GRADO DE MATEMÁTICAS

Trabajo final de grado

MODELOS ESTOCÁSTICOS DE PRECIOS Y VALORACIÓN DE OPCIONES

Autor: Alan Cuesta Rojas

Director:	Dr. Josep Vives Santa Eulalia
Realitzat a:	Departamento de matemáticas e informática
Barcelona,	24 de enero de 2021

Abstract

Since the creation in 1973 of the first stock Exchange exclusively dedicated to financial options, and the irruption of Mathematics in this discipline, leaded by Fisher Black and Myron Scholes, there have been numerous investors who have predicted the option's price behavior backed by the principles of Black-Scholes model in order to perform safer investments.

However, focusing on the current situation of Stock Market, where uncertainty prevails due to the sanitary crisis provoking huge variations in stock prices in short periods of time and the growing preference by investors in assets such as cryptocurrencies, highly volatile assets, the Black-Scholes model is found to be useless, forcing investors to use other models.

The aim of this project is to perform an introduction to 1976 Robert C. Merton Jump-Diffusion model, introducing this way an alternative model to Black-Scholes one, which will take in account situations in which stock prices experiment significant variations in short periods of time, just as it occurs in nowadays market. It will be also introduced the 2002 Kou model, as an alternative Jump-Diffusion model to Merton's in the particular case of dependent option pricing. It will finish with the statement and demonstrations of 2004 Kou-Wang theorem, which gives the investors a barrier options pricing formula

Resumen

Desde la instauración en 1973 de la primera bolsa de valores dedicada en exclusiva a las opciones financieras sobre acciones, así como la irrupción de las matemáticas en esta disciplina, de la mano de Fisher Black y Myron Scholes, han sido numerosos los inversores, que respaldándose en los fundamentos matemáticos del modelo de Black-Scholes, han utilizado dicho modelo a la hora de hacer previsiones de como se comportará el precio de las opciones y poder realizar inversiones mucho más seguras.

No obstante, poniendo el foco en la situación actual de los mercados de valores, donde impera la incertidumbre generada por la crisis sanitaria, provocando variaciones significativas de los precios de los activos en pequeños periodos de tiempo, así como el ya más que observable interés de los inversores por activos como las cryptomonedas, los cuales se caracterizan por presentar elevadas volatilidades, se tiene que el modelo de Black-Scholes no se ceñiría a la realidad, forzando a los inversores a utilizar otros modelos que se adapten más a sus necesidades.

Este trabajo, se encargará de hacer una introducción al modelo de difusión con saltos, presentado por Robert. C. Merton en el año 1976, con el objetivo de presentar un modelo alternativo al de Black-Scholes, el cual tenga en cuenta situaciones donde los precios de los activos experimentan variaciones significativas en pequeños periodos de tiempo tal y como sucede en la actualidad. También se introducirá el modelo de Kou (2002), como un modelo de difusión con saltos alternativo al modelo de Merton, para el *pricing* de las denominadas opciones *path-dependent*, finalizando con el enunciado y la demostración del teorema de Kou-Wang presentado en el año 2004, donde se otorga a los inversores una fórmula para el *pricing* de opciones barrera.

2010 Mathematics Subject Classification. 60G55, 60J65, 60J60, 60J75

Agradecimientos

En primer lugar me gustaría agradecer a mi tutor, el Dr. Josep Vives Santa Eulalia, por la ayuda y consejos que me ha brindado a lo largo de la elaboración de este trabajo. En segundo lugar, agradecerle a mis padres, a mis hermanos y a Raquel, mantenerse a mi lado en los momentos más duros, siendo un apoyo incondicional a lo largo de toda la carrera. Por último, agradecerle a mis amigos, con especial mención a mis *amigos del café*, puesto que sin ellos, nada de esto hubiera sido lo mismo.

Índice

1. Introducción

Debemos remontarnos al siglo XVIII, donde en Estados Unidos y Europa aparecen las primeras negociaciones con opciones financieras, no obstante, debido a la corrupción, la cual manchó este mercado, no fue hasta el siglo XX, cuando una agrupación de empresas, con el objetivo de dotar al mercado de una infraestructura que pusiera en contacto a compradores con vendedores, constituyera la institución conocida como *Put and Call Brokers and Dealers Association.*

No obstante, el *Put and Call Brokers and Dealers Association*, como todo proyecto pionero, presentaba aspectos a mejorar. Principalmente, uno de los inconvenientes más significativos que presentaba dicha institución, era la imposibilidad de poder asegurar que los contratos estipulados se ejecutaran de la manera preestablecida por los inversores, una vez alcanzada la fecha de expiración. Por otro lado, no estaba dotada de un mercado secundario donde los inversores pudieran operar con las opciones en el periodo de tiempo que transcurría desde la adquisición hasta la fecha de expiración comprándolas o vendiéndolas a otros interesados, es decir, que una vez era adquirida una opción no se podía operar con ella vendiéndosela a otra persona que pudiera estar interesada.
Todos estos aspectos quedan solucionados en abril de 1973 cuando el *Chicago Board of Trade* instaura una nueva bolsa denominada *Chicago Board Options Exchange*. Esta nueva institución nace como la primera bolsa de los Estados Unidos que se dedica en exclusiva a las negociaciones de opciones sobre acciones. Esto se ve respaldado por un aumento del volumen de negociaciones sobre opciones financieras, incrementando con ello el interés de los inversores e investigadores respecto de este instrumento derivado.
Es por ello que en 1973 se realizan los mayores avances en la teoría de opciones financieras con el modelo de Black-Scholes, el cual parte de las bases establecidas por Bachelier, quien en sus estudios para desarrollar la "teoría de la especulación", acaba topándose con el movimiento browniano. Este estudio abre la puerta al uso de la teoría de la probabilidad como una de las herramientas a tener en cuenta en finanzas, convirtiéndose la valoración de opciones financieras en

uno de los ejemplos más espectaculares de la aplicación del cálculo estocástico.
Todos estos avances tanto en el marco de los mercados de opciones financieras así como en la teoría de opciones, comienzan a reflejarse en el volumen de negociaciones con opciones el cual en la década de los 80 llega a sobrepasar el volumen de negociaciones sobre acciones que se llevan a cabo en bolsa.

En la actualidad el *Chicago Board Options Exhange* sigue operativo y siendo una de las bolsas de opciones más importantes del mundo, no obstante, no es la única. A medida que el interés de los inversores iba creciendo entorno a las opciones financieras y las oportunidades que estas ofrecían, fueron apareciendo en escena más bolsas destinadas a las negociaciones de estos activos como es el caso de NASDAQ OMX, la Boston Option Exchenge, etc. O en el ámbito Europeo encontraríamos el Euronext LIFFE o bien en España el Mercado Oficial de Opciones y Futuros Financieros (MEFF) fundado el año 1989.

1.1. Opciones Financieras

Acogiéndonos a la definición que nos otorga la Comisión Nacional del Mercado de Valores, definimos una opción financiera como:

Definición 1.1. *Una opción financiera consiste en un contrato que otorga el derecho al comprador e impone la obligación al vendedor, de comprar o vender una determinada cantidad de un activo subyacente en un plazo estipulado a un precio pactado de antemano.*

Para obtener dicho derecho, es decir, para obtener una opción se debe pagar el precio de esta al que denominaremos prima. Dicho precio es derivado del precio del activo subyacente el cual puede ser una acción, divisas, etc.

Cabe destacar que las opciones financieras, al igual que los futuros son un tipo de instrumento derivado financiero y como tal, se tratan de productos de gran riesgo. En gran parte, este riesgo, viene en sintonía con el efecto de apalancamiento al que están sujetos dichos activos, ya que la inversión necesaria para invertir en opciones financieras sobre un determinado activo subyacente es significativamente inferior a la necesaria para invertir directamente sobre el mismo volumen de activo subyacente que obtienes. Este efecto apalancamiento puede ejercer de multiplicador sobre el resultado, obteniendo grandes ganancias o por contra generando grandes pérdidas.

1.2. Clasificación de las Opciones financieras

Así como queda estipulado en la Comisión Nacional del Mercado de Valores (CNMV), atendiendo a diversos criterios, ya sea en base a otorgar el derecho a comprar o vender, así como dependiendo del momento en el que se pueda ejercer dicho derecho, podemos diferenciar diferentes tipos de opciones financieras.

1.2.1. CALL/PUT

La primera clasificación de las opciones viene dado en función del derecho que nos otorga dicha opción (compra o venta).

Definición 1.2. *Definimos como opción de compra o Call a la opcion financiera que otorga al comprador el derecho de comprar a un precio preestablecido en una fecha determinada una cantidad acordada del activo subyacente.*

Definición 1.3. *Definimos como opción de venta o Put a la opción financiera que otorga al comprador el derecho de vender a un precio preestablecido en una fecha determinada una cantidad acordada del activo subyacente.*

Ahora bien, a pesar de tener esta distinción dependiendo de si adquirimos el derecho a comprar o bien el derecho a vender, en finanzas cuando hablamos de compradores, hacemos referencia a aquellos inversores que presentar una posición larga respecto de un determinado activo,es decir, aquellos inversores que compran dicho activo con el fin de venderlo en un tiempo futuro. Por otro lado, cuando hablamos de vendedores, hacemos referencia a aquellos inversores que se posicionan en corto respecto de un determinado activo, es decir, aquellos inversores que venden un determinado activo con el fin de comprarlo en un tiempo futuro. Desde la aparición del mercado secundario de las opciones financieras, las opciones se convirtieron en un activo en sí, lo que conlleva a que los inversores pueden comercializar con estas de la misma manera que lo hacen con las acciones, provocando así la aparición de los cuatro individuos que nos podemos encontrar en los mercados de opciones:

- Compradores de Call (inversores posicionados en largo respecto de un Call).
- Compradores de Put (inversores posicionados en largo respecto de un Put).
- Vendedores de Call (inversores posicionados en corto respecto de un Call).
- Vendedores de Put (inversores posicionados en corto respecto de un Put).

1.2.2. Opciones Americanas i Eurpeas

Cuando obtenemos una opción, ya sea de compra o venta, respecto de un determinado subyacente, determinamos la cantidad de activo que obtendremos, el precio que pagaremos por ello y por último la fecha de expiración en la que ejecutaremos el contrato.
Dependiendo de si podemos ejercer el derecho de compra o venta antes de la fecha de expiración, podemos diferenciar dos tipos de opciones financieras:

Definición 1.4. *Definimos como opción Europea, la opción financiera que solo puede ejecutarse en la fecha de expiración estipulada en el contrato.*

Definición 1.5. *Definimos opción Americana, la opción financiera que puede ejecutarse en cualquier momento desde la obtención de la opción hasta la fecha de expiración.*

En la actualidad, en los mercados financieros la gran mayoría de las opciones financieras que se negocian son opciones Americanas, no obstante, los investigadores acaban realizando primero un estudio del caso de opciones europeas y llevándolo luego al campo de las opciones americanas puesto que es mucho más sencillo trabajar con estas.

2. Conceptos Matemáticos necesarios

2.1. Proceso Estocásticos en tiempo continuo

En matemáticas contamos con una potente herramienta que nos permite modelar aquellos sistemas cuyo comportamiento se define de manera aleatoria. Esta herramienta es lo que conocemos como cálculo estocástico.
El cálculo estocástico está centrado en la modelización de sistemas mediante los denominados procesos estocásticos, los cuales nos permiten modelar desde las señales de Telecomunicaciones, hasta los índices de la bolsa de valores segundo a segundo.

Definición 2.1. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad,* $\mathbb{T} = [0, \infty)$ *y* $(\mathcal{X}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ *una familia de variables aleatorias indexadas por* $\mathbb{T}$. *Definimos el proceso estocástico* Φ *como una función medible:*

$$\Phi : ((\Omega, \mathbb{T}), \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{T})) \xrightarrow[(w,t) \to \mathcal{X}_t(w)]{} (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

Podemos observar que la definición de proceso estocástico es un caso particular, en el que se considera el espacio medible de llegada de las funciones como $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, no obstante dicha definicion podría generalizarse para cualquier espacio medible (M, Δ).

Definición 2.2. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad y sea* $(\mathcal{A}_t)_{t \in \mathbb{T}=[0,\infty)}$ *una sucesión de* σ *-algebras tal que*

- $\mathcal{A}_s \subseteq \mathcal{A}_t$, $\forall t \geq s$,
- $\mathcal{A}_t \subseteq \mathcal{A}$, $\forall t \in \mathbb{T}$.

Entonces definimos $(\mathcal{A}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ *como una filtración asociada al espacio de probabilidad. En particular diremos que el espacio de probabilidad es un espacio filtrado.*

Este concepto viene estrechamente relacionado con el concepto de proceso estocástico, pues diremos que un proceso estocástico Φ es adaptado a una filtración $(\mathcal{A}_t)_{t \in \mathbb{T}}$, si se tiene que $\forall t \in \mathbb{T}$, $\Phi_t \, es \, \mathcal{A}_t -$

medible . En particular podemos afirmar que todo proceso estocástico es adaptado a su filtración natural, dicha filtración es la de las σ-algebras que generarían las propias variables del proceso. Así pues, conociendo estos conceptos, podemos definir una Martingala de la siguiente manera:

Definición 2.3. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad filtrado, definimos una martingala respecto de* $(\mathcal{A}_t)_{t\in\mathbb{T}}$*, donde* $\mathbb{T} = [0,\infty)$ *como un proceso estocástico* $(\mathcal{M}_t)_{t\geq 0}$ *adaptado a la filtración, con todas sus variables integrables y que verifica*

$$\mathbb{E}(\mathcal{M}_t - \mathcal{M}_s | \mathcal{A}_s) = 0, \forall s \leq t, \forall s \leq t.$$

2.1.1. Proceso de Wiener

Uno de los procesos estocásticos más trascendentes, el cual, constituye uno de los principales pilares de los estudios de Black y Scholes en el 1973, es el conocido como Proceso de Wiener.

Este tipo de proceso estocástico, también es conocido como movimiento Browniano en honor a Robert Brown (1773-1858). Un botánico escocés quien en 1827, documentó que las partículas de polen suspendidas sobre el agua seguían un movimiento completamente errático. A pesar que Robert Brown simplemente se limitó a documentarlo, ya que no pudo dar un modelo que describiera el movimiento que seguían las partículas de polen, Brown dejo constancia de lo que más tarde se conocería como movimiento Browniano. No fue hasta 1900 cuando L. Bachelier (1870-1946), mientras realizaba los estudios pertinentes para la realización de su tesis "Teoría de la especulación", se topa con el movimiento Browniano, y se aventura a dar un modelo de este. No obstante, dicho modelo no fue demasiado riguroso, de manera que no fue hasta la década de los veinte cuando el matemático norte americano Norbert Wiener (1894-1964) estableciera las bases del movimiento Browniano adoptando este suceso el nombre de proceso de Wiener.

Definición 2.4. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad y sea* $\mathbb{T} = [0, \infty)$ *el conjunto de los instantes de tiempo. Definimos* $\mathcal{W}$ *como un proceso de Wiener estándar si:*

$$\mathcal{W} : ((\Omega, \mathbb{T}), \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{T})) \xrightarrow[(w,t) \to \mathcal{X}_t(w)]{} (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

es un proceso estocástico con trayectorias continuas y se verifica que:

- $\mathcal{W}_0 = 0$
- $\mathcal{W}_r - \mathcal{W}_s$ *se comporta como* $\mathcal{N}(0, r-s)$ $\forall r, s \in \mathbb{T}$ *tal que* $r > s$
- *para* $t_1 < t_2 < ... < t_n$ *donde* $t_i \in \mathbb{T}, \forall i \in \mathbb{N}$, *las variables* $\mathcal{W}_{t_n} - \mathcal{W}_{t_{n-1}}, ..., \mathcal{W}_{t_1} - \mathcal{W}_0$ *son independientes.*

Lema 2.5. *Sea* $(W_t)_{t \geq 0}$ *un proceso de Wiener estándar cuya filtración natural es* $(\mathcal{B}_t)_t$, *entonces se tiene que* $(W_t)_{t \geq 0}$ *es una martingala respecto de dicha filtración*

Demostración. En primer lugar consideramos $s, t, k \in \mathbb{T}$ de manera que $0 < s < t$. Es trivial ver que W_t es adaptado ya que todo proceso es adaptado a su filtración natural. Por otro lado, por definición tenemos que $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$, en particular podemos expresar $W_t = W_t - W_0 \sim \mathcal{N}(0, t)$. De esta manera se obtiene que $\mathbb{E}(|W_t|) < \infty$ para todo $t \in \mathbb{T}$. Por último, debido a la independencia de los incrementos, se tiene que $(W_t - W_s)$ es independiente de la σ-algebra $\mathcal{B}_s$ de manera que se obtiene:

$$\mathbb{E}(W_t - W_s | \mathcal{B}_s)$$

$$= \mathbb{E}(W_t - W_s) = 0$$

de esta manera se deduce que todo proceso de Wiener estándar es una martingala. □

A partir de este punto, nos referiremos a los procesos de Wiener estándar como procesos de Wiener. Los procesos de Wiener, en el marco de los procesos estocásticos se encuentran estrechamente relacionados con otros dos procesos muy conocidos: Procesos Gaussianos y los Procesos de Markov.

Definición 2.6. *Un proceso estocástico*

$$\mathcal{G} : ((\Omega, \mathbb{T}), \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{T})) \xrightarrow[(w,t)\to \mathcal{X}_t(w)]{} (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

se conoce como proceso Gaussiano si considerando $t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$ *donde* $t_i \in \mathbb{T}, \forall i \in \mathbb{N}$*, el vector* $\mathcal{A} = (\mathcal{G}_n - \mathcal{G}_{n-1}, ..., \mathcal{G}_{t_1} - \mathcal{G}_{t_0})$ *es un vector aleatorio gaussiano es decir* $\mathcal{A} \sim \mathcal{N}(\gamma, \Sigma)$

Proposición 2.7. *Si* $\mathcal{G}$ *un proceso estocástico Gaussiano tal que* $\mathbb{E}(\mathcal{G}_{t_i})$ *es constante* $\forall i$ *y* $Cov(\mathcal{G}_{t_i}, \mathcal{G}_{t_j}) = min(t_i, t_j)$*, entonces* $\mathcal{G}$ *tiene incrementos independientes.*

Demostración. En primer lugar, se tiene que al ser $\mathcal{G}$ un proceso estocástico gaussiano, el vector aleatorio $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_n, ..., \mathcal{A}_1)$ $= (\mathcal{G}_n - \mathcal{G}_{n-1}, ..., \mathcal{G}_{t_1} - \mathcal{G}_{t_0})$ se trata de un vector aleatorio Gausiano. Ahora bien se tiene que $\mathcal{A} \sim \mathcal{N}(\gamma, \Sigma)$, donde $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$, y Σ se trata de la matriz de covariancia, definida como $\Sigma = (\sigma_{ij})_{i,j \leq n}$, donde $\sigma_{ij} = \mathbb{E}((\mathcal{A}_i - \gamma_i)(\mathcal{A}_j - \gamma_j))$. Así pues, se puede observar que si la matriz de covariancia es diagonal, se tiene que $(\mathcal{A}_i)_{i \leq n}$ son independientes, mostrando así que los incrementos de $\mathcal{G}$ son independientes. Para ver esto, es suficiente comprobar que los elementos de debajo de la diagonal son cero.
Considerando $i < j$, y utilizando que bajo gaussianidad, la covarianza nula implica independencia, obtenemos que

$$\mathbb{E}((\mathcal{G}_{t_i} - \mathcal{G}_{t_{i-1}})(\mathcal{G}_{t_j} - \mathcal{G}_{t_{j-1}}))$$

$$= \mathbb{E}(\mathcal{G}_{t_i}\mathcal{G}_{t_j}) - \mathbb{E}(\mathcal{G}_{t_i}\mathcal{G}_{t_{j-1}}) - \mathbb{E}(\mathcal{G}_{t_{i-1}}\mathcal{G}_{t_j}) + \mathbb{E}(\mathcal{G}_{t_{i-1}}\mathcal{G}_{t_{j-1}})$$

Ahora sabemos que la esperanza es constante por hipótesis y además sabemos que $Cov(\mathcal{G}_{t_i}, \mathcal{G}_{t_j}) = \mathbb{E}(\mathcal{G}_{t_i}\mathcal{G}_{t_j}) - \mathbb{E}(\mathcal{G}_{t_i})\mathbb{E}(\mathcal{G}_{t_j})$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$ así pues considerando que la esperanza es constante e igual a γ, y que la covariancia es igual al mínimo, tenemos que:

$$\mathbb{E}((\mathcal{G}_{t_i} - \mathcal{G}_{t_{i-1}})(\mathcal{G}_{t_j} - \mathcal{G}_{t_{j-1}})) = t_i - \gamma^2 - t_i + \gamma^2 - t_j + \gamma^2 + t_j - \gamma^2 = 0,$$

de manera que presenta incrementos independientes. $\square$

Además es fácil comprobar que con esas condiciones también tendríamos que $Var(\mathcal{G}_{t_i} - \mathcal{G}_{t_j}) = t_i - t_j$ para $t_j \leq t_i$
De manera que podríamos definir un proceso de Wiener estandar como un proceso estocástico Gaussiano con trayectorias continuas, esperanzas constantes, que todas las trayectorias comenzaran en el 0 y por último $Cov(\mathcal{G}_{t_i}, \mathcal{G}_{t_j}) = min(t_i, t_j)$. Otra manera alternativa de definir los procesos de Wiener seria como un caso particular de los procesos de Markov.

Definición 2.8. *Un proceso estocástico*

$$\Phi : ((\Omega, \mathbb{T}), \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{T})) \xrightarrow[(w,t) \to \mathcal{X}_t(w)]{} (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

es un proceso de Markov si verifica la propiedad de Markov, es decir, si para toda función acotada $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y para todo $t, s \in \mathbb{T}$ tal que $s \leq t$, el proceso $\mathcal{B}_t$-adaptado $(\Phi_t)_t$, verifica que:

$$\mathbb{E}(f(\Phi_t)|\mathcal{B}_s) = \mathbb{E}(f(\Phi_t)|\Phi_s)).$$

Donde $(\mathcal{B}_t)_{t \geq 0}$ es una filtración del espacio.

Debido a que los procesos de Wiener presentan incrementos independientes, es fácil comprobar que verifican la propiedad de Markov de manera que los procesos de Wiener constituyen un caso particular de dichos procesos.

2.2. Cálculo de Itô

El cálculo de Itô es sin duda alguna, uno de los avances más significativos en el campo de estudio de los procesos estocásticos, pues el cálculo de Itô, denominado así en honor al matemático Japonés Kiyoshi Itô (1915-2008), nos proporciona una herramienta clave como es la integral estocástica, también conocida como integral de Itô, que nos permite adentrarnos y elaborar el conocido cálculo diferencial estocástico. Cabe destacar que de aquí en adelante $\mathbb{T} = [0, T]$ será un espacio de tiempo continuo donde T será un instante de tiempo finito y conocido, y trabajaremos siempre en el espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

2.2.1. Integral de Itô

La integral estocástica, constituye uno de los pilares sobre el que reposa el cálculo diferencial estocástico o cálculo de Itô.
Este concepto nace de la necesidad de dar sentido a una expresión del tipo

$$I(\Psi)_t = \int_0^t \Psi_s \, dW_s$$

donde $(\Psi_t)_{t\in\mathbb{T}}$ es un proceso estocástico adaptado a la filtración $(\mathcal{A}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ y donde $(W_t)_{t\in\mathbb{T}}$ es un proceso de Wiener. No obstante antes de poder llegar a obtener la definición más general de integral estocástica, debemos primero ver el caso particular para los denominados procesos simples, ya que esto nos permitirá poder generalizar el concepto a cualquier proceso estocástico adaptado.

Definición 2.9. *Sea*

$$\Psi : ((\Omega, \mathbb{T}), \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{T})) \xrightarrow[(w,t)\to\Psi_t(w)]{} (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

Un proceso estocástico, diremos que Ψ es un proceso simple si siendo $0 = t_0 < t_1 < ..... < t_p = T$ entonces Ψ verifica que

$$\Psi_t(w) = \sum_{i=1}^{p} \Phi_{i-1}(w) 1_{(t_{i-1},t_i]}(t) + \Phi_0(w) 1_{\{t_0\}}(t)$$

donde Φ_i es acotada y $\mathcal{A}_{t_i}$ -medible.

Así pues, considerando la integral como la suma de areas de rectángulos, y considerando $t \in \ (t_n, t_{n+1}]$, es fácil e intuitivo que para el caso de los procesos simples podemos definir la integral como:

$$I(\Psi\,)_t \ = \int_0^t \Psi_s dW_s \ = \sum_{i=1}^n \Phi_{i-1}\,(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \Phi_n\,(W_t - W_{t_n})\,.$$

Proposición 2.10. *Sea* Ψ *un proceso simple entonces* $(I(\Psi\,)_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *es una transformada de la martingala* $(W_t)_{t\in\mathbb{T}}$

Demostración. Consideramos $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n < ... < t_p = T$. Ahora bien consideramos el proceso

$$\mathcal{M}_n := \int_0^{t_n} \Psi_s\, dW_s$$

en este caso es fácil ver que al ser Ψ un proceso adaptado y al tratarse de la integral de un proceso adaptado se puede expresar $\mathcal{M}$ como $\mathcal{M}_n \ := \sum_{i=0}^n \Phi_i\,(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$ donde tal y como hemos visto de la definición de proceso simple Φ_i es acotada y $\mathcal{A}_{t_i}$-medible y (W_t) un proceso de Wiener. Al ser (W_t) un proceso de Wiener se tiene que es $\mathcal{A}_t$-medible y en particular $\mathcal{A}_t$-martingala. Así pues, se tiene por definición que $\mathcal{M}_n$ es una transformada de dicha martingala. □

Proposición 2.11. *Dado* Ψ *un proceso simple entonces el proceso* $(I(\Psi\,)_t)_{t\in\mathbb{T}}$ *, es una martingala.*

Demostración. La demostración de esta proposición se obtiene de manera trivial e inmediata de la proposición anterior, pues toda transformada de martingala es en sí misma una martingala. □

Así pues, no solo se tiene la integral para procesos simples o bien esta expresada como un proceso sino que además se tiene que dicho proceso es una Martingala.

Proposición 2.12. *Sea* Ψ *un proceso simple se tiene que su integral verifica que:*

- $\mathbb{E}((\int_0^t \Psi_s\, dW_s\,)^2\,) = \mathbb{E}(\int_0^t \Psi_s^2\, ds\,)$.
- $\mathbb{E}(sup_{t\in\,[0,T]} \left| \int_0^t \Psi_s\, dW_s \right|^2) \ \leq \ 4\mathbb{E}(\int_0^T \Psi_s^2\, ds\,)$

Demostración. Tal y como hemos visto en la proposición 2.10, el proceso $\mathcal{M}_n$ se trata de una martingala.
Observamos pues, que $\mathbb{E}(\mathcal{M}_n^2) = \mathbb{E}((\sum_{i=0}^n \Phi_{i-1}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}))^2)$

$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(\Phi_{i-1}\Phi_{j-1}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}))$. Se puede observar que empleando que W_{t_n} es una martingala se tiene que si $i < j$ o bien $j < i$ se tiene que:

$$\mathbb{E}(\Phi_{i-1}\Phi_{j-1}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}))$$

$$= \mathbb{E}(\Phi_{i-1}\Phi_{j-1}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}))\mathbb{E}((W_{t_j} - W_{t_{j-1}})|\mathcal{A}_{t_{j-1}}) = 0$$

Así pues, únicamente cabe estudiar los casos en los que $i = j$. En estos casos se tiene que:

$$\mathbb{E}(\Phi_{i-1}\Phi_{j-1}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}))$$

$$= \mathbb{E}(\Phi_{i-1}^2(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2) = \mathbb{E}(\Phi_{i-1}^2(t_i - t_{i-1}))$$

Por último, debido a esta última observación, se tiene que

$$\mathbb{E}(\mathcal{M}_n^2) = \mathbb{E}(\int_0^t \Psi_s^2 ds)$$

La demostración del punto dos de esta proposición se puede encontrar en el punto [5] de la bibliografia, Capítulo 3. □

De esta manera, queda determinada la integral estocástica cuando los procesos son simples, no obstante tal y como hemos hablado en la introducción de este capítulo, nos interesa generalizar este concepto para cualquier proceso adaptado, ya que esto nos permitiría dar un gran paso al frente en el estudio de los procesos estocásticos, es por ello que consideramos el siguiente conjunto

$$\mathcal{R} := \left\{ (\Psi_t)_{t\in\mathbb{T}}\, procesos\, \mathcal{A} - adaptados\, tal\, que\, \int_0^t \Psi_s^2\, ds < \infty \right\}$$

Considerando dicho conjunto y $\mathcal{M}$ como el espacio de todas las martingalas continuas con respecto de la filtración, podemos generalizar el concepto de integral estocástica como:

Proposición 2.13. *(Integral de Itô) Existe una única aplicación*

$$\mathcal{J} : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{M}$$

tal que

- *Si* $\Psi \in \mathcal{R}$ *es un proceso simple,* $\forall\, t \in \mathbb{T}$, $\mathcal{J}(\Psi)_t = I(\Psi)_t$.
- $\forall\, t \leq T$ *entonces* $\mathbb{E}(\mathcal{J}(\Psi)_t^2) = \mathbb{E}(\int_0^t \Psi_s^2\, ds)$.
- $\mathbb{E}(sup \left| \int_0^t \Psi_s\, dW_s \right|^2) \leq 4\mathbb{E}(\int_0^T \Psi_s^2\, ds)$

Demostración. La demostración se puede encontrar en el punto [5], sección 3, de la bibliografía □

A esta aplicación $\mathcal{J}$ es lo que se le conoce como la integral estocástica o integral de Itô.

2.2.2. Fórmula de Itô y Lema de Itô

Tal y como se ha indicado en el apartado anterior, la integral estocástica nos permite establecer las bases del conocido como cálculo diferencial estocástico o cálculo de Itô.
No obstante, a pesar de ser un concepto fundamental dentro del cálculo diferencial estocástico, la integral comparte protagonismo con la fórmula y el teorema de Itô. Cabe destacar que para poder comprender plenamente estos conceptos, primero debemos introducir los procesos para los cuales están definidos.

Definición 2.14. *Sean $(W_t)_{t\in\mathbb{T}}$, $(K_t)_{t\in\mathbb{T}}$ y $(H_t)_{t\in\mathbb{T}}$ procesos estocásticos tal que $(W_t)_{t\in\mathbb{T}}$ es un proceso de Wiener, $(K_t)_{t\in\mathbb{T}}$ y $(H_t)_{t\in\mathbb{T}}$ son procesos $\mathcal{A}_t$-adaptados que verifican que*

- $\int_0^T |K_s|\, ds < \infty$,
- $\int_0^T |H_s|^2\, ds < \infty$.

Entonces definimos el proceso estocástico $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{T}}$ como un proceso de Itô si se verifica que $\forall\, t \in \mathbb{T}$

$$\Phi_t - \Phi_0 = \int_0^t K_s\, ds + \int_0^t H_s\, dW_s .$$

Donde Φ_0 es $\mathcal{A}_0$-medible.

Proposición 2.15. *Considerando $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{T}}$ un proceso de Itô y f una función de clase $\mathcal{C}^2$ entonces*

$$f(\Phi_t)-f(\Phi_0) = \int_0^t f'(\Phi_s)K_s\, ds + \int_0^t f'(\Phi_s)H_s\, dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(\Phi_s)H_s^2 ds$$

Demostración. La demostración de esta proposición puede encontrarse en el capítulo 3 del punto [5] de la bibliografía. □

Esta expresión es lo que se conoce como Fórmula de Itô, la cual se trata de una herramienta fundamental puesto que nos permite obtener soluciones de problemas de Cauchy como

$$\{ \Phi_0 = \phi_0 , d\Phi_t = \Phi_t (\gamma\, dt + \sigma\, dW_t)\}.$$

En particular, este problema será muy importante en modelos como el de Black-Scholes. No obstante, es interesante buscar las denominadas difusiones, es decir, las soluciones a las ecuaciones diferenciales de la forma

$$\Phi_t = \mathcal{Z} + \int_0^t b(s, \Phi_s) ds + \int_0^t \sigma(s, \Phi_s) dW_s$$

donde $\mathcal{Z}$ es una variable aleatoria $\mathcal{A}_0$-medible.

Definición 2.16. *Sea $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{T}}$ un proceso estocástico adaptado y continuo y sean $\alpha : \mathbb{R}^+ \otimes \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\beta : \mathbb{R}^+ \otimes \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dos funciones tal que $\int_0^t \alpha(s, \Phi_s) ds$ y $\int_0^t \beta(s, \Phi_s) dW_s$ existen, entonces, $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{T}}$ es una difusión si:*

$$\Phi_t = \mathcal{Z} + \int_0^t b(s, \Phi_s) ds + \int_0^t \sigma(s, \Phi_s) dW_s, \ \forall\, t \geq 0$$

No obstante, ahora se nos presentaría la siguiente pregunta, ¿Tiene esta ecuación, siempre una solución?. Es decir, ¿Vamos a poder, en cualquier caso, encontrar una difusión?. Aquí es donde entraría el siguiente resultado trascendente del cálculo de Itô, el lema de Itô. Este lema nos brinda una serie de propiedades que deben cumplir α, β y Z, para poder afirmar no únicamente la existencia de soluciones, sino que también la unicidad de éstas.

Lema 2.17. *(Lema de Itô) Sean α, β funciones continuas, Z una variable aleatoria $\mathcal{A}_0$-medible, $x, y \in \mathbb{R}$ y $t \in [0, T]$. Entonces, si existe una constante k tal que:*

- $\| \alpha(t,x) - \alpha(t,y) \| + \| \beta(t,x) - \beta(t,y) \| \leq k|x-y|$
- $\| \alpha(t,x) \| + \| \beta(t,x) \| \leq k(1+|x|)$
- $\mathbb{E}(Z^2) < \infty$

entonces $\forall\, T \geq 0$ existe una única difusión en el intervalo $[0, T]$.

Demostración. La demostración se puede encontrar en el capítulo 3 del punto [5] de la bibliografía □

2.3. Modelo de Black-Scholes

En la década de los 70, los matemáticos Fisher Black, Myron Scholes y Robert Merton, llevaron a cabo una serie de estudios que marcaron un antes y un después en la manera en que los inversores de derivados financieros enfocarían sus inversiones. Su trascendencia e importancia fue de tal envergadura que supusieron un fuerte empujón para el desarrollo de lo que hoy conocemos como ingeniería financiera. En 1997, Scholes y Merton, fueron galardonados con el premio Nobel. Dicho reconocimiento también se le hubiera otorgado a Black de no haber fallecido en 1995. En este apartado introduciremos el modelo de Black-Scholes, desde la determinación del proceso que modela el comportamiento del precio de los activos, hasta la deducción de la denominada fórmula de Black-Scholes.

Para ello, en primer lugar consideramos una cartera con dos activos financieros, un activo libre de riesgo al que llamaremos $\mathcal{Q}$ de manera que $\mathcal{Q}_t$ hace referencia al precio de $\mathcal{Q}$ en el instante de tiempo t y un activo con riesgo al que conoceremos como $\mathcal{S}$ de manera que de forma análoga haremos referencia al precio de $\mathcal{S}$ en el instante t como $\mathcal{S}_t$. Al ser $\mathcal{Q}$ un activo libre de riesgo, es trivial ver que los precios de dicho activo evolucionan respecto del tiempo como $d\mathcal{Q}_t = r\mathcal{Q}_t dt$ donde r es una constante positiva, denominada tasa de interés instantánea, y marcando el precio en el instante inicial como $\mathcal{Q}_0 = 1$ se tiene que los precios del activo libre de riesgo podemos modelarlos a través del modelo $\mathcal{Q}_t = exp\{rt\}, \forall t \geq 0$.

Por lo que respecta al activo con riesgo, se asume que dicho activo se comporta como

$$\mathcal{S}_t = x_0 + \int_0^t \mathcal{S}_s(\gamma\, ds + \sigma\, dW_s)$$

es decir, expresándolo como un problema de Cauchy tenemos que $\mathcal{S}$ se comporta como

$$\{ d\mathcal{S}_t = \mathcal{S}_t(\gamma\, dt + \sigma\, dW_t),\, \mathcal{S}_0 = x_0 \}.$$

Reescribiendo esto obtenemos que

$$\mathcal{S}_t = x_0 + \int_0^t \mathcal{S}_s \gamma\, ds + \int_0^t \mathcal{S}_s \sigma\, dW_s.$$

Podemos observar que esta expresión se asemeja a la dada para los denominados procesos de Itô, así pues, lo que haremos, es suponer que $(\mathcal{S}_t)_t$ es un proceso de Itô, solución de la ecuación del problema de Cauchy presentado anteriormente de manera que $\mathcal{S}_t\gamma = K_t$ y $\mathcal{S}_t\sigma = H_t$. Así pues considerando dicha suposición y la función $f = Log(x)$ se obtiene que:

$$Log(\mathcal{S}_t) = Log(x_0) + \int_0^t \frac{d\mathcal{S}_s}{\mathcal{S}_s} - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\sigma^2\mathcal{S}_s^2}{\mathcal{S}_s^2}ds$$

$$\Rightarrow Log(\mathcal{S}_t) = Log(x_0) + \int_0^t \frac{d\mathcal{S}_s}{\mathcal{S}_s} - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 ds$$

Ahora bien, utilizando el enunciado del problema de Cauchy que nos dice que $d\mathcal{S}_t = \mathcal{S}_t(\gamma\, dt + \sigma\, dW_t)$, tenemos que:

$$Log(\mathcal{S}_t) = Log(x_0) + \int_0^t \frac{d\mathcal{S}_s}{\mathcal{S}_s} - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 ds$$

$$\Rightarrow Log(\mathcal{S}_t) = Log(x_0) + \int_0^t (\gamma\, ds + \sigma\, dW_s) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 ds$$

$$\Rightarrow Log(\mathcal{S}_t) = Log(x_0) + \int_0^t (\gamma - \frac{\sigma^2}{2})ds + \int_0^t \sigma\, dW_s$$

$$\Rightarrow Log(\mathcal{S}_t) = Log(x_0) + (\gamma - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t$$

$$\Rightarrow Log(\frac{\mathcal{S}_t}{x_0}) = (\gamma - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t$$

$$\Rightarrow \mathcal{S}_t = x_0\, exp\left\{ (\gamma - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t \right\}.$$

Una vez llegados a este punto, y empleando la fórmula de Itô, es fácil comprobar que $\mathcal{S}_t$ es una solución de la ecuación diferencial de manera que

$$\mathcal{S}_t = x_0\, exp\left\{ (\gamma - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t \right\}$$

donde W_t es un proceso de Wiener.

Observación 2.18. El proceso estocástico $\mathcal{S}_t = x_0\, exp\left\{ (\gamma - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t \right\}$ es el proceso que se encarga de modelar el comportamiento de los precios en el modelo de Black-Scholes.

Por último, vamos a deducir la fórmula de Black-Scholes, es por ello que consideraremos el valor descontado del activo, al cual definimos como $\tilde{\mathcal{S}}_t$ y que consideramos que verifica la siguiente ecuación

$$\tilde{\mathcal{S}}_t = e^{-rt}\mathcal{S}_t$$

Una vez definido el valor descontado del activo, con el fin de poder deducir la fórmula de Black-Scholes debemos encontrar una probabilidad $\mathbb{P}^*$ que sea equivalente a la probabilidad $\mathbb{P}$ del espacio de probabilidad de manera que respecto de dicha probabilidad $\mathbb{P}^*$ el proceso $\tilde{\mathcal{S}}_t$ sea una $\mathbb{P}^*$-Martingala. Una vez hayamos encontrado dicha probabilidad, podremos definir una estrategia autofinanciada replicando las opciones.

Lema 2.19. *(Teorema de Girsanov) Sea $(\mathcal{W})_t$ un movimiento Browniano, $(\psi_t)_t$ un proceso adaptado que verifica que $\int_0^T \psi_s^2\, ds < \infty$ y sea el proceso $(\mathcal{M}_t)_t$ definido por*

$$\mathcal{M}_t = exp(-\int_0^t \psi_s\, d\mathcal{W}_s - \tfrac{1}{2}\int_0^t \psi_s^2\, ds)$$

una martingala, entonces bajo la función de probabilidad $\mathbb{P}^{(\mathcal{M})}$, con densidad $\mathcal{M}_t$ respecto de la función de probabilidad del espacio, el proceso definido por $B_t = \mathcal{W}_t + \int_0^t \psi_s\, ds$ es un proceso de Wiener respecto de la filtración.

Demostración. La demostración detallada del lema se puede consultar en el punto [5] de la bibliografía. □

Ahora bien, tal y como hemos supuesto por hipótesis, tenemos que los precios descontados de los activos se comportan como:

$$\tilde{\mathcal{S}}_t = e^{-rt}\mathcal{S}_t$$

Por tanto, podemos observar que derivando a un lado y al otro de la igualdad se obtiene que:

$$d\tilde{\mathcal{S}}_t = d(e^{-rt}\mathcal{S}_t)$$

$$\Rightarrow d\tilde{\mathcal{S}}_t = -re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t$$

$$\Rightarrow d\tilde{\mathcal{S}}_t = -re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}(S_t\,(\gamma\, dt + \sigma\, dW_t\,))$$

$$\Rightarrow d\tilde{\mathcal{S}}_t = \tilde{\mathcal{S}}_t \left((\gamma - r)dt + \sigma \, d\mathcal{W}_t \right)$$

Una vez llegados a este punto, si consideramos el proceso $(B_t)_t$ definido como $B_t = \mathcal{W}_t + (\gamma - r)\frac{t}{\sigma}$, y substituyendo en la expresión que acabamos de obtener, se obtiene que $d\tilde{\mathcal{S}}_t = \tilde{\mathcal{S}}_t \sigma \, dB_t$.
Considerando ahora el proceso adaptado $(\psi_t)_t$ definido como $\psi_t = \frac{(\gamma - r)}{\sigma}$ es trivial ver que se verifica que:

$$B_t = \mathcal{W}_t + \int_0^t \psi_s ds$$

Es trivial también ver que $\int_0^T \psi_s^2 \, ds < \infty$ y por lo tanto se obtiene que se verifican las hipótesis del teorema de Girsanov, así pues, obtenemos que B_t es un proceso de Wiener respecto de la filtración y respecto de la probabilidad $\mathbb{P}^{\mathcal{M}}$. A $\mathbb{P}^{\mathcal{M}}$ la denominaremos $\mathbb{P}^*$. Por último, se obtiene de esta observación que respecto de $\mathbb{P}^*$ el proceso $(\tilde{\mathcal{S}}_t)_t$ es una martingala.

Definición 2.20. *Se define como estrategia de inversión, a la sucesión de vectores aleatorios*

$$\Psi_n := \left\{ (\Psi_n^0, ..., \Psi_n^m) \in \mathbb{R}^{m+1}, n \in \mathbb{T} \right\}.$$

Además, dichos vectores son previsibles. Por otro lado, diremos que la estrategia de inversión es autofinanciada si verifica que

$$\Psi_n \mathcal{S}_n = \Psi_{n+1} \mathcal{S}_n$$

Definición 2.21. *Sea Ψ una estrategia autofinanciada, diremos que se trata de una estrategia admisible si existe una constante K tal que el valor descontado en el instante t, sea mayor o igual a -K, $\forall \, t$. Además, si C es una opción financiera con payoff h, diremos que dicha opción C es una opción financiera replicable si h es igual al valor final de una estrategia admisible.*

Lema 2.22. *Sea C una opción europea, en el modelo de Black-Scholes tal que h es su payoff y $h \geq 0$, además de medible respecto de la filtración y de cuadrado integrable respecto de $\mathbb{P}^*$. Entonces C es replicable y $C_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(e^{-r(T-t)} h | \mathcal{F}_t)$ es su valor en el instante t.*

Demostración. En primer lugar, tenemos que $\mathcal{M}_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(e^{-rT} h | \mathcal{F}_t)$ es una $\mathbb{P}^*$-Martingala de cuadrado integrable de manera que tenemos que existe un único proceso $(Y_t)_t$ adaptado tal que se verifique que:

- $\mathcal{M}_t = \mathcal{M}_0 + \int_0^t Y_s dW_s$.
- $\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(\int_0^t Y_s^2 ds) < \infty$.

Una vez llegados a este punto, pasamos a definir Ψ_t^1 de manera que:

$$\Psi_t^1 := \frac{Y_t}{\sigma \tilde{\mathcal{S}}_t} .$$

De esta manera, obtenemos que:

$$\mathcal{M}_t = \mathcal{M}_0 + \int_0^t \Psi_t^1 \, d\tilde{\mathcal{S}}_t = \tilde{C}_t(\Psi)$$

$$\Rightarrow \tilde{C}_t = C_0 + \int_0^t \Psi_t^1 \, d\tilde{\mathcal{S}}_t$$

$$\Rightarrow C_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(e^{-r(T-t)} h | \mathcal{F}_t)$$

Y siendo $\Psi_t^0 \, e^{-rt} = C_t + \Psi_t^1 \, \mathcal{S}_t$ se tiene que la estrategia $(\Psi_t^0 \, , \Psi_t^1)$ es autofinanciada y replica h. Además $h \geq 0$ y que $C_t \geq 0$ y por tanto la estrategia es también admisible. $\square$

Proposición 2.23. *Sea h el payoff de una opción europea C replicable en el modelo de Black-Scholes tal que $f(\mathcal{S}_t) = h \geq 0$ donde $f(\mathcal{S}_t)$ es una función de cuadrado integrable. Sea $g(t, \mathcal{S}_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(h|\mathcal{F}_t) \in C^{1,2}$. Entonces su valor en el instante t es:*

$$C(t, \mathcal{S}_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(e^{-r(T-t)} h | \mathcal{F}_t)$$

y su estrategia que réplica es $(\Psi_t^0 \, , \Psi_t^1)$ donde:

$$\Psi_t^0 = C(t, \mathcal{S}_t) - \Psi_t^1 \mathcal{S}_t \, ,$$

$$\Psi_t^1 = \frac{\partial \, C(t, \mathcal{S}_t)}{\partial \mathcal{S}_t} .$$

Demostración. La demostración de esta proposición se puede consultar en la sección 2.5 del punto [5] de la bibliografía. $\square$

Considerando su payoff como $h = (\mathcal{S}_T - K)_+$ se obtiene que:

$$C(t, \mathcal{S}_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(e^{-r(T-t)} (\mathcal{S}_T - K)_+ \, | \mathcal{F}_t)$$

$$= e^{-r(T-t)} \mathcal{S}_t \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} (\frac{\mathcal{S}_T}{\mathcal{S}_t} 1_{\left\{ \frac{\mathcal{S}_T}{\mathcal{S}_t} > \frac{K}{x} \right\}})_{x = \mathcal{S}_t} - K e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*} (1_{\left\{ \frac{\mathcal{S}_T}{\mathcal{S}_t} > \frac{K}{x} \right\}})_{x = \mathcal{S}_t}$$

Ahora bien, debido a que $\frac{\mathcal{S}_T}{\mathcal{S}_t} = e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma W_{T-t}}$ podemos calcular $e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(\frac{\mathcal{S}_T}{\mathcal{S}_t}1_{\{\frac{\mathcal{S}_T}{\mathcal{S}_t}>\frac{K}{x}\}})_{x=\mathcal{S}_t}$ así como $\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(1_{\{\frac{\mathcal{S}_T}{\mathcal{S}_t}>\frac{K}{x}\}})_{x=\mathcal{S}_t}$, de manera que:

- $\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(1_{\{\frac{\mathcal{S}_T}{\mathcal{S}_t}>\frac{K}{x}\}})_{x=\mathcal{S}_t}$

  $= \mathbb{P}^*(\frac{\mathcal{S}_T}{\mathcal{S}_t} > \frac{K}{x})_{x=\mathcal{S}_t}$

  $= \mathbb{P}^*(Log\frac{\mathcal{S}_T}{\mathcal{S}_t} > Log\frac{K}{x})_{x=\mathcal{S}_t}$

  $= \mathbb{P}^*(\frac{W_{T-t}}{\sqrt{T-t}} > \frac{Log\frac{K}{x}-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}})_{x=\mathcal{S}_t}$

  $= \mathcal{N}(\frac{Log\frac{x}{K}+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}})_{x=\mathcal{S}_t}$

  $= \mathcal{N}(d_-)$ donde $d_- = \frac{Log\frac{\mathcal{S}_t}{K}+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

- $e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}(\frac{\mathcal{S}_T}{\mathcal{S}_t}1_{\{\frac{\mathcal{S}_T}{\mathcal{S}_t}>\frac{K}{x}\}})_{x=\mathcal{S}_t}$

  $= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\big(e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma W_{T-t}}\big)1_{\big\{\sigma W_{T-t}>Log\frac{K}{x}-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\big\}}$

  $= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\big(e^{(-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma W_{T-t}}\big)1_{\big\{\sigma W_{T-t}>Log\frac{K}{x}-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\big\}}$

  $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{Log\frac{x}{K}+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)-\sigma\sqrt{T-t}s-\frac{1}{2}s^2}ds$

  $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{Log\frac{x}{K}+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}} e^{-\frac{1}{2}a^2}da$ donde $a = \sigma\sqrt{T-t}+s$

  $= \mathcal{N}(d_+)$ donde $d_+ = \frac{log(\frac{\mathcal{S}_t}{k})+(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$.

Así pues, para finalizar, podemos expresar C_t como:

$$C(t,\mathcal{S}_t) = \mathcal{S}_t\mathcal{N}(d_+) - Ke^{-rt}\mathcal{N}(d_-)$$

donde $\mathcal{N}$ sigue una distribución normal. Esta expresión es lo que se conoce como la ecuación de Black-Scholes.

3. Modelos con saltos

3.1. Ley de Poisson

Simeon-Denis Poisson (1781-1840) fue un matemático francés, estudiante de "L'Ecole Polythecnique"de Paris, quien por sus grandes contribuciones en diversos campos como son la Teoría de la electricidad o bien la teoría de la probabilidad, entre otros, pasó a formar parte de la prestigiosa academia de ciencias francesas a sus 30 años de edad.

Por lo referente a nuestro estudio, cabe destacar los avances realizados por Simeon-Denis Poisson en el campo de la teoría de la probabilidad, donde descubrió la forma límite de la distribución Binomial, cuando la probabilidad de éxito depende de n, y $np(n)$, donde $p(n)$ es la probabilidad de éxito, tiende a $\lambda > 0$.
Este resultado se definió como una nueva función de distribución la cual adoptó el nombre de distribución de Poisson en su honor.

Definición 3.1. *Sea* $(\Omega\,, \mathcal{F}\,, \mathbb{P}\,)$ *un espacio de probabilidad, y sea* $\mathcal{X}$ *una variable aleatoria de dicho espacio. Dado* x *definida en* $\{0, 1, 2, ..., n\}$, $n \in \mathbb{N}$ *, y sea* p *la probabilidad de éxito tal que* $p \in [0, 1]$ *, diremos que* $\mathcal{X}$ *sigue una distribución binomial, y lo denotaremos por* $\mathcal{X} \sim B(n, p)$ *, si se verifica que:*

$$\mathbb{P}(\mathcal{X} = x\,) \;=\; \tbinom{n}{x} p^x\, q^{n-x}$$

donde $q = 1 - p$

Definición 3.2. *Sea* $(\Omega\,, \mathcal{F}\,, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad, y sea* $\mathcal{X}$ *una variable aleatoria en dicho espacio de probabilidad. Sea* $k \in \mathbb{R}$ *diremos que* $\mathcal{X}$ *sigue una distribución de Poisson de parámetro* $\lambda \in [0, \infty)$ *si se verifica que:*

$$\mathbb{P}(\mathcal{X} \;= k) \;=\; \tfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

En este caso diremos que su función de distribución $F_{\mathcal{X}}$ *queda determinada por:*

$$F_{\mathcal{X}}(k) \;=\; \textstyle\sum_{n=0}^{k} \tfrac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

Proposición 3.3. *Sea $\mathcal{X}$ una variable aleatoria que sigue la distribución de Poisson, entonces la función generadora de momentos de dicha variable aleatoria $\mathcal{X}$ queda determinada por:*

$$M_{\mathcal{X}}(w) = e^{\lambda\,(e^w - 1)},$$

donde $w \geq 0$

Demostración. En primer lugar, para dicha demostración debemos recordar que e^x se puede aproximar con la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Por otro lado, sabemos que la función generadora de momentos de una variable aleatoria verifica que

$$M_{\mathcal{X}}(w) = \mathbb{E}(e^{w\mathcal{X}}).$$

Debido a esto, tenemos que:

$$M_{\mathcal{X}}(w) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{wx} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

$$\Rightarrow M_{\mathcal{X}}(w) = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^w \lambda)^x}{x!}$$

Así pues, utilizando ahora la aproximación de e^x recordada al inicio de la demostración obtenemos que:

$$M_{\mathcal{X}}(w) = e^{\lambda\,(e^w - 1)}$$

tal y como queríamos demostrar. □

Lema 3.4. *(Límite de Poisson) Sean $\mathcal{X}_1^n, ..., \mathcal{X}_n^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ v.a.i.i.d, que siguen una distribución binomial $B(1, p_n)$. Sea $S_n^n = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{X}_i^n$, entonces, si el límite de np_n tiende a $\lambda > 0$, se tiene que S_n^n tiende a una distribución de Poisson de parámetro λ*

Demostración. Utilizando la función generadora de momentos de la variable aleatoria S_n^n se tiene que:

$$M_{S_n^n}(t) = \mathbb{E}(e^{t\sum_{i=1}^{n} \mathcal{X}_i^n})$$

debido a la independencia de las variables aleatorias $\mathcal{X}_i^n$ se tiene que:

$$= \mathbb{E}(\prod_{i=1}^{n} e^{t\mathcal{X}_i^n}) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(e^{t\mathcal{X}_i^n})$$

$$= \prod_{i=1}^{n} M_{\mathcal{X}_i^n}(t) = (p_n e^t + 1 - p_n)^n, \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

aplicando ahora que el límite de np_n es λ se deduce que el límite de p_n es cero de manera que se tiene que el límite de $M_{S_n^n}(t)$ es de la forma 1^{∞}. Así pues, resolviendo esto se obtiene que $M_{S_n^n}(t)$ tiende a:

$$g(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

Podemos observar que g(t) se trata de la función generadora de momentos de una variable aleatoria que sigue una distribución de Poisson, de manera que aplicando el teorema de continuidad de las funciones generadoras de momentos, se deduce el resultado que se buscaba. $\square$

Lema 3.5. *Sea $\mathcal{X}$ una variable aleatoria que sigue la distribución de Poisson de parámetro λ, es decir, $\mathcal{X} \sim Po(\lambda)$, entonces se verifican las dos propiedades siguientes*

- $\mathbb{E}(\mathcal{X}) = Var(\mathcal{X}) = \lambda$

- *Si $\mathcal{Y}$ es una variable aleatoria independiente de $\mathcal{X}$ tal que $\mathcal{Y} \sim Po(\gamma)$ entonces*

$$(\mathcal{X} + \mathcal{Y}) \sim Po(\lambda + \gamma)$$

Demostración. En primer lugar, demostraremos la primera propiedad. Por definición de la esperanza de una variable aleatoria discreta tenemos que:

$$\mathbb{E}(\mathcal{X}) = \textstyle\sum_{x=0}^{\infty} x\mathbb{P}(\mathcal{X} = x)$$

debido a que la variable aleatoria $\mathcal{X} \sim Po(\lambda)$ obtenemos que:

$$\mathbb{E}(\mathcal{X}) = \textstyle\sum_{x=1}^{\infty} x\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$$

$$= \textstyle\sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!}e^{-\lambda}$$

$$= e^{-\lambda}\lambda \textstyle\sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{(x-1)}}{(x-1)!}$$

$$= e^{-\lambda}\,\lambda\, e^{\lambda} = \lambda$$

Así pues, se obtiene que $\mathbb{E}(\mathcal{X}) = \lambda$ Una vez se tiene esto, recordamos que $Var(\mathcal{X}) = \mathbb{E}(\mathcal{X}^2) - \mathbb{E}(\mathcal{X})^2$.
Por lo tanto, debemos calcular que vale $\mathbb{E}(\mathcal{X}^2)$, para ello utilizamos la función generatriz de momentos ya que se verifica que:

$$M''_{\mathcal{X}}(w) = \mathbb{E}(\mathcal{X}^2) \text{ si } w \to 0$$

Considerando la función generatriz de momentos de una variable aleatoria que sigue la distribución de Poisson, tenemos que:

- $M'_{\mathcal{X}}(w) = \lambda\, e^{w} e^{\lambda(e^{w}-1)}$

- $M''_{\mathcal{X}}(w) = (M'_{\mathcal{X}})' = \lambda\, e^{w} e^{\lambda(e^{w}-1)}(1 + \lambda\, e^{w})$

Llegados a este punto, resulta trivial comprobar que si $w \to 0$ se obtiene que $M''_{x}(w)$ tiende a $\lambda + \lambda^2$.
Por último, substituyendo en la fórmula de la varianza, los resultados obtenidos obtenemos que:

$$Var(\mathcal{X}) = \mathbb{E}(\mathcal{X}^2) - \mathbb{E}(\mathcal{X})^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda$$

Para la demostración de la segunda propiedad consideramos una variable aleatoria $\mathcal{X}$ y una variable aleatoria $\mathcal{Y}$ independiente de la anterior, de manera que la variable aleatoria $\mathcal{X}$ sigue una distribución de Poisson de parámetro λ, mientras que la variable aleatoria $\mathcal{Y}$ sigue una distribución de Poisson de parámetro γ. Por último, consideramos la variable aleatoria $\mathcal{Z}$ definida tal que $\mathcal{Z} = (\mathcal{X} + \mathcal{Y})$.
Consideremos ahora $n \in \mathbb{N}$ de manera que, tal y como hemos definido $\mathcal{Z}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathcal{Z} = n) = \mathbb{P}(\mathcal{X} = n\,, \mathcal{Y} = 0) + \mathbb{P}(\mathcal{X} = n-1\,, \mathcal{Y} = 1) + ...\\ + \mathbb{P}(\mathcal{X} = 0\,, \mathcal{Y} = n)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{Z} = n) = \textstyle\sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(\mathcal{X} = n-i\,, \mathcal{Y} = i)$$

Ahora bien, por hipótesi tenemos que las variables aleatorias $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ son independientes de manera que

$$\mathbb{P}(\mathcal{X} = a\,, \mathcal{Y} = b) = \mathbb{P}(\mathcal{X} = a)\,\mathcal{P}(\mathcal{Y} = b)$$

para todo $a, b \in \mathbb{N}$.
Por lo tanto, recuperando la expresión de $\mathbb{P}(\mathcal{Z} = n)$ observamos que:

$$\mathbb{P}(\mathcal{Z} = n) \;=\; \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(\mathcal{X} = n - i\,, \mathcal{Y} = i)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{Z} = n) \;=\; \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda^{n-i}\gamma^{i}}{(n-i)!i!} e^{-(\lambda+\gamma)}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{Z} = n) \;=\; \frac{e^{-(\lambda+\gamma)}}{n!} \sum_{i=0}^{n} \frac{n!\lambda^{n-i}\gamma^{i}}{(n-i)!i!}$$

De esta manera se observa que lo que se obtiene en el sumatorio se trata de un binomio de Newton obteniendo que

$$\mathbb{P}(\mathcal{Z} = n) \;=\; \frac{(\lambda+\gamma)^{n}}{n!} e^{-(\lambda+\gamma)}$$

verificando así que $\mathcal{Z} \sim Po(\lambda + \gamma)$ tal y como se quería probar. □

Definición 3.6. *Sea* $(\Omega\,, \mathcal{F}\,, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad, y sea* $\mathcal{X}$ *una variable aleatoria en dicho espacio de probabilidad. Sea* $k, q \in \mathbb{R}$ *y* $q \leq k$ *diremos que* $\mathcal{X}$ *sigue una distribución Exponencial de parámetro* $\lambda > 0$ *si se verifica que:*

$$\mathbb{P}(q \leq \mathcal{X} \leq k) \;=\; \int_{q}^{k} \lambda\, e^{-\lambda\, x} dx$$

En este caso diremos que su función de distribución $F_{\mathcal{X}}$ *queda determinada por:*

$$F_{\mathcal{X}}(x) \;=\; 1 - e^{-\lambda\, x} \;\; \textit{para todo } x \geq 0\,.$$

Proposición 3.7. *Sea* $(\Phi_i)_{i \geq 1}$ *una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas siguiendo la distribución exponencial de parámetro* λ. *Sea* $\mathcal{N}$ *una variable aleatoria tal que para todo* $t > 0$ *se define como:*

$$\mathcal{N}_t \;=\; inf\,\{\, n \geq 1 \,:\, \sum_{i=1}^{n} \Phi_i > t\,\}$$

entonces $\mathcal{N}$ *sigue una distribución de Poisson de parámetro* $\lambda\, t$.

Demostración. En primer lugar se tiene que Φ_i sigue una distribución exponencial de parámetro λ para todo $i \geq 1$ de manera que $\sum_{i=1}^{n} \Phi_i$ sigue una distribución Gamma de parámetros n i λ de manera que:

$$\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} \Phi_i \leq y) \;=\; \int_{0}^{y} \lambda\, e^{-\lambda\, x} \frac{(\lambda\, x)^{n-1}}{\Gamma(n)} dx$$

Podemos observar que al ser $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\Gamma(n) = (n-1)!$. Así pues, volviendo ahora a la variable aleatoria $\mathcal{N}$ tenemos que podemos expresar $\mathbb{P}(\mathcal{N} = n)$ como:

$$\mathbb{P}(\mathcal{N} = n) = \mathbb{P}(\textstyle\sum_{i=1}^{n-1} \Phi_i \leq t) - \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} \Phi_i \leq t)$$

Considerando esto y la distribución Gamma que sigue el sumatorio al desarrollar se obtiene que $\mathcal{N} \sim Po(\lambda t)$ $\square$

3.2. Proceso de Poisson

Como consecuencia de los avances realizados en la teoría de la probabilidad por Simeon-Denis Poisson, respecto del descubrimiento de la distribución de Poisson como forma límite de la distribución binomial, se abrió la puerta en el campo de la teoria de la probabilidad, a la aparición de un nuevo conjunto de procesos que pasarían a llamarse procesos de Poisson, debido a la estrecha relación que guardan con la distribución de Poisson.

En el siglo XVIII podemos encontrar entre los estudios de Michell, los primeros estudios matemáticos que contemplaban los procesos de Poisson. No obstante, no es hasta principios del siglo XX, cuando se materializó la formulación matemática de los procesos de Poisson de la forma que los conocemos actualmente. Dicha formulación se llevó a cabo a raíz de la aparición de los procesos de Poisson en los estudios de Erlang referentes a la teoria de colas, en el análisi de las partículas alfa realizado por Rutherford y Eiger así como en la aparición en el estudio de Campbell referente al ruido armónico.

Los procesos de Poisson, al igual que los procesos de Wiener, constituyen un tipo de proceso de Levy. No obstante, a diferencia de los procesos de Wiener, los procesos de Poisson presentan trayectorias puramente discontinuas.
Los procesos de Poisson constituyen un pilar fundamental para la construcción de procesos con saltos.

Definición 3.8. *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, y sea $(\gamma_i)_{i\geq 1}$ una secuencia de variables aleatorias con distribución exponencial de parámetro λ y independientes entre si y sea $\mathbb{T}$ el espacio de los instantes de tiempo. Definimos el proceso estocástico de Poisson de parámetro λ como la función medible*

$$\mathcal{N} : ((\Omega, \mathbb{T}), \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{T})) \xrightarrow[(w,t)\to\mathcal{N}_t(w)=\sum_{1\leq n} 1_{\phi n\leq t}]{} (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

donde $\phi_n = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i$

Observación 3.9. Podemos observar de la definición que $\forall\, i \geq 1$ tenemos que la secuencia $(\gamma_i\,)_{i\geq 1}$ es una secuencia de variables aleatorias con distribución exponencial de parámetro λ de manera que recordando la proposición 3.7 tenemos que podemos afirmar que:

$$\mathcal{N}_t \sim Po(\lambda\, t)$$

Así pues como consecuencia directa tenemos que:

$$\mathbb{E}(\mathcal{N}_t) = Var(\mathcal{N}_t) = \lambda\, t\,, \text{ para todo t.}$$

Proposición 3.10. *Sea $(\mathcal{N}_t)_t$ un proceso de Poisson de parámetro λ, entonces $(\mathcal{N}_t)_t$ presenta incrementos independientes.*

Demostración. Para la demostración de esta proposición utilizaremos el siguiente lema:

Lema 3.11. *Sean $s, t > 0$, entonces $\mathcal{N}_{t+s} - \mathcal{N}_s$ es independiente de $\mathcal{N}_s$.*

Demostración. Para demostrar que son independientes, queremos ver que

$$\mathbb{P}(\mathcal{N}_{t+s} - \mathcal{N}_s = a, \mathcal{N}_s = b) = \mathbb{P}(\mathcal{N}_s = b)\mathbb{P}(\mathcal{N}_{t+s} - \mathcal{N}_s = a)\,,$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$, para ello utilizamos que:

$$\mathbb{P}(\mathcal{N}_{t+s} - \mathcal{N}_s = a, \mathcal{N}_s = b)$$
$$= \mathbb{P}(\mathcal{N}_{t+s} = a + b, \mathcal{N}_s = b)\,.$$

Aplicando la propiedad de no memoria de las variables aleatorias exponenciales se obtiene que:

$$\mathbb{P}(\mathcal{N}_{t+s} - \mathcal{N}_s = a, \mathcal{N}_s = b) = \mathbb{P}(\mathcal{N}_s = b)\mathbb{P}(\mathcal{N}_t = a)$$

Ahora bien, se tiene que $\mathcal{N}_{t+s} - \mathcal{N}_s$ presenta la misma distribución que $\mathcal{N}_t$ de manera que substituyendo, se obtiene el resultado buscado. $\square$

Así pues, considerando ahora una partición $t_1 < t_2 < ... < t_m < \infty$ y repitiendo de manera inductiva el lema demostrado anteriormente, se tiene que los incrementos del proceso de Poisson, son independientes (Consultar punto [1] de la bibliografía, sección *The poisson process*, para una demostración más detallada). □

Proposición 3.12. *Sea $(\mathcal{N}_t)_t$ un proceso de Poisson, entonces $(\mathcal{N}_t)_t$ verifica la propiedad de Markov, siendo $(\mathcal{N}_t)_t$ un proceso Markoviano.*

Demostración. Debido a la proposición anterior, tenemos que el proceso de Poisson $(\mathcal{N}_t)_t$ presenta incrementos independientes de manera que como consecuencia directa a esta propiedad se obtiene que verifica la propiedad de Markov, siendo un proceso Markoviano. □

Lema 3.13. *Sea $(\mathcal{N}_t)_t$ un proceso de Poisson tal que $\mathcal{N}_t \sim Po(\lambda\, t)$ para todo t y sea $(\mathcal{P}_t)_t$ un proceso de Poisson tal que $\mathcal{P}_t \sim Po(\gamma\, t)$ para todo t, entonces, $(\mathcal{Z}_t)_t = (\mathcal{N}_t + \mathcal{P}_t)_t$ es un proceso de Poisson tal que para todo t se verifica que $\mathcal{Z}_t \sim Po((\lambda + \gamma)t)$.*

Demostración. La demostración de este lema es una consecuencia directa del lema 3.5 □

Por último, cabe destacar que si $(\mathcal{N}_t)_t$ es un proceso de Poisson de manera que $(\Phi_t)_{t\geq 1}$ es el conjunto de los eventos de este, es decir, los saltos que presenta el proceso.Se podría plantear el escenario en el que con probabilidad p o bien $(1-p)$ eliminamos un evento de manera independiente del resto de eventos.

Una vez realizado esto, aquellos eventos que hayan sobrevivido a esta criba que acabamos de realizar, se renombrarán como $\Phi'_1, \Phi'_2, ..., \Phi'_n$. Se tiene pues, que al realizar esto y al volver a formular el proceso de Poisson pero empleando únicamente los eventos que han sobrevivido a la criba, el proceso resultante continua siendo un proceso de Poisson. Esta propiedad de los procesos de Poisson se conoce como "Thining Property".

Llegados a este punto, tenemos determinados los procesos de Poisson, así como una serie de propiedades que nos permitirán poder trabajar con ellos, no obstante, a partir de la definición de proceso de Poisson, podemos definir el proceso de Poisson compensado.

Introducir el proceso de Poisson compensado nos permitirá introducir una nueva serie de propiedades interesantes acerca de los procesos de Poisson.

Definición 3.14. *Sea* $(\mathcal{N}_t)_t$ *un proceso de Poisson, definimos el proceso de Poisson compensado de* $(\mathcal{N}_t)_t$ *, al proceso* $(\tilde{\mathcal{N}_t})_t$ *definido de manera que:*

$$\tilde{\mathcal{N}_t} = \mathcal{N}_t - \lambda\, t\,.$$

De la definición de proceso de Poisson sabemos que $\mathcal{N}_t$ sigue una distribución de Poisson de manera que es trivial observar que $\tilde{\mathcal{N}_t}$ sigue una distribución de Poisson, debido a que

$$\mathbb{P}(\tilde{\mathcal{N}_t} = x) = \mathbb{P}(\mathcal{N}_t = x + \lambda\, t) \sim Po(\lambda\, t)$$

para cada $t \in \mathbb{T}$.
No obstante, a diferencia del proceso de Poisson, el proceso de Poisson compensado presenta una particularidad.

Proposición 3.15. *El proceso de Poisson compensado es una martingala respecto de su filtración natural.*

Demostración. En primer lugar, por definición, cualquier proceso es adaptado a su filtración natural.
Por otro lado, $\tilde{\mathcal{N}_t}$ verifica:

$$\mathbb{E}(\tilde{\mathcal{N}_t}) = 0 < \infty\,, \text{ para todo t.}$$

Por último se tiene que $\mathbb{E}(\tilde{\mathcal{N}_t}|\mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{E}(\mathcal{N}_t - \lambda\, t|\mathcal{F}_{t-1})$.
Ahora bien, como hemos visto antes, al ser un proceso de Poisson $\mathcal{N}$ presenta incrementos independientes de manera que

$$\mathbb{E}(\mathcal{N}_t - \lambda\, t|\mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{E}(\mathcal{N}_t - \mathcal{N}_{t-1} + \mathcal{N}_{t-1} - \lambda\, t|\mathcal{F}_{t-1})$$

$$= \mathbb{E}(\mathcal{N}_t - \mathcal{N}_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}) + \mathbb{E}(\mathcal{N}_{t-1}|\mathcal{F}_{t-1}) - \lambda\, t$$

$$= \lambda + \mathcal{N}_{t-1} - \lambda\, t = \tilde{\mathcal{N}}_{t-1}$$

Así pues, observamos que el proceso de Poisson compensado es una Martingala. □

Ahora bien, más allá de la propiedad que acabamos de ver, el proceso de Poisson compensado presenta una particularidad que nos permite relacionar el proceso de Poisson con el de Wiener.

Lema 3.16. *Sea $(\mathcal{N}_t)_t$ un proceso de Poisson, y sea $(\tilde{\mathcal{N}}_t)_t$ el proceso de Poisson compensado asociado a $(\mathcal{N}_t)_t$. Entonces el proceso*

$$\mathcal{Z}_t = \frac{\tilde{\mathcal{N}}_t}{\lambda}$$

tiende en distribución a un proceso de Wiener en tender la intensidad de sus saltos a ∞.

Demostración. Este resultado es una consecuencia del principio de invariancia de Donsker. Dicho principio podrá encontrarse en [4] de la bibliografía, teorema 14.9. □

3.2.1. Proceso de Conteo

De manera intuitiva, podemos entender los procesos estocásticos de conteo, como procesos estocásticos cuya labor es contar las veces que ocurre un determinado evento en un espacio de tiempo $[0,t]$ con $t \in \mathbb{T}$.

Definición 3.17. *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad y sea* $(\mathcal{T}_n)_{n\geq 1}$ *una secuencia creciente de momentos aleatorios de manera que* $\mathbb{P}(\mathcal{T}_n \to \infty) = 1$. *Entonces definimos un proceso de conteo como un proceso estocástico* $(\mathcal{X}_t)_t$ *de manera que para todo t:*

$$\mathcal{X}_t = \sum_{n\geq 1} 1_{t\geq \mathcal{T}_n} .$$

Es intuitivo pensar que si consideramos una secuencia de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas siguiendo la distribución exponencial de parámetro λ, de manera que construimos $\Phi_n = \sum_{i=0}^{n} \gamma_i$, donde γ_i es una v.a.i.i.d de la secuencia considerada anteriormente, $\forall\, i$. Podemos observar que en este caso obtenemos que $(\mathcal{X}_t)_t$ es un proceso estocástico de Poisson.
Así pues, podemos entender de manera intuitiva el proceso de Poisson como un proceso de conteo que se encarga de contar cuantas veces ocurre un salto en un espacio de tiempo $[0,t]$ para todo $t \in \mathbb{T}$.

Lema 3.18. *Sea* $(\mathcal{X}_t)_t$ *un proceso de conteo, si* $(\mathcal{X}_t)_t$ *presenta incrementos independientes y estacionarios entonces es un proceso de Poisson.*

Demostración. La demostración de este lema se puede encontrar en el punto [1] de la bibliografía en la sección *Counting Processes.* □

3.3. Proceso de Poisson Compuesto

Para construir un proceso de Poisson compuesto, consideramos $(\Psi_n)_n$ variables aleatorias i.i.d. Consideramos también un proceso de Poisson $(\mathcal{N}_t)_t$, siendo el proceso de Poisson independiente de las variables aleatorias. Así pues, con el fin de construir el proceso de Poisson compuesto se le asocia a cada proceso de Poisson $(\mathcal{N}_t)_t$, una sucesión de variables aleatorias (Ψ_i).

Definición 3.19. *Sea $(\mathcal{N}_t)_t$ un proceso de Poisson de parámetro λ, y sean Ψ_i, donde $i \geq 1$, v.a.i.i.d e independientes del proceso de Poisson. Entonces, definimos el proceso de Poisson compuesto asociado a $(\mathcal{N}_t)_t$ como el proceso de tiempo continuo $(\mathcal{X}_t)_t$ definido por:*

$$\mathcal{X}_t = \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_t} \Psi_n$$

Una de las principales diferencias que podemos observar entre el proceso de Poisson y el proceso de Poisson compuesto, se daria al comparar la longitud de sus saltos.
Si bien es cierto que el proceso de Poisson presentaba saltos unitarios, esta característica, se ve alterada al fijarnos en el proceso de Poisson compuesto, puesto que en este, la longitud de cada salto vendrá determinada por la variable aleatoria Ψ_i, $\forall\, i \geq 1$.
Por contra es intuitivo pensar que si $\Psi_i = 1$, $\forall\, i \geq 1$, en este caso se recuperaría el proceso de Poisson, puesto que:

$$\mathcal{X}_t = \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_t} \Psi_n = \Psi_1 + ... + \Psi_{\mathcal{N}_t} = \underbrace{1 + ... + 1}_{\mathcal{N}_t} = \mathcal{N}_t$$

Observación 3.20. Debido al hecho que $\mathcal{X}_t = \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_t} \Psi_n$ se tiene que $\mathcal{X}_0 = 0$ ya que $\mathcal{X}_t = \sum_{n=1}^{0} \Psi_n = 0$.

Otra gran diferencia con respecto del proceso de Poisson, es que tal y como hemos visto, $\mathcal{N}_t \sim Po(\lambda\, t)$, no obstante, en el caso del proceso de Poisson compuesto, la distribución de $\mathcal{X}_t$ vendrá determinada por la distribución de las variables aleatorias Ψ_i.
Como consecuencia, se tiene que no es tan fácil poder determinar aspectos como la esperanza o bien la varianza de una manera tan sencilla y directa.

Lema 3.21. *(Identidad de Wald) Sea $\mathcal{X}$ una variable aleatoria tal que $\mathcal{X}$ toma valores enteros y positivos. Dada una sucesión de variables aleatorias $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ i.i.d, con esperanza finita e independientes de $\mathcal{X}$, $\forall\, i \in \mathbb{N}$, entonces si $\mathbb{E}(\mathcal{X}) < \infty$, se verifica que:*

$$\mathbb{E}(\textstyle\sum_{i=1}^{\mathcal{X}} Y_i) = \mathbb{E}(Y_1)\mathbb{E}(\mathcal{X})$$

Demostración. En primer lugar cabe destacar que $\sum_{i=1}^{\mathcal{X}} Y_i = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i 1_{\{\mathcal{X}\geq i\}}$, de esta manera, podemos reescribir $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{\mathcal{X}} Y_i)$ como $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{\infty} Y_i 1_{\{\mathcal{X}\geq i\}})$. Llegados a este punto, se tiene que

$$\mathbb{E}(\textstyle\sum_{i=1}^{\infty} Y_i 1_{\{\mathcal{X}\geq i\}}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(Y_i 1_{\{\mathcal{X}\geq i\}})$$

$$= \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(Y_i)\mathbb{E}(1_{\{\mathcal{X}\geq i\}})$$

Debido a que las variables aleatorias Y_i son i.i.d se tiene que

$$\mathbb{E}(\textstyle\sum_{i=1}^{\mathcal{X}} Y_i) = \mathbb{E}(Y_1)\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(1_{\{\mathcal{X}\geq i\}})$$

$$= \mathbb{E}(Y_1)\textstyle\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\mathcal{X} \geq i)$$

Ahora bien, se tiene que

$$\mathbb{E}(\mathcal{X}) = \mathbb{P}(\mathcal{X}=1) + 2\mathbb{P}(\mathcal{X}=2) + ... + n\mathbb{P}(\mathcal{X}=n) + ...$$

$$= \mathbb{P}(\mathcal{X}=1) + \mathbb{P}(\mathcal{X}=2) + \mathbb{P}(\mathcal{X}=2) + ... + \underbrace{\mathbb{P}(\mathcal{X}=n) + ... + \mathbb{P}(\mathcal{X}=n)}_{n} + ...$$

De esta manera, reescribiendo esta expresión, obtenemos que:

$$\mathbb{E}(\mathcal{X}) = \mathbb{P}(\mathcal{X} \geq 1) + \mathbb{P}(\mathcal{X} \geq 2) + ... + \mathbb{P}(\mathcal{X} \geq n) + ... = \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\mathcal{X} \geq i).$$

Así pues, aplicando esto y lo obtenido anteriormente, se obtiene que:

$$\mathbb{E}(\textstyle\sum_{i=1}^{\mathcal{X}} Y_i) = \mathbb{E}(Y_1)\mathbb{E}(\mathcal{X}).$$

□

Proposición 3.22. *Sea* $(\mathcal{N}_t)_t$ *un proceso de Poisson, y sea* $\mathcal{X}_t = \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_t} \Psi_n$ *el proceso de Poisson compuesto asociado a* $(\mathcal{N}_t)_t$ *, de manera que se verifica que las variables aleatorias* Ψ_n *presentan esperanza finita* $\forall\, n$ *, entonces se tiene que:*

$$\mathbb{E}(\mathcal{X}_t) = \mathbb{E}(\mathcal{N}_t)\mathbb{E}(\Psi) = \mathbb{E}(\Psi)\, t\lambda.$$

Demostración. Siendo $(\mathcal{X}_t)_t$ un proceso de Poisson compuesto, se verifica que:

$$\mathcal{X}_t = \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_t} \Psi_n$$

donde $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de v.a.i.i.d e independientes del proceso de Poisson $(\mathcal{N}_t)_t$. Además, el proceso de Poisson $\mathcal{N}_t$ toma valores enteros positivos y presenta esperanza finita e igual a $\lambda\, t$.
Así pues podemos observar que se verifican todas las hipótesis de la identidad de Wald, de esta manera, podemos afirmar que se cumple la igualdad

$$\mathbb{E}(\mathcal{X}_t) = \mathbb{E}(\mathcal{N}_t)\mathbb{E}(\Psi) = \mathbb{E}(\Psi)t\lambda.$$

$\square$

Proposición 3.23. *Sea* $(\mathcal{X}_t)_t$ *un proceso de Poisson compuesto, entonces,* $(\mathcal{X}_t)_t$ *presenta incrementos independientes.*

Demostración. Por definición se tiene que $\mathcal{X}_t = \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_t} \Psi_n$, mientras que $\mathcal{X}_{t-1} = \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_{t-1}} \Psi_n$. Así pues, observamos que:

$$\mathcal{X}_t - \mathcal{X}_{t-1} = \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_t} \Psi_n - \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_{t-1}} \Psi_n =$$

$$= (\Psi_1 + ... + \Psi_{\mathcal{N}_t}) - (\Psi_1 + ... + \Psi_{\mathcal{N}_{t-1}}) = \Psi_{\mathcal{N}_t}$$

Repitiendo este mismo argumento para $\mathcal{X}_{t-1} - \mathcal{X}_{t-2}$ se obtiene que $\mathcal{X}_{t-1} - \mathcal{X}_{t-2} = \Psi_{\mathcal{N}_{t-1}}$.
Así pues, por inducción, repitiendo este argumento y teniendo por hipótesis que las variables aleatorias Ψ_i son independientes entre si $\forall\, i$, se obtiene que el proceso de Poisson compuesto $(\mathcal{X}_t)_t$ presenta incrementos independientes. $\square$

Lema 3.24. *Sea* $(\mathcal{X}_t)_t$ *un proceso de Poisson compuesto, entonces* $(\mathcal{X}_t)_t$ *es un proceso de Markov.*

Demostración. La demostración de este lema es una consecuencia directa de la proposición anterior. □

3.4. Modelos de Difusión con Saltos

En el modelo de Black-Scholes, estudiamos el comportamiento del precio de los activos. No obstante, no se tienen en cuenta los posibles cambios bruscos que se pueden dar en el precio de estos, alejando así el modelo de la realidad, puesto que si nuestro activo presenta una extrema volatilidad, la cual repercute en el precio elevándolo o bien desplomándolo en espacios de tiempo relativamente breve, nuestro modelo no podrá ajustar bien el comportamiento del precio.
Cabe destacar que si nuestro activo no goza de una gran volatilidad, pero nos encontramos en espacios de tiempo de gran incertidumbre, ya sea debido a una catástrofe como es el caso de la covid-19 o en una época de crisis como la vivida en 2008, el modelo tampoco se ajustaría a la realidad. Esto se debe a que esta serie de acontecimientos acaban viéndose reflejados en los precios, tanto en positivo como en negativo, experimentando variaciones significativas de estos en periodos de tiempo relativamente cortos que escaparían a las predicciones del modelo de Black-Scholes.

Con el fin de paliar estos problemas, y otorgarle a los inversores un modelo que contemplase, tanto los espacios de tiempo en los que los activos se comportan de manera estable , así como aquellos periodos en los que los activos experimentan saltos significativos en sus precios, nace en 1976 de la mano de Robert. C. Merton los modelos de difusión con saltos.
Este tipo de modelos se entienden de manera intuitiva como un modelo cuya finalidad es modelizar el comportamiento del precio de un activo donde dicho precio experimenta una serie de saltos significativos en instantes de tiempo determinados, pero que por contra, dicho comportamiento sigue un modelo de Black-Scholes en el periodo de tiempo que transcurre entre un salto y el siguiente.

Para introducir el modelo de difusión con salto, consideraremos un mercado financiero compuesto de dos activos. Uno de dichos activos será libre de riesgo al que denominaremos $\mathcal{Q}$, de manera que el precio de $\mathcal{Q}$ en el instante de tiempo t lo denotaremos por $\mathcal{Q}_t$. Es trivial ver, que al tratarse de un activo libre de riesgo, $\mathcal{Q}_t = exp\{rt\}$, donde

$r \geq 0$ es la tasa de interés instantáneo.
Por otro lado consideraremos un activo con riesgo al que denominaremos $\mathcal{S}$ y de manera análoga al anterior consideraremos que el precio de $\mathcal{S}$ en el instante de tiempo t es $\mathcal{S}_t$.
En el caso del activo $\mathcal{S}$ tenemos que sus precios irán experimentando saltos en instantes de tiempo determinados. Para ellos denotaremos por $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ a los instantes de tiempo donde el precio experimenta el salto, expresando el salto con la variable aleatoria $\mathcal{U}_i$, $\forall\, i \in \{1, 2, ..., n\}$.
A continuación, se procederá a estudiar como se comporta el precio del activo en los espacios de tiempo $[0, \tau_1) \ldots [\tau_{n-1}, \tau_n)$. Por definición, se tiene que en el espacio de tiempo comprendido entre dos saltos, el precio sigue el modelo de Black-Scholes. Por lo tanto se obtiene que en los espacios de tiempo $(0, \tau_1) \ldots (\tau_{n-1}, \tau_n)$ el precio se comportará tal y como se expone en el modelo de Black-Scholes.

Para deducir la expresión que seguirá $\mathcal{S}_t$, primero debemos estudiar el primer intervalo $[0, \tau_1)$. Tal y como hemos visto anteriormente sabemos que para cualquier $t \in (0, \tau_1)$, $\mathcal{S}_t$ seguirá el modelo de Black-Scholes, de manera que $\mathcal{S}_t = \mathcal{S}_0\, e^{(\gamma - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}$ donde W_t es un proceso de Wiener. Llegados a este punto y con el fin de amenizar la densidad de las expresiones que vayamos obteniendo, desde aquí en adelante denotaremos a $\Delta = (\gamma - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t$ y a $\Phi_i = (\gamma - \frac{\sigma^2}{2})(t - \tau_i) + \sigma W_{(t-\tau_i)}$, para $i \geq 1$.
Podemos observar que si estudiamos que pasa en el instante de tiempo donde se produce el salto, se tiene que $\mathcal{S}_{\tau_1} = \mathcal{S}_{\tau_1} - \mathcal{S}_{\tau_1^-} = \mathcal{S}_{\tau_1^-}\mathcal{U}_1$. Así pues se deduce que:

$$\mathcal{S}_{\tau_1} = \mathcal{S}_{\tau_1^-}(1 + \mathcal{U}_1)$$

De esta manera tenemos que los precios a lo largo del intervalo se comportan como:

$$\mathcal{S}_t = \mathcal{S}_0 e^{\Delta}\, , \forall\, t \in [0, \tau_1)\, ,$$

$$\mathcal{S}_{\tau_1} = \mathcal{S}_0(1 + \mathcal{U}_1)e^{\Delta}$$

Una vez tenemos determinado como se comportan los precios hasta el primer salto, podemos centrarnos en periodo de tiempo posterior a este, así como en su comportamiento cuando alcance el segundo salto. Podemos observar que para todo $t \in [\tau_1, \tau_2)$ se tiene que el comportamiento de los precios se puede modelar como:

$$\mathcal{S}_t = \mathcal{S}_{\tau_1} e^{\Phi_1} = \mathcal{S}_{\tau_1^-}(1+\mathcal{U})e^{\Phi_1} = \mathcal{S}_0(1+\mathcal{U}_1)e^{\Delta}$$

Por tanto, de manera análoga a como se ha llevado a cabo en el caso de $\mathcal{S}_{\tau_1}$ se tiene que:

$$\mathcal{S}_{\tau_2} = \mathcal{S}_0(1+\mathcal{U}_1)(1+\mathcal{U}_2)e^{\Delta}$$

Por último, repitiendo este argumento para cada τ_i se acaba obteniendo que el comportamiento de los precios puede ser modelado bajo la expresión:

$$\mathcal{S}_t = \mathcal{S}_0\left(\prod_{j=1}^{n}(1+\mathcal{U}_j)\right)e^{\Delta}$$

Podemos observar que reescribiendo esta expresión podemos expresar $\mathcal{S}_t$ como:

$$\mathcal{S}_t = \mathcal{S}_0 + \int_0^t \mathcal{S}_s(\gamma\, ds + \sigma\, dW_s) + \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_t} \mathcal{S}_{\tau_j^-}\mathcal{U}_j$$

$$\Rightarrow \frac{d\mathcal{S}_t}{\mathcal{S}_t^-} = \gamma\, dt + \sigma\, dW_t + d\mathcal{Z}_t\,,$$

donde por definición se tiene que $\mathcal{Z} = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_t}\mathcal{U}_j$ es un proceso de Poisson compuesto donde la distribución de cada una de sus variables irá determinando la intensidad de los saltos que experimentan los precios.
Esto es lo que se conoce como modelo de difusión con saltos, siendo el más conocido y pionero el modelo de Merton, donde las variables aleatorias del proceso de Poisson compuesto siguen una distribución normal.

3.4.1. Martingalas en un proceso de salto difusión

Antes de presentar el modelo de Merton, presentaremos una serie de propiedades de los procesos de difusión con salto que nos permitarán presentar estrategias de *pricing*, así como de *hedging* asociadas a estos modelos.

Proposición 3.25. *Sea* $(\Omega\,,\mathcal{B}\,,\mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad y sea* $(\mathcal{F}_t)_t$ *una filtración de dicho espacio,* W_t *un proceso de Wiener y* $\mathcal{N}_t$ *un proceso de Poisson. Sea* $\mathcal{A}_s$ *la* σ *-algebra generada por las variables aleatorias* $W_{t+s} - W_s$ *,* $\mathcal{N}_{t+s} - \mathcal{N}_s$ *,* $\mathcal{U}_{\mathcal{N}_s+j}\,\forall\, j \geq 1$ *, entonces,* $\mathcal{A}_s$ *y* $\mathcal{F}_s$ *son independientes.*

Demostración. La demostración de esta proposición, se podrá encontrar en el punto [5] de la bibliografía en la pagina 177. □

Ahora bien, siendo $\tilde{\mathcal{S}}_t$ el precio descontado del activo $\mathcal{S}$ en el instante t , se tiene la siguiente proposición, que nos otorga una condición suficiente para poder determinar que el proceso $(\tilde{\mathcal{S}}_t)_t$, es una martingala.

Lema 3.26. *Sea* $(\tilde{\mathcal{S}}_t)_t$ *el proceso que modela el comportamiento de los precios descontados del activo, entonces siendo* $\mathbb{E}(\mathcal{U}_1) < \infty$ *se tiene que el proceso es una martingala si y solo si se verifica que* $\gamma = r - \lambda\mathbb{E}(\mathcal{U}_1)$ *.*

Demostración. En primer lugar utilizando la proposición anterior, se obtiene que

$$\mathbb{E}(\tilde{\mathcal{S}}_t|\mathcal{F}_s) = \tilde{\mathcal{S}}_s\,\mathbb{E}(e^{(\gamma - r - \frac{\sigma^2}{2})(t-s)+\sigma(W_{t-s})} \textstyle\prod_{j=1}^{\mathcal{N}_{t-s}}(1+\mathcal{U}_{\mathcal{N}_s+j}))$$

Ahora bien, utilizando que $(\mathcal{U}_{\mathcal{N}_s+j})_{j\geq 1}$ tiene la misma distribución que $(\mathcal{U}_j)_{j\geq 1}$ entonces es fácil ver que:

$$\mathbb{E}(\tilde{\mathcal{S}}_t|\mathcal{F}_s) = \tilde{\mathcal{S}}_s e^{(\gamma-r)(t-s)}\mathbb{E}(\textstyle\prod_{j=\mathcal{N}_s+1}^{\mathcal{N}_t}(1+\mathcal{U}_j))$$

$$= \tilde{\mathcal{S}}_s\, e^{(\gamma-r)(t-s)+\lambda(t-s)\mathbb{E}(\mathcal{U}_1)}$$

Por tanto, con esta expresión es fácil ver que se tratará de una martingala si y solo si $\gamma = r - \lambda\mathbb{E}(\mathcal{U}_1)$ tal y como se quería probar. □

Por último, con el fin de poder presentar las estrategias de hedging, ya sea en el modelo de Merton, así como en cualquier otro modelo de difusión con salto, debemos introducir dos lemas adicionales. Debido a que nuestro objetivo es presentar las estrategias, omitiremos las demostraciones, no obstante podrán encontrarse en el punto [5] de la bibliografía (página 179.).

Lema 3.27. *Definiendo* v *como la ley de probabilidad que siguen las variables aleatorias* $\mathcal{U}_j$ *, y sea*

$$\Upsilon : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \xrightarrow[(y,z)\to\Upsilon(y,z)]{} \mathbb{R}$$

una función medible tal que fijando z *se tiene que la función* $\alpha(y) = \Upsilon(y,z)$ *es continua en* $\mathbb{R}^d$ *. Sea también* $(H_t)_{t\leq 0}$ *un proceso continuo por la la izquierda tal que* $H_t \in \mathbb{R}^d \ \forall t$ *y adaptado a la filtración del espacio de probabilidad, así como:*

$$\mathbb{E}(\int_0^t ds \int v(dz)\Upsilon^2(H_s,z)) < \infty$$

Entonces, el proceso M_t *definido como:*

$$M_t = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_t} \Upsilon(H_{\tau_j},\mathcal{U}_j) - \lambda \int_0^t ds \int v(dz)\Upsilon(H_s,z))$$

es una martingala de cuadrado integrable. Además se verifica que:

$$M_t^2 - \lambda \int_0^t ds \int v(dz)\Upsilon^2(H_s,z))$$

es una martingala.

Lema 3.28. *Sea* $(J_t)_{t\geq 0}$ *un proceso adaptado tal que se verifica* $\mathbb{E}(\int_0^t J_s^2 ds) < \infty$ *, sea* $L_t = \int_0^t J_s\, dW_s$ *,entonces se tiene que:*

$$(L_t\, M_t)_{t\geq 0}$$

es una martingala.

3.5. Modelo de Merton (1976)

Como habíamos comentado, al inicio de la década de los 70, con la aparición en 1973 del modelo de Black-Scholes, se produjo una serie de grandes avances en la teoría de opciones, suponiendo gran parte de dichos avances, la semilla de lo que más tarde conoceríamos como ingeniería financiera. No obstante, en 1976, de la mano del matemático norte-americano Robert. C. Merton, se presentó un nuevo avance significativo, al introducirse un nuevo proceso que se encargaba de modelar los precios de los activos, el proceso de difusión con saltos.

Robert Merton presentó los proceso de difusión con saltos de la mano de lo que hoy conocemos como el modelo de Merton. Dicho modelo nació de la necesidad de generalizar los estudios de Black-Scholes, así como de la necesidad de poder adaptar más a la realidad el modelo presentado en 1973.
En la etapa anterior a 1973, poder determinar el precio o valor de una opción sobre una acción era una dura tarea que no siempre podía llevarse a cabo con éxito, es por ello, que el modelo de Black-Scholes, así como la formula de Black-Scholes arrojaron luz a los inversores, los cuales fueron dotados de una herramienta que les permitía calcular el valor de una opción sobre una acción basándose básicamente en valores observables.
Por contra, no todo fueron buenas noticias, puesto que el modelo de Black-Scholes, se alejaba de la realidad a la hora de hacer predicciones sobre el comportamiento de los precios de los activos, durante etapas de gran incertidumbre, así como a la hora de modelar dichos precios, al tratarse de activos extremadamente volátiles. Esto es debido a que dicho modelo no contemplaba el escenario en el que los precios de los activos, experimentaran variaciones significativas en periodos de tiempo relativamente cortos.
Así pues, pese a ser uno de los avances más significativos en matemáticas financieras de la historia, el modelo de Black-Scholes presentaba limitaciones.

Frente a este escenario, en 1976, Robert. C. Merton publica su modelo como una generalización de los estudios de Fisher Black y Myron

Scholes.
Dicho modelo, consiste en un proceso de difusión con saltos, a diferencia del modelo de Black-Scholes. Así pues se tiene que si consideramos un mercado financiero compuesto de un activo libre de riesgo $\mathcal{Q}$ y un activo con riesgo $\mathcal{S}$ el modelo de Merton se basa en un proceso $(\mathcal{S}_t)_t$ que modela los precios del activo con riesgo como:

$$\frac{d\mathcal{S}_t}{\mathcal{S}_t^-} = \gamma\, dt + \sigma\, dW_t + d\mathcal{Z}_t$$

donde se tiene que $\mathcal{Z} = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}_t} \mathcal{U}_j$ es un proceso de Poisson compuesto donde $\forall\, k$ se tiene $\mathcal{U}_k \sim \mathcal{N}(a, b^2)$, indicando que la intensidad de los saltos que experimentan los precios siguen una distribución normal. En particular, también se tiene que W_t es un proceso de Wiener y que $\mathcal{N}_t$ es un proceso de Poisson. Por último, cabe destacar que las variables aleatorias del proceso de Poisson compuesto, son independientes del proceso de Poisson como del de Wiener.

De manera análoga a cómo se llevó a cabo por Fisher Black y Myron Scholes en 1973, Robert Merton, de la mano de su modelo, también presentó una estrategia de *pricing* así como de *hedging*. Estas estrategias como generalizaciones de las presentadas en el modelo de Black-Scholes, permitieron que los estudios llevados a cabo en teoría de opciones pudieran abrirse a otros campos de las finanzas.

3.5.1. Pricing en el modelo de Merton

Haciendo honor al economista norte-americano Kent Monroe, remitiéndonos a sus palabras, podemos entender el *pricing* como:

∼ El arte y la ciencia de comprender cuánto un cliente estaría dispuesto a pagar por un producto o servicio, y obtener el máximo beneficio posible de este∼ .

En finanzas, una estrategia de *pricing*, consiste en una estrategia que nos permita conocer el precio que puede alcanzar un activo en un tiempo futuro de manera que podamos anticiparnos, y obtener la mayor rentabilidad de este.
La fórmula de Black-Scholes, constituye uno de los ejemplos más significativos de estrategia de *pricing*.

Observación 3.29. Recordamos que la función de Black-Scholes es $F(t, \mathcal{S}_t) = \mathcal{S}_t \mathcal{N}(d_+) - ke^{-rt}\mathcal{N}(d_-)$ que se obtiene de desarrollar $F_0(t, x) = \mathbb{E}(e^{-r(T-t)} f(xe^{(\gamma - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma(W_{T-t})}))$.

Debido a que el modelo de Merton consiste en un modelo de difusión con saltos, y por consecuencia, sigue un modelo de Black-Scholes en el espacio de tiempo comprendido entre dos saltos, la fórmula de Black-Scholes jugará un papel principal en la estrategia de *pricing* de este.

Para determinar la estrategia de *pricing* asociada al modelo, consideraremos una opción europea con payoff h la cual será $\mathcal{F}_t$-medible y de cuadrado integrable. Además dicha opción vencerá en el instante de tiempo T a precio de ejercicio K. Podemos denotar el precio de la opción en el instante de tiempo t, como V_t . Debido al hecho de que la estrategia de *pricing* como la de *hedging* se trata de estrategias cuyo objetivo es reducir al máximo el riesgo tenemos que:

- $V_0 = \mathbb{E}(e^{-rT} h)$
- $V_t = \mathbb{E}(e^{-r(T-t)} h | \mathcal{F}_t)$

Ahora bien, definiendo la función $f(x) = (x - K)_+$, se tiene que podemos reescribir h como $f(\mathcal{S}_T)$ de manera que se deduce que en el instante $t > 0$ se tiene que:

$$V_t = \mathbb{E}(e^{-r(T-t)} f(\mathcal{S}_T) | \mathcal{F}_t)$$

$$\Rightarrow V_t = \mathbb{E}(e^{-r(T-t)} f(\mathcal{S}_t e^{(\gamma - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma(W_{T-t})} \textstyle\prod_{k=\mathcal{N}_t+1}^{\mathcal{N}_T} (1 + \mathcal{U}_k)) | \mathcal{F}_t)$$

por ser $(\mathcal{S}_t)_t$ un proceso de difusión con saltos.

Ahora bien, se tiene que:

$$V_t = \mathbb{E}(e^{-r(T-t)} f(\mathcal{S}_T) | \mathcal{F}_t) = F(t, \mathcal{S}_t)$$

donde la función $F(t, x)$ la definimos como:

$$F(t,x) \ = \ \mathbb{E}(e^{-r(T-t)}(xe^{(\gamma-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma(W_{T-t})}\prod_{j=1}^{\mathcal{N}_{T-t}}(1+\mathcal{U}_j))$$

$$\Rightarrow \ F(t,x) \ = \ \mathbb{E}(e^{-r(T-t)}(xe^{(r-\lambda\mathbb{E}(\mathcal{U}_1)-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma(W_{T-t})}\prod_{j=1}^{\mathcal{N}_{T-t}}(1+\mathcal{U}_j))$$

Donde las variables $\mathcal{U}_j$ presentan una distribución normal por tratarse del modelo de Merton.

Recordando la función $F_0(t,x)$ del modelo de Black-Scholes es trivial ver que podemos expresar $F(t,x)$ como:

$$F(t,x) \ = \ \mathbb{E}(F_0(t,xe^{-\lambda\mathbb{E}(\mathcal{U}_1)(T-t)}\prod_{j=1}^{\mathcal{N}_{T-t}}(1+\mathcal{U}_j))$$

Por último, como $\mathcal{N}_{T-t}$ es independiente de las variables $\mathcal{U}_j$, y presenta distribución de Poisson con parámetro $\lambda(T-t)$ tenemos que:

$$F(t,x) \ = \ \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}(F_0(t,xe^{-\lambda\mathbb{E}(\mathcal{U}_1)(T-t)}\prod_{j=1}^{n}(1+\mathcal{U}_j))\,\frac{e^{-\lambda(T-t)}\lambda^n(T-t)^n}{n!}$$

En particular cabe destacar que esta fórmula sería útil para determinar la estrategia de *pricing* asociada a cualquier modelo de difusión con saltos presentando como única diferencia, con respecto a la que acabamos de obtener para el modelo de Merton, la distribución que presentarían las variables aleatorias $\mathcal{U}_j$.

3.5.2. Hedging en el modelo de Merton

En el marco de las operaciones bursátiles, se entiende por estrategia de *hedging*, una estrategia de cobertura que nos permita reducir o bien eliminar, las pérdidas que se podrían ocasionar al realizar una mala operación.

Para la deducción de la estrategia de hedging asociada al modelo de Merton, consideraremos una opción europea C, con payoff h, con precio de ejercicio K y que vence en el instante de tiempo T.
Análogamente a como hemos hecho en la estrategia de *pricing*, se tiene que $h = f(\mathcal{S}_T)$, y debido a que se trata de una estrategia admisible cuya finalidad es minimizar el riesgo, se tiene que el valor de C, en el instante inicial, viene determinado por:

$$V_0 \ = \ \mathbb{E}(e^{-rT}h)$$

Proposición 3.30. *Sea h el payoff de una opción europea C que vence en el instante de tiempo T y con precio de ejercicio K, Sea r la tasa de interés y sea $\tilde{V}_t$ el valor descontado de la opción en el instante t, entonces, el riesgo cuadrático en el momento de vencimiento denotado por R_0^T verifica que:*

$$R_0^T = \mathbb{E}(e^{-rT}h - \tilde{V}_t)^2$$

Demostración. La demostración se puede encontrar en [5], sección 7.
□

Así pues, se tiene que $R_0^T = \mathbb{E}(e^{-rT}(f(\mathcal{S}_T) - V_t))^2$, por ser $h = f(\mathcal{S}_T)$ y $\tilde{V}_t = e^{-rt}V_t$.

Proposición 3.31. *Sea $(H_t^0, H_t)_{0\leq t\leq T}$ una estrategia admisible que presenta valor V_t en el instante t. Considerando el valor inicial como $V_0 = \mathbb{E}(e^{-rT}h)$ entonces el riesgo cuadrático en el vencimiento verifica:*

$$R_0^T = \mathbb{E}(\int_0^T (\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \mathcal{S}_s}(s, \tilde{\mathcal{S}}_s) - H_s)^2 \tilde{\mathcal{S}}_s^2 \sigma^2 ds + \int_0^T \lambda \int dv(z) e^{-2rs}(\tilde{F}(s, \tilde{\mathcal{S}}_s(1+z)) - \tilde{F}(s, \tilde{\mathcal{S}}_s) - H_s z \tilde{\mathcal{S}}_s)^2 ds).$$

Demostración. La demostración se puede encontrar en [5], sección 7.
□

A raíz de esta proposición, podemos observar que para minimizar el riesgo es suficiente ver cuando H_s verifica la expresión:

$$0 = (\frac{\partial F}{\partial \mathcal{S}_s}(s, \tilde{\mathcal{S}}_s) - H_s)\tilde{\mathcal{S}}_s^2 \sigma^2 ds + \lambda \int dv(z)(\tilde{F}(s, \tilde{\mathcal{S}}_s(1+z)) - \tilde{F}(s, \tilde{\mathcal{S}}_s) - H_s z \tilde{\mathcal{S}}_s) z \tilde{\mathcal{S}}_s$$

Ahora bien, debido a que H_t debe de ser continuo por la izquierda, basta con minimizar los términos respecto de ds obteniendo que:

$$H_s = \Phi(s, \mathcal{S}_s^-)$$

Donde la función Φ es de la forma:

$$\Phi(s, x) = \frac{1}{\alpha^2}(\sigma^2 \frac{\partial F}{\partial x}(s, x) + \lambda \int dv(z) z \frac{(F(s, x(1+z)) - F(s, x))}{x})$$

Donde $\alpha^2 = \sigma^2 + \lambda \int dv(z)z^2$. Esta expresión, nos muestra la estrategia de *hedging* asociada al modelo de Merton. Podemos observar que si λ tiende a cero, obtendríamos la estrategia de *hedging* del modelo de Black-Scholes. Cabe destacar también que esta estrategia de *hedging*, seria adaptable a cualquier otro modelo que siguiera un proceso de difusión con saltos, únicamente substituyendo la función de *pricing* de Merton por la asociada al modelo del que queramos obtener la estrategia.

3.5.3. Modelo de Kou 2002 y pricing de opciones barrera

Tras la aparición en 1973 del modelo de Black-Scholes, así como la presentación de los modelos de difusión con saltos en 1976 por Robert Merton, ha habido un gran número de modelos que han ido surgiendo como generalizaciones de estos o bien como estudios complementarios a estos que permitían poder plantear un nuevo enfoque a la teoría de opciones. Este es el caso del modelo planteado por el matemático norte-americano Steven Kou en el año 2002.
S. Kou, con el fin de presentar una alternativa al modelo de Black-Scholes, publica en el año 2002 un modelo centrado en un proceso de difusión con saltos, donde la amplitud de los saltos sigue una distribución doble exponencial, también conocida como distribución Laplace. Al tratarse de un proceso de difusión con saltos con amplitudes de los saltos doble exponencial, tenemos que si consideramos un mercado financiero con dos activos, uno sin riesgo denominado $\mathcal{Q}$ y un activo con riesgo denominado $\mathcal{S}$, en el modelo de Kou, el proceso que se encargará de modelar los precios del activo con riesgo será $(\mathcal{S}_t)_t$ definido como:

$$\frac{d\mathcal{S}_t}{\mathcal{S}_t^-} = \gamma\, dt + \sigma\, dW_t + d\mathcal{Z}_t$$

donde W_t es un proceso de Wiener, $\mathcal{N}_t$ un proceso de Poisson y $\mathcal{Z}_t = \sum_{k=0}^{\mathcal{N}_t} \mathcal{U}_k$ un proceso de Poisson compuesto cuyas variables aleatorias $\mathcal{U}_k$, presentan distribución doble exponencial.
Llegados a este punto, podemos considerar que el modelo de Kou consiste en un modelo más de difusión con saltos, no obstante dicho modelo presenta una particularidad con respecto del modelo de Merton, puesto que el modelo de Kou nos permite extender las estrategias

de pricing introducidas por Merton en 1976.
Esto es debido a que el modelo de Kou, nos permite llevar a cabo estrategias de *pricing*, en el caso de estar invirtiendo en opciones *Path-Dependent*.

Las *Path-Dependent Options*, consisten en un tipo de opciones exóticas, cuyo valor no solo viene determinado por el precio del activo subyacente, sino que también está determinado por el *path* que el activo lleva a cabo a lo largo de toda la vida de la opción o bien en parte de ella. Entre este tipo de opciones financieras destacan la opciones Lookback así como las opciones Barrera.

En el caso de las opciones Lookback, así como sucede en el caso de las opciones Barrera, para realizar un correcto estudio para desarrollar una estrategia de *pricing* es necesario hacer un estudio del comportamiento del precio desde el primer instante de tiempo t_0 hasta un instante de tiempo τ en el que sucede un salto, actuando dicho instante, como un límite. Una vez se llega a este límite pueden suceder dos acontecimientos:

- El precio rebasa el límite por completo.

- El precio golpea exactamente en el límite.

En el caso en el que el precio rebasa el límite por completo, nos encontraríamos en la dificultad de conocer la distribución exacta que presenta este rebasamiento, así como la estructura dependiente entre el rebasamiento y el primer tramo de tiempo.
Aquí es donde el modelo de Kou coge ventaja con respecto al modelo de Merton, puesto que conocer la distribución exacta de dicho rebasamiento, así como conocer la estructura dependiente, es posible gracias a la propiedad de No-Memoria que presenta la distribución exponencial que por contra no presenta la distribución normal. De este modo, esto nos permite con el modelo de Kou, poder llevar a cabo una estrategia de *pricing* en el caso de tratarse de opciones *Path-Dependent*, cosa que sería muy complicado de realizar con el modelo de Merton.

Definición 3.32. *Se define como opcion barrera, o simplemente barrera, a las opciones exóticas, de naturaleza path-dependent, las cuales solo se pueden ejecutar, si durante la vida de la opción, el activo subyacente rebasa un precio estipulado, conocido como precio barrera.*

Debido a la naturaleza de este activo, el poder estipular el precio barrera nos permite poder tener un mayor control sobre el riesgo, así como sobre el apalancamiento. A pesar de que existen ocho tipos diferentes de opciones barrera, a partir de este punto, hablaremos de opciones barrera de tipo up-and-in call. Todos los resultados que se obtengan con respecto de este tipo de opcion barrera se podrán obtener de manera análoga para los siete tipos de opciones barrera restantes.

En primer lugar, consideramos una opción barrera (UIC) denotada por C, con vencimiento en T y con precio de ejercicio K, de manera que su payoff $h > 0$ lo podemos expresar como

$$h = f(\mathcal{S}_T) = (\mathcal{S}_t - K)_+ 1_{\{max_{0\leq t\leq T}\mathcal{S}_t \geq H\}}$$

donde $H > \mathcal{S}(0)$ es el precio barrera estipulado. Así pues, de manera análoga a como lo hemos hecho en el modelo de Merton, tenemos que el valor de C en el instante t viene dado por

$$C_t = \mathbb{E}^*(e^{-rT} f(\mathcal{S}_T))$$

Lema 3.33. *(Opciones barrera Kou-Wang 2004)Sea C una opción barrera (UIC), entonces*

$$C_t = \mathcal{S}_0 \Gamma - k e^{-rT} \Delta$$

donde

- $\Gamma = \tilde{\mathbb{P}}(\mathcal{S}_T \geq K \ , max_{0\leq t\leq T}\mathcal{S}_t \leq H)$
- $\Delta = \mathbb{P}^*(\mathcal{S}_T \geq K \ , max_{0\leq t\leq T}\mathcal{S}_t \geq H)$

siendo $\tilde{\mathbb{P}}$ *una función de probabilidad tal que:*

$$\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{\mathbb{P}^*}|_{t=T} = e^{-rT}\frac{\mathcal{S}_T}{\mathcal{S}_0}$$

Demostración. En primer lugar retomamos la expresión de C_t como $C_t = \mathbb{E}^*(e^{-rT}f(\mathcal{S}_T))$ de manera que se tiene que se puede expresar C_t como

$$C_t = \mathbb{E}^*(e^{-rT}f(\mathcal{S}_T))$$

$$= \mathbb{E}^*(e^{-rT}\mathcal{S}_T 1_{\{\mathcal{S}_T \geq K\ , max_{0\leq t\leq T}\mathcal{S}_t \geq H\}}) - \mathbb{E}^*(e^{-rT}K 1_{\{\mathcal{S}_T \geq K\ , max_{0\leq t\leq T}\mathcal{S}_t \geq H\}})$$

$$= \mathbb{E}^*(e^{-rT}\mathcal{S}_T 1_{\{\mathcal{S}_T \geq K\ , max_{0\leq t\leq T}\mathcal{S}_t \geq H\}}) - e^{-rT}K\Delta$$

Así pues, únicamente queda determinar $\mathbb{E}^*(e^{-rT}\mathcal{S}_T 1_{\{\mathcal{S}_T \geq K\ , max_{0\leq t\leq T}\mathcal{S}_t \geq H\}})$

Para ello definimos una nueva función de probabilidad $\tilde{\mathbb{P}}$ definida tal y como se expone en el enunciado del lema. Podemos observar que $\mathbb{E}^*(e^{-rT}\frac{\mathcal{S}_T}{\mathcal{S}_0}) = 1$ de manera que se tiene que la probabilidad $\tilde{\mathbb{P}}$ está bien definida. Además, debido al teorema de Girsanov para procesos con saltos, se obtiene que el nuevo proceso $\frac{\mathcal{S}_t}{\mathcal{S}_0}$ es un proceso de difusión con saltos, donde la intensidad de los saltos sigue una distribución doble exponencial. Así pues se deduce que:

$$\mathbb{E}^*(e^{-rT}\mathcal{S}_T 1_{\{\mathcal{S}_T \geq K\ , max_{0\leq t\leq T}\mathcal{S}_t \geq H\}})$$

$$= \mathcal{S}_0\mathbb{E}^*(e^{-rT}\frac{\mathcal{S}_T}{\mathcal{S}_0} 1_{\{\mathcal{S}_T \geq K\ , max_{0\leq t\leq T}\mathcal{S}_t \geq H\}})$$

$$= \mathcal{S}_0\tilde{\mathbb{P}}(\mathcal{S}_T \geq K\ , max_{0\leq t\leq T}\mathcal{S}_t \leq H)$$

$$= \mathcal{S}_0\Gamma$$

$\square$

3.6. Conclusiones

Desarrollar este trabajo me ha permitido contemplar de primera mano la ventaja que supone el modelo de difusión con saltos con respecto del modelo de Black-Scholes si nos encontramos operando en el mercado de valores en la actualidad. También me ha permitido conocer nuevos modelos, no tan populares como el modelo de Merton, como es el caso del modelo presentado por Kou en el año 2002, el cual nos permite realizar predicciones más precisas, así como abrir la puerta al *pricing* de las opciones barrera.
Este trabajo me ha brindado la posibilidad de introducirme en el mundo de los derivados financieros, estudiando y comprendiendo las matemáticas que se esconden detrás de las estrategias de cobertura, así como del *pricing* de opciones y ampliar los conocimientos adquiridos a lo largo de la carrera, dándome las herramientas necesarias para poder seguir formándome entorno a esta rama de las matemáticas.

Referencias

[1] Cont, R.; Tankov, P.: Financial Modelling with Jump Processes, *Chapman and Hall CRC*, 2004.

[2] Kopp, E; Malczak, J; Zastawniak, T.: Probability for Finance, *Cambridge University Press* ,2012.

[3] John C. Hull: Introducción a los mercados de Futuros y Opciones, Octava Edición, *Pearson*, 2014.

[4] Kallenberg, O.: Foundations of Modern Probability, *Springer*, 1997.

[5] Lamberton, D.; Lapeyre, B.: Introduction to Stochatic Calculus Applied to Finance, *Chapman and Hall CRC FINANCIAL*, Second edition, 2008.

[6] Capinski, M.; Kopp, E.; Traple, J.: Stochastic Calculus for Finance, *Cambridge University Press*, 2012.

[7] Capinski, M.; Kopp, E.: Discrete Models of Financial Markets,*Cambridge University Press*, 2012.

[8] Capinski, M.; Kopp, E.: The Black-Scholes Model, *Cambridge University Press*, 2012.

[9] Página Oficial de la Comisión Nacional del Mercado de Valores, (CNMV), https://www.cnmv.es/portal/home.aspx.

[10] Merton, C, R.: Option Pricing when underlying Stock Returns are discontinuous, *Journal of Financial Economics 3*, pp. 125-144, 1976.

[11] Kou, S, G: A Jump-Difussion Model for Option Pricing, *Management Science*, Vol. 48, No. 8, August 2002 pp. 1086-1101.

[12] Kou, S, G.; Wang, H.: Option Pricing Under a Double Exponential Jump Diffusion Model, *Management Science*, Vol. 50, No. 9, September 2004, pp. 1178-1192.

[13] Vives, J.; Gulisashvili, A.: Two-sided estimates for distribution densities in models with jumps, *In Stochastic Differential Equations and Processes, Springer Proceedings in Mathematics*, 7: 239-254, año 2012.