponents vèrtexs estaran units per una aresta de longitud de l'amplada del passadís. Un exemple d'aquest cas és el vèrtex B i C de la figura 27. A més, en els vèrtexs del graf corresponent a les components connexes de perpendiculars que delimiten passadissos lineals d'una paret, es dibuixaran tantes semirectes sortint d'ells com passadissos lineals d'una paret delimiti aquesta component connexa de perpendiculars. Es pot observar també en el cas del passadís B i C.

Així mateix, comentar que està demostrat que en aquest graf no poden haver-hi cicles (camins d'arestes que no es repeteixen en un graf que compensen i acaben en el mateix punt). A aquests grafs se'ls denomina arbres i tenen l'aspecte de la figura següent:

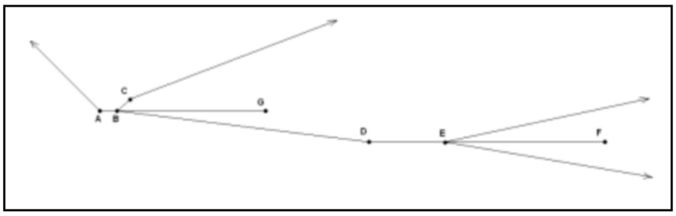


Figura 25: Arbre mètric associat a la figura 16. Imatge extreta de [7].

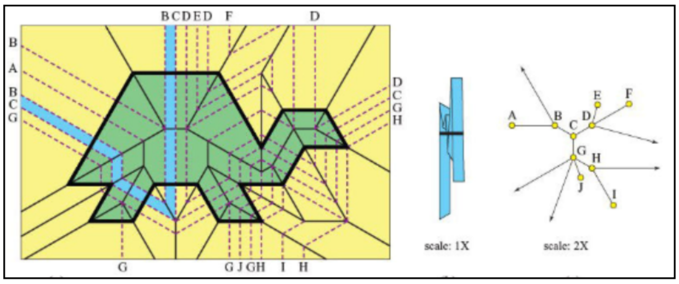


Figura 26: Exemple molt utilitzat a les conferències d'E.Demaine a l'hora d'explicar el teorema. Imatge extreta de [6].

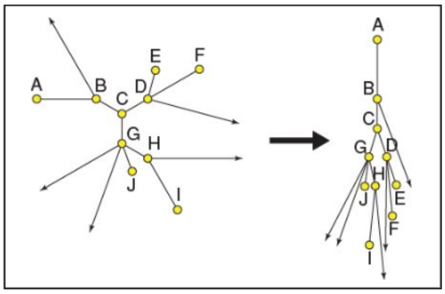


Figura 27: Arbre plegat de la figura 27. Imatge extreta de [6].

Una vegada els passadissos s'han doblegat bé com un acordió i està llest per tallar, és senzill adonar-se que, en aquest plegat, una component connexa de perpendiculars acaba tota junta en una línia. De fet, és allà on es pleguen els diferents passadissos que tenen com a frontera part d'aquesta component connexa de perpendiculars. Per tant, vist des de sobre, els nostres passadissos doblegats i enganxats tenen l'aspecte de l'arbre mètric que hem construït. Així doncs, l'únic que queda per provar és que aquest arbre es pot doblegar pla. No obstant això, és trivial perquè si s'agafa l'arbre per un vèrtex qualsevol i es deixa que pengi, el doblegat que fa al nostre paper es llegirà en aquest arbre. Clarament, aquesta forma de doblegar el paper alinea totes les arestes del graf de tall i res més, per tant, ja es podrà fer el tall de tisores i es retallarà el graf de tall amb un sol tall!

5.3 Mètode de l'empaquetament de discos

Tal com ja s'ha comentat en apartats anteriors, E.Demaine i els seus col·laboradors van treballar molt amb el mètode de l'esquelet amb l'objectiu de trobar-hi la demostració del teorema. Malgrat tot, tal com s'ha vist al darrer apartat, en trobar-se un contraexemple, els investigadors es van centrar en, almenys, caracteritzar els casos en els quals sí que es podien aconseguir, desanimats perquè el mètode en el qual s'havien esforçat no es podia generalitzar per tots els casos. D'aquesta manera, deixen aparcada una solució més general temporalment.

Així doncs, E. Demaine torna enrere per veure la solució per triangles i comencen a estudiar el disseny d'una altra forma. Observen que les bisectrius es poden considerar radis d'un sector circular, i és possible dibuixar una sèrie de circumferències tangents entre si que determinen les línies del doblat. D'aquesta manera, es generalitza la situació per crear un nou mètode de trobar les línies per on doblar.

Així, el mètode de l'empaquetament de discos es considera un empaquetament a base de discos de les regions que determina el graf recte inicial i a diferència del mètode de l'esquelet recte, és vàlid per tots els grafs de tall.

Malauradament, no s'entrarà amb detall, però sí que se'n farà una breu explicació. A la figura 28, es poden observar les construccions auxiliars que s'han de fer per retallar una figura simple, com un triangle.

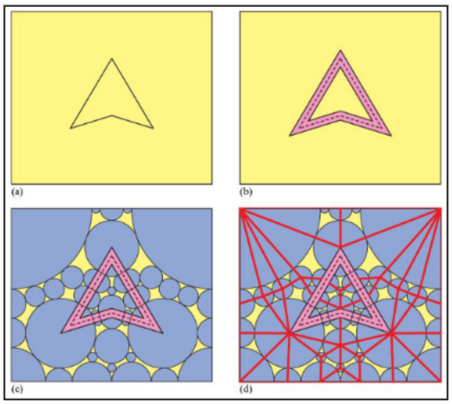


Figura 28: Mètode d'empaquetament de discos. Imatge extreta de [6].

El mètode tracta del següent:

1. Ampliar el graf de tall de manera que segueixi tenint la mateixa forma.
2. Emplenar el paper de discos tal que els vèrtexs del graf del pas 1 siguin centres de discos, les arestes d'aquest estiguin totalment cobertes per radis de discos, els discos que es toquin ho facin de manera tangent, i els espais entre discos estiguin delimitats per tres o quatre arcs de circumferència.
3. Unir el centre de cada disc amb aquells centres de discos tangents a ell. Això ens omple el paper de triangles i quadrilàters, que poden ser interiors o exteriors a la nostra figura.
4. Doblegar cada triangle i quadrilàters d'una determinada forma, anomenada molècula, en la que queden alineades totes les arestes que el delimiten.
5. Modificar el fet de doblegar de les molècules exteriors per què les cares diferents de tall quedin als costats diferents de la línia per la qual hem de tallar.

Doncs, després d'aquesta breu explicació es pot observar que aquest mètode és inviable a la pràctica, encara que demostri el teorema. De fet, concretant a l'exemple del triangle, aconseguir plegar i retallar-lo és molt més complex, de manera que el primer, el mètode de l'esquelet, és el que s'usa a l'hora de portar els problemes a la pràctica.

5.4 Problemes derivats no resolts

Després de nombroses conjectures, establir diferents mètodes de construcció, cerca de contraexemples, creació de mètodes alternatius i errors, l'any 2002, Erik Demaine amb l'ajuda de Marshall Bern, David Eppstein i Barry Hayes va demostrar Teorema de Fold and Cut. L'autor, en va escriure un llibre en el qual detalla tot el procés i el qual també esmenta diferents conjectures i problemes actualment oberts. Un d'ells consisteix a trobar cotes al número de plegat segons les arestes del graf inicial, així com la solució òptima, que només està clar en casos molt concrets.

Un segon problema derivat d'aquest, seria estendre el resultat a tres dimensions per aconseguir trobar les línies de plegat per transformar figures polièdriques en plans, cosa que podria ser molt útil per dissenyar formes de plegat de recipients innovadors. De fet, els mateixos investigadors citats al paràgraf anterior es van fer la següent pregunta: Es podria doblegar i aplanar qualsevol poliedre si el model fos buit? L'exemple de plegar una caixa és considerada dels casos més senzills de la classe d'objectes 3D coneguts com a políedres. Les caixes de les figures 29 i 30 veiem que tenen sis cares rectangles i són fàcilment plegables, però no és així en al cas de la figura 31 la qual té més de 2000 cares.

Aquest problema rep el nom de *Flattening Problem* i al mateix llibre el qual E.Demaine explica la demostració del teorema de Fold and Cut, ja l'esmenta i el descriu com un problema el qual encara no està resolt però sí que se n'han trobat possibles solucions en casos més concrets.

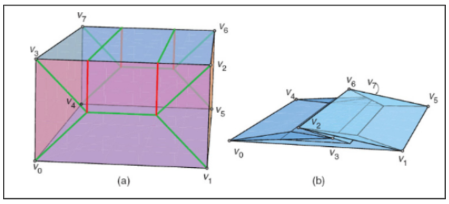


Figura 29: Caixa plegada. Imatge extreta de [6].

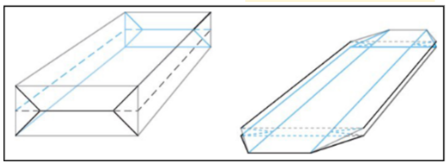


Figura 30: Caixa de cereals plegada. Imatge extreta de [6].

Figura 31: Poliedre amb 2290 cares, la majoria d'elles rectangulars. Imatge extreta de [6].

Per tal de comprendre'n la relació amb el problema de Fold and Cut, a continuació es realitzarà una breu comparació. En aquest últim, es parteix d'un graf format per segments rectes 1D en un full de paper 2D i l'objectiu és aplanar tots els segments a una mateixa línia 1D. Així mateix, el "problema de l'aplanament d'un políedre" parteix d'un políedre conté cares planes 2D a l'espai 3D, amb l'objectiu d'aplanar totes les cares al mateix pla 2D.

Resumint el que s'ha dit, vegem-ne la següent taula de comparació:

Teorema del Fold and Cut	1D segments	A un paper 2D	Pleguem per aconseguir una línea 1D
Polyhedron flattening	2D cares	A un espai 3D	Pleguem per aconseguir una cara 2D plana

Per concloure aquest apartat, caldria comentar al llarg del capítol del llibre Geometric Folding Algorithms. Linkages, Origami, Polyhedra" [6], s'esmenten diferents conjectures, les quals algunes d'elles s'hi han fet referència algunes a l'apartat anterior.

5.5 Aplicacions

L'autor, E.Demaine, en alguns dels seus articles i conferències fa referència a les aplicacions del teorema en usos industrials. Concretament, a l'aplicació al càlcul de moviments dels braços articulars, al tall de les peces i diversos camps més.

Curiosament, E.Demaine i Anna Lubiw, l'utilitzen per dissenyar el logotip pel CCCG (Canadian Conference on Computational Geometry), l'any 2001.

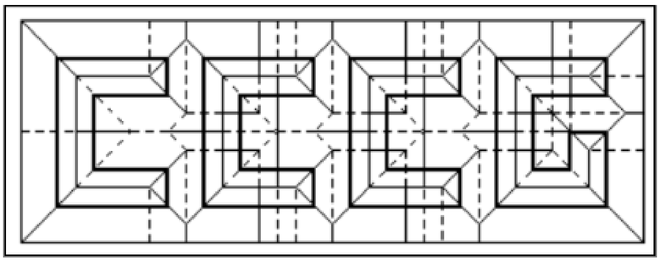


Figura 32: Logo del CCCG, l'any 2201. Imatge extreta de [8].

D'altra banda, s'han dissenyat varis *Applets* per intentar crear el patró de plecs que ens proposa el mètode de l'esquelet recte. Permeten dibuixar polígons, veure'n l'esquelet recte i les perpendiculars tot seleccionant diferents botons. També ens pot mostrar l'assignació de plecs muntanya o plecs vall. Concretament, Erik Demaine, Martin Demaine i Katie Steckles, l'any 2016 van dissenyar el següent Applet, el qual si introdueixes un text, et mostra el seu graf de tall, el seu esquelet i doblecs per tal de tallar-lo amb un sol tall. De fet, el disseny de la portada d'aquest treball s'ha fet tot utilitzant-lo. Enllaç: http://erikdemaine.org/fonts/simplefoldcut/

Per concloure, fer especial èmfasi a Joseph O'Rourke, professor de ciències de la computació del Smith College amb gran interès al camp de la investigació de la geometria computacional, i que ha publicat diversos estudis tant del mètode de l'esquelet com el mètode de l'empaquetament de discos, com d'origami computacional en general. També, ha programat *Applets* com els que s'acaben de descriure.

Així mateix, David Bélanger's [12], tot inspirant-se amb aquest últim, va dissenyar una textitApplet amb l'objectiu de recórrer a la geometria computacional per trobar la solució a la construcció geomètrica de complexes teulades. Així doncs, el disseny d'aquestes es troba en el mètode de l'esquelet recte.

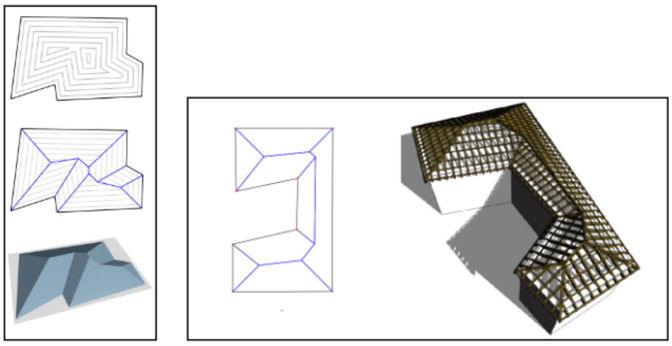


Figura 33: Disseny de teulades a través del mètode de l'esquelet recte. Imatge extreta de [9] i [10].

"Aquell tercer de batxillerat per a mi, era el segon curs als jesuïtes va ser d'allò més apassionant. Vaig descobrir-hi una llengua, el llatí que m'apropava als clàssics i un llenguatge, l'àlgebra, que em permetia de resoldre problemes que altrament m'hauria estat molt difícil de resoldre i, en alguns casos, impossible. Però, a més de tot això, vaig descobrir la passió per explicar les coses que descobria als altres, als companys. Era apassionant, però no era fàcil. [...]"

Josep Pla i Carrera, "Damunt les espatlles dels gegants"[1]

6 Didàctica

Fins ara, s'ha analitzat el problema des d'un punt de vista teòric. Així doncs, ara que ja es tenen suficients coneixements i eines, es pot afrontar el repte de com portar-ho a l'aula de secundària. Primerament, es veurà perquè és interessant fer-ho i seguidament, com fer-ho tot seguint les instruccions i consells de reconeguts referents didàctics.

Segonament, es presenten un seguit d'activitats emmarcades en el Teorema de Fold and Cut, les quals estan plantejades intentant seguir la línia del que ens proposen.

6.1 Ensenyar matemàtiques, avui

""El nou món seguirà fent-se cada vegada més nou i obrirà noves oportunitats a certs col·lectius, però pot tancar portes a moltes persones. És aquesta evolució ràpida del canvi constant el que planteja a l'educació el repte d'inventar-se a si mateixa de nou per respondre als canvis i, el que és més important, liderar de forma positiva la conducció d'aquests canvis. A través de l'educació aspirem a preparar des del present cap al futur."
Tres professors de matemàtiques [14]

Els temps canvien i la realitat ens imposa una revisió de metodologies d'ensenyament i aprenentatge de les matemàtiques. Referents didàctics s'han plantejat si té sentit demanar a l'alumnat que memoritzi i apliqui instruccions sense cap justificació conceptual. S'han plantejat si el rebuig vers les matemàtiques que senten una part dels infants, i el consegüent fracàs escolar, pot pal·liar-se amb un canvi d'enfocament. D'aquesta manera, pretenen que desenvolupin estratègies i entenguin l'abast d'allò que fan a classe de matemàtiques per fer transcendir el que hi aprenen arreu on ho necessiten.

Així doncs, des d'aquest treball es pretén que els alumnes coneguin els conceptes matemàtics que s'amaguen darrere el Teorema del Fold and Cut, i els descobreixin manipulativament per comprendre'ls. Es pretén que es familiaritzin amb els conceptes, operin amb ells, i que n'enregistrin la seva manipulació per apropar-se al simbolisme matemàtic.

"Ensenyar matemàtiques ha de ser equivalent a ensenyar a resoldre problemes. Estudiar matemàtiques no ha de ser res més que pensar en la solució dels problemes"
Lluís Santaló

"Ensenyar matemàtiques és fer possible que els estudiants les descobreixin per si mateixos"
George Pólya.

"Passar d'aprendre coses per resoldre problemes" a "aprendre a resoldre problemes" i a "aprendre a través de la resolució de problemes".
Hans Freudenthal

George Pólya proposa focalitzar l'interès educatiu en la resolució de problemes, com una aventura intel·lectual, com a invitació a l'exploració de camins i a la descoberta d'estratègies, com una aproximació a la generació de coneixement matemàtic. Aposta per la resolució de problemes (heurística) com a motor de l'aprenentatge. Formar als estudiants a través de la seva participació activa, assajant mètodes per resoldre qüestions, fent induccions, fent analogies, fent "proves i errors", formulant conjectures. D'aquesta manera, situa el docent no com a transmissor de coneixements sinó com a guia d'un procés. Finament, seguint la mateixa línia, Hans Freudenthal opta per motivar i treballar a classe a partir de situacions reals i casa perfectament amb la resolució de problemes de Pólya.

Actualment i cada vegada més, la resolució de problemes es converteix en l'objecte d'aprenentatge, o fins i tot, en el vehicle per fer nous aprenentatges. Així mateix, la proposta basada en el teorema del Fold and Cut, pretén seguir la línia, és a dir, basar-se en la resolució de problemes.

"Conrear permanentment a les classes l'hàbit de fer-se preguntes i el gust per cercar-hi respostes, en definitiva, d'instaurar un "ambient de resolució de problemes"
Tres professors de matemàtiques [14].

Diversos referents didàctics de les matemàtiques descriuen que no es tracta tant de fer molts problemes de simple aplicació sinó de fer-ne alguns a fons, donant temps a l'alumne perquè comprengui bé l'enunciat, perquè hi pensi, temptejant, assajant estratègies i vies alternatives, reflexionant sobre els errors i aprenent-ne.

Tenint-ho en compte, es proposen diferents reptes amb l'objectiu de treballar la resolució de problemes, ja que en un mateix repte es podran aplicar diferents estratègies. A més, fomenta que l'alumnat es faci preguntes sobre com se solucionarien reptes semblants als proposats, de manera que ells mateixos es podrien generar els seus propis enunciats.

"low threshold, high ceiling"[11]
Nrich, Maths Project Cambridge,England

"Una part important del nostre ofici és escollir reptes adequats per a cada alumne, que ni li siguin impossibles d'assolir ni li resultin trivials, reptes que li permetin obtenir petits èxits que el vagin impulsant per anar més lluny. En certa manera, som "provocadors d'èxits matemàtics"."
Tres professors de matemàtiques [14]

A més, al llarg de la proposta es pretén promoure que l'alumne vagi assolint una cadena de petits èxits que li donin motius (motivació) per continuar avançant el seguit de reptes. Així doncs, per tal d'aconseguir-ho, al moment de plantejar cada repte se n'explica l'enunciat, es presenta ajuda amb consells i suports per resoldre'l en el cas que sigui necessari i un conjunt de preguntes per anar més enllà.

Aprendre matemàtiques és una part del recorregut que porta del concret a l'abstracte, és el camí que permet construir idees a partir de relacionar fets. Pares, mestres, professors i la societat son possibles guies en aquest camí que es ramifica i es complica progressivament. D'ells depèn, en la major part, que avancin.
Fer matemàtiques s'assembla al que fan els matemàtics de debò: experimentar, reflexionar, deduir, aplicar i expressar simbòlicament.
"Portar-los a abstraure idees matemàtiques demana temps: cal que avancin pas a pas, sense pressa, a un ritme que és personal. Per més que ens hi encaparrem, no tots avançaran al mateix ritme ni necessitaran el mateix suport."

Donar molta informació no els fa avançar, només els situa en un punt fals de coneixement.
Tres professors de matemàtiques [14]

Per tal d'aconseguir aprenentatges significatius, s'empren recursos rics. Així doncs, la dificultat es rau a assolir aquesta riquesa. El següent esquema ens dóna una orientació que cal tenir present a l'hora de dissenyar-lo:

Recurs = Suport + Actitud + Activitat + Gestió de l'imprevist

Suport

El coneixement ha de començar a través dels sentits. Per què doncs començar amb una exposició verbal de les coses i no amb una observació real d'aquestes coses?
Janos Comenius
Didàctica Magna (1657)

Seria discutible si la matemàtica és o no una ciència experimental, però sembla clar que l'educació matemàtica hauria de tenir un fort component experimental
Tres professors de matemàtiques [14]

Connexió a la xarxa, paper i tisores són els materials necessaris per poder dur-ho a terme. Aquest és un dels punts que s'ha tingut en compte a l'hora de crear aquesta proposta virtual durant el confinament perquè només es podien dur a terme activitats les quals el seu material es trobés a la llar.

En cap cas, ni a causa del confinament, el recurs podia perdre la pota del "suport", ja que tal com ens diu la Carme Brugués, les activitats d'experimentació, en aquest cas amb el paper i tisores, no trivialitzen, al contrari, permeten treballar continguts avançats i cultivar l'abstracció.

Actitud

"Que la classe sigui atractiva, que l'alumne tingui ganes d'anar a classe... que s'hi senti bé".
Lluís A. Santaló

Animar la natural i instintiva curiositat que tenen els nens d'11 a 16 anys conduint-los al descobriment de les veritats matemàtiques, tractant de donar-los la impressió d'haver-ho fet per si mateixos... ".
Emma Castelnuovo.

Al llibre "Tres professors de matemàtiques, com fer estimar i aprendre bé les matemàtiques" posa especial èmfasis al fet de fer emocionar a través d'elles i transmetre la passió vers a elles als alumnes. De fet, l'ensenyament formatiu ens dóna la mà amb l'ensenyament actiu. L'alumne ha de participar en l'aprenentatge, ha de mostrar-se motivat pels problemes. Els coneixements no han de ser embotits a pressió, sinó adquirits a través de la curiositat de l'infant, el qual afortunadament, té sempre curiositat per qualsevol cosa que li sigui presentada adequadament.

"El medi és el missatge"
Marshall McLuhan

"En educació matemàtica un recurs és qualsevol element que ens ajuda en aquesta comunicació per tal de construir coneixement matemàtic, de re-crear matemàtica i de recrear-nos amb la matemàtica. No obstant això, els recursos no son neutres, el medi és el missatge.
Marshall McLuhan

Conseqüentment d'haver de fer un gir a la proposta a causa de la Covid-19 i adaptar-la al confinament, però alhora volent aconseguir fer arribar al problema als estudiants, cadascú amb situacions diverses i canviants, es va plantejar elaborar una pàgina web, ja esmentada anteriorment, on recollir tota la informació i adjuntar-hi la proposta plantejada a través de la plataforma molt interactiva, dinàmica i amena. Així doncs, davant de les dificultats afegides, s'ha intentat fer arribar la proposta a tots els alumnes. A més, es va intentar seguir el consell de l'Anton Aubanell que ens diu que s'hauria d'afegir un tercer eix a la pissarra, el material manipulatiu. Fins i tot, caldria afegir un quart. Quin? El 4t, l'emoció i així aconseguir obtenir un "públic captiu" a públic captivat".

Cal donar temps als alumnes per experimentar i descobrir, respectant el seu ritme, guardant silenci, recollint les idees que apareguin i traient-ne suc. La part més dura de l'aprenentatge a partir de la formulació de preguntes a l'alumnat és la de tenir la boca tancada i aguantar. No expliquis, pregunta!
Paul Richard

"Un material no és un recurs, cal immergir-lo en una activitat que el converteixi en un instrument d'educació matemàtica"
Anton Aubanell

Un bon problema mal gestionat pot esdevenir una mala activitat d'aprenentatge i, de vegades, al contrari.
Jordi Deulofeu

Abans de concloure aquest apartat, m'agradaria fer èmfasis en aquestes últimes cites. Davant el fet que la proposta fos virtual, va ser un gran repte la gestió de l'activitat. Bé sigui per la preocupació de si els alumnes podrien accedir-hi, per la disposició del material o per la gestió en una videoconferència dels diferents reptes i nivells de cada estudiant. Així doncs, la proposta creada ha tingut en compte que els estudiants poguessin marcar el seu ritme i la seva meta, ja que s'ha basat en un seguit de vídeos i reptes els quals han pogut dur a terme de manera autònoma.

Activitat

A l'hora de dissenyar l'activitat, s'ha tingut en compte la següent estructura que l'Anton Aubanell cita al document "Orientacions pràctiques per a la millora de la geometria" [16] la qual descriu que una activitat rica hauria de tenir una fase d'experimentació, seguida d'una de descoberta, conceptualització i per últim, una de formalització i/o demostració.

Al mateix document, defensa integrar en el treball geomètric activitats més competencialment riques basades en l'experimentació, que promoguin el raonament, la comunicació, l'argumentació, que impliquin exploració, repte personal, descoberta, que mostrin la utilitat real del coneixement geomètric i així es pretén aconseguir.

Per últim, també s'ha recorregut al llibre "The five practices in practice", recomanat per l'NCTM (National council of Teachers of Mathematic) el qual descriu 5 fases a seguir i a tenir en compte a l'hora de planificar i donar una classe. Consisteixen en les següents:

1. Anticipar-te a les respostes dels estudiants. Implica, haver estudiat totes les possibles respostes.
2. Monitorar les respostes reals dels estudiants
3. Seleccionar determinats estudiants perquè representin el treball matemàtic durant la discussió grupal.
4. Seqüenciar les respostes dels estudiants que es mostraran en un ordre específic.
5. Connectar les diferents respostes dels estudiants i vincular-les amb les idees matemàtiques clau.

Gestió de l'imprevist

"L'educació matemàtica té en cada moment nous reptes"
Cecília Calvo [13]

Si hem de fomentar la creativitat (la dels alumnes i la nostra), cal afavorir les pràctiques reflexives on cada mestre es converteix en un recercador de la seva pròpia millora docent.
Claudi Alsina [14]

Avui dia i més que mai, estarem d'acord que estem davant un present canviant i un futur que obra pas amb noves fites a assolir. Així mateix, atesa la situació viscuda de confinament a causa de la Covid-19, la proposta que s'anava a implementar inicialment i la qual s'havia d'anar a dur a terme a diferents instituts, es va veure afectada i la proposta va haver d'assolir el repte de virtualitzar-la. Així doncs, es va haver d'apostar per noves dinàmiques, nous recursos, amb una actitud oberta cap a la nova situació recollits a la pàgina web.

El problema de Fold and Cut es pot estudiar des de molts punts de vista diferents. De fet, cada vegada que l'estudiava i en feia recerca per tal de presentar la proposta, se m'obria un nou camí. Així doncs, ha estat un treball difícil decantar-me per una en concret. Així mateix, no he volgut abandonar les diferents mirades que hi he trobat. D'aquesta manera, he creat una pàgina web on entre d'altres, hi ha un apartat anomenat "fons d'interès" el qual he volgut plasmar tota aquesta informació tan valuosa i rellevant.

6.2 Proposta d'activitats

6.2.1 Descobrim el teorema de Fold and Cut

A continuació es proposen un seguit d'activitats, les quals es presenten inspirant-se en el format de l'ARC, Aplicació de Recursos al Currículum.

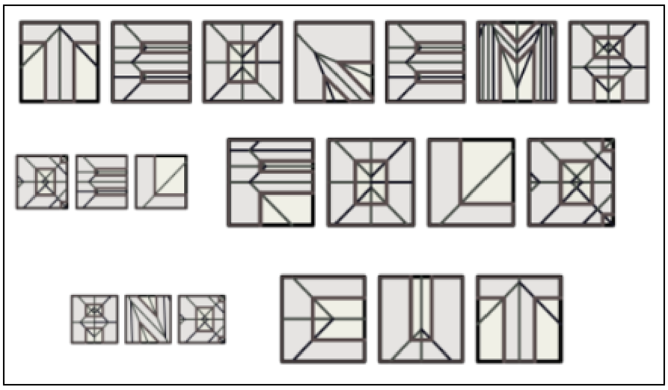


Figura 34: Imatge activitat "Descobrim el teorema de Fold and Cut"@

Objetius

Reconèixer simetries i altures en figures planes.

Descobrir el concepte de bisectriu en general (no només dels angles) manipulativament a través del plegat de paper.

Donar a conèixer el teorema de Fold Cut tot practicant-lo en casos particulars i aplicant tècniques basades en l'origami i dibuix tècnic.

Descripció de la proposta

El teorema de Fold and Cut diu que qualsevol figura plana que tingui els costats rectes es pot obtenir realitzant un sol tall recte d'un full de paper amb els doblecs adequats.

La proposta és una posada en pràctica del teorema del Fold and Cut la qual proposa reptes de manera graduada. S'inicia l'activitat amb un seguit de casos bàsics, com ara polígons regulars, seguint per triangles i quadrilàters, i finalment, estendre-ho per a qualsevol figura.

Aspectes didàctics i metodològics

A través de resoldre els diversos reptes, es descobreix que una de les estratègies utilitzades per resoldre el problema és plegar els angles interiors per les seves bisectrius i recórrer a les rectes perpendiculars dels costats per tal que el paper quedi plegat i pla i poder fer el tall. En aquest sentit, l'activitat podria ser un recurs d'activació de coneixements previs de geometria bidimensional i de tècniques de dibuix tècnic.

L'eix de l'activitat gira al voltant d'un Genially que conté vídeos autoexplicatius tant d'introducció de l'activitat com dels reptes a resoldre a cada pas. Enllaç:

`https://view.genial.ly/5ed0cce49be45e112004bc93/guide-foldandcutheorem-aula`

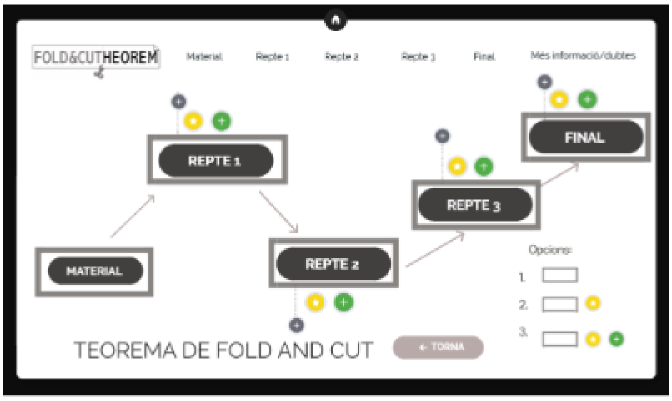


Figura 35: Esquema general de la proposta

L'activitat està plantejada durant l'època de confinament de la Covid-19 i per tal poder arribar a tot el públic de manera virtual, s'han dissenyat 3 seqüències diferents, les quals van incrementant la profundització al problema i conseqüentment, també el temps per a realitzar-la. L'alumne pot escollir l'itinerari que més prefereixi segons l'interès al tema. També pot decidir canviar d'itinerari durant la realització de la proposta.

Itinerari 1:
Activitats:

- Repte 1
- Repte 2
- Repte 3
- Repte final

Itinerari 2:
Activitats:

- Repte 1 + "Donem una volta al repte 1"
- Repte 2 + "Donem una volta al repte 2"
- Repte 3 + "Donem una volta al repte 3"
- Repte final

Itinerari 3:
Activitats:

- Repte 1 + "Donem una volta al repte 1" + "Fem un pas més enllà al repte 1"
- Repte 2 + "Donem una volta al repte 2" + "Fem un pas més enllà al repte 2"
- Repte 3 + "Donem una volta al repte 3" + "Fem un pas més enllà al repte 3"
- Repte final

Abans d'introduir el primer repte, el suport també conté un vídeo introductori de l'activitat on es llisten els recursos necessaris per dur a terme l'activitat. A més, cada repte conté cadascun dels altres apartats següents:

- Un vídeo amb l'enunciat del repte.
- Una ajuda amb consells i suports per resoldre el repte.
- Un conjunt de preguntes per anar més enllà.
- Plantilla del repte per imprimir (si s'escau).

Per últim, per concloure l'activitat es demana als alumnes que gravin un vídeo explicant les estratègies emprades i la resolució dels reptes tot fent-ne una producció d'algun d'ells.

Aquesta activitat ha estat dissenyada en temps de confinament. En cas que es faci des de casa, es pot dur a terme de manera autònoma. En cas que es porti a terme a l'aula, es recomana treballar-la en grups reduïts, per tal de comunicar-se estratègies i construir coneixement entre els membres del grup.

En cas que es vulguin dur terme l'activitat a l'aula, és a dir, sense confinament, és possible obtenir les plantilles sense accedir al suport, al següent link:

`https://foldandcut.wixsite.com/website/plantilles`

Recursos emprats

Els materials necessaris per dur a terme l'activitat són únicament fulls de paper, regle, i tisores. Per agilitzar la preparació, convé imprimir les plantilles dels reptes. En cas contrari, s'hauran de dibuixar les figures als fulls per resoldre el repte a posteriori.

També, serà necessari disposar del suport Genially, ja que fa la funció de fitxa per a l'alumne. En cas que l'activitat es porti a terme a l'aula, es pot projectar per tothom.

Al Genially, també hi trobem la descripció del material i informació prèvia a l'activitat que es necessitarà a l'apartat de "material".

Continguts, competències i processos que es treballen de forma destacada

En aquesta activitat es treballa la resolució de problemes, ja que per un mateix repte es poden aplicar diferents estratègies. A més, fomenta que l'alumnat es faci preguntes sobre com es solucionarien reptes semblants als proposats, de manera que ells mateixos es podrien generar els seus propis enunciats. Les competències que es treballen en aquesta activitat són les associades a la dimensió de resolució de problemes i de raonament i prova. També, es treballa la part de comunicació i representació, ja que per expressar l'estratègia, és convenient disposar d'un vocabulari ric i precís. Per últim, també es contemplen competències dels àmbits transversals. Més concretament, es treballaria la dimensió d'aprendre a aprendre i la dimensió de tractament de la infomació. No obstant, les competències que s'avaluarien en aquesta activitat són:

Àmbit matemàtic
Competència 3. Mantenir una actitud de recerca davant d'un problema assajant estratègies diverses

Competència 4. Generar preguntes de caire matemàtic i plantejar problemes

Àmbit artístic
Competència 4. Interpretar i representar amb formes bidimensionals i tridimensionals, estàtiques i en moviment

Els continguts que es treballen són el vocabulari propi de la geometria bidimensional, juntament amb el concepte de bisectriu d'un angle i arribant al concepte de bisectriu general.

Alumnat a qui s'adreça especialment

Aquesta activitat va adreçada a 3r o 4t d'ESO i pot abordar des d'alumnes amb necessitats educatives especials fins a alumnat d'excel·lència. Està composta per 4 reptes que es poden graduar, de manera que es pot ampliar la proposta per dur-la a terme tant a primer cicle d'ESO com a cursos postobligatoris.

Temporització:

Itinerari 1: 1 hora
Itinerari 2: 2 hores
Itinerari 3: 3 o 4 hores

Interdisciplinarietat, transversalitat, relacions amb l'entorn

Tenint en compte que en aquesta activitat intervenen l'espai bidimensional i les tècniques de dibuix tècnic, es poden establir connexions amb l'àrea de visual i plàstica.

Documents adjunts:

Fitxa per l'alumnat:
`https://view.genial.ly/5ed0cce49be45e112004bc93/guide-foldandcutheorem-aula`

Plantilles impreses:
`https://foldandcut.wixsite.com/website/plantilles`

Per últim, abans de concloure aquest apartat m'agradaria esmentar que no s'ha realitzat una fitxa pel professorat de l'activitat perquè tal com s'ha comentat repetidament és una proposta la qual s'ha vist afectada per la situació emergent dels últims mesos i s'ha dissenyat de manera que fos autoexplicativa. A més, s'ha intentat dotar de tots els detalls i consells necessaris perquè es pogués dur a terme sense la necessitat de professor present. Segurament, en cas que s'hagués pogut portar a l'aula presencial, s'hauria elaborat un estil d'activitat diferent, el qual els "suports" que presentava cada repte, s'haurien hagut de plasmar a una segona fitxa. Ja per finalitzar, també es va considerar convenient plasmar tota aquesta informació digitalment per tal d'adaptar-me al canvi de tasques de l'alumnat que ha viscut arran de la situació emergent.

7 Implementació de les activitats

7.1 Matefest-Infofest, Universitat de Barcelona

El passat dimecres 27 de maig del 2020, la facultat de matemàtiques i informàtica de la Universitat de Barcelona, va celebrar virtualment la Matefest-Infofest 2020, esdeveniment que se celebra anualment amb l'objectiu de divulgació de la informàtica i les matemàtiques als alumnes de secundària i batxillerat d'arreu de Catalunya. No obstant això, a causa de les circumstàncies a causa de la Covid-19, l'edició d'enguany ha estat virtual.

Així doncs, en motiu al meu Treball de Fi de Grau, em vaig encarregar de preparar el següent material. Com a requisits, ens van explicar que la intenció era no només captar l'atenció i curiositat dels estudiants de secundària i batxillerat, sinó també de qualsevol persona que estigués interessada i per tant, el taller s'havia de poder realitzar sense coneixements previs a la matèria en qüestió. A més, tenint en compte la situació d'emergència causada pel virus COVID-19, que ha provocat, entre d'altres, el tancament d'escoles i l'anul·lació d'esdeveniments públics, havia de ser una presentació en línia dinàmica i interactiva.

D'aquesta manera, i sota els requisits, vaig preparar el següent Genially per tal que el públic que hi accedís pogués gaudir del taller a casa seva amb material fàcilment trobable a totes les llars.
`https://view.genial.ly/5ecc2daa246a860d273fffeb/guide-foldandcutheorem-divulgacio`

Enllaç al web de la Matefest-Infofest:
`https://matefestinfofest.wixsite.com/matefestinfofest2020`

Tracta d'una proposta divulgativa l'objectiu principal de la qual és donar a conèixer el teorema foldcut de manera dinàmica, amena i oberta; poder-ne experimentar diversos exemples; i fer-nos plantejar preguntes. Concretament, presenta el camí 1 descrit a l'apartat 6.2.1 *Descobrim el teorema de Fold and Cut.* Per últim, també ofereix la possibilitat d'aprofundir en el teorema en cas que es vulgui.

Personalment, quan se'm va presentar la idea de participar-hi, em va fer especial il·lusió però en notificar-me mesos més tard que seria virtual, va ser una notícia decebedora però a la vegada tot un repte a assolir. És clar que el semestre actual ha estat greument afectat per la situació tan emergent que hem viscut però a la vegada ha estat motiu per afrontar els nous obstacles que s'han presentat. Cal remarcar que la principal preocupació vers la jornada en línia va ser no saber si rebria "feedbacks", però sorprenentment i dies posteriors vaig començar a rebre retorns de l'activitat les quals em varen fer especial il·lusió, ja que havia destinat tant temps i ganes en preparar-la.

Així doncs, m'agradaria destacar les següents pel seu caire original i que es poden trobar a l'Annex A.

7.2 Institut Domènec Perramon (Arenys de Munt, Barcelona)

El passat dilluns 8 de Juny vaig tenir la sort de poder presentar la meva proposta didàctica al curs de 4t d'ESO de l'INS Domènec Perramon. L'institut compta de 3 línies, per tant, vaig poder fer arribar el treball al voltant d'uns noranta alumnes. No obstant això, els professors a l'inici del confinament van prendre la decisió que les diferents matèries anirien proposant diferents propostes d'activitats a un curs o cursos determinats i els alumnes sota la seva elecció podrien realitzar-la o no.

La tasca del teorema estava plantejada des del departament de matemàtiques i es va presentar com a "Activitat de final de curs".

Així doncs, es va crear un Classroom com a eina de comunicació amb els alumnes. Incloïa una breu presentació i instruccions a l'hora de realitzar la producció (Veure Annex B) i finalment, l'enllaç al Genially:

Enllaç: `https://foldandcut.wixsite.com/website/proposta-aula`

Els primers dies vaig rebre missatges de dubtes concrets logístics del funcionament de l'activitat i d'altres, sobre l'execució dels reptes. Així mateix, em feia molta il·lusió cada vegada que rebia una producció, ja que era la mostra que un alumne més havia resolt algun dels reptes proposats i majoritàriament amb èxit. Dic això perquè en alguns casos, sobretot als més difícils, m'enviaven solucions que no estaven del tot correctes. Altres, m'enviaven produccions de tota la família, com és el cas d'un dels vídeos adjuntats, el qual, la protagonista és la germana de l'alumna (Es disposa del permís parental per utilitzar-lo). També, esmentar una altra producció la qual es podia observar que l'alumne estava a la platja retallant les diferents formes.

Seguidament doncs, es farà una anàlisi de les següents produccions rebudes.

Pel que fa a l'estratègia que seguien, a les produccions dels reptes més inicials, definien l'estratègia de la següent manera: "Buscava alinear els costats". Tanmateix, la majoria dels casos, sobretot, als reptes més avançats ja recorrien a utilitzar la paraula "bisectrius" a l'hora de definir el que estaven fent. Si bé és cert, que definien els plecs com a "bisectrius" dels angles, només en un cas em va arribar la producció d'un alumne, el qual no he aconseguit el seu consentiment, que va descriure que per resoldre'l va buscar "bisectrius en general", referint-se que havia plegat tant la bisectriu dels angles com la dels costats, ja que el que estava buscant era un plec que dos equidistant als dos costats. En tot cas, s'ha pogut observar diferents estratègies a l'hora de plegar.

Quant als itineraris que van recórrer els diferents alumnes, els resultats han estat diversos. Des d'alumnes que només varen fer el primer i segon repte, com altres que van seguir-los tots exhaustivament, és a dir, seguint l'itinerari 3 però arribant fins al triangle escalè.

Així mateix, tot i que només un alumne, el qual vam compartir diversos mails va arribar a l'elaboració del quadrilàter i fins i tot, a tallar alguna de les lletres del seu nom, la majoria és cert que van arribar fins al repte del triangle escalè. Tanmateix, analitzant el dia que es va presentar la proposta, el passat 8 de juny, Arenys de Munt ja estava en una fase molt avançada del desconfinament. A més, l'activitat estava presentada com a activitat de final de curs i també podia ésser que els alumnes pensessin menys complexa i llarga del que realment era.

Fent una mirada general, l'objectiu de descobrir manipulativament el concepte de bisectriu, encara que s'arribés al concepte de bisectriu d'un angle, s'ha complert indubtablement.

En segon lloc, també es va aconseguir establir un ambient de resolució de problemes el qual en tot moment es buscava. A més, constantment formulaven conjectures i es trobaven en situacions de "prova i error".

En tercer lloc, el Genially pretenia ser una guia d'un procés i no un transmissor de coneixement, tot i que la gestió d'un mestre a una aula presencial sempre serà molt més constructiu.

Així doncs, ja per concloure, la valoració en general ha estat molt positiva tot i els diferents inconvenients que ha tingut però que en qualsevol cas han servit d'aprenentatge per futures ocasions. Realment, tan unes produccions com altres, han estat molt i molt interessants, ja que cadascuna d'elles m'ha mostrat un aspecte o l'altre dels que buscava. Així mateix, mostren que vaig aconseguir despertar emoció i interès pel tema, que en qualssevol cas, va ser sempre el meu objectiu principal.

Enllaç a les produccions seleccionades les quals mostren tota la varietat que vaig rebre: `https://drive.google.com/drive/folders/1XwIA2ybsdVsinSa52S7A7gjUIpJ-oS6q?usp=sharing`

8 Conclusions

"No hi pot haver parenentatge sense acció, i no hi ha acció sense aprenentatge"
Reg Revans, gurú de l'anomenat "action learning"

"Aprenent, fent" descriu perfectament el meu projecte. Vaig aprendre a plegar i retallar el quadrat amb un sol tall, fent. Vaig aprendre a plegar i retallar l'estrella de cinc puntes, fent. Vaig aprendre a plegar i retallar amb un sol tall el meu nom, fent.

El moment el qual en Jordi em va presentar el teorema, el qual es descriu a l'apartat dels agraïments, se'm van despertar dues inquietuds. La primera era entendre bé que m'estava explicant i a part, d'una necessitat de provar-ho. La segona era entendre què havia de fer i com havia de procedir per desenvolupar un treball final de grau. Així doncs, només vaig aprendre-ho, fent, és a dir, llegint articles, escoltant conferències, doblegant i retallant paper, fent-me moltes preguntes. En definitiva, investigant. A la vegada també, formant-me molt, aprenent a elaborar una seqüència d'activitats tot fent-la i adaptant-me a les circumstàncies a les quals m'he trobat.

Així mateix, durant l'elaboració de tota la proposta didàctica, en tot moment pretenia proposar reptes o problemes als alumnes els quals haguessin de recórrer a diferents estratègies per resoldre'ls. No obstant això, reflexionant-ho considero que jo també m'he trobat en un constant ambient de resolució de problemes, començant pel confinament i acabant per investigar les comandes del programa "Làtex". Això sí, sempre "aprenent, fent".

Així doncs, "aprenent i fent" el teorema, he pogut arribar a estudiar molta matemàtica que s'hi amaga al darrere, no només pel que fa als conceptes, teoremes i proposicions, sinó en la manera de pensar i raonar, ja que no havia estudiat ni investigat mai l'àlgebra que s'amaga rere la papiroflèxia. De fet, era un món totalment desconegut per a mi però que ha resultat agradar-me moltíssim. Considero que tot i ésser tan innovador per a mi, m'he submergit als articles i llibres d'E.Demaine amb l'objectiu d'entendre com podia aconseguir plegar qualsevol figura plana que em proposés.

També m'agradaria destacar que l'estudi profund de totes i cadascuna de les referències citades posteriorment i les opinions i consells que he rebut han estat una peça clau per tal de realitzar una bona proposta didàctica. Per altra banda, els enfocaments que li he fet des dels diferents punts de vista ha estat el que més m'ha complagut, ja que he fet pogut combinar dos àmbits els quals hi tinc molta afició, la bellesa de les matemàtiques i l'art de transmetre-les, és a dir, la didàctica de les matemàtiques.

"Aprenent, fent" de la posada en pràctica a l'institut Domènec Perramon, faig dues lectures a la proposta. La primera és que de cara a una pròxima vegada virtual s'han de fer millores per tal de garantir millor la comprensió dels reptes. La segona és que si bé és cert que en primer moment vaig plantejar una proposta la qual només tenia en compte que aprenguessin totes les matemàtiques que s'hi podien extreure, a la vegada vaig oblidar de la segona part d'un dels principals objectius del treball: Proposar activitats motivadores que despertin l'interès per la matèria. "Aprenent, fent", i sobretot en temps de confinament, he vist que el que havia considerat part d'un altre objectiu, esdevé un objectiu per si sol, ja que els últims mesos totes les famílies hem viscut una situació extremadament dolorosa i la mostra dels resultats tan emotius que he tingut m'han fet comprendre que l'he assolit.

Lligant-ho amb aquest, remarcar també que he recollit diverses felicitacions per la proposta, tant dels professors com dels alumnes.: "Que original i creatiu!", "no sembla que estigui fent matemàtiques", entre d'altres.

Pel que fa a la resta d'objectius,

"Aprenent, fent" he acabat desenvolupant una seqüència d'activitats emmarcades al bloc de contingut d'espai i forma.

"Aprenent, fent" he aconseguit crear un ambient de resolució de problemes a cadascuna de les cases, inclosa la meva.

"Aprenent, fent" he dut matemàtiques innovadores. De fet, tan innovadores que un alumne em va comentar que va trobar d'allò més interessant conèixer un problema matemàtic el qual encara s'hi donava voltes quan ell ja havia nascut.

"Aprenent, fent" he desenvolupat habilitats per la papiroflèxia i que de fet, estic quasi segura que sempre més esdevindrà un recurs per a mi a l'hora d'ensenyar matemàtiques.

"Aprenent, fent" he desenvolupat destreses com a futura docent matemàtica i a la vegada m'he adonat encara més de la dificultat de la docència matemàtica, exceptuant-la en temps de confinament i la responsabilitat del país de tenir professors formats tant de la matèria com de la didàctica.

I més en confinament.

Per acabar, encara que sembli paradoxal, em falta presentar un gran suport al treball.

El període de recerca del projecte va ser llarg. D'aquesta manera, vaig arribar a tenir tantes idees a desenvolupar que sobretot en Jordi em va haver de frenar els peus. No obstant això, tampoc volia deixar perdre tota la informació o si més no, no compartir-la amb la resta de professors, així que finalment m'agradaria presentar la pàgina web batejada com "Foldandcutheorem" el qual he fet tant esment durant tot el treball però que fins ara no havia presentat.

Així doncs, amb l'enllaç ja concloc però a la vegada us dono la benvinguda al bloc. Hi ha plasmada tota la informació que he recollit sobre el tema però que malauradament no he pogut transmetre al treball bé sigui per una causa o altra. A més, com a objectiu personal, m'he proposat anar-lo actualitzant.

Enllaç: `https://foldandcut.wixsite.com/website`

Ha estat un plaer, Teorema del Fold and Cut, fins aviat.

9 Línies de futur

En tot moment, he intentat transmetre els bons moments que he viscut fent recerca al voltant del teorema, tant des d'un punt de vista matemàtic com didàctic.

No obstant això, tal com comentava anteriorment disposo de diverses idees les quals no he pogut desenvolupar. Una d'elles és elaborar un projecte el qual l'objectiu principal sigui la construcció d'una teulada, tot emprant el mètode de l'esquelet recte. D'aquesta manera, donaria lloc a un projecte o seqüència d'activitats STEAM (Science, Technology, Engineering, Art and Mathematics), cada dia més freqüent. Així mateix, aconseguiria reivindicar la "M" que també està en majúscules per tal que tingui entitat pròpia i no limitar-se a ser una eina per calcular i tractar dades tal com moltes vegades passa.

També m'agradaria, poder dur a terme una sessió potser més orientada a alumnes de Batxillerat per presentar una petita pinzellada al recorregut històric que es va seguir fins a arribar a la demostració del teorema. Això sí, sempre amb un suport de material manipulatiu o digital, com el Geogebra. A més, també m'agradaria investigar-lo i aprendre'l millor, per tal d'aconseguir fer alguna simulació de plegat, tal i com es va iniciar fins al confinament juntament amb en Bernat Ancochea, actual president de Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya (FEEMCAT) i president de l'Associació Catalana de Geogebra.

Per últim, tinc el pressentiment que el projecte del teorema del Fold and Cut no ha acabat sinó que encara li espera un llarg camí, tant amb una mirada matemàtica com didàctica però que de moment es limitarà a tenir el bloc actualitzat i difondre'l.

"Ara, però, em sento satisfet i alhora agraït als meus pares perquè van ser capaços de plantar la llavor de la papiroèxia a les meves mans, primer, i al meu cervell, més tard."

Josep Pla i Carrera, "Damunt les espatlles dels gegants"[1]

Referències

[1] Pla i Carrera, J. (1998). *Damunt les espatlles dels gegants.* Col·lecció FME (Universitat Politècnica de Catalunya).

[2] Departament d'Ensenyament. (2015). Decret 187/2015 DOGC núm. 6945. *Currículm educacació secundaria obligatòria. Àmbit Matemàtic* . Recuperat http://www.xtec.cat/monografics/documents/curriculum/secundaria/annex4.pdf. [Consulta: 30/05/2020]

[3] Demaine, E, i Martin L. Demaine, E.(2004), *"Fold-and-Cut Magic", Tribute to a Mathemagician,* , pàgines 23–30.

[4] Demaine. E, Martin L. Demaine, E. i Lubiw, A.(1998), *Folding and Cutting Paper*, Tokyo, Japó,2, Lecture Notes in Computer Science (Including Subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics), 1763, 104–118. https://doi.org/10.1007/978-3-540-46515-7_9 pàgines 104–117.

[5] O'Rourke, J. (2011) *How to Fold It. The Mathematics of Linkages, Origami*, and Polyhedra., Cambridge Univerity Press.

[6] Demaine, E, O'Rourke, J.(2007), *Geometric Folding Algorithms.* Linkages, Origami, Polyhedra., Cambridge University Press.

[7] Laburta, E. E. (2013).*El problema de "doblar y un solo corte"*, pàgines 1–10.

[8] Pàgina web principal del CCCG: https://cccg.ca/ [Consulta: 03/06/2020]

[9] Straight skeleton roofs: https://en.wikipedia.org/wiki/Straight_skeletonhttps://en.wikipedia.org/wiki/Straight_skeleton [Consulta: 03/06/2020]

[10] Straight Skeleton for Modeling Roofs. GeometryFactory: https://geometryfactory.com/portfolio/roofs-and-the-straight-skeleton/ [Consulta: 03/06/2020]

[11] Nrich, T. (2011). *Creating a Low Threshold High Ceiling Classroom.* Recuperat de https://nrich.maths.org/7701 [Consulta: 10/06/2020]

[12] Biunno, E. (2013). The Origami Polygon Cutting Theorem. Recuperada de http://cgm.cs.mcgill.ca/~athens/cs507/Projects/2003/EricBiunno/

[13] Calvo, C., Deulofeu, J., Jareño, J., Morera, L. (2016). *Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria obligaroria* Madrid: editorial Síntesi

[14] Claudi, A., Anton, A., Carme, B. (2019). *Tres professors de matemàtiques.* Primera edició. Barcelona. Associació de mestres de Rosa Sensat.

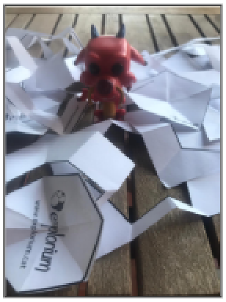
[15] Pla i Carrera, J. (2007). *L'Àlgebra de la papiroflèxia.* Butlletí de La Societat Catalana de Matemàtiques, 21, 81-155–155. https://doi.org/10.2436/bscm.vi.9822

[16] Aubanell i Pou, A. (2010). *Orientacions pràctiques per a la millora de la geometria.* Direcció General d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat, 63–137.

A Produccions dels alumnes: Matefest-Infofest 2020

Produccions dels alumnes que van participar al tellar de Fold and Cut a l'edició Matefest-Infofest 2020 virtual i les quals em van fer arribar:







Per últim, voldria fer un especial esment a l'Aina Estévez, de l'INS Fedac Castellar, amb qui hem compartit diversos emails, ja que li havien sorgit dubtes i qui em va enviar el següent vídeo:

`https://youtu.be/c0ydT4xj5tE`

Es disposa del consentiment de tots els autors les produccions exposades per poder-les adjuntar al treball.

B Gestió activitat i produccions alumnes de l'INS Domènec Perramon

Benvinguts alumnes de 4t a l'activitat del teorema del Fold and Cut!

Qui sóc i què estic fent? Em dic Imelda Orriols, estudiant de matemàtiques de la Universitat de Barcelona i actualment, em trobo realitzant el treball final de grau.

Perquè estic aquí? Una part del treball consisteix a dissenyar una seqüència d'activitats inspirades amb el teorema de Fold and Cut i impartir-les. Així doncs, vaig demanar als vostres professors si podia portar-la a terme amb vosaltres.

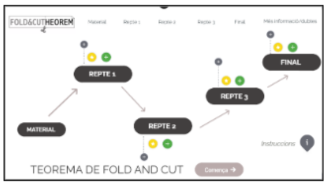
I què hem de fer? Molt fàcil, totes les instruccions i indicacions necessàries les trobareu a l'enllaç del final del document

I quan ho puc fer? Sempre que vulguis, està disponible les 24h del dia i els 365 dies de l'any! No obstant això, he de redactar una petita valoració i reflexió de la implementació de la proposta, per tant, m'agradaria poder rebre alguna de les vostres produccions. Per tant, com a data màxim seria el divendres 19 de Juny.

Què he de tenir en compte? A l'hora de fer la reflexió sobre la implementació de l'activitat, segurament enllaçaré alguna de les produccions. Per tant, en el cas que em consenteixis utilitzar la producció, especifica-m'ho a l'hora de fer l'entrega tot utilitzant el següent format:

Nom i Cognom consenteixo la utilització d'aquesta producció pel treball de final de grau de matemàtiques "Teorema del fold and cut "de la Imelda Orriols.

I com funciona? Molt fàcil! L'enllaç et portarà a una presentació interactiva la qual has d'anar seguint. Primerament, t'explicarà el material i seguidament, al botó "instruccions" trobaràs els següents itineraris que pots escollir seguir.



Itinerari 1: Repte 1, repte 2, repte 3 i repte final.

Itinerari 2: Repte 1, "Donem una volta al repte 1", Repte 2, "Donem una volta al repte 2", Repte 3, "Donem una volta al repte 3" i Repte final.

Itinerari 3: Repte 1, "Donem una volta al repte 1", "Fem un pas més enllà al repte 1", Repte 2, "Donem una volta al repte 2", "Fem un pas més enllà al repte 2", Repte 3, "Donem una volta al repte 3", "Fem un pas més enllà al repte 3" i Repte final.

Alguna cosa més? Sí! Per últim, per concloure l'activitat us demanaria que gravéssiu un vídeo explicant les estratègies emprades al llarg dels reptes, la resolució d'un o més reptes tot fent-ne una producció d'algun d'ells. A més, també us podeu animar a contestar les preguntes proposades al llarg del vídeo.

No obstant això, en cas que es prefereixi fer una producció escrita o una alternativa, també és possible.

I si tinc dubtes? Tant em pots escriure pel xat de la pàgina web que trobaràs enllaçada, com escriure'm un mail a foldandcutheorem@gmail.com.

Això és tot!!!!!

Moltes i moltes gràcies i espero que gaudiu molt doblegant i retallant papers!