Universitat de Barcelona
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

El prekernel d'un joc cooperatiu: propietats geomètriques, caracterització i aplicació als jocs de bancarrota

---

Autor: Àngela Vall Martínez

Director: Dr. Josep Maria Izquierdo Aznar
Co-Director: Dr. Josep Vives Santa-Eulàlia

Realitzat a:
Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial
Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 20 de Juny de 2020

Abstract

In the field of Theory of Games, in this work we will focus on cooperative games, specifically on the study of the kernel and prekernel concepts of cooperative games and their geometric properties. We will also look at some of the most important non-geometric properties of the prekernel and bankruptcy games, to end with a conjecture on how to calculate points of the prekernel of a game of three players.

Resum

En el marc de la Teoria de jocs, en aquest treball ens centrarem en els jocs cooperatius, concretament en l'estudi dels conceptes de kernel i prekernel dels jocs cooperatius i les seves propietats geomètriques. També veurem algunes de les propietats no geomètriques més importants del prekernel i una pinzellada dels jocs de bancarrota, per acabar amb una conjectura sobre com calcular punts del prekernel d'un joc de tres jugadors.

2010 Mathematics Subject Classification 91A12, 91A80, 9104

Agraïments

En primer lloc, donar-los les gràcies als tutors del treball, al Dr. Josep Vives Santa-Eulàlia, pels seus consells, i al Dr. Josep Maria Izquierdo Aznar, per tota la seva ajuda i paciència.
També m'agradaria donar les gràcies als amics que em van acompanyar fins l'etapa universitària, ja que, tot i que la vida ens ha portat per camins diferents, sempre m'han animat, i als amics que he trobat pel camí.
I per últim, agrair el suport a la meva família.

Índex

1 Introducció

La teoria de jocs és una especialitat de la matemàtica aplicada relativament recent en l'àmbit de la economia; els primers antecedents es remunten al segle XVIII. El 1713 James Waldegrave donà una solució a un joc de cartes usant uns principis de teoria de jocs. A principis del segle XX, economistes i matemàtics donen un impuls formal a la disciplina. Entre d'altres, podem citar Émile Borel, qui va publicar diversos articles on va donar la formulació moderna d'una estratègia mixta i va trobar la solució minimax per a jocs de dues persones, o John von Neumann (veure Teorema Minimax 1928).
Un fet que marca un abans i un desprès en aquest camp és la publicació del llibre *"Theory of games and economic behavior"* per John von Neumann i Oskar Morgenstern el 1944, veure [9], llibre que va establir les bases de la teoria de jocs.

La teoria de jocs estudia situacions d'interacció estratègica entre diversos agents o "jugadors", en les quals el benefici d'un jugador depèn no només de les decisions de l'individu sinó de les decisions dels altres jugadors. Així doncs, es tracta de prendre la millor decisió tenint en compte les decisions dels altres. Quan els jugadors no poden (o no volen) coordinar les seves decisions es diu que el joc és no cooperatiu i aleshores és clau anticipar, imaginar o suposar quina serà la decisió dels altres jugadors abans de prendre una estratègia o un altra. Un exemple molt famós de joc no cooperatiu és el dilema del presoner.[2]
Una altra vessant dels jocs són els jocs cooperatius on es permet que els jugadors arribin explícitament a acords i coordinin les seves accions. En aquest punt, és rellevant preguntar-se si als jugadors els interessa cooperar, i, en cas afirmatiu, com s'haurien de distribuir aquests beneficis conjunts. En aquest treball suposarem que actuant conjuntament els beneficis s'incrementen i que els beneficis potencials es poden redistribuir lliurament entre els agents. És el que s'anomena un joc cooperatiu amb utilitat transferible.

En aquest treball ens basarem en el paper "Geometric properties of the kernel, nucleolus, and related solution concepts", de Maschler, Peleg i Shapley, 1979, veure [5], i en el llibre Introduction to the theory of cooperative games, de Peleg i Sudhölter, 2007, veure [6].
En l'apartat 1 veurem conceptes bàsics de la teoria de jocs, necessàris per comprendre les posteriors seccions.
En l'apartat 2, estudiarem des d'una perspectiva geomètrica els conceptes de kernel i prekernel.
En l'apartat 3, veurem propietats axiomàtiques del prekernel, i una caracterització axiomàtica del mateix.
En l'apartat 4, ens centrarem en l'estudi dels jocs de bancarrota i en donarem les principals propietats.
Finalment, en l'apartat 5, acabarem amb una conjectura sobre un mètode per calcular distribucions dins del prekernel.

[2] Es pot trobar explicat a https://policonomics.com/es/dilema-prisionero/

1.1 Definicions i preliminars

En aquest apartat definirem els principals conceptes i notacions que utilitzarem al llarg del treball, basant-nos en el llibre Jocs cooperatius i aplicacions econòmiques, veure [4].

Definició 1.1. Un joc cooperatiu amb utilitat transferible és un parell (N, v) on

- $N = \{1, 2, ..., n\}$ és el conjunt de jugadors.
- v és una funció, la funció característica, que associa a tota coalició $S \subseteq N$ un valor numèric $v(S) \in \mathbb{R}$, on suposarem que $v(\emptyset) = 0$.

El valor numèric associat a cada coalició s'interpreta com el guany que cada coalició o subconjunt de jugadors podria generar sense l'ajuda de la resta de jugadors. El valor associat a N (el conjunt del total de jugadors) $v(N)$ és el guany total generat per tots els jugadors i és el que s'han de repartir.

Definició 1.2. Anomenarem G^N el conjunt de tots els jocs definits sobre $N = \{1, 2, ..., n\}$.

Exemple 1. *Sigui un joc de tres jugadors amb la funció característica següent:*

$$\begin{array}{lll} v(\{1\}) = 0 & v(\{2\}) = 0 & v(\{3\}) = 0 \\ v(\{1,2\}) = 2 & v(\{1,3\}) = 2 & v(\{2,3\}) = 2 \\ v(\{1,2,3\}) = 9. & & \end{array}$$

Observem que, com que $v(\{i\}) = 0$ per $i = 1, 2, 3$, el valor de qualsevol jugador és zero o, el que és el mateix, cap jugador genera guanys sense la col·laboració dels altres. De la mateixa manera, com que $v(\{1, 2\}) = 2$, els jugador 1 i 2, sense l'ajuda del jugador 3, generen un guany igual a 2, i així per la resta de coalicions. En particular, $v(\{1, 2, 3\}) = 9$, el que vol dir que tots els jugadors generen un guany conjunt de 9 unitats, que s'ha de repartir entre tots.

Una distribució possible seria assignar tres unitats a cada un. També podríem distribuir dues unitats al jugador 1, dues al jugador 2 i cinc al jugador 3, ja que la suma de la distribució ha de ser igual al que tenim per distribuir. Però n'hi ha moltes més.

D'aquí es desprèn el concepte de preimputació o conjunt de totes les possibles distribucions del valor total entre els jugadors:

Definició 1.3. El conjunt de preimputacions d'un joc $(N, v) \in G^N$ és

$$X^*(N, v) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)\}.$$

Nota: Donat $x = (x_1, ..., x_n)$ interpretarem x_i com la quantitat que rep el jugador i a x.

Seguint amb l'exemple, si el jugador 1 actuant en solitari li hagués estat assignat -1 unitats en el repartiment (pagar per participar), hauria tingut incentius per col·laborar? La resposta és no ja que de forma racional ningú cooperaria per obtenir menys guanys que sense cooperar. D'aquí obtenim el concepte de conjunt d'imputacions.

Definició 1.4. El conjunt d'imputacions d'un joc $v \in G^N$ és:

$$X(N,v) := \{x \in X^*(N,v) \mid x_i \geq v(\{i\}),\ i = 1,2,...,n\}.$$

En el cas del joc de l'exemple, com és de tres jugadors, podríem representar gràficament el conjunt d'imputacions i el conjunt de les preimputacions. El conjunt de les preimputacions seria:

$$X^*(N,v)=\{x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 9\}.$$

És a dir, seria l'hiperplà $x + y + z = 9$. I el conjunt d'imputacions seria:

$$X(N,v) = \{x \in X^*(N,v) | x_i \geq 0,\ \text{per } i = 1,2,3\}.$$

És a dir, $x + y + z = 9$, amb $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. (Veure figura 1)

Observació: En aquest joc, com més jugadors hi ha en una coalició més guanys obtenen. Això no té per què passar sempre, de fet només passa quan el joc compleix algunes propietats.

Si volem representar el core[3] d'un joc, la manera habitual sol ser dibuixar un triangle on els vèrtexs són:

$$\begin{aligned} A &= (v(\{1,2,3\}) - v(\{2\}) - v(\{3\}),\ v(\{2\}),\ v(\{3\})) \\ B &= (v(\{1\}),\ v(\{1,2,3\}) - v(\{1\}) - v(\{3\}),\ v(\{3\})) \\ C &= (v(\{1\}),\ v(\{2\}),\ v(\{1,2,3\}) - v(\{1\}) - v(\{2\})) \end{aligned}$$

I dibuixar les restriccions que hauran de complir les distribucions que estiguin dins el conjunt de les imputacions i les preimputacions. És a dir, sigui una distribució $x = (x_1, x_2, x_3)$, en aquest joc s'haurà de complir que $x_1 + x_2 \geq 2$, aleshores com que $x_1 + x_2 + x_3 = 9$, $x_3 \leq 7$. De manera anàloga:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 \geq 2 &\Rightarrow x_2 \leq 7. \\ x_2 + x_3 \geq 2 &\Rightarrow x_1 \leq 7. \end{aligned}$$

A part, $x_i \geq v(\{i\})$ per $i \in \{1,2,3\}$. Aleshores, visualitzem el core com l'àrea en gris clar de la figura 2.

[3] Veurem el concepte de core en profunditat a la secció 1.2, en aquesta secció només es tracta de fer un apunt.

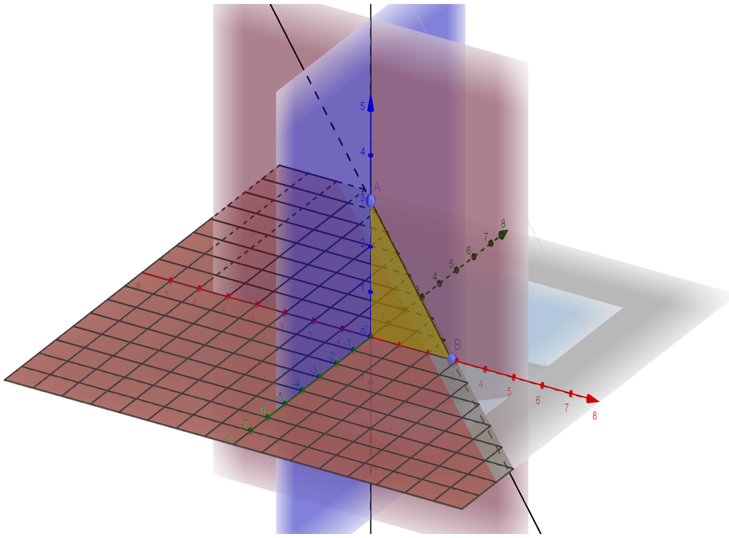

Figura 1: Representació gràfica del joc de l'exemple 1.

Definició 1.5. Un joc cooperatiu $v \in G^N$ és monòton si per a qualsevol $T, S \in 2^N$, tal que $S \subset T$, $v(S) \leq v(T)$.

Exemple 2. *Sigui* (N, v) *un joc de tres jugadors, amb funció característica* v *definida com segueix:*

$$\begin{array}{lll} v(\{1\}) = 1 & v(\{2\}) = 2 & v(\{3\}) = 1 \\ v(\{1,2\}) = 4 & v(\{1,3\}) = 5 & v(\{2,3\}) = 4 \\ v(\{1,2,3\}) = 9. & & \end{array}$$

Aleshores, el joc és monòton, ja que $v(\{i\}) \leq v(\{i,j\})$*, per* $i = 1,2,3$ $i \neq j$*, i* $v(\{i,j\}) \leq v(\{1,2,3\})$*, per* $i \neq j$*,* $i,j = 1,2,3$.

Definició 1.6. La zero-normalització d'un joc cooperatiu $v \in G^N$ ve definida com un nou joc, $v_0 \in G^N$, on, per a tota $S \subset N$:

$$v_0(S) = v(S) - \sum_{i \in S} v(\{i\}).$$

Exemple 3. *Sigui* (N, v) *un joc de dos jugadors, tal que:*

$$\begin{array}{ll} v(\{1\}) = 20 & v(\{2\}) = 30 \\ v(\{1,2\}) = 70. & \end{array}$$

Aleshores el seu joc zero-normalitzat serà:

$$\begin{array}{ll} v_0(\{1\}) = 0 & v_0(\{2\}) = 0 \\ v_0(\{1,2\}) = 20. & \end{array}$$

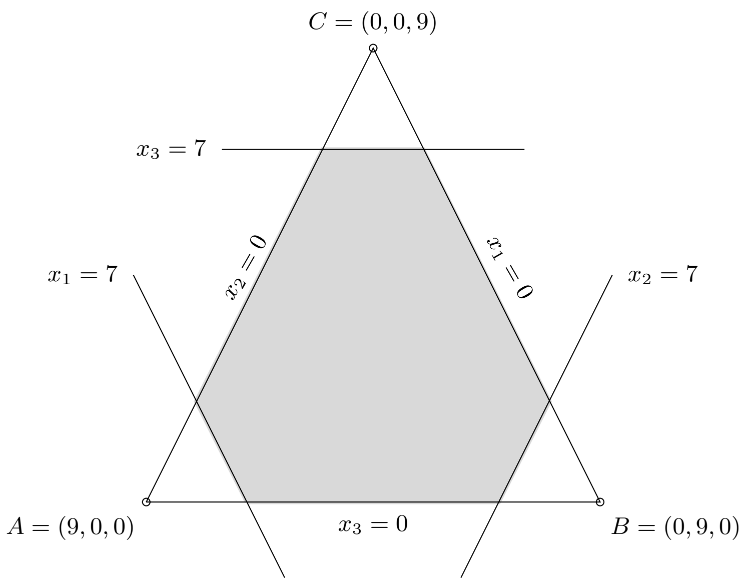

Figura 2: Core del joc de l'exemple 1.

Definició 1.7. Un joc és zero-monòton si el joc zero-normalitzat, és monòton.

Definició 1.8. Es diu que un joc cooperatiu (N, v) és convex si per tot jugador $i \in N$, se satisfà que per a tot $S \subseteq T \subseteq N \setminus \{i\}$:

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T).$$

Proposició 1.1. *Sigui un joc (N, v) convex, aleshores és zero-monòton.*

Demostració: Sigui $S \subset T \subseteq N$, i sigui $i \in T \setminus S$. Aleshores per convexitat:

$$v(S) + v(\{i\}) \leq v(S \cup \{i\}).$$

Aleshores sigui $T \setminus S = \{i_1, i_2, ..., i_{t-s}\}$ Tenim:

$$\begin{array}{l} v(S) + v(\{i_1\}) \leq v(S \cup \{i_1\}) \\ v(S \cup \{i_1\}) + v(\{i_2\}) \leq v(S \cup \{i_1\} \cup \{i_2\}) \\ .... \end{array}$$

Arribem a

$$v(S) + \textstyle\sum_{i \in T \setminus S} v(\{i\}) \leq v(T).$$

Ara restem $\sum_{i \in S} v(\{i\})$ a ambdós costats i obtenim:

$$v(S) - \textstyle\sum_{i \in S} v(\{i\}) \leq v(T) - \sum_{i \in T \setminus S} - \sum_{i \in S} v(\{i\}) = v(\{i\}) - \sum_{i \in T} v(\{i\}).$$

Aleshores obtenim que és zero-monòton.

□

Observació: Un joc monòton, si el zero-normalitzem, no té perquè donar-nos un joc zero-monòton.

Exemple 4. *Sigui el joc de dos jugadors (N, v) amb funció característica següent:*

$$\begin{array}{ll} v(\{1\}) = 1 & v(\{2\}) = 1 \\ v(\{1, 2\}) = 1. & \end{array}$$

El joc és monòton, si el zero-normalitzem obtenim el joc:

$$\begin{array}{ll} v_0(\{1\}) = 0 & v_0(\{2\}) = 0 \\ v_0(\{1, 2\}) = -1. & \end{array}$$

El qual òbviament no és zero-monòton.

1.2 Core d'un joc cooperatiu

Un concepte important és el de **core** d'un joc cooperatiu (Gillies 1953, veure [3]). De manera informal podem dir que el core d'un joc és el conjunt de distribucions que asseguren als membres de cada coalició un guany conjunt igual o superior al valor de la coalició. És a dir, seria un conjunt de distribucions en les que cap jugador obtindria menys guanys que si no cooperes.

Definició 1.9. El core d'un joc cooperatiu (N, v), que denotarem per $C(N, v)$, és defineix com:

$$C(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x(S) \geq v(S), \text{ per qualsevol } S \subseteq N\}.$$

És fàcil trobar exemples on el core d'un joc és no buit i conté moltes distribucions, és no buit i conté un sol punt, o és buit. La *queixa (o excés)* d'una coalició $S \subseteq N$ respecte d'una distribució $x \in X^*(N, v)$ es defineix com la diferència entre el valor d'una coalició i el que rep per la distribució, i s'escriu:

$$e^v(S, x) = v(S) - x(S). \tag{1.1}$$

Usant el concepte d'excés, podem redefinir el core com:

$$C(N, v) = \{x \in X^*(N, v) : e^v(S, x) \leq 0, \text{ per tot } S \subseteq N\}.$$

I, per a tot $\epsilon \in \mathbb{R}$, podem definir l' ϵ-core com:

$$C_\epsilon(N, v) = \{x \in X^*(N, v) : e^v(S, x) \leq \epsilon, \text{ per tot } S \subseteq N\}.$$

De vegades pot passar que no hi hagi cap distribució que compleixi la condició $e^v(S, x) \leq 0$, aleshores, el concepte d'ϵ-core relaxa aquesta condició i permet trobar alguna distribució del core. Ara bé, si anéssim agafant epsilons cada cop més grans ens desviarem del concepte inicial de core, per tant, el que farem serà agafar l'ϵ-core més petit que no sigui buit, és a dir, l'intersecció de tots els ϵ-core no buits, d'aquí es desprèn el concepte de *least-core* definit a continuació.

Definició 1.10. El *least-core* d'un joc és la intersecció de tots els ϵ-core no buits.

Exemple 5. *(Representació gràfica del core d'un joc)*
Considerem el joc (N, v) *amb funció característica següent:*

$$\begin{array}{lll} v(\{1\}) = 1 & v(\{2\}) = 2 & v(\{3\}) = 3 \\ v(\{1,2\}) = 6 & v(\{1,3\}) = 6 & v(\{2,3\}) = 6 \\ v(\{1,2,3\}) = 10. & & \end{array}$$

La seva representació gràfica ve donada per la figura 3.

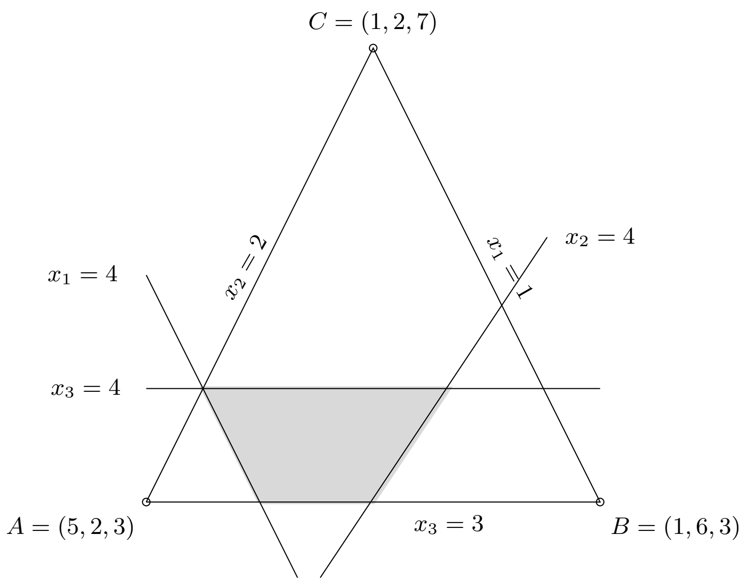

Figura 3: Representació del core del joc de l'exemple 5.

El core, com hem dit abans, ens dóna un conjunt de distribucions acceptable pels diferents jugadors, ens dóna, parlant de manera informal, solucions sobre com distribuir els guanys. En la Teoria de Jocs diferenciem entre les solucions obtingudes fixant criteris d'eliminació sobre un conjunt ampli de solucions, les anomenades solucions conjuntistes[4], i les solucions puntuals, que sorgeixen de fixar criteris d'equitat, que defineixen un repartiment que es pren com a solució. Anem a definir el concepte de solució conjuntista:

Definició 1.11. Sigui (N, v) un joc. Una solució de (N, v) és una funció σ que associa al joc (N, v) un conjunt $\sigma(N, v)$ de $X^*(N, v)$.

Les solucions puntuals més conegudes són el nucleolus, el valor de Shapley i la solució estàndard, definides a continuació.
Per definir el nucleolus, necessitem recordar la definició d'excés i l'equació (1.1), ja que aquests excessos s'ordenen en ordre decreixent, i donen un vector $\Theta(x) \in \mathbb{R}^{2^N}$.

Definició 1.12. La col·lecció d'excessos o vector d'excessos serà:
$\Theta(x) = e^v(S, x)_{S \subseteq N}$, per a tot $x \in X^*(N, v)$, on $\Theta_k(x) \geq \Theta_{k+1}(x)$.

És a dir, un cop calculats els excessos per tot subconjunt S de N, aquests s'ordenen de major a menor, donant el vector d'excessos.

[4]Les solucions conjuntistes i les seves propietats apareixen en detall a l'apartat 3.

Exemple 6. *Sigui el joc* (N, v) *amb la funció de distribució donada:*

$$\begin{array}{lll} v(\{1\}) = 0 & v(\{2\}) = 0 & v(\{3\}) = 0 \\ v(\{1,2\}) = 4 & v(\{1,3\}) = 6 & v(\{2,3\}) = 2 \\ v(\{1,2,3\}) = 12. & & \end{array}$$

I sigui la distribució $x = (4, 4, 4)$. *Aleshores, com veiem a la taula feta a continuació, calcularem* $v(S) - x(S)$, *amb* $S \subseteq N$.

S	$e^v(S,x) = v(S) - x(S)$
{1}	*-4*
{2}	*-4*
{3}	*-4*
{1,2}	*-4*
{1,3}	*-2*
{2,3}	*-6*
{1,2,3}	*0*

Aleshores $\Theta(x) = (0, -2, -4, -4, -4, -4, -6)$.

Definició 1.13. Siguin dos vectors $u, v \in \mathbb{R}^m$ on $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Definim l'ordre lexicogràfic com $u <_{lex} v$ si la primera diferència $v_i - u_i$ diferent de zero és positiva.

Usant l'ordre lexicogràfic podem definir el nucleolus.

Definició 1.14. Donat un joc cooperatiu (N, v), el **nucleolus** $\eta(v)$ són les imputacions $\eta \in \mathbb{R}^n$ tals que:

$$\Theta(\eta) \leq_{lex} \Theta(x) \text{ per a tot } x \in X(N, v).$$

En la mateixa línia, definiríem el prenucleolus.

Definició 1.15. Donat un joc cooperatiu (N, v), el **prenucleolus** són les preimputacions $\eta^* \in \mathbb{R}^n$ tals que:

$$\Theta(\eta^*) \leq_{lex} \Theta(x) \text{ per a tot } x \in X^*(N, v).$$

Notem que si el conjunt d'imputacions d'un joc és buit, aquest no té nucleolus, en canvi, el prenucleolus existeix sempre.
Anem ara a veure un altra de les solucions puntuals més conegudes, el valor de Shapley, (Shapley 1953, veure [8]).

Definició 1.16. Sigui (N, v) un joc cooperatiu d'utilitat transferible. El valor de Shapley d'aquest joc és:

$$\phi(v) := \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \gamma(S)[v(S \cup i) - v(S)], \text{ per } i = 1, 2, ..., n$$

On $\gamma(S) = \frac{s!(n-s-1)}{n!}$ i s és el nombre de jugadors que hi ha a la coalició S.

Definició 1.17. Si tenim un joc de dos jugadors, aleshores, s'anomena solució estàndard a (x_1, x_2) on:

$$\begin{array}{l} x_1 = v(\{1\}) + \frac{v(\{1,2\}) - v(\{1\}) - v(\{2\})}{2} \\ x_2 = v(\{2\}) + \frac{(v(\{1,2\}) - v(\{1\}) - v(\{2\})}{2} \end{array} \tag{1.2}$$

Veiem un exemple de càlcul del valor de Shapley.

Exemple 7. *Sigui (N, v) un joc de tres jugadors, amb la funció característica següent:*

$$\begin{array}{lll} v(\{1\}) = 3 & v(\{2\}) = 2 & v(\{3\}) = 4 \\ v(\{1,2\}) = 8 & v(\{1,3\}) = 8 & v(\{2,3\}) = 7 \\ v(\{1,2,3\}) = 15. & & \end{array}$$

Aleshores:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{3}v(\{1\}) + \frac{1}{6}[v(\{1,2\}) - v(\{2\})] \\ &\quad + \tfrac{1}{6}[v(\{1,3\}) - v(\{3\})] + \tfrac{1}{3}[v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\})] \\ &= \tfrac{16}{3} \end{aligned}$$

Anàlogament $\phi_2 = \frac{13}{3}$, i $\phi_3 = \frac{16}{3}$.

Observació: En el cas de dos jugadors, el valor de Shapley, el prenucleolus i la solució estàndard coincideixen.

Observació: Per molt que el valor de Shapley sigui una solució puntual, no té perquè formar part del core, excepte en el cas que es tracti d'un joc convex, en tal cas, sí que forma part del core.

2 Kernel i prekernel: propietats geomètriques

El kernel i el prekernel es basen en que els jugadors estiguin equilibrats, anem a veure que significa el concepte d'equilibri.

Definició 2.1. Sigui un joc (N, v). Per a tot $i, j \in N$, $i \neq j$, anomenem $T_{ij}(N)$ al conjunt de coalicions que contenen i però no j, és a dir:

$$T_{ij}(N) = \{S \subseteq N \mid i \in S, j \notin S\}.$$

Exemple 8. *Donat un joc de 4 jugadors, $N = \{1, 2, 3, 4\}$, aleshores, $T_{12}(N) = \{\{1\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 3, 4\}\}$.*

Definició 2.2. Sigui (N, v) un joc cooperatiu i $x \in X^*(N, v)$ Anomenarem $s^v_{ij}(x) = màx_{S \in T_{ij}(N)} e^v(S, x)$.

Es considera que dos jugadors estan equilibrats per a una preimputació x si $s^v_{ij}(x) = s^v_{ji}(x)$.

Exemple 9. *Sigui un joc (N, v) de quatre jugadors amb la funció característica següent:*

$$\begin{array}{llll} v(\{1\}) = 0 & v(\{2\}) = 0 & v(\{3\}) = 0 & v(\{4\}) = 0 \\ v(\{1,2\}) = 4 & v(\{1,3\}) = 4 & v(\{1,4\}) = 5 & v(\{2,3\}) = 2 \\ v(\{2,4\}) = 4 & v(\{3,4\}) = 4 & v(\{1,2,3\}) = 9 & v(\{1,3,4\}) = 10 \\ v(\{2,3,4\}) = 9 & v(\{1,2,4\}) = 7 & v(\{1,2,3,4\}) = 16. & \end{array}$$

Donem una distribució $x = (4, 4, 4, 4)$. Aleshores el jugador 1 i el jugador 4 estan equilibrats, ja que si calculem els excessos tenim:

S	$e^v(S, x) = v(S) - x(S)$
{1}	-4
{1,2}	-4
{1,3}	-4
{1,2,3}	-3

S	$e^v(S,x) = v(S) - x(S)$
{*4*}	*-4*
{*2,4*}	*-4*
{*3,4*}	*-4*
{*2,3,4*}	*-3*

Veiem que el màxim dels excessos és -3 *en ambdós casos, i per tant* $s^v_{1,4}(x) = s^v_{4,1}(x) = -3$.
Estudiem ara el jugador 2 *i el jugador* 3.

S	$e^v(S,x) = v(S) - x(S)$
{*2*}	*-4*
{*1,2*}	*-4*
{*2,4*}	*-4*
{*1,2,4*}	*-5*

S	$e^v(S,x) = v(S) - x(S)$
{*3*}	*-4*
{*1,3*}	*-4*
{*3,4*}	*-4*
{*1,3,4*}	*-2*

Veiem que $s^v_{2,3}(x) = -4$ *i* $s^v_{3,2}(x) = -2$*, per tant, estan en desequilibri.*

Definició 2.3. El prekernel d'un joc (N, v) és el conjunt de distribucions $x \in X^*(N, v)$ on totes les parelles de jugadors estan en equilibri.

$$K^*(N, v) = \{x \in X^*(N, v) \mid \text{ per tot } i, j \in N,\ s^v_{ij}(x) = s^v_{ji}(x)\}.$$

Definició 2.4. El kernel d'un joc cooperatiu (N, v) és el conjunt d' imputacions $x \in X(N, v)$ on totes les parelles de jugadors estan en equilibri o si estan en desequilibri és per que al jugador més afavorit se li assigna el seu valor individual.

$$K(N, v) = \left\{ x \in X(N, v) \mid \text{ per tot } i, j \in N, \begin{array}{l} \text{o } \ s^v_{ij}(x) = s^v_{ji}(x) \\ \text{o } \ x_j = v(\{j\}), \text{ si } \ s^v_{ij}(x) > s^v_{ji}(x) \end{array} \right\}.$$

Una manera més compacta de definir el kernel seria dir que:
una imputació pertany al kernel si i només si compleix que per $i, j \in N$, $i \neq j$:

$$[s_{ij}^v(x) - s_{ji}^v(x)][x_j - v(\{j\})] \leq 0. \tag{2.1}$$

Observació: El prenucleolus està inclòs en el prekernel, i el nucleolus està inclòs en el kernel.

Observació: El nucleolus és un element del kernel, podem trobar-ne la demostració a Schmeidler 1969, veure [7]. Un teorema força important que relaciona el kernel i el prekernel és el que ve a continuació, es pot trobar la seva demostració al treball de Maschler, Peleg i Shapley de l'any 1972, teorema 2.7, veure [5].

Teorema 1. *Si (N, v) és zero-monòton, aleshores $K(N, v) = K^*(N, v)$.*

Demostració:
En primer lloc podem suposar que el valor individual de qualsevol jugador en el joc (N, v) és zero. Això és degut a que com el kernel i el prekernel tenen la propietat de covariança (veure definició 3.8) podem treballar amb el corresponent joc zero-normalitzar i aconseguir les mateixes conclusions.
Recordem que si un joc és zero-monòton aleshores, per tot $S \subseteq T \subseteq N$,

$$v(S) - \sum_{k \in S} v(\{k\}) \leq v(T) - \sum_{k \in T} v(\{k\}).$$

En particular, si $S \subseteq N$ i $T = S \cup \{i\} \subseteq N$ on $i \in N \setminus S$, tenim que

$$v(S) - \sum_{k \in S} v(\{k\}) \leq v(S \cup \{i\}) - \sum_{k \in S \cup \{i\}} v(\{k\}),$$

i per tant

$$v(S) + v(\{i\}) \leq v(S \cup \{i\}). \tag{2.2}$$

Això ens serà útil més tard. Anem a demostrar ara que $K(N, v) \subseteq K^*(N, v)$ i $K^*(N, v) \subseteq K(N, v)$.

Comencem per veure $K^*(N, v) \subseteq K(N, v)$. Prenem $x \in K^*(N, v)$. L'únic que hauríem de veure que x satisfà la racionalitat individual, és a dir, que per cada $i \in N$ $x_i \geq v(\{i\})$. Si provem que, per a tot $i \in N$, $x_i > min_{S \subseteq N \setminus \{i\}}(v(S \cup \{i\}) - v(S))$ ja ho tindríem. Veiem-ho. Suposem que no, que existeix un $k \in N$ tal que

$$x_k < min_{S \subseteq N \setminus \{k\}}(v(S \cup \{k\}) - v(S)).$$

Aleshores, per a tot $S \subseteq N \setminus \{k\}$, tindríem que:

$$\begin{aligned} v(S \cup \{k\}) - x(S \cup \{k\}) &= v(S \cup \{k\}) - x(S) - x(\{k\}) \\ &> v(S \cup \{k\}) - x(S) - [v(S \cup \{k\}) - v(S)] \\ &= v(S) - x(S). \end{aligned}$$

En particular, si prenem $S = \emptyset$, tenim que $v(\emptyset \cup \{k\}) - x(\emptyset \cup \{k\}) > v(\emptyset) - x(\emptyset)$, i per tant

$$v(\{k\}) > x(\{k\}). \tag{2.3}$$

Aleshores, com sabem que $v(N) = x(N)$, si a aquesta expressió li restem (2.2) tenim que

$$v(N \setminus \{k\}) < v(N) - v(\{k\}) < x(N \setminus \{k\}).$$

Això implica que k pertany a $\cap_{S \in DM(x,v)} S$, on $DM(x,v)$ és el conjunt de les coalicions de màxim excés. No obstant, això contradiu el fet de que si $x \in K^*(N,v)$, $\cap_{S \in DM(x,v)} S = \emptyset$. D'aquí podem concloure que $x_k \geq \min\limits_{S \subseteq N \setminus \{k\}} (v(S \cup \{k\}) - v(S)) \geq v(\{k\})$, i per tant $K^*(N,v) \subseteq K(N,v)$.

Ara demostrarem que $K(N,v) \subseteq K^*(N,v)$. Suposem que $x \in K(N,v)$ amb $x_i \geq v(\{i\}) = 0$. Primer veurem que $M = \cap_{S \in DM(x,v)} S = \emptyset$. Suposem que no, que existeix $k \in M$. Aleshores, $s^v_{kl}(x) > s^v_{lk}(x)$ per a tot $l \in N \setminus M$. Com x és del prekernel, $x_l = 0$ per tot $l \in N \setminus M$. Per tant, si $S \in DM(x,v)$,

$$v(S) - x(S) = v(S) - x(S \setminus M) - x(S \cap M) = v(S) - x(N) \leq v(N) - x(N) = 0. \tag{2.4}$$

Llavors, per cada $l \in N \setminus M$, $v(\{l\}) - x_l = 0$ ($v(\{l\}) = 0$ per hipòtesi). Aleshores, per (2.4), $l \in DM(x,v)$, contradicció amb que $l \in N \setminus M$ Per tant,

$$\cap_{S \in DM(x,v)} S = \emptyset. \tag{2.5}$$

Finalment, suposem que per al $x \in K(N,v)$ que hem seleccionat, existís $k, l \in N$ t.q $s^v_{kl}(x) > s^v_{lk}(x)$. Això vol dir que $x_l = 0$. Per (2.5) $\exists S \in DM(x,v)$ t.q $k \notin S$. Sigui $T = S \cup \{l\}$. Aleshores,

$$v(S \cup \{l\}) - x(S \cup \{l\}) = v(S \cup \{l\}) - x(S) \geq v(S) - x(S),$$

i per tant $S \cup \{l\} \in DM(x,v)$. Aquí conclourem que, $s^v_{lk}(x) > v(S \cup \{l\}) - x(S \cup \{l\})$
$\geq s^v kl(x)$ que contradiu l'hipòtesis.

$\square$

Teorema 2. *Sigui* (N, v) *un joc, aleshores* $K(N, v) \cap C(N, v) = K^*(N, v) \cap C(N, v)$.

Demostració:
Si (N, v) és zero-monòton, surt directe del teorema 1, ja que $K^*(N, v) = K(N, v)$.
En el cas que (N, v) no sigui zero-monòton, hauríem de veure les dues inclusions següents:

$$K(N, v) \cap C(N, v) \subseteq K^*(N, v) \cap C(N, v).$$
$$K(N, v) \cap C(N, v) \supseteq K^*(N, v) \cap C(N, v).$$

Comencem veient $K(N, v) \cap C(N, v) \subseteq K^*(N, v)$. Sigui $x \in K(N, v) \cap C(N, v)$ i $i, j \in N$, $i \neq j$. És suficient veure que:

$$s_{ij}(x) \leq s_{ji}(x).$$

De fet, sinó passa això, tenim que:

$$s_{ij}(x) > s_{ji}(x).$$

Llavors $x_j = v(\{j\})$. Com que $j \in T_{ji}(N)$, sabem que $s_{ji}(x)$, com que és el màxim excés, serà més gran o igual que qualsevol altre excés del conjunt, o sigui:

$$s_{ji} \geq v(\{j\}) - x_j = 0 \Rightarrow s_{ij}(x) > 0.$$

I arribem a contradicció, ja que com $x \in C(N, v)$, $e(S, x) \leq 0$.

Veiem ara la inclusió $K(N, v) \cap C(N, v) \supseteq K^*(N, v)$.
Sigui $x \in K^*(N, v) \cap C(N, v)$. Tenim que:

$$x \in K^*(N, v) \Rightarrow s_{ij}(x) = s_{ji}(x).$$

I es compleix l'equació:

$$[s_{ij}(x) - s_{ji}(x)][x_j - v(\{j\})] \leq 0.$$

Per tant, $x \in K(N, v)$, però a més $x \in C(N, v)$, llavors $x \in K^*(N, v) \cap C(N, v) \Rightarrow K(N, v) \cap C(N, v)$.

□

2.1 La propietat de bisecció del kernel

En aquesta secció donarem la caracterització geomètrica del prekernel basada en la propietat de bisecció, la qual veurem tot seguit, després d'haver vist les definicions prèvies necessàries.
Sigui $\epsilon \in \mathbb{R}$ tal que $C_\epsilon(N,v) \neq \emptyset$. Per a tot $i \in N$, sigui $u_i \in \mathbb{R}^n$ el vector canònic tal que u_i té totes les components zero excepte la component i-èssima que és 1 (exemple: $u_2 = (0,1,0...,0)$) aleshores definim

$$\delta^\epsilon_{ij}(x) = max\{\delta : x - \delta \cdot u_i + \delta \cdot u_j \in C_\epsilon(N,v)\}.$$

Proposició 2.1. *Sigui $x \in C_\epsilon(N,v)$. Aleshores:*

$$\delta^\epsilon_{ij}(x) = \epsilon - s_{ij}(x).$$

Demostració:
Si x_i decreix per δ i x_j creix per δ, passa el següent:

- (i) $e(S,x)$ incrementa δ sempre que $S \in T_{ij}(N)$;
- (ii) $e(S,x)$ decreix δ sempre que $S \in T_{ji}(N)$;
- (iii) $e(S,x)$ es manté sense canvis en qualsevol altre cas.

Sigui $S_0 \in T_{ij}(N)$ una coalició tal que $s_{ij}(x) \in e(S_0,x)$. Com que $x \in C_\epsilon(N,v)$, tenim que $e(S_0,x) + \delta_{ij}(x) = \epsilon$. Observem que $s_{ij}(x)$ no depèn de ϵ.
Definim:

$$\Delta_{ij} = \{S \in T_{ij}(N) : e(S,x) = s_{ij}\}.$$
$$\Delta(x) = \cup_{i,j \in N, i \neq j} \Delta_{ij}(x).$$

És a dir, $\Delta(x)$ inclou totes aquelles coalicions que són significatives, ja que permeten a algun jugador aconseguir l'excedent d' algun altre jugador.

$\square$

Definició 2.5. Sigui $x \in C_\epsilon(N,v)$. Per cada $i,j \in N$, $i \neq j$, definim $R_{ij}(x,\epsilon)$ el segment amb punt inicial a i punt final b, on:

$$a = x - \delta^\epsilon_{ij}(x) \cdot u^i + \delta^\epsilon_{ij}(x) \cdot u^j$$
$$b = x + \delta^\epsilon_{ji}(x) \cdot u^i - \delta^\epsilon_{ji}(x) \cdot u^j.$$

En el següent teorema veurem una caracterizació geomètrica del prekernel que diu que un punt x pertany al prekernel intersecció amb l'ϵ-core si per a cada parell de jugador i i j, el punt x bisecta el segment $R_{ij}(x,\epsilon)$.

Teorema 3. *Si $x \in C_\epsilon(N,v)$, aleshores x pertany a $K^*(N,v) \cap C_\epsilon(N,v)$ si i només si per cada $i,j \in N, i \neq j$, x bisecta el segment $R_{ij}(x,\epsilon)$.*

Demostració:
$\Rightarrow$ Prenem un $x \in K^*(N,v) \cap C_\epsilon(N,v)$, volem veure que x bisecta el segment $R_{ij}(x,\epsilon)$, amb

$$a = x - \delta^\epsilon_{ij}(x) \cdot u^i + \delta^\epsilon_{ij}(x) \cdot u^j.$$
$$b = x + \delta^\epsilon_{ji}(x) \cdot u^i - \delta^\epsilon_{ji}(x) \cdot u^j.$$

Aleshores el punt mig del segment serà:

$$\frac{2x + (-\delta^\epsilon_{ij}(x) + \delta^\epsilon_{ji}(x))u^i + (\delta^\epsilon_{ij}(x) - \delta^\epsilon_{ij}(x))u^j}{2}.$$

Per tal que això valgui x cal que $\delta^\epsilon_{ij} = \delta^\epsilon_{ji}$ i per la definició de δ^ϵ_{ij} sabem que això només passa quan $s_{ij} = s_{ji}$, per tant, quan x pertany al prekernel, llavors com que $x \in K^*(N,v) \cap C_\epsilon(N,v)$ tenim que x bisecta $R_{ij}(x,\epsilon)$, com volíem demostrar.

$\Leftarrow$ Si x bisecta el segment, implica que és l'únic punt on i,j estan equilibrats, per tant, pertany al prekernel, i com que $x \in C_\epsilon(N,v)$, obtenim que $x \in K^*(N,v) \cap C_\epsilon(N,v)$.

$\square$

El següent exemple il·lustra la situació d'un punt x del core que no és del prekernel ja que no bisecta el segment R_{ij} quan agafem $i = 1$, $j = 2$.

Exemple 10. *Sigui (N,v) el joc de tres jugadors amb la funció característica següent:*

$$\begin{array}{lll} v(\{1\}) = 0 & v(\{2\}) = 0 & v(\{3\}) = 0 \\ v(\{1,2\}) = 4 & v(\{13\}) = 6 & v(\{23\}) = 4 \\ v(\{1,2,3\}) = 12. & & \end{array}$$

Donada una distribució $x = (4,4,4)$, siguin $i = 1$, $j = 2$, $\epsilon = 0$.

S	$e^v(S,x) = v(S) - x(S)$
{1}	*-4*
{1,3}	*-2*

S	$e^v(S,x) = v(S) - x(S)$
{2}	*-4*
{2,3}	*-4*

Per tant, $\delta_{12} = 2$, i $\delta_{21} = 4$.

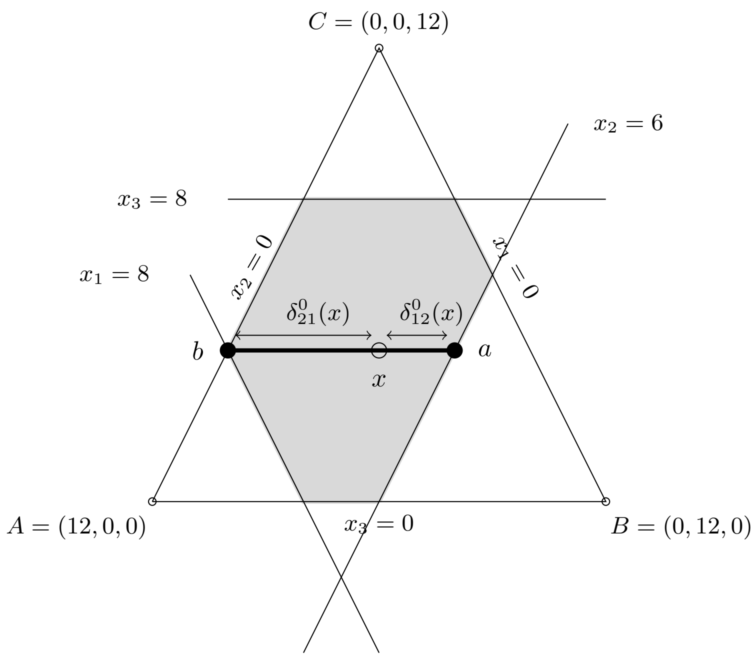

Figura 4: Propietat de bisecció entre els jugadors 1 i 2 aplicat al'exemple 10.

Aleshores:

a=(4,4,4)+(-2,0,0)+(0,2,0)=(2,6,4).
b=(4,4,4)+(4,0,0)+(0,-4,0)=(8,0,4).

I x no verifica la propietat de bisecció, com podem apreciar a la figura 4.

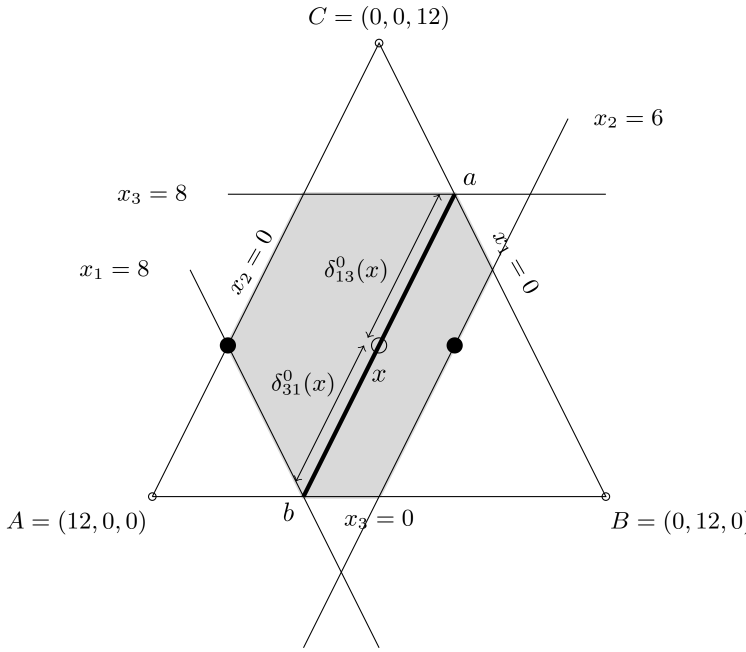

Figura 5: Propietat de bisecció entre els jugadors 1 i 3 aplicat a l'exemple 10.

Siguin ara $i = 1$*,* $j = 3$*,* $\epsilon = 0$*.*

S	$e^v(S,x) = v(S) - x(S)$
{*1*}	*-4*
{*1,2*}	*-4*

S	$e^v(S,x) = v(S) - x(S)$
{*3*}	*-4*
{*2,3*}	*-4*

Aleshores $\delta_{13} = \delta_{31} = 4$*, i* R_{13} *té segments*

a=(4,4,4)+(-4,0,0)+(0,4,0)=(0,8,4).
b=(4,4,4)+(4,0,0)+(0,-4,0)=(8,0,4).

Per tant, x bisecta R_{13}*, com podem apreciar a la figura 5.*

Teorema 4. *Sigui un joc (N, v). Aleshores,*

(a) Si $x \in C(N, v)$, aleshores x pertany a $K(N, v) \cap C(N, v)$ si i només si per cada $i, j \in N$, $i \neq j$, x bisecta el segment $R_{ij}(x, 0)$.

(b) Si $x \in C_\epsilon(N, v)$ i (N, v) és zero-monòton, aleshores x pertany a $K(N, v) \cap C_\epsilon(N, v)$ si i només si per cada $i, j \in N$, $i \neq j$, x bisecta el segment $R_{ij}(x, \epsilon)$.

(c) Si $x \in C_\epsilon(N, v)$ (però (N, v) no té per què ser zero-monòton), aleshores $x \in K(N, v) \cap C_\epsilon(N, v)$ si i només si $x \in X(N, v)$ i per cada $i, j \in N$, $i \neq j$, passa alguna de les opcions següents:

- *x bisecta el segment $R_{ij}(x, \epsilon)$;*
- *$x_j = v(\{j\})$ i $\delta^\epsilon_{ji}(x) > \delta^\epsilon_{ij}(x)$;*
- *$x_i = v(\{i\})$ i $\delta^\epsilon_{ij}(x) > \delta^\epsilon_{ji}(x)$.*

Demostració:

(a) Pel teorema 2, hem provat que:

$$K(N, v) \cap C(N, v) = K^*(N, v) \cap C(N, v).$$

Per $\epsilon = 0$ sabem que:

$$C_\epsilon(N, v) = C(N, v).$$

Llavors veiem que és una particularització del teorema 3 per $\epsilon = 0$.

(b) Veiem les dues implicacions.
$\Rightarrow$ Sigui $x \in C_\epsilon(N, v)$, amb (N, v) joc zero-monòton. Aleshores:

$$K(N, v) = K^*(N, v).$$

Llavors:

$$\text{si } x \in K(N, v) \cap C_\epsilon(N, v) \Rightarrow x \in K^*(N, v) \cap C_\epsilon(N, v).$$

Aleshores, donat R_{ij}, x bisectarà el segment ja que serà l'únic punt on i i j estaran equilibrats (ho hem vist en detall al teorema 3).

$\Leftarrow$ Sigui $x \in C_\epsilon(N, v)$, amb (N, v) joc zero-monòton. Si x bisecta el segment R_{ij} vol dir que x és el punt on i i j estan equilibrats, llavors:

$$x \in K^*(N, v) \Rightarrow x \in K^*(N, v) \cap C_\epsilon(N, v).$$

I com que el joc és zero monòton i per tant, $K(N,v) = K^*(N,v)$, aleshores $x \in K(N,v) \cap C_\epsilon(N,v)$.

(c) Hem de veure que si $x \in C_\epsilon(N,v)$, aleshores $x \in K(N,v) \cap C_\epsilon(N,v)$ si i nomes si $x \in X(N,v)$ i per cada $i, j \in N$, $i \neq j$, tenim que:

- (c.1) x bisecta el segment $R_{ij}(x,\epsilon)$;
- (c.2) $x_j = v(j)$ i $\delta^\epsilon_{ji}(x) > \delta^\epsilon_{ij}(x)$;
- (c.3) $x_i = v(i)$ i $\delta^\epsilon_{ij}(x) > \delta^\epsilon_{ji}(x)$.

Comencem mirant la implicació cap a la dreta. Sigui $x \in K(N,v) \cap C_\epsilon(N,v)$, aleshores x serà una imputació, ja que pertany al kernel i al $\epsilon - core$, a més, com que pertany al kernel pot ser que sigui del prekernel i aleshores x bisecti el segment R_{ij}, o que pertanyi al kernel i per tant es doni c.2 o c.3.
Mirem l'altra implicació, sigui $x \in X(N,v)$ tal que passi o c.1 o c.2 o c.3, aleshores per c.1 x seria del prekernel, per tant pertanyeria al kernel i $x \in K(N,v) \cap C_\epsilon(N,v)$, i en el cas c.2 o c.3 seria del kernel.

$\square$

3 Propietats axiomàtiques del prekernel

En aquest apartat veurem algunes de les propietats més importants del prekernel, i donarem una caracterització axiomàtica del prekernel. Començarem veient algunes propietats de les solucions en general.

Definició 3.1. Una solució σ en un conjunt de jocs Γ és **racional individualment**(IR) si es dóna que si $(N, v) \in \Gamma$ i si $x \in \sigma(N, v)$ aleshores $x_i \geq v(\{i\})$ per tot $i \in N$.

Exemple 11. *Considerem el joc següent:*

$$\begin{array}{ll} v(\{1\}) = 1 & v(\{2\}) = 1 \\ v(\{1,2\}) = 1. & \end{array}$$

En aquest cas el prekernel coincideix amb la solució estàndard, (x_1, x_2) *on:*
$x_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
$x_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
per tant, no seria racional individualment.

Definició 3.2. Sigui (N, v) un joc, $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$, i sigui $x \in X^*(N, v)$. El joc reduït respecte S i x és el joc $(S, v_{S,x})$ definit com:

$$v_{S,x}(T) = \begin{cases} 0 & si \qquad T = \emptyset \\ \\ v(N) - x(N \setminus S) & si \qquad T = S \\ \\ \text{màx}_{Q \subseteq N \setminus S}(v(T \cup Q) - x(Q)) & altrament \end{cases}$$

Exemple 12. *Sigui (N, v) un joc de tres jugadors, amb funció característica v definida com segueix:*

$$\begin{array}{lll} v(\{1\}) = 3 & v(\{2\}) = 3 & v(\{3\}) = 3 \\ v(\{1,2\}) = 7 & v(\{1,3\}) = 8 & v(\{2,3\}) = 10 \\ v(\{1,2,3\}) = 15. & & \end{array}$$

Donada una distribució $x = (x_1, x_2, x_3)$, obtenim que el joc reduït $v_{\{\{1,2\},x\}}$ serà:
$v_{\{\{1,2\},x\}}(\{1\}) = màx\{v(\{1\}), v(\{1,3\}) - x_3\}$
$v_{\{\{1,2\},x\}}(\{2\}) = màx\{v(\{2\}), v(\{2,3\}) - x_3\}$
$v_{\{\{1,2\},x\}}(\{12\}) = \{v(\{1,2,3\}) - x_3\}$.

Definició 3.3. Una solució σ en un conjunt de jocs Γ té la **propietat de joc reduït** (RGP) si es dóna que quan $(N, v) \in \Gamma$, amb $\emptyset \neq S \subseteq N$, i amb $x \in \sigma(N, v)$, aleshores $(S, v_{S,x}) \in \Gamma$ i $x^s \in \sigma(S, v_{S,x})$.

Nota: Donat $x = (x_1, ...x_n)$, x^s serà el mateix vector però restringit al conjunt S.

Teorema 5. *El prekernel satisfà la propietat de joc reduït.*

Demostració:
Sigui (N, v) un joc, $x \in X^*(N, v)$ una preimputació del joc, S un subconjunt de N diferent del buit amb $k, l \in S$ dos jugadors diferents. Calculem $s_{kl}(x^S, v_{S,x})$:

$$\begin{aligned} s_{kl}(x^S, v_{S,x}) &= màx\{v_{S,x}(T) - x(T) | T \in T_{kl}(S)\} \\ &= màx\{màx\{v(T \cup Q) - x(T \cup Q) | Q \subseteq N \setminus S\} | T \in T_{kl}(S)\} \\ &= màx\{v(P) - x(P) | P \in T_{kl}(N)\} = s_{kl}(x, v). \end{aligned}$$

Aleshores, si $x \in K^*(N, v)$: $s_{kl}(x^S, v_{S,x}) = s_{kl}(x, v) = s_{lk}(x, v) = s_{lk}(x^S, v_{S,x})$.
□

Definició 3.4. Una solució σ en un conjunt de jocs Γ té la **propietat feble de joc reduït** si quan $(N, v) \in \Gamma$, $S \subseteq N$, $1 \leq |S| \leq 2$ i $x \in \sigma(N, v)$, es dóna que $(S, v_{S,x}) \in \Gamma$ i $x \in \sigma(S, v_{S,x})$.

Definició 3.5. Una solució σ en un conjunt Γ de jocs és **no buida** (NE) si $\sigma(N, v) \neq \emptyset$ per qualsevol $(N, v) \in \Gamma$.

El prekernel és no buit perquè conté el prenucleolus, que sempre existeix (veure Schmeidler 1969), en canvi, si agafem un joc amb conjunt d'imputacions buit, el nucleolus no existeix.

Definició 3.6. Sigui σ una solució en Γ. Diem que σ és **òptima de Pareto** (PO) si es dóna que $\sigma(N, v) \subseteq X^*(N, v)$.

Un altra propietat molt important és la **propietat de tractament igualitari**. Anem a explicar-la. Donat un joc (N, v) diem que dos jugadors $i, j \in N$ són substituts si contribueixen el mateix a cada coalició. És a dir, per tot conjunt de jugadors $T \subseteq N \setminus \{i, j\}$, $v(T \cup \{i\}) = v(T \cup \{j\})$.

Exemple 13. *Sigui un joc de* 4 *jugadors amb la funció característica* v *següent:*

$$
\begin{array}{llll}
v(\{1\}) = 1 & v(\{2\}) = 1 & v(\{3\}) = 1 & v(\{4\}) = 1 \\
v(\{1,2\}) = 4 & v(\{1,3\}) = 4 & v(\{1,4\}) = 5 & v(\{2,3\}) = 4 \\
v(\{2,4\}) = 5 & v(\{3,4\}) = 6 & v(\{1,2,3\}) = 9 & v(\{1,3,4\}) = 7 \\
v(\{2,3,4\}) = 7 & v(\{1,2,4\} = 7 & v(\{1,2,3,4\}) = 16. &
\end{array}
$$

Veiem que el jugador 1 *i* 2 *són substituts. En aquest cas coalicions que no tinguin ni al jugador* 1 *ni al* 2 *poden ser* $\{3\}, \{4\}, \{3, 4\}$. *Podem observar que:*

$$
\begin{array}{l}
v(\{3\} \cup \{1\}) = v(\{3\} \cup \{2\}) = 4; \\
v(\{4\} \cup \{1\}) = v(\{4\} \cup \{2\}) = 5; \\
v(\{3,4\} \cup \{1\}) = v(\{3,4\} \cup \{2\}) = 7.
\end{array}
$$

Definició 3.7. Donat un joc (N, v) i donada una imputació $x \in X^*(N, v)$ es diu que x satisfà la **propietat de tractament igualitari** en un conjunt de jugadors $S \subseteq N$ si per a tot parell de jugadors substituts $i, j \in N$, $x_i = x_j$. Una solució σ satisfà la propietat de tractament igualitari si per tot $x \in \sigma(N, v)$, x satisfà la propietat de tractament igualitari.

Definició 3.8. Sigui σ solució d'un conjunt de jocs Γ. Diem que σ és **covariant sota equivalència estratègica** (COV) si es satisfà: Si (N, v) i $(N, w) \in \Gamma$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}^n$, i $w = \alpha v + \beta$, aleshores: $\sigma(N, w)$=$\alpha\sigma(N, v) + \beta$.

La definició anterior pot ser una mica enganyosa, ja que en diu que $w = \alpha v + \beta$, on $\alpha > 0$ valor real, i β un vector de $\mathbb{R}^n$, és a dir, amb n components, i volem sumar el vector de n components β amb la funció característica ($2^n - 1$ elements) multiplicada per un escalar. Hem d'entendre la suma de la manera següent:

$$
\begin{array}{ll}
w(\{i\}) & = \alpha v(\{i\}) + \beta_i, \text{ per } i \in N. \\
w(\{i_1, ..., i_k\}) & = \alpha v(\{i_1, .., i_k\}) + \beta_{i_1} + ... + \beta_{i_k}, \text{ per } i_1, .., i_k \in N.
\end{array}
$$

Exemple 14. *Sigui un joc (N, v) de tres jugadors amb la següent funció característica:*

$$\begin{array}{lll} v(\{1\}) = 1 & v(\{2\}) = 2 & v(\{3\}) = 1 \\ v(\{1,2\}) = 5 & v(\{1,3\}) = 8 & v(\{2,3\}) = 10 \\ v(\{1,2,3\}) = 21. & & \end{array}$$

I sigui $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. Aleshores, la funció característica w serà:

$w(\{1\}) = \alpha v(\{1\}) + \beta_1$
$w(\{2\}) = \alpha v(\{2\}) + \beta_2$
$w(\{3\}) = \alpha v(\{3\}) + \beta_3$
$w(\{1,2\}) = \alpha v(\{1,2\}) + \beta_1 + \beta_2$
$w(\{1,3\}) = \alpha v(\{1,3\}) + \beta_1 + \beta_3$
$w(\{2,3\}) = \alpha v(\{2,3\}) + \beta_2 + \beta_3$
$w(\{1,2,3\}) = \alpha v(\{1,2,3\}) + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3.$

Definició 3.9. Una solució σ en un conjunt de jocs Γ té la propietat inversa de joc reduït (CRGP) si la següent condició és satisfà: Si $(N, v) \in \Gamma$, $|N| \geq 2$, $x \in X^*(N, v)$, $(S, v_{s,x}) \in \Gamma$, i $x \in \sigma(S, v_{s,x})$ per tot $S \in 2^N \setminus \{0\}$, aleshores $x \in \sigma(N, v)$.

Proposició 3.1. *Sigui σ una solució d'un joc de la classe de jocs de dos jugadors que:*

- *És no buida (NE)*
- *És òptim de Pareto (PO)*
- *És covariant*
- *Té la propietat de tractament igualitari (ETP)*

Aleshores per qualsevol joc de dos jugadors (N, v), $\sigma(N, v)$ és la solució estàndard de (N, v), $\sigma(N, v)$=x_i on:

$$x_i = \tfrac{v(N) - \sum_{j \in N} v(j)}{2} + v(i) \text{ per } i \in N$$

Demostració:
Sigui (N, v) un joc de dos jugadors i (N, w) el joc zero-normalitzat definit per $w(\emptyset) = w(\{i\}) = 0$ per $i \in N$ i $w(N) = v(N) - \sum_{i \in N} v(\{i\})$. Siguin $y, z \in \mathbb{R}^n$ definits com $y_i = \frac{w(N)}{2}$ i $z_i = v(\{i\})$ per tot $i \in N$. Per les propietats de no buit, tractament igualitari i òptim de Pareto, $\sigma(N, v) = \{y\}$. També tenim que $v = w + z$, i amb la propietat de covariància ens queda la prova completada.

$\square$

El teorema que anunciem tot seguit, es pot trobar demostrat a Introduction to the theory of cooperative games, Peleg i Sudholter, capítol 5 Teorema 5.4.2.

Teorema 6. *Hi ha una única solució de (N, v) tal que:*

(a) És no buida;

(b) És òptima de Pareto;

(c) És covariant sota equivalència estratègica;

(d) Té la propietat de tractament igualitari;

(e) Té la propietat de joc reduït;

(f) Té la propietat inversa de joc reduït;

*i és el **prekernel**.*

Aquí no el demostrarem, però ja hem vist prèviament que el prekernel és no buit perquè conté el prenucleolus, i que té la propietat de joc reduït ho hem provat anteriorment també. Que té la propietat inversa de joc reduït es prova de forma similar a que té la propietat de joc reduït.

Un altra propietat important de les solucions es la **raonabilitat**.

Definició 3.10. Una solució σ de (N, v) és:

- Raonable des de dalt si per $x \in \sigma(N, v)$ i per tot $i \in N$, tenim que:

$$x_i \leq màx_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \{v(S \cup \{i\}) - v(S)\}.$$

- Raonable des de baix si per $x \in \sigma(N, v)$ i per tot $i \in N$, tenim que:

$$x_i \geq mín_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \{v(S \cup \{i\}) - v(S)\}.$$

Si és raonable des de dalt i raonable des de baix diem que és raonable.

Nota: El kernel i el prekernel són raonables, tot i que en aquest treball no ho demostrarem.

4 Aplicacions: jocs de bancarrota

Els jocs de bancarrota formen part del conjunt de jocs cooperatius, i es solen aplicar, com el seu nom indica, a situacions de fallida d'una empresa i on s'han de liquidar els seus deutes. En aquestes situacions els jugadors són els creditors i $v(N)$ serà el resultant de la liquidació de l'empresa, (ho anomenarem E). Històricament, l'aparició dels jocs de Bancarrota es remunta a la tradició jueva, i en trobem exemples com el següent a el Talmud.

Exemple 15. *Dos homes discuteixen per una tela, un d'ells en reclama la meitat i l'altre la totalitat.*

En aquest cas, el Talmud proposa com a solució que cada home, com a mínim, es quedi el que resta de tela (si queda alguna cosa) després de donar-li a l'altre home el que reclama. Si després sobra alguna cosa, el que sobra es repartirà a parts iguals.

Quan hi ha més de dos jugadors, aquesta idea es pot generalitzar dient que cada coalició té dret com a mínim al que resta (si queda alguna cosa) després de donar als jugadors que no hi són a la coalició el que reclamen. Dit formalment:

Definició 4.1. La funció característica d'un joc de bancarrota és $v_{E,d}(S) = màx\{0, E - d(N \setminus S)\}$, on E serà el patrimoni a liquidar, N el nombre de creditors total, $S \subseteq N$, i d seran les demandes dels creditors que no estan en S.

Exemple 16. *Una empresa immobiliària ha fet fallida, i ha deixat un patrimoni de 1000000. Té tres creditors amb els següents drets sobre el patrimoni:*

creditor 1: 200.000
creditor 2: 500.000
creditor 3: 500.000

En aquest cas:

$v(\{1\}) = màx\{0, 1.000.000 - 500.000 - 500.000\} = màx\{0, 0\} = 0$, *en canvi:*

$v(\{2\}) = màx\{0, 1.000.000 - 500.000 - 200.000\} = màx\{0, 300.000\} = 300.000$ *i*

$v(\{3\}) = màx\{0, 300.000\} = 300.000.$

Si 2 *i* 3 *cooperesin,* $v(\{2, 3\}) = màx\{0, 800.000\}$ *i es podrien quedar* 400.000 *cada un i només perdrien* 100.000 *dels que reclamaven originalment.*

En general en els jocs de bancarrota sol ser difícil que els creditors es posin d'acord amb el repartiment.

Una de les propietats més importants dels jocs de bancarrota, és el teorema següent, veure [2].

Teorema 7 (Maschler, Curiel i Tijs, 1987)**.** *Tot joc de bancarrota és convex.*

Demostració: Sigui $S \subseteq T \subseteq N \setminus \{i\}$. Volem veure que:

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leq v(T \cup \{i\}) - v(T) \text{ o el que és el mateix}$$
$$v(S \cup \{i\}) + v(T) \leq v(T \cup \{i\}) + v(S).$$

Sigui $d = (d_1, ..., d_n)$ el vector de demandes de cada creditor i $D = \sum_{j=1}^{j=n} d_j$, és a dir, la suma de les demandes de tots els creditors. Anomenem $d(S)$ i $d(T)$ les demandes del conjunt S i del conjunt T respectivament, amb $d(S) \leq d(T)$ (ja que $S \subseteq T$) i sigui $i \notin S, i \notin T$ amb d_i demanda de i.

Tenint en compte aquesta notació, observem que:

$$v(S \cup \{i\}) + v(T) = màx\{0, E - D + d(S) + d_i\} + màx\{0, E - D + d(T)\}$$
$$= màx\{0, E - D + d(S) + d_i, E - D + d(T), 2E - 2D + d(S) + d(T) + d_i\}.$$

A més,

$$v(T \cup \{i\}) + v(S) = màx\{0, E - D + d(T) + d_i\} + màx\{0, E - D - d(S)\}$$
$$= màx\{0, E - D + d(T) + d_i, E - D + d(S), 2E - 2D + d(S) + d(T) + d_i\}.$$

Hem de veure que

$$màx\{0, E - D + d(S) + d_i, E - D + d(T), 2E - 2D + d(S) + d(T) + d_i\}$$
$$\leq màx\{0, E - D + d(T) + d_i, E - D + d(S), 2E - 2D + d(S) + d(T) + d_i\}.$$

Un cop tenim això, una manera de procedir seria comparar cada terme de

$$màx\{0, E - D + d(S) + d_i, E - D + d(T), 2E - 2D + d(S) + d(T) + d_i\}$$

i veure que és més petit o igual que el terme que ocupa el seu lloc a

$$màx\{0, E - D + d(T) + d_i, E - D + d(S), 2E - 2D + d(S) + d(T) + d_i\}$$

Si comparem terme a terme, el primer i el quart terme són el mateix, per tant, cap problema. El segon terme com que $d(S) < d(T)$ tampoc ens donaria cap problema. El tercer terme, com que $E - D + d(T) < E - D + d(T) + d_i$ i $E - D + d(T) + d_i > E - D + d(S)$, obtenim el que volíem demostrar.

□

Corol·lari 7.1. *Sigui (N, v) un joc de bancarrota. Aleshores és zero-monòton.*

Demostració:
Com hem vist a l'apartat 1, a la proposició 1.1 un joc convex és zero-monòton, i com que acabem de veure que els jocs de bancarrota són convexos, quedaria provat el corol·lari.

□

Corol·lari 7.2. *Donat un joc de bancarrota* (N, v) *el kernel i el prekernel coincideixen.*

Demostració: A l'anterior corol·lari hem vist que els jocs de bancarrota són zero-monòtons, i a l'apartat 2 teorema 1 hem vist que donat un joc zero-monòton, el kernel i el prekernel coincideixen. Per tant, quedaria provat el corol·lari.

$\square$

4.1 Un joc de bancarrota de tres jugadors i el seu joc reduït

En aquest apartat presentarem la relació entre prekernel, joc de bancarrota, i joc reduït, tot basant-nos en Aumann 1985, veure [1].
Donat un joc de bancarrota de tres jugadors, i una distribució $x = (x_1, x_2, x_3)$, calcularem el seu joc reduït de la forma que segueix. Siguin $i,\ j,\ k \in \{1,2,3\}$, amb $i,\ j,\ k$ diferents entre ells. Associem x_i al pagament del jugador i, x_j al pagament del jugador j, x_k al pagament del jugador k, associem les demandes de la mateixa manera. El joc reduït sobre $S = \{i,j\}$ serà:

$$\begin{aligned} v_{\{\{i,j\},x\}}(\{i\}) &= m\grave{a}x\{m\grave{a}x\{0, E-d_j-d_k\}, m\grave{a}x\{\{0, E-d_j\} - x_k\}\} \\ &= m\grave{a}x\{0, E-d_j-d_k, -x_k, E-d_j-x_k\}. \end{aligned}$$

Observem que $0 \geq -x_k$, i com $E = x_i + x_j + x_k$, $E - d_j - x_k = x_i + x_j - d_j \geq E - d_j - d_k$, obtenim:

$$v_{\{\{i,j\},x\}}(\{i\}) = m\grave{a}x\{0, x_i + x_j - d_j\}.$$

Anàlogament,

$$v_{\{\{i,j\},x\}}(\{j\}) = m\grave{a}x\{0,\ x_i + x_j - d_i\}.$$

Finalment, per definició:

$$v_{\{\{i,j\},x\}}(\{i,j\}) = x_i + x_j.$$

Si $i = 1$, $j = 2$ i $k = 3$, tindríem que $S = \{1,2\}$ i el joc reduït ens sortiria:

$$\begin{aligned} v_{\{\{1,2\},x\}}(\{1\}) &= m\grave{a}x\{0, x_1 + x_2 - d_2\} \\ v_{\{\{1,2\},x\}}(\{2\}) &= m\grave{a}x\{0,\ x_1 + x_2 - d_1\} \\ v_{\{\{1,2\},x\}}(\{1,2\}) &= x_1 + x_2. \end{aligned}$$

Exemple 17. *Sigui el joc de bancarrota amb les demandes*

$$\begin{array}{ll} d_1 = 5 & d_2 = 4 \\ d_3 = 6 & E = 12. \end{array}$$

Sigui una distribució $x = (4,3,5)$. Aleshores:

$$\begin{aligned} v_{\{\{1,2\},x\}}(\{1\}) &= m\grave{a}x\{0,2\} \\ v_{\{\{1,2\},x\}}(\{2\}) &= m\grave{a}x\{0,1\} \\ v_{\{\{1,2\},x\}}(\{1,2\}) &= 7. \end{aligned}$$

Un teorema molt important que podem trobar a [1], pàg 210-211, i que aquí no demostrarem, és el següent.

Teorema 8. *Sigui $x \in X^*(N,v)$, i S una coalició amb dos jugadors. Aleshores x restringit a S és la solució estàndard de $v_{\{S,\{x\}\}}$.*

Veiem l'aplicació d'aquest teorema seguint amb l'exemple 17 tot calculant la solució estàndard del joc reduït que hem obtingut.

Exemple 18. *La solució estàndard del joc de l'exemple 17 seria:*

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 + \tfrac{4}{2} = 4 \\ x_2 &= 1 + \tfrac{4}{2} = 3 \end{aligned}$$

Observem que al reduir el joc la solució estàndard coincideix amb la distribució proposada pels dos jugadors sobre els que hem restringit, això passa ja que $(4,3,5)$ pertany al prekernel.
Si agafem una distribució $y = (4,4,4)$, tenim que:

$$\begin{aligned} &v_{\{\{1,2\},y\}}(\{1\}) = m\grave{a}x\{0,4\} \\ &v_{\{\{1,2\},y\}}(\{2\}) = m\grave{a}x\{0,3\} \\ &v_{\{\{1,2\},y\}}(\{1,2\}) = 8. \end{aligned}$$

I la solució estàndard d'aquest joc serà:

$$\begin{aligned} y_1 &= 4 + \tfrac{1}{2} = 4.5 \\ y_2 &= 3 + \tfrac{1}{2} = 3.5 \end{aligned}$$

Ara veiem que la solució estàndard ja no coincideix amb la distribució proposada sobre els jugadors als que hem restringit, ja que $(4,4,4)$ no és del prekernel, de fet si calculem $s_{1,2}$ i $s_{2,1}$ ja veiem que no coincideixen, ja que $s_{1,2} = 0$, i $s_{2,1} = -1$.

S	$e^v(S,x) = v(S) - x(S)$
{1}	*-2*
{1,3}	*0*

S	$e^v(S,x) = v(S) - x(S)$
{2}	*-3*
{2,3}	*-1*

5 Un programa per calcular el prekernel d'un joc de tres jugadors

Després de veure el concepte de prekernel, un es podria preguntar si hi ha algun mètode ràpid per trobar-lo. Bé, la resposta a això és que depèn del nombre de jugadors, requerirà menys càlculs o més. Durant el desenvolupament d'aquest treball es va plantejar la pregunta de que si l'algoritme descrit a continuació trobava el prekernel per un joc de tres jugadors.

Algoritme:

Primer pas:

Donat un joc de 3 jugadors dibuixaríem el clàssic triangle amb vèrtexs A, B, C on:
$A = (v(\{1,2,3\}) - v(\{2\}) - v(\{3\}),\ v(\{2\}),\ v(\{3\}))$
$B = (v(\{1\}),\ v(\{1,2,3\}) - v(\{1\}) - v(\{3\}),\ v(\{3\}))$
$C = (v(\{1\}),\ v(\{2\}),\ v(\{1,2,3\}) - v(\{1\}) - v(\{2\}))$

Agafar un d'aquests punts entenent-lo com $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ i fixar x_3^0.

Segon pas:

Calcular el joc reduït pel jugador 1 i 2 i donar la solució estàndard, que ens donarà un nou punt $x^1 = (x_1^1, x_2^1, x_3^1)$, on x_1^1, x_2^1 seran la solució estàndard i l'x_3^1 és x_3 (ja que l'hem fixat).
Si el nou punt aconseguit és del prekernel, hem acabat sinó passem al tercer pas.

Tercer pas:

Fixem x_2^1, calculem el joc reduït de pels jugadors 1 i 3 i obtindrem un nou punt, x^2.
Si pertany al prekernel hem acabat, sinó, fixem x_1^2 i calculem el joc reduït pel jugadors 2 i 3 i els donem la solució estàndard.
Si pertany al prekernel hem acabat, sinó tornem al pas 1 però amb el punt obtingut.

Una cosa que hauríem de tenir en compte, és que podem aplicar el programa ja que el prekernel sempre és no buit (vist a l'apartat 3) ja que el prenucleolus sempre hi pertany, sinó, podríem aplicar l'algoritme i crear un bucle.
Després de crear un programa que executes aquest algoritme (el codi està a annexos) i provar-lo amb varis exemples de jocs de 3 jugadors ha trobat algun punt del prekernel en tots els exemples i relativament ràpid, amb poques iteracions. Llavors, aquí se'ns planteja la pregunta de si funciona, o és casualitat. No hem pogut demostrar formalment que l'algoritme sempre hagi de funcionar,

ni trobar algun joc on no funciones.
Veiem amb alguns exemples que passa si hi apliquem l'algoritme.

Exemple 19. *Sigui el joc:*

$$\begin{array}{lll} v(\{1\}) = 0 & v(\{2\}) = 0 & v(\{3\}) = 0 \\ v(\{1,2\}) = 4 & v(\{1,3\}) = 4 & v(\{2,3\}) = 4 \\ v(\{1,2,3\}) = 24. & & \end{array}$$

Dibuixaríem el triangle amb vèrtexs $A = (24, 0, 0)$, $B = (0, 24, 0)$, $C = (0, 0, 24)$. Prenem el vèrtex A, anomenem $x^0 = (24, 0, 0)$. Fixem $x_3^0 = 0$, aleshores el joc reduït quedaria:
$v_{\{\{1,2\},x\}}$ *serà:*
$v_{\{\{1,2\},x\}}(\{1\}) = màx\{v(\{1\}), v(\{1,3\}) - x_3\}$
$v_{\{\{1,2\},x\}}(\{2\}) = màx\{v(\{2\}), v(\{2,3\}) - x_3\}$
$v_{\{\{1,2\},x\}}(\{12\}) = 24.$
Aleshores calculem la solució estàndard i obtenim el punt $x^1 = (12, 12, 0)$, que no és del prekernel, per tant passem al pas dos. Fixem x_2^1 i fem el joc reduït obtenim el punt $x^2 = (6, 12, 6)$, que tampoc és del prekernel, per tant, passem al pas tres, fixem x_1^2 i aleshores obtenim el punt $x^3 = (6, 9, 9)$, que tampoc és del prekernel, i anem iterant. Calculant aquest joc amb el programa, amb un error de 10^{-6}, hem necessitat 27 iteracions per arribar al punt $(8, 8, 8)$, que efectivament és del prekernel. Si disminuïm l'error la convergència és òbviament més ràpida. El programa el que fa és fer de forma iterativa els passos i a cada nou punt calculat crida un funció que comprova si el punt obtingut és del prekernel o no, tot calculant els excessos i veient si $s_{ij}(x) - s_{ji}(x) \leq 10^{-6}$, per $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Veiem ara un exemple de forma més gràfica.

Exemple 20. *Sigui el joc:*

$$\begin{array}{lll} v(\{1\}) = 0 & v(\{2\}) = 0 & v(\{3\}) = 0 \\ v(\{1,2\}) = 1 & v(\{1,3\}) = 1 & v(\{2,3\}) = 0 \\ v(\{1,2,3\}) = 2. & & \end{array}$$

Si prenem com a punt inicial $x = (0, 2, 0)$, aleshores el programa ens fa dues iteracions $x^1 = (1.5, 0.5, 0)$, $x^2 = (1, 0.5, 0.5)$, on x^2 ja és del prekernel.

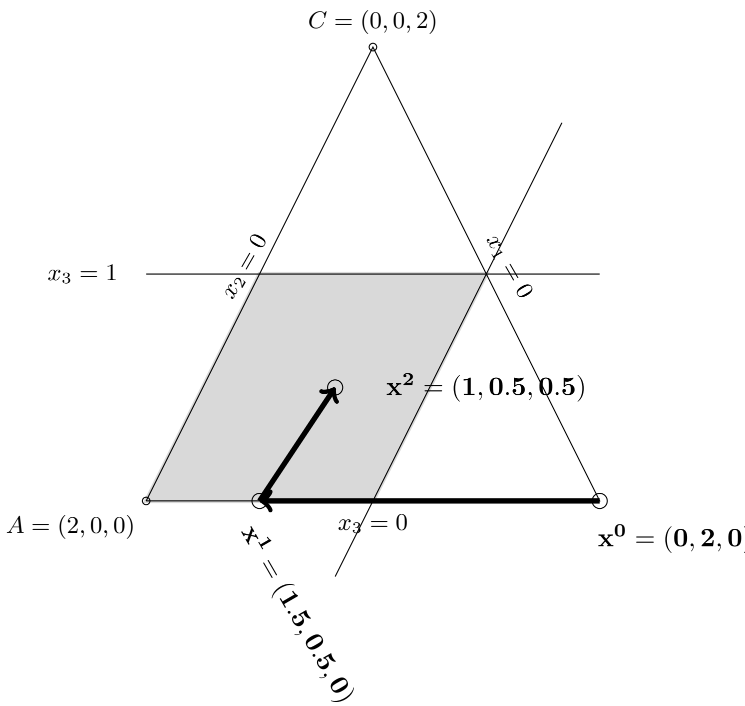

Figura 6: Representació gràfica de l'algoritme aplicat al joc de l'exemple 20.

Després de veure això, un es podria preguntar, i si apliquem l'algoritme als jocs de bancarrota, també funciona? Bé, després de modificar el programa adequadament per tal d'adapatar-lo als jocs de bancarrota i provar-lo, usant l'apartat 4.1 on s'il·lustra com es calcula el joc reduït d'un joc de bancarrota, hem obtingut que la resposta és sí. Veiem-ho amb un exemple.

Exemple 21. *Donat el joc de bancarrota següent:*

$$\begin{array}{ll} d_1 = 3 & d_2 = 5 \\ d_3 = 2 & E = 8 \end{array}$$

Si prenem com a punt inicial, $(1, 5, 2)$ *aleshores el programa ens dona 21 iteracions i* $x = (2.33, 4.33, 1.33) \in Prekernel$*. Fem la comprovació de que* $x \in Prekernel$*, calculant els excessos:*

S	$e^v(S,x) = v(S) - x(S)$
{1}	-1.33
{1,3}	-0.66

S	$e^v(S,x) = v(S) - x(S)$
{2}	-1.33
{2,3}	-0.66

Veiem que $s^v_{1,2} = s^v_{2,1} = -0.66$.

S	$e^v(S,x) = v(S) - x(S)$
{1}	-1.33
{1,2}	-0.66

S	$e^v(S,x) = v(S) - x(S)$
{3}	-1.33
{2,3}	-0.66

Observem que $s^v_{1,3} = s^v_{3,1} = -0.66$.

S	$e^v(S,x) = v(S) - x(S)$
{2}	-1.33
{1,2}	-0.66

S	$e^v(S,x) = v(S) - x(S)$
{3}	-1.33
{1,3}	-0.66

Observem que $s^v_{2,3} = s^v_{3,2} = -0.66$. *Així que, efectivament, aquest punt pertany al prekernel i l'algoritme es pot aplicar als jocs de bancarrota.*

6 Conclusions

La Teoria de Jocs, al ser un camp relativament recent d'estudi, encara té molts aspectes a descobrir, com hem vist, aplicant-hi la geometria o la programació, obtenim propietats sorprenents.

Trobar un punt del prekernel no és senzill, ja que de fet, només per per verificar que un punt hi pertany necessitem calcular sis excessos. Per tant, al aplicar la programació en el càlcul d'excessos ens facilita molt la feina i ens estalvia molt de temps. De la mateixa manera, al programar les iteracions de l'algoritme ens estalviem molts càlculs a mà, la qual cosa ens permet treballar més ràpid i obtenir més resultats. Al tenir un programa, podem aplicar l'algoritme a diferents jocs i veure si triga més, menys, si sempre troba un punt del prekernel, i el més important, com s'acosten cada vegada més ràpid després de cada iteració els punts resultants al prekernel.
La caracterització geomètrica del kernel i del prekernel ens permet enfocar des d'un altra perspectiva aquests conceptes, i ens permet arribar a la formulació de l'algoritme a l'apartat cinc.

En aquest treball hem conjecturat un algoritme per tal de trobar un punt del prekernel donat un joc de tres jugadors, com dèiem a l'apartat cinc, no hem pogut demostrar formalment que funcionava però tampoc hem trobat cap joc amb el que fallés. L'algoritme, òbviament, es pot aplicar a jocs de N jugadors mantenint la mateixa estructura. Si es demostrés formalment aquesta conjectura pel cas de tres jugadors, per inducció podríem extrapolar-la al cas de N jugadors.

7 Annexos

En aquesta secció hi ha, en aquest ordre, el programa que aplica l'algoritme a un joc de tres jugadors, i el programa que aplica l'algoritme a un joc de bancarrota de tres jugadors, que de fet, és una adaptació del primer. Dins aquests codis també hi trobem la funció prekernel, que és la que ens calcula els excessos i ens mira si un punt pertany al prekernel o no. La manera de llegir les dades del programa es podria modificar per tal que les llegís directament d'un fitxer, i també es podrien tractar com un vector i passar un punter a la funció prekernel, això depèn de l'estil del programador i no alteraria l'essència del programa.

```
/*Algoritme*/

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

int prekernel(double *,double,double,double,double,double,double);

int main(void){
  double v1,v2,v3,v12,v13,v23,v123;
  double *p;
  int cont=0.,parada=0.;
  double aux1,aux2,aux3,aux4,aux5,aux6;
  int a,b,c,i;
  double rv1,rv2,rv12,rrv1,rrv3,rrv13,rrrv2,rrrv3,rrrv23;
  double x1,x2,x3;
  FILE *fit;
p=(double *)malloc(3*sizeof(double));
fit=fopen("Punts_i_iteracions.dad","w");
if(fit==NULL){
  return 1;
  }

printf("Donam v1\n");
scanf("%le",&v1);
printf("Donam v2\n");
scanf("%le",&v2);
printf("Donam v3\n");
scanf("%le",&v3);
printf("Donam v12\n");
scanf("%le",&v12);
printf("Donam v13\n");
scanf("%le",&v13);
printf("Donam v23\n");
scanf("%le",&v23);
printf("Donam v123\n");
scanf("%le",&v123);

printf("Donam el punt inicial\n");
for(i=0;i<3;i++){
   scanf("%le",&p[i]);
   }

fprintf(fit,"%20.13e%20.13e%20.13e\n",p[0],p[1],p[2]);
while(parada==0){

x3=p[2];
rv1=v1;
aux1=v13-x3;
if(aux1>rv1){
  rv1=aux1;
}
rv2=v2;
aux2=v23-x3;
if(aux2>rv2){
  rv2=aux2;
}
rv12=v123-x3;
x1=rv1+(rv12-rv1-rv2)/2;
x2=rv2+(rv12-rv1-rv2)/2;
p[0]=x1;
p[1]=x2;
p[2]=x3;
cont++;
fprintf(fit,"%20.13e%20.13e%20.13e_%d\n",p[0],p[1],p[2],cont);
a=prekernel(p,v1,v2,v3,v12,v13,v23);
if(a==1){
   parada=1;
   }


x2=p[1];
```

```
rrv1=v1;
aux3=v12-x2;
if(rrv1<aux3){
  rrv1=aux3;
}
rrv3=v3;
aux4=v23-x2;
if(aux4>rrv3){
   rrv3=aux4;
}
rrv13=v123-x2;

x1=rrv1+(rrv13-rrv1-rrv3)/2;
x3=rrv3+(rrv13-rrv1-rrv3)/2;

p[0]=x1;
p[1]=x2;
p[2]=x3;

cont++;

fprintf(fit,"%20.13e%20.13e%20.13e_%d\n",p[0],p[1],p[2],cont);
b=prekernel(p,v1,v2,v3,v12,v13,v23);
if(b==1){
   parada=1;
  }


p[0]=x1;

rrrv2=v2;
aux5=v12-x1;
if(aux5>rrrv2){
  rrrv2=aux5;
  }
rrrv3=v3;
aux6=v13-x1;
if(aux6>rrrv3){
  rrrv3=aux6;
 }

rrrv23=v123-x1;

x2=rrrv2+(rrrv23-rrrv2-rrrv3)/2;

x3=rrrv3+(rrrv23-rrrv2-rrrv3)/2;
p[1]=x2;
p[2]=x3;

cont++;
fprintf(fit,"%20.13e%20.13e%20.13e_%d\n",p[0],p[1],p[2],cont);
c=prekernel(p,v1,v2,v3,v12,v13,v23);

if(c==1){
   parada=1;
   }
}
for(i=0;i<3;i++){
   printf("%le\n",p[i]);
   }

printf("%d",cont);
return 0;
}


int prekernel(double *p,double v1,double v2,double v3,double v12, double v13, double v23){
    int a,b;
    double s12,s21,s13,s31,s23,s32;
    double x[3];
```

```
    double aux1,aux2,aux3,aux4,aux5,aux6;
    double w1,w2,w3,tol=1.e-6;
x[0]=p[0];
x[1]=p[1];
x[2]=p[2];


s12=v1-x[0];
aux1=v13-x[0]-x[2];
if(aux1>s12){
   s12=aux1;
}
s21=v2-x[1];
aux2=v23-x[1]-x[2];
if(aux2>s21){
  s21=aux2;
}
s31=v3-x[2];
aux3=v23-x[1]-x[2];
if(aux3>s31){
   s31=aux3;
}
s13=v1-x[0];
aux4=v12-x[0]-x[1];
if(aux4>s13){
  s13=aux4;
}

s23=v2-x[1];
aux5=v12-x[0]-x[1];
if(aux5>s23){
   s23=aux5;
}
s32=v3-x[2];
aux6=v13-x[0]-x[2];
if(aux6>s32){
  s32=aux6;
}
w1=fabs(s12-s21);
w2=fabs(s13-s31);
w3=fabs(s23-s32);

if(w1<tol&& w2<tol&&w3<tol){
   a=1.;
    return a;
   }else{
    b=0.;
return b;
}

}
```

```
/*Algoritme aplicat a un joc de bancarrota*/

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

int prekernel(double *,double,double,double,double,double,double);

int main(void){
  double d1,d2,d3,E;
  double v1,v2,v3,v12,v13,v23;
  double s1,s2,s3,s4,s5,s6;
  double *p;
  int cont=0.,parada=0.;
  double aux1,aux2,aux3,aux4,aux5,aux6;
  int a,b,c,i;
  double rv1,rv2,rv12,rrv1,rrv3,rrv13,rrrv2,rrrv3,rrrv23;
  double x1,x2,x3;
  FILE *fit;
p=(double *)malloc(3*sizeof(double));
fit=fopen("Punts1.dad","w");
if(fit==NULL){
  return 1;
  }

printf("Donam d1\n");
scanf("%le",&d1);
printf("Donam d2\n");
scanf("%le",&d2);
printf("Donam d3\n");
scanf("%le",&d3);
printf("Donam E\n");
scanf("%le",&E);

s1=E-d2-d3;
s2=E-d1-d3;
s3=E-d1-d2;
s4=E-d3;
s5=E-d2;
s6=E-d1;
printf("Donam el punt inicial\n");
for(i=0;i<3;i++){
   scanf("%le",&p[i]);
   }


v1=0;
if(v1<s1){
  v1=s1;
}
v2=0;
if(v2<s2){
  v2=s2;
}
v3=0;
if(v3<s3){
  v3=s3;
}

v12=0;
if(v12<s4){
  v12=s4;
}
v13=0;
if(v13<s5){
  v13=s5;
}
v23=0;
if(v23<s6){
  v23=s6;
}
```

```
fprintf(fit,"%20.13e%20.13e%20.13e\n",p[0],p[1],p[2]);
while(parada==0){


x3=p[2];
rv1=0;
aux1=E-d2-x3;
if(aux1>rv1){
  rv1=aux1;
}
rv2=0;
aux2=E-d1-x3;
if(aux2>rv2){
  rv2=aux2;
}
rv12=E-x3;
x1=rv1+(rv12-rv1-rv2)/2;
x2=rv2+(rv12-rv1-rv2)/2;
p[0]=x1;
p[1]=x2;
p[2]=x3;
cont++;
fprintf(fit,"%20.13e%20.13e%20.13e_%d\n",p[0],p[1],p[2],cont);
a=prekernel(p,v1,v2,v3,v12,v13,v23);
if(a==1){
   parada=1;
   }


x2=p[1];


rrv1=0;
aux3=E-x2-d3;
if(rrv1<aux3){
  rrv1=aux3;
}
rrv3=0;
aux4=E-d1-x2;
if(aux4>rrv3){
   rrv3=aux4;
}
rrv13=E-x2;

x1=rrv1+(rrv13-rrv1-rrv3)/2;
x3=rrv3+(rrv13-rrv1-rrv3)/2;

p[0]=x1;
p[1]=x2;
p[2]=x3;

cont++;

fprintf(fit,"%20.13e%20.13e%20.13e_%d\n",p[0],p[1],p[2],cont);
b=prekernel(p,v1,v2,v3,v12,v13,v23);
if(b==1){
   parada=1;
  }

p[0]=x1;

rrrv2=0;
aux5=E-x1-d3;
if(aux5>rrrv2){
  rrrv2=aux5;
  }
rrrv3=0;
aux6=E-x1-d2;
if(aux6>rrrv3){
  rrrv3=aux6;
 }
```

```
rrrv23=E-x1;

x2=rrrv2+(rrrv23-rrrv2-rrrv3)/2;

x3=rrrv3+(rrrv23-rrrv2-rrrv3)/2;
p[1]=x2;
p[2]=x3;

cont++;
fprintf(fit,"%20.13e%20.13e%20.13e_%d\n",p[0],p[1],p[2],cont);
c=prekernel(p,v1,v2,v3,v12,v13,v23);

if(c==1){
   parada=1;
   }
}
for(i=0;i<3;i++){
   printf("%le\n",p[i]);
   }

printf("%d",cont);
return 0;
}


int prekernel(double *p,double v1,double v2,double v3,double v12, double v13, double v23){
    int a,b;
    double s12,s21,s13,s31,s23,s32;
    double x[3];
    double aux1,aux2,aux3,aux4,aux5,aux6;
    double w1,w2,w3,tol=1.e-6;
x[0]=p[0];
x[1]=p[1];
x[2]=p[2];


s12=v1-x[0];
aux1=v13-x[0]-x[2];
if(aux1>s12){
   s12=aux1;
}
s21=v2-x[1];
aux2=v23-x[1]-x[2];
if(aux2>s21){
  s21=aux2;
}
s31=v3-x[2];
aux3=v23-x[1]-x[2];
if(aux3>s31){
   s31=aux3;
}
s13=v1-x[0];
aux4=v12-x[0]-x[1];
if(aux4>s13){
  s13=aux4;
}

s23=v2-x[1];
aux5=v12-x[0]-x[1];
if(aux5>s23){
   s23=aux5;
}
s32=v3-x[2];
aux6=v13-x[0]-x[2];
if(aux6>s32){
  s32=aux6;
}
w1=fabs(s12-s21);
w2=fabs(s13-s31);
w3=fabs(s23-s32);
```

```
if(w1<tol&& w2<tol&&w3<tol){
   a=1.;
    return a;
   }else{
    b=0.;
return b;
}

}
```

8 Notació

Notació	Significat
$X^*(N,v)$	conjunt de preimputacions d'un joc (N,v)
$X(N,v)$	conjunt d'imputacions d'un joc (N,v)
$C(N,v)$	core d'un joc (N,v)
$C_\epsilon(N,v)$	epsilon core d'un joc (N,v)
$\Theta(x)$	vector d'excessos
$\eta(v)$	nucleolus d'un joc (N,v)
$\phi(v)$	valor de Shapley d'un joc (N,v)
$T_{ij}(N)$	Donat un joc (N,v), $i,j \in N$, T_{ij} és el conjunt de coalicions de N que contenen i però no j.
$e^v(S,x)$	excés, $v(S) - x(S)$
$s^v_{ij}(x)$	$m\grave{a}x_{\{S \in T_{ij}\}}(e^v(S,x))$
$K^*(N,v)$	prekernel del joc (N,v)
$K(N,v)$	kernel del joc (N,v)
2^N	$\{S \mid S \subseteq N\}$

Referències

[1] Aumann,R.J. Maschler, M. "Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud", Journal of economic theory, 36, 195-213, 1995.

[2] Curiel, I.J. Maschler, M. Tijs,S.H. "Zeitschrift für Operations Research", 1987.

[3] Gillies, D. "Some theorems on n-person games". Ph. D. Dissertation, Princeton University, Department of Mathematics, 1953.

[4] Izquierdo i Aznar, J.M. Marín, J. Martínez de Albéniz, F.J. Núñez Oliva, M. Ybern Carballo, N. "Jocs cooperatius i aplicacions econòmiques". Barcelona: Publicacions de la Universitat de Barcelona, 1999.

[5] Maschler, M. Peleg, B. Shapley, L. "Geommetric properties of the kernel, nucleolus, and related solution concepts". Mathematics of operation research, 1979.

[6] Peleg, B. Sudhölter, "P. Introduction to the theory of cooperative games". Berlin, 2007

[7] Schmeidler, D."The nucleolus of a characteristic function game."SIAM Journal on applied mathematics, 1969.

[8] Shapley, L. "A value for n-person games". Contributions to the Theory of Games, 1953.

[9] Von Neumann, J. Morgenstern, O. "Theory of games and economic behavior". Princeton University Press, 1944.

Índex de figures