



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Brevíssima Historia de El Universo

Autor: Alejandro León Pérez

Director: Dr. Alex Haro Provinciale

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica
(Matemàtiques Aplicades)

Barcelona, January 24, 2021

Resumen

Comenzamos con un breve desarrollo tensorial en variedades semi-riemannianas. Expondremos objetos de naturaleza matemática como son el tensor de Ricci, el de curvatura o la propia conexión de Levi-Civita, hasta llegar a presentar la naturaleza del tensor de Einstein. Acto seguido, por medio de la fundamentación teórica del Principio Cosmológico - así como la hipótesis del fluido perfecto - deduciremos las ecuaciones de campo de Einstein.

Resolveremos las ecuaciones de Einstein, centrándonos en tres modelos complementarios que nos describirán forma y dinámica del tejido espacio-temporal: solución de Schwarzschild, solución de Kerr y soluciones de Friedmann. Con ésta última analizaremos los diferentes modelos del Universo según las densidades cosmológicas a efectos de exponer destino y final de los diferentes universos: un análisis de la dinámica.

Por último, se expondrá de forma abreviada y resumida, la naturaleza de la *Teoría de la Causalidad*. El estudio sobre las variedades Lorentz nos permitirá conocer de primera mano los teoremas de existencia de singularidades espacio-temporales: una de las principales contribuciones del célebre matemático-físico Penrose, y el motivo por el que en este año 2019 se le ha otorgado el Premio Nobel de Física.

Abstract

We begin with a brief tensor development in semi-Riemannian geometry. We will expose mathematical objects such as the Ricci tensor, the curvature tensor or the Levi-Civita connection, that will serve us for the nature presentation of Einstein's tensor. Immediately, due to the theoretical foundation of Cosmological Principle, as well as the hypothesis of the perfect fluid, we will deduce Einstein's field equations.

We will solve the Einstein equations, focusing on three complementary models that describe the shape and dynamics of the space-time structure: Schwarzschild's solution, Kerr's solution and Friedmann's solutions. We will highlight Friedmann's solutions analyzing different models of the Universe according to the cosmological densities in order to expose the destination and the end of the different universes: an analysis on dynamics.

Finally, the nature of the *Theory of Causality* is exposed in an abbreviated and summarized way. The study of Lorentz geometry will allow us to know in first-hand the theorems of existence of space-time singularities: one of the main contributions of the famous mathematician-physicist Penrose, and the reason why in this year 2019 he has been awarded the Nobel Prize in Physics.

- *¿Estamos solos en el Universo?* - preguntó ella.

- *Sí* - dijo el Oráculo.

- *Entonces, ¿no hay otra vida ahí fuera?*

- *La hay. Ellos también están solos.*

James Miller, *A small fiction*

"Puede que el Universo no sea únicamente más extraño de lo que imaginamos; puede que sea más extraño de lo que podemos llegar a imaginar" J.B.S. Haldane

A la memoria de mi hermano: tú me has hecho ser quien soy.

Prefacio

¿Quiénes somos? ¿Por qué existimos? ¿Cuál es el motivo de nuestra vida? La Física no es una ciencia exacta, ni tan siquiera se acerca a englobar modelos que describan a la perfección la realidad que percibimos, que sentimos o que experimentamos. Como individuos de una especie de homínidos no extraordinaria, la naturaleza, y cómo no la evolución, nos ha dotado de la capacidad de poder realizarnos preguntas más complejas de lo que podamos llegar a entender. La curiosidad, nuestro afán por entender, contemplar o experimentar, han moldeado a nuestra especie guiándola en su evolución a lo largo de milenios. Hoy tenemos la suerte de poder llegar a acercarnos a esas respuestas.

La Física es una ciencia que, basándose en un experimento y unos resultados, es capaz de dar respuestas a conceptos y preguntas inimaginablemente complejas. Elaboramos modelos, marcos teóricos que nos ayudan a comprender una serie de cuestiones que nos son naturales y que ni siquiera podemos llegar a entender del todo, otorgándonos una especie de tranquilidad existencial. De este mismo concepto parte la Cosmología.

Me gusta definir la Cosmología como la parte de la Física que trata sobre el origen, la evolución y el final de todos y cada uno de los distintos fenómenos que acontecen, en gran escala, en nuestro Universo; incluido éste mismo. Es, por ello, una de las partes de la Física que mayor se nutre de las ansias existenciales y filosóficas humanas. Es la unión de una vertiente filosófica, del modelaje físico, y la de la más pura y bella naturaleza matemática. Es muy importante que se tenga en cuenta que se trata de una ciencia experimental; por lo que todos y cada uno de los modelajes cosmológicos no son únicos, ni estáticos sino que obedecen a sistemas dinámicos que van cambiando con la evolución del tiempo; y es que el conjunto de variables que utilizamos para poder describirlos tienen una dependencia temporal, suponiendo la actualización de estas nuevas variables se cambia la interpretación cosmológica de los mismos. También es de destacar que existe una dependencia en estos sistemas con el desarrollo tecnológico que es medible por nuestra especie.

Sobre la naturaleza, dinámica, geometría y singularidades de nuestro Universo. Esto es un tratado sobre una brevísima historia que vale la pena poder contar.

"La raza humana necesita un desafío intelectual. Debe ser aburrido tener que ser Dios y no tener nada que descubrir" S. Hawking

Contents

1	Introducción al tensor de Einstein	1
1.1	Derivada Covariante	1
1.2	Conexión de Levi-Civita	2
1.3	Geodésica	5
1.3.1	Geometría de Lorentz	6
1.3.2	Matematización del Espacio-Tiempo	7
1.4	Tensor de Curvatura	8
1.4.1	Propiedades del tensor de curvatura	9
1.4.2	Derivación de un campo tensorial	10
1.5	El Tensor de Ricci y curvatura escalar	11
1.5.1	Diferencial covariante de un campo tensorial	12
1.5.2	Divergencia de un campo tensorial	12
1.5.3	Curvatura escalar y divergencia del tensor de Ricci	13
1.5.4	Tensor de Einstein	14
2	Principio de Equivalencia y Ecuaciones de Einstein	15
2.1	El espacio-tiempo de Minkowski	15
2.1.1	Las Transformaciones de Lorentz	15
2.1.2	El espacio-tiempo de Minkowski	16
2.2	Principio Cosmológico	17
2.3	Métrica de Robertson-Walker	19
2.4	Tensor Energía-Momento	20
2.4.1	Tensor Energía-Momento para un fluido perfecto	21
2.5	Principios y Postulados de la Relatividad General	21
2.6	Deducción de las Ecuaciones de Einstein	23
2.6.1	Efectos de estudio de campo débil en las ecuaciones de Einstein	24
2.6.2	La famosa constante cosmológica (Λ)	25
3	Análisis de posibles universos por existir	27
3.1	Solución de Schwarzschild	27
3.1.1	Significado físico de la métrica	28
3.1.2	Solución en el vacío	29
3.2	Modelos Cosmológicos	31
3.2.1	Deducción de las ecuaciones de Friedmann	32
3.2.2	Universo de Einstein y Universo De Sitter	36
3.2.3	Universos euclídeos con una única ecuación de estado	36
3.2.4	Universos dominados por la masa en reposo	37
3.2.5	Universos dominados por radiación	38
3.2.6	Universos dominados por constante cosmológica	39
3.2.7	Universos simbióticos	39

3.2.8	El modelo estándar	40
4	La Teoría de la Causalidad - Teoremas de Singularidad	41
4.1	Preámbulo a los teoremas de singularidades	41
4.2	Introducción a la Teoría de la Causalidad	42
4.2.1	Condición de cronología y derivados en las variedades de Lorentz	43
4.2.2	Separación temporal	44
4.2.3	Hipersuperficie de Cauchy	45
4.3	Desarrollo de Cauchy	45
4.4	Teoremas de singularidad Hawking - Penrose	47
4.4.1	Teoremas de Hawking	47
4.4.2	Teoremas de Penrose	47
5	Conclusión	50
	ANEXO: Geometría Diferencial	51
5.1	Variedades Diferenciables	51
5.2	Vectores tangentes y cotangentes	53
5.2.1	Vectores tangentes y espacio tangente	53
5.2.2	La aplicación tangente y expresiones coordenadas	53
5.2.3	Derivación definida por un vector tangente	54
5.2.4	Derivaciones puntuales	55
5.2.5	Espacio cotangente y diferencial de una función en un punto	56
5.3	Concepto de subvariedad	57
5.4	Los fibrados tangente y cotangente	57
5.4.1	El fibrado tangente	57
5.4.2	La aplicación tangente	58
5.4.3	Campos Vectoriales	58
5.4.4	Campos vectoriales como derivaciones	59
5.4.5	El fibrado cotangente	60
5.4.6	Formas diferenciables y diferencial de una función	60
5.4.7	Dualidad entre campos vectoriales y 1-formas diferenciales	61
5.5	Derivada de Lie de funciones y de campos vectoriales	61
5.5.1	Flujo de un campo vectorial	62
5.5.2	Grupos uniparamétricos de transformaciones	62
5.6	Campos Tensoriales	64
5.6.1	Operaciones con campos tensoriales	64
5.6.2	Formas diferenciales	65
5.6.3	Derivada de Lie de campos tensoriales y formas diferenciales	65
5.7	Definición de los vectores de Killing	66
	ANEXO: Glosario de conceptos cosmológicos	68

Capítulo 1

Introducción al tensor de Einstein

En este capítulo se expondrá un desarrollo tensorial que nos servirá en la introducción de las ecuaciones de campo de Einstein. Comenzamos desde la **Derivada Covariante**, introduciremos los principales tensores de la geometría riemanniana y pseudoriemanniana, hasta generalizar la construcción del denominado **Tensor de Einstein**. Los tratamientos tensoriales, análisis diferencial, y la construcción matemática están recogidas en el anexo de geometría diferencial. Este anexo se ha desarrollado como un resumen complementario al tratamiento expuesto en este capítulo.

1.1 Derivada Covariante

La **derivada covariante** surge como una generalización del concepto de **derivada parcial** que permite extender el cálculo diferencial sobre \mathbb{R}^n con coordenadas cartesianas al caso de coordenadas curvilíneas en \mathbb{R}^n , y también al caso más general de **variedades diferenciables**.

Definición 1 Sea M una variedad diferenciable, $\mathcal{X}(M)$ el conjunto de campos vectoriales diferenciables sobre M , y designamos a $\mathcal{F}(M)$ como el conjunto de las funciones diferenciables. Una **conexión sobre M** , u **operador de derivación covariante**, es una aplicación bilineal:

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\rightarrow \mathcal{X}(M) \\ (X, Y) &\rightarrow \nabla_X Y\end{aligned}$$

que satisface las siguientes propiedades:

- $\nabla_X Y$ es lineal con respecto $\mathcal{F}(M)$ en X
- $\nabla_X Y$ es lineal con respecto a \mathbb{R} en Y .
- $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$

Veamos el siguiente caso particular para \mathbb{R}^n . Sean X e Y dos campos vectoriales diferenciables en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$. Definimos la **derivada del campo Y respecto al campo X** como el campo que asigna a cada punto $p \in U$ la derivada direccional de Y en la dirección de X_p . Lo denotaremos como: $\nabla_X Y$. Sea $t \rightarrow x(t)$ una curva tal que $x(0) = p$ y que tenga X_p como vector tangente en el punto p ($x'(0) = X_p$). Entonces se cumple:

$$(\nabla_X Y)_p = \frac{d}{dt} \vec{Y}(x^1(t), \dots, x^n(t))_{t=0} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \vec{Y}}{\partial x^i} \right)_p X_p^i$$

Nota 1 Sea M una variedad diferenciable, $p \in M$. Si $\theta \in T_p M$ es el vector tangente al punto p , Y es un campo de vectores definido en un entorno del punto p , se empleará por notación:

$$\nabla_{\theta}Y := (\nabla_X Y)(p) \text{ donde } X(p) = \theta$$

Proposición 1 (Propiedades de la derivada covariante) Sea ∇ una conexión definida sobre M , $p \in M$. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $u, v \in T_p M$; $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, $f, g \in \mathcal{F}(M)$; entonces se cumple:

- $\nabla_v(aX + bY) = a\nabla_v X + b\nabla_v Y$
- $\nabla_{au+bv}X = a\nabla_u X + b\nabla_v X$
- $\nabla_v fX = v(f)X_p + f(p)\nabla_v X$
- $\nabla_{fu+gv}X = f\nabla_u X + g\nabla_v X$

Como consecuencia de la construcción del operador de derivación covariante encontramos el **Principio de localización de conexiones** en el que, si cuatro campos vectoriales (X, X', Y, Y') , se identifican dos a dos en el mismo abierto ($X = X'$ e $Y = Y'$ sobre $U \subset M$), entonces $\nabla_X Y = \nabla_{X'} Y'$ sobre U . Es decir, sobre toda conexión ∇ de M se induce una conexión ∇_U sobre cada abierto U . De tal forma que si X, Y son campos sobre U , sean X', Y' campos sobre M que coinciden sobre U con X , e Y respectivamente. Entonces se cumple que: $(\nabla_U)_X Y$ es la restricción en U de $\nabla_{X'} Y'$.

A partir de ahora omitiremos U y escribiremos solamente ∇ para designar tanto la conexión sobre M como la que induce sobre cada abierto U . Si e_1, \dots, e_n son campos vectoriales diferenciables sobre un abierto U que en cada punto constituyen una base del espacio tangente, en cada punto $\nabla_{e_i} e_j$ será combinación lineal de e_1, \dots, e_n . **Designamos por $\Gamma_{i,j}^k$ los coeficientes de esta combinación lineal:**

$$\nabla_{e_i} e_j = \Gamma_{i,j}^k e_k$$

Los coeficientes $\Gamma_{i,j}^k e_k$ se denominan coeficientes de Christoffel relativos a la base e_1, \dots, e_n . Conocer estos símbolos supone conocer la conexión sobre U . Este hecho lo podemos comprobar de la siguiente forma. Sean X, Y dos campos vectoriales sobre U . Escribiendo $Y = \sum Y^j e_j$, tenemos:

$$\nabla_X Y = \nabla_X (Y^j e_j) = X(Y^j) e_j + Y^j \nabla_X e_j = X(Y^j) e_j + Y^j X^i \Gamma_{i,j}^k e_k$$

Es decir, $\nabla_X Y = (X(Y^k) + Y^j X^i \Gamma_{i,j}^k) e_k$

1.2 Conexión de Levi-Civita

En una variedad diferenciable M , ¿podemos garantizar existencia y unicidad de la conexión sobre toda la variedad? ¿Siempre está definida? Es una pregunta muy interesante desde el punto de vista matemático. Procedemos a observar cómo, a través de ciertas hipótesis, no solo podemos garantizar su existencia, sino también su unicidad.

Definición 2 Sea V un campo vectorial real de dimensión finita, y sea g una forma bilineal definida en V (es decir, un elemento del tipo $\mathcal{L}(V, V; \mathbb{R})$). Decimos que g es **producto escalar** si $\forall v, w \in V$ se satisfacen las siguientes condiciones:

- g es simétrica: $g(u, w) = g(w, v)$
- g es no degenerada: $g(v, w) = 0, \forall w \neq 0 \Rightarrow v = 0$

Un espacio vectorial V con un producto escalar g se denomina **espacio de producto escalar**.

Definición 3 Sea (V, g) espacio de producto escalar. Decimos que el producto escalar g tiene **índice** i , si i es el entero maximal correspondiente de la dimensión del subespacio $W \subset V$ para el cual g es definida negativa.

Lema 1 Sea (V, g) un espacio de producto escalar. Luego, existe un entero $d \leq n := \dim(V)$ y una base $\{e_i\}$, $i = 1, \dots, n$ de V tal que:

- $g(e_i, e_i) = 0$ si $i \neq j$
- $g(e_i, e_i) = -1$ si $i \leq d$
- $g(e_i, e_i) = 1$ si $i > d$

Si $\{e_i\}$ es una base que satisface las propiedades anteriores para un cierto entero $d \leq n$, entonces d es igual al índice de g .

Definición 4 Un producto escalar con índice 0 se denomina **producto escalar de Riemann** y un espacio vectorial con un producto escalar de Riemann se denomina **espacio de producto escalar de Riemann**. Un producto escalar con índice 1 se denomina **producto escalar de Lorentz**, y un espacio vectorial con un producto escalar de Lorentz se denomina **espacio de producto escalar de Lorentz**.

Definición 5 Sea M una variedad diferenciable, y g un tensor 2-covariante definido en M . Denotamos g por **métrica o tensor métrico de M** si se cumple las siguientes condiciones:

- g induce un producto escalar en $T_p M, \forall p \in M$.
- el índice i del producto escalar inducido en $T_p M$ es independiente del punto p .

El índice constante i se denomina **índice de la métrica g** .

Definición 6 Una **variedad semi-riemanniana** es un par (M, g) donde M es una variedad diferenciable y g es un tensor métrico. De la propia definición anterior se deduce que una variedad semi-riemanniana (o pseudoriemanniana) estará caracterizada por un tensor métrico $(0,2)$ -diferenciable, simétrico, y no degenerado en cada punto de la variedad.

Definición 7 Sea (M, g) una variedad semi-riemanniana. Si el índice de g es 0, la métrica se denomina Riemanniana, y la pareja (M, g) se denomina **variedad de Riemann**. Si el índice es igual a 1, la métrica se denomina de Lorentz y la pareja (M, g) se denomina **variedad de Lorentz**.

Como vemos si (M, g) es una variedad semi-Riemanniana, $U \subset M$ un abierto, y (U, x^1, \dots, x^n) una carta local en M ; las componentes de la métrica g las podemos escribir como:

$$g_{ij} = g(\partial_{x^i}, \partial_{x^j})$$

y la métrica g la podemos obtener como:

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

Veamos el siguiente ejemplo de \mathbb{R}^n . Sea (x^i) , $i = 1, \dots, n$ coordenadas estándar de \mathbb{R}^n . La métrica euclidiana g_E en \mathbb{R}^n , se define como sigue. Sea $(v^1, \dots, v^n), (w^1, \dots, w^n) \in \mathbb{R}^n$, y respectivamente: $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} |_p \in T_p \mathbb{R}^n, w = w^i \frac{\partial}{\partial x^i} |_p \in T_p \mathbb{R}^n$; entonces tenemos que: $g_E(v, w) = \sum_{i=1}^n v^i w^i$. De forma equivalente con este ejemplo, se puede ver que en una **variedad de Riemann** definida por medio del triplete (M, ϕ_α, g) donde (M, ϕ_α) es una variedad diferenciable con el conjunto de cartas locales asociado ϕ_α ; y g es una aplicación bilineal definida positiva dada por $g : \mathcal{T}M \times \mathcal{T}M \rightarrow \mathfrak{R}$; en particular la definición de esta métrica nos permite definir en cada espacio tangente una norma $\|\cdot\|$ mediante la relación : $\|X\| = \sqrt{g(X, X)}$.

Introducidas estas definiciones básicas, procedemos a enunciar uno de los resultados fundamentales dentro de la geometría riemanniana: la **conexión Levi-Civita**. De hecho es un resultado que nos sirve tanto para una variedad semi-riemanniana como para una riemanniana.

Definición 8 Sea (M, g) una variedad semi-riemanniana. Una conexión ∇ sobre M se dice que es compatible con la métrica g si cumple la siguiente propiedad:

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

para cualquier X, Y, Z campo vectorial. En este caso es de remarcar que $g(Y, Z)$ es la función que a cada x le ha corresponder $g_x(Y_x, Z_x)$. Por consiguiente, $X(g(Y, Z))$ nos expresa la función que a cada x vale $X_x(g(Y, Z))$.

Llegados a este punto establecemos un abuso de notación. Definimos \langle, \rangle como: $\langle X, Y \rangle = g(X, Y)$ y la emplearemos tanto para campo de vectores como para vectores individuales. Con la notación definida, la condición de ser una conexión compatible con la métrica la podemos reescribir como:

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

De hecho, una conexión que únicamente satisface la compatibilidad con la métrica no nos garantiza su unicidad; pero si a ésta condición le acompaña que sea libre de torsión, sí. A éste tipo de conexión se le denomina de Levi-Civita.

Definición 9 Sea (M, g) una variedad semi-riemanniana. Decimos que una conexión afín ∇ es una conexión de Levi-Civita si satisface las siguientes condiciones:

- **Preserva la métrica:** $\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ se cumple: $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ donde $Xg(Y, Z)$ denota la derivada de la función $g(Y, Z)$ a lo largo del campo vectorial X .
- **Es libre de torsión:** $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$ se cumple $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ - donde $[X, Y]$ es el corchete de Lie de los campos vectoriales X e Y .

Teorema 1 Teorema Fundamental de la geometría de Riemann. Sea (M, g) una variedad semi-riemanniana. Entonces existe una única conexión ∇ de Levi-Civita en (M, g) , y vendrá caracterizada por la fórmula de Koszul

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \frac{1}{2} \{ X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle - \langle X, [Y, Z] \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle - \langle Z, [Y, X] \rangle \}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \\ Y\langle Z, X \rangle &= \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle \\ Z\langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle \end{aligned}$$

Sumando las dos primeras igualdades y restando la tercera, y mediante el hecho de que g es simétrica, tenemos que:

$$X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle + \langle X, [Y, Z] \rangle$$

Sumando y restando $\langle \nabla_X Y, Z \rangle$ en el segundo término de la ecuación nos acaba quedando:

$$X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle = 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Z, [Y, X] \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle + \langle X, [Y, Z] \rangle$$

reescribiendo la igualdad como:

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \frac{1}{2} \{ X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle - \langle X, [Y, Z] \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle - \langle Z, [Y, X] \rangle \}$$

Esta igualdad determina $\nabla_X Y$ en cada punto p de manera única. Esto determina la unicidad de la conexión que cumple las propiedades exigidas en el teorema. Para la existencia basta probar que el campo $\nabla_X Y$ determinado en todo punto por la fórmula anterior cumple todas las propiedades de una conexión (esta demostración no se hará aquí). \square

Proposición 2 Si f es una función, entonces se cumple:

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

Demostración.

$$\begin{aligned} X(Y(f)) &= \sum_{i,j} X^i \frac{\partial}{\partial x^i} (Y^j \frac{\partial f}{\partial x^j}) = \sum_{i,j} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} + \sum_{i,j} X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \\ X(Y(f)) - Y(X(f)) &= \sum_{i,j} (X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}) \frac{\partial f}{\partial x^j} \square \end{aligned}$$

Dada (M, g) una variedad semi-riemanniana, y ∇ el operador de Levi-Civita asociado. Definida (U, x^1, \dots, x^n) una carta local en M , trataremos de expresar ∇ respecto a las coordenadas locales (x^i) . Para ello introducimos la notación Γ_{ij}^k como: $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$. Expresamos los símbolos de Christoffel relativos a la base $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ de la conexión. Sea $g_{i,j} = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$. Partiendo del resultado anteriormente demostrado, hemos podido comprobar la conexión de Levi-Civita viene expresada por medio de la fórmula de Koszul:

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \frac{1}{2} \{ X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle X, [Y, Z] \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle - \langle Z, [Y, X] \rangle \}$$

tomando

$$X = \frac{\partial}{\partial x^i}, Y = \frac{\partial}{\partial x^j}, Z = \frac{\partial}{\partial x^k}$$

observamos que los corchetes de dos de los campos son nulos, ya que:

$$[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}](f) = \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} - \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0$$

Por consiguiente la relación desde la que partíamos nos queda como:

$$\Gamma_{ij}^r g_{rk} = \frac{1}{2} \{ \frac{\partial}{\partial x^i} (g_{jk}) + \frac{\partial}{\partial x^j} (g_{ki}) - \frac{\partial}{\partial x^k} (g_{ij}) \}$$

Si denotamos por (g^{ij}) la matriz inversa de (g_{ij}) tendremos entonces:

$$\Gamma_{ij}^r = \frac{1}{2} g^{rk} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij})$$

donde hemos abreviado notación: $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}$. Deducida la expresión de los símbolos de Christoffel en ésta base, podemos empatar con un análisis idéntico al establecido en la página 2, y con una argumentación idéntica, poder ver que si $X = X^i \partial_i$ e $Y = Y^i \partial_i$ son campos vectoriales, podemos obtener:

$$\nabla_X Y = [X(Y^k) + \Gamma_{ij}^k X^i Y^j] \partial_k$$

1.3 Geodésica

¿Tiene sentido hablar de una geodésica en una variedad semi-riemanniana? ¿Existe alguna implicación directa con la pseudométrica? Si solamente expusiéramos resultados de la geometría Riemanniana, como un caso particular de una variedad semi-riemanniana, en éste apartado sencillamente hablaríamos de una curva que podemos parametrizar en términos de la longitud de arco, y lo podríamos relacionar con un análisis energético a partir del Lagrangiano y las ecuaciones de Euler-Lagrange deducirlo sin pérdida de generalidad la ecuación diferencial de la geodésica. Pero, ¿cuánto de esto se sigue cumpliendo en el caso genérico de la variedad semi-riemanniana?

Proposición 3 *Sea (M, g) una variedad semi-riemanniana, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y sea $\gamma : I \rightarrow M$ una curva. Luego, existe una única función tomando $X \in \mathcal{X}(\gamma)$ y $X' = \frac{\nabla X}{dt} \in \mathcal{X}(\gamma)$ tal que satisface las siguientes propiedades:*

- $(aX_1 + bX_2)' = aX_1' + bX_2'$
- $(fX)' = f'X + fX'$

$$\bullet (Y_\gamma)'(t) = \nabla_{\gamma'(t)} Y$$

donde se ha considerado $X_i, X \in \mathcal{X}(\gamma)$, $a, b \in \mathbb{R}$, y $f \in C^\infty(I)$. De hecho, esta variedad tiene por propiedad: $\frac{d}{dt} \langle X_1, X_2 \rangle = \langle X'_1, X_2 \rangle + \langle X_1, X'_2 \rangle$.

Demostración. Sea $X \in \mathcal{X}(\gamma)$. Escribimos X como $X(t) = X^i(t) \partial_i|_{\gamma(t)}$. Asumiendo que el operador derivativo cumple la primera y segunda propiedad, y sustituyendo en la tercera, vemos que es directo comprobar:

$$X'(t) = \frac{dX^i}{dt}(t) \partial_i|_{\gamma(t)} + X^i(t) (\partial_i|_{\gamma})'(t) = \frac{dX^i}{dt}(t) \partial_i|_{\gamma(t)} + X^i(t) \nabla_{\gamma'(t)} \partial_i$$

Dado que el lado derecho de la igualdad solamente depende de la conexión Levi-Civita, es directa su unicidad. Para probar su existencia, definimos $X'(t)$ dada por la anterior expresión para un $t \in X^{-1}[\pi^{-1}(U)]$, donde estamos empleando U un abierto en el cual las coordenadas (x^i) de la carta local están definidas, y la proyección: $\pi : T(M) \mapsto M$ es la proyección en la cual tomamos un vector tangente y lo enviamos a su punto base. Quede así demostrado existencia y unicidad. \square

Es interesante escribir una fórmula para X' en las coordenadas locales. Dado (x^i) coordenadas locales, $\gamma^i = x^i \circ \gamma$; y sea X^i definido por medio de la relación: $X(t) = X^i(t) \partial_i|_{\gamma(t)}$. Entonces, podemos escribir: $\gamma'(t) = \frac{d\gamma^i}{dt}(t) \partial_i|_{\gamma(t)}$, de donde se termina deduciendo:

$$X'(t) = \frac{dX^i}{dt}(t) \partial_i|_{\gamma(t)} + X^i(t) \frac{d\gamma^j}{dt}(t) \Gamma_{ji}^k[\gamma(t)] \partial_k|_{\gamma(t)} = \left(\frac{dX^k}{dt}(t) + X^i(t) \frac{d\gamma^j}{dt}(t) \Gamma_{ji}^k[\gamma(t)] \right) \partial_k|_{\gamma(t)}$$

Llegados a este punto del desarrollo de este apartado podemos exponer la noción de **traslación paralela**.

Definición 10 Sea (M, g) una variedad semi-riemanniana, $I \subset \mathbb{R}$ un abierto, $\gamma : I \mapsto M$ una curva. Decimos que $X \in \mathcal{X}(\gamma)$ es **paralelo** a lo largo de la curva $\gamma \iff X' = 0$.

Ahora sí, podemos hablar de la geodésica. Se trata de un concepto de especial importancia en geometría riemanniana y de Lorentz. En geometría riemanniana, las geodésicas son curvas minimales. En el caso Lorentziano, las geodésicas se relacionan con las trayectorias de partículas en caída libre, así como de trayectorias de luz.

Definición 11 Sea (M, g) una variedad semi-riemanniana, $I \subset \mathbb{R}$ un abierto, y sea $\gamma : I \mapsto M$ curva. Luego, decimos que la curva γ es una **geodésica** $\iff \frac{d^2\gamma}{dt^2}(t) = 0$. Es decir, si $\gamma'(t) \in \mathcal{X}(\gamma)$ es paralela.

Escribiendo la geodésica en términos de las coordenadas locales (x^i) , se satisface la ecuación siguiente:

$$\ddot{\gamma}^k + (\Gamma_{ij}^k \circ \gamma) \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = 0$$

donde se está empleando la notación: $\gamma^i = x^i \circ \gamma$, $\dot{\gamma}^i = \frac{d\gamma^i}{dt}$, $\ddot{\gamma}^i = \frac{d^2\gamma^i}{dt^2}$

1.3.1 Geometría de Lorentz

En una variedad de Lorentz, la dimensión del mayor subespacio para el cual g es definido negativo es 1. Este hecho es equivalente a que para cualquier base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $T_p M$ siendo $p \in M$ se cumpla: $\langle e_1, e_1 \rangle < 0$ y $\langle e_i, e_i \rangle \geq 0$ para todo $i \geq 2$. De hecho, es directo ver que $T_p M$ se constituye como un espacio vectorial en una variedad de Lorentz.

Definición 12 Sea (V, \langle, \rangle) un **espacio vectorial de Lorentz**. Consideraremos $v \in V$.

- Si $\langle v, v \rangle < 0$ decimos que v es un **vector temporal**.

- Si $\langle v, v \rangle > 0$ o $v = 0$ decimos que v es un **vector espacial**.
- Si $\langle v, v \rangle = 0$ y $v \neq 0$ se dice que v es un **vector luminoso o vector nulo**.
- Si v es un vector temporal o un vector luminoso, decimos que v es un **vector causal**.

A efectos de ello, se puede considerar una partición del conjunto V en dos componentes conexas denominadas **conos temporales**. A su vez, el conjunto de los vectores luminosos también está constituido por dos componentes conexas las cuales denominaremos **conos de luz**. De forma equivalente tenemos con los vectores causales, originando la partición de los **conos causales** de V . Un vector será causal si es temporal o nulo.

Definición 13 Decimos que dos vectores temporales $v, w \in V$ están en el mismo cono temporal si se cumple $\langle v, w \rangle < 0$

Proposición 4 Sean $v, w \in V$ dos vectores temporales en un espacio vectorial de Lorentz. Entonces se da la desigualdad de Cauchy-Schwarz en sentido opuesto: $|\langle v, w \rangle| \geq |v||w|$ (y se da la igualdad si se cumple: v, w son colineales).

Demostración. Escribimos $w = a + \vec{w}$ donde $w \in v^{\perp 3}$. Como w es temporal $\langle w, w \rangle < 0$. Por ello, $\langle w, w \rangle = \langle a + \vec{w}, a + \vec{w} \rangle = a^2 \langle v, v \rangle + \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle < 0$. Como se cumple que: $\langle v, w \rangle^2 = \langle v, a + \vec{w} \rangle^2 = a^2 \langle v, v \rangle^2 = (\langle w, w \rangle - \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle) \langle v, v \rangle \geq \langle w, w \rangle \langle v, v \rangle = |v|^2 |w|^2$. Por lo que vemos $|\langle v, w \rangle| \geq |v||w|$ y se dará la igualdad sí y solo sí $\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle = 0$, es decir, equivale: $w = av$. \square

Definición 14 Una **orientación temporal** en V es una elección de uno de los dos conos temporales que constituyen la partición conexa de V . Se denotará como \mathcal{T} , y se define como **cono futuro**, de forma equivalente $-\mathcal{T}$ denotado como el **cono pasado**.

Definición 15 Una aplicación $p \rightarrow \mathcal{T}_p$ para cada $p \in M$ asigna a un cono temporal en $T_p M$ es diferenciable si para todo $p \in M$, $\exists U$ entorno de p y $X \in \mathcal{X}(U)$ campo de vectores tal que $X_q \in \mathcal{T}_q$ para todo $q \in U$. Una aplicación de esta naturaleza se le denomina **orientación temporal** de M . Por ello, decimos que M es **orientable temporalmente** si admite una orientación temporal de M .

Proposición 5 Una variedad de Lorentz M es orientable temporalmente sí y solo sí existe un campo de vectores temporales $X \in \mathcal{X}(M)$

Definición 16 Una curva diferenciable a trozos $\alpha : I \rightarrow M$ se dice que es **temporal (nula o causal)** si su velocidad $\alpha'(t)$ es un vector temporal (nulo o causal) en los puntos que no son vértices, y en los vértices $\alpha'(t_i^-)$ y $\alpha'(t_i^+)$ son vectores temporales (nulos o causales) en el mismo cono temporal.

Definición 17 Sea M una variedad de Lorentz orientada temporalmente por \mathcal{T} . Decimos que el vector causal $v \in T_p M$ **apunta hacia el futuro** si $v \in \mathcal{T}_p M$. De forma equivalente decimos que v apunta hacia el pasado si $v \in -\mathcal{T}_p M$. Una curva $\alpha : I \rightarrow M$ **apunta hacia el futuro** si $\alpha'(t)$ apunta hacia el futuro para todo $t \in I$. De manera similar α apunta al pasado si $\alpha'(t)$ apunta al pasado para todo $t \in I$.

1.3.2 Matematización del Espacio-Tiempo

Una pregunta natural en el estudio de las variedades de Lorentz, como un caso específico de las semi-riemannianas, es ver qué propiedades matemáticas podemos disponer si queremos matematizar el espacio-tiempo. ¿Qué flexibilidad nos otorga la matematización?

Definición 18 Decimos que el par (M, g) es un **espacio-tiempo** si M es una variedad diferenciable real 4-dimensional, C^∞ , Hausdorff, orientada temporalmente, con una métrica lorentziana

definida g . En este caso, la conexión afín es la de Levi-Civita; resulta que es paracompacto; y a cada punto del espacio-tiempo se le denomina **evento**.

Como consecuencia del uso de la conexión de Levi-Civita, se puede probar que las partículas gravitantes se mueven a lo largo de geodésicas temporales de la métrica y que la luz se mueve a lo largo de geodésicas nulas, en concordancia con lo que sucede en Relatividad Especial - se le conoce como **Principio de Equivalencia Débil**. Más adelante expondremos con detenimiento estos planteamientos.

Definición 19 Una **partícula material** en un espacio-tiempo M es una curva $\alpha : I \rightarrow M$ parametrizada por el arco, temporal y apuntando hacia el futuro. El parámetro τ se denomina **tiempo propio** de la partícula y representa el tiempo que mide un observador que se mueve siguiendo la trayectoria α .

Definición 20 A raíz de esta nueva definición surge una redefinición conceptual equivalente enunciados:

- Una **partícula material** está en **caída libre** si es una geodésica.
- Una **partícula luminosa** es una geodésica nula apuntando hacia el futuro.
- Un **observador** es simplemente una partícula material con ese rol. Puede estar en caída libre.
- Un **observador instantáneo** de M es un par (p, u) donde $p \in M$ es un evento y $u \in T_p M$ es un vector temporal y unitario (apunta hacia el futuro).

Por lo tanto, un observador $w : I \rightarrow M$ es un conjunto de observadores instantáneos e indexados por un tiempo propio $\{(w(\tau), w'(\tau))\}_{\tau \in I}$.

Se ha querido presentar estos conceptos en el apartado de la geodésica, y retomaremos todos ellos una vez llegados a la **Teoría de la Causalidad** (último capítulo) en el que trabajaremos en profundidad las geodésicas en variedades de Lorentz; y la propia existencia de singularidades espacio-temporales.

1.4 Tensor de Curvatura

¿Tiene sentido definir una curvatura en una variedad semi-riemanniana, o por lo menos en una sección determinada de la misma? Planteémonos el siguiente caso.

Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ superficie. La métrica euclidiana induce una métrica g en M que la convierte en una variedad de Riemann (M, g) . Fijado un $x \in M$, sea $\{e_1, e_2\}$ base ortonormal cualquiera en $T_x(M)$, podemos definir la curvatura de Gauss de la superficie en un punto x : k_x . Luego, si somos capaces de poder trabajar en términos de curvatura para casos particulares de variedades semi-riemannianas, ¿existe su generalización para variedades semi-riemannianas arbitrariamente grandes? ¿Esa construcción será independiente de la métrica euclidiana?

Esto es exactamente el **tensor de curvatura de Riemann**, y representa una medida de la separación de la métrica de la variedad respecto de la métrica euclídea.

Definición 21 Sea (M, g) una variedad semi-riemanniana, y ∇ su conexión de Levi-Civita asociada. Se define el **tensor de curvatura de una variedad semi-riemanniana** como la aplicación:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\rightarrow \mathcal{X}(M) \\ (X, Y, Z) &\rightarrow R_{XY}Z := R(X, Y)Z \end{aligned}$$

donde $R_{XY}Z := R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z$. Es una aplicación $\mathcal{C}^\infty(M)$ lineal y constituye un campo tensorial.

Lo interesante llegados a este punto es poder expresar el tensor de curvatura de una variedad semi-riemanniana en función de las coordenadas recogidas mediante una carta local en la variedad.

Sea (U, x^1, \dots, x^n) una carta local. Como hemos podido ver, la conexión Levi-Civita ∇ se puede localizar sobre U , de tal forma que $R(X, Y)Z$ se induce sobre U . En este caso, $R(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^r})\frac{\partial}{\partial x^j}$ es un campo plenamente definido en U , combinación lineal de $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$. Reescribimos

$$R(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^r})\frac{\partial}{\partial x^j} = R_{jkr}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

donde R_{jkr}^i son los coeficientes de esta combinación lineal. Se les denominará **componentes del tensor curvatura** en la base $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$. Analizando brevemente la nueva relación podemos ver que a raíz de la identidad recogida en:

$$R(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^r})\frac{\partial}{\partial x^j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^r}} \frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^r}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

podemos facilmente terminar teniendo la expresión de los coeficientes del tensor de curvatura en la base analizada:

$$R_{jkr}^i = \partial_k \Gamma_{rj}^i - \partial_r \Gamma_{kj}^i + (\Gamma_{rj}^s \Gamma_{ks}^i - \Gamma_{kj}^s \Gamma_{rs}^i)$$

Del mismo modo, si X, Y, Z campos definidos en U , podemos encontrar que:

$$R(X, Y)Z = R(X^k \partial_k, Y^r \partial_r)Z^j \partial_j = X^k Y^r Z^j R(\partial_k, \partial_r)\partial_j = X^k Y^r Z^j R_{jkr}^i \partial_i$$

por lo que el valor de $R(X, Y)Z$ en cualquier punto $p \in U$ solo dependerá de los valores de los campos X, Y, Z en el propio punto.

1.4.1 Propiedades del tensor de curvatura

Proposición 6 Primera identidad de Bianchi Se cumple siempre la identidad $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$. Se escribe de manera abreviada como: $\mathcal{C}R(X, Y)Z = 0$.

Demostración.

$$\mathcal{C}R(X, Y)Z = \mathcal{C}\nabla_X \nabla_Y Z - \mathcal{C}\nabla_Y \nabla_X Z - \mathcal{C}\nabla_{[X, Y]}Z = \mathcal{C}\nabla_X \nabla_Y Z - \mathcal{C}(\nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_Y [X, Z]) - \mathcal{C}(\nabla_Z [X, Y] + [[X, Y], Z]) = \mathcal{C}\nabla_X \nabla_Y Z - \mathcal{C}\nabla_Y \nabla_Z X + (\mathcal{C}\nabla_Y [Z, X] - \mathcal{C}\nabla_Z [X, Y]) + \mathcal{C}[[X, Y], Z]$$

los términos agrupados en paréntesis se anulan, y el último término se anula por la identidad de Jacobi. \square

Proposición 7 El tensor de curvatura cumple la siguiente condición:

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle R(X, Y)W, Z \rangle$$

Demostración. $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]})Z, W \rangle$. Analizando el primer término:

$$\langle \nabla_X \nabla_Y Z, W \rangle = XY \langle Z, W \rangle - X \langle Z, \nabla_Y W \rangle - Y \langle Z, \nabla_X W \rangle + \langle Z, \nabla_Y \nabla_X W \rangle$$

Haciendo el mismo desarrollo en los otros términos nos queda la expresión como: $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = XY \langle Z, W \rangle - YX \langle Z, W \rangle - X \langle Z, \nabla_Y W \rangle + Y \langle Z, \nabla_X W \rangle - Y \langle Z, \nabla_X W \rangle + X \langle Z, \nabla_Y W \rangle + \langle Z, \nabla_Y \nabla_X W \rangle - \langle Z, \nabla_X \nabla_Y W \rangle - [X, Y] \langle Z, W \rangle + \langle Z, \nabla_{[X, Y]} W \rangle = -\langle Z, R(X, Y)W \rangle \square$

Propiedades de simetría: Analizando la versión completamente covariante del tensor de curvatura, vemos que nos vendrá descrita por un tensor del tipo (0,4) dado por: $R_{abcd} =$

$g_{ae}R_{bcd}^e$, definido por medio de la conexión de Levi-Civita. En un sistema arbitrario de coordenadas, las componentes del tensor vienen descritas por:

$$R_{abcd} = \frac{1}{2}(\partial_d\partial_a g_{bc} - \partial_d\partial_b g_{ac} + \partial_c\partial_b g_{ad} - \partial_c\partial_a g_{bd}) - g^{ef}(\Gamma_{eac}\Gamma_{fbd} - \Gamma_{ead}\Gamma_{fbc})$$

Considerando un sistema coordenado geodésico sobre un punto P (en el cual $\Gamma_{bc}^a(P) = 0$), las componentes covariantes del tensor de curvatura en P vendrán dadas por:

$$(R_{abcd})_P = \frac{1}{2}(\partial_d\partial_a g_{bc} - \partial_d\partial_b g_{ac} + \partial_c\partial_b g_{ad} - \partial_c\partial_a g_{bd})_P$$

Es directo ver que el tensor posee las siguientes simetrías:

$$R_{abcd} = -R_{bacd}$$

$$R_{abcd} = -R_{abdc}$$

$$R_{abcd} = R_{cdab}$$

Es decir la suma de la perturbación es cíclica:

$$R_{abcd} + R_{acdb} + R_{adbc} = 0$$

Dado que trabajamos con relaciones tensoriales, estas propiedades de simetría definidas para este sistema de coordenadas concreto, las podemos generalizar para cualquier sistema de coordenadas. A su vez, dado que trabajamos en este caso con un tensor de rango 4, el tensor de curvatura definiría un total de N^4 componentes, sin embargo, las simetrías reducen este número a $\frac{N^2(N^2-1)}{12}$, es decir, tendríamos un total de 20 componentes independientes para nuestro tensor métrico.

1.4.2 Derivación de un campo tensorial

Sea $\mathcal{I}_s^r(M)$ el espacio de campos tensoriales diferenciables sobre M , r veces contravariante y s veces covariante. Sea $\mathcal{I}(M)$ la suma directa de todos los \mathcal{I}_s^r para todo $r, s \in \{0, 1, 2, \dots\}$ (denotaremos por $\mathcal{I}_0^0(M) = \mathcal{F}(M)$). Una **derivación D de $\mathcal{I}(M)$** será una aplicación:

$$D : \mathcal{I}(M) \rightarrow \mathcal{I}(M)$$

es \mathfrak{R} -lineal, y cumple las siguientes propiedades:

- D aplica $\mathcal{I}_s^r(M)$ en $\mathcal{I}_s^r(M)$ (se conserva el tipo de tensor)
- $D(A \otimes B) = DA \otimes B + A \otimes DB$
- D conmuta con cualquier contracción tensorial (si C es una contracción y K es un campo tensorial: $D(CK) = C(DK)$)

Aprovechamos este apartado para exponer una operación tensorial que emplearemos a lo largo del desarrollo de los resultados de éste trabajo.

Ley de subir o bajar índices. En una variedad semi-riemanniana (M, g) , podemos construir isomorfismos entre espacios de tensores covariantes y contravariantes, por medio del cual, utilizando el tensor métrico y su inverso (g^{ij}) , podemos subir y bajar índices en el tensor. Es decir, ésta operación se puede ver como una contracción del producto tensorial del tensor métrico g_{ij} o el cotensor métrico g^{ij} con otro tensor arbitrario. A este isomorfismo se le denomina: **isomorfismo musical** y se da entre el espacio tangente $\mathcal{T}_p M$ y el espacio cotangente $\mathcal{T}_p^* M$ - siendo $p \in M$.

$$\begin{aligned} \phi_g : \mathcal{T}_p M &\rightarrow \mathcal{T}_p^* M \\ (\phi_g(v))_i &= g_{ij} v^j \end{aligned}$$

El isomorfismo inverso requiere el uso de las componentes del cotensor métrico:

$$\begin{aligned} \phi_g^{-1} : \mathcal{T}_p M &\rightarrow \mathcal{T}_p^* M \\ (\phi_g^{-1}(\theta))^i &= g^{ij} \theta_j, \quad \phi_g^{-1} = \phi_{g^{-1}} \end{aligned}$$

1.5 El Tensor de Ricci y curvatura escalar

Sea R el tensor de curvatura. $R \in \mathcal{T}_3^1$. Se define el **tensor de Ricci** y lo designaremos como **Ric**, al tensor recogido mediante la relación: $Ric = C_1^1(R) \in \mathcal{T}_2^0(M)$. Designando R_{ij} las componentes del tensor de Ricci en una carta local:

$$Ric = R_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

Vemos que la expresión del tensor de curvatura recogida para una carta local la podemos encontrar como:

$$R = a_{jkh}^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^h$$

Podemos relacionar los elementos a_{jkh}^i con los elementos R_{jkh}^i haciendo uso de los siguientes resultados de análisis tensorial, donde solo demostraremos el caso que nos interesa.

Proposición 8 Sea E un espacio vectorial, E^* su dual.

- Identificación de $E \otimes E^*$ con el espacio de $\mathcal{L}(E, E)$ - espacio de las aplicaciones lineales de E en E .

Demostración. Sea $\tau : E \times E^* \rightarrow \mathcal{L}(E, E)$ aplicación definida como: $\tau(x, y')(z) = y'(z)x$ (es bilineal y nos permite identificar $E \otimes E^*$ con $\mathcal{L}(E, E)$, y respectivamente el producto tensorial $x \otimes y'$ con la aplicación lineal $z \rightarrow y'(z)x$ (estamos utilizando implícitamente un resultado de unicidad en construcciones del tipo $(E \otimes F, \tau)$, siendo $\tau : (E \times F) \rightarrow (E \otimes F)$). \square

- Identificación de $E^* \otimes E^*$ con el espacio $\mathcal{L}(E, E; \mathfrak{R})$ (donde $\mathcal{L}(E, E; \mathfrak{R})$ es el espacio de las aplicaciones bilineales de $E \times E$ en \mathfrak{R})
- Identificación de $E \otimes (\otimes^k E^*)$ con el espacio $\mathcal{L}(E, \binom{k}{\cdot}, E; E)$

Demostración. Sea $\mathcal{L}(E, \binom{k}{\cdot}, E; E)$ el espacio de las aplicaciones multilineales de $E \times \binom{k}{\cdot} \times E$ en E . Sea $\tau : E \times E^* \times \binom{k}{\cdot} \times E^* \rightarrow \mathcal{L}(E, \binom{k}{\cdot}, E; E)$ la aplicación definida como:

$$\tau(x, y'_1, \dots, y'_k)(z_1 \dots z_k) = y'_1(z_1) \dots y'_k(z_k)x$$

Es fácil ver que τ es bilineal; y que como en el apartado anterior, nos permite identificar $E \otimes (\otimes^k E^*)$ con $\mathcal{L}(E, \binom{k}{\cdot}, E; E)$ y respectivamente $x \otimes y'_1 \otimes \dots \otimes y'_k$ con la aplicación multilineal $(z_1 \dots z_k) \rightarrow y'_1(z_1) \dots y'_k(z_k)x$. \square

A raíz de ello, por la identificación de $T_x(M) \otimes (\otimes^3 T_x(M)^*)$ con $\mathcal{L}(T_x(M), T_x(M), T_x(M); T_x(M))$ tenemos que:

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) \frac{\partial}{\partial x^h} = a_{jkh}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Pero tal y como hemos podido ver:

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) \frac{\partial}{\partial x^h} = R_{hjk}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Son los mismos coeficientes: $R_{hjk}^i = a_{jkh}^i$ Luego si tratamos de compactificarlo en una única expresión nos queda como:

$$R = R_{hjk}^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^h$$

$$Ric = C_1^1(R) = R_{hik}^i dx^k \otimes dx^h$$

Es decir, $R_{kh} = R_{hik}^i$

Proposición 9 *El tensor de Ricci es simétrico.*

Demostración. Dada una carta local. Hemos de probar que se cumple la siguiente igualdad: $R_{ij} = R_{ji}$. Por la identidad de Bianchi sabemos que: $R_{hjk}^i + R_{jkh}^i + R_{kjh}^i = 0$. Haciendo $i = j$: $R_{hik}^i + R_{ikh}^i + R_{khi}^i = 0$. Como se cumple que: $R_{khi}^i = -R_{kih}^i = -R_{kh}$; reescribimos la identidad anterior, $R_{hk} + R_{ikh}^i - R_{kh} = 0$. Es directo ver ahora que: $R_{ikh}^i = g^{ij} g_{jr} R_{ikh}^r$ (**mirar apartado divergencia de un campo tensorial**) donde por la definición de métrica tenemos en este caso: $g^{ij} g_{jr} = \delta_{ir}$, en otras palabras $R_{ikh}^i = 0$. \square

Vemos que se trata en definitiva de un tensor de rango 2 no nulo, cuyas componentes covariantes son de forma explícita: $R_{ab} \equiv R_{abc}^c$

$$R_{ab} = \partial_c \Gamma_{ab}^c - \partial_b \Gamma_{ac}^c + \Gamma_{ab}^c \Gamma_{cd}^d - \Gamma_{ad}^c \Gamma_{bc}^d$$

1.5.1 Diferencial covariante de un campo tensorial

Sea $k \in \mathcal{I}_s^r(M)$, $v \in T_x(M)$, $E_x = \otimes^r T_x(M) \otimes (\otimes^s T_x(M)^*)$. La aplicación dada por:

$$T_x(M) \rightarrow E_x$$

$$v \rightarrow \nabla_v K$$

es lineal. Identificando $\mathcal{L}(T_x(M), E_x)$ con $(E_x \otimes T_x(M)^*)$ la aplicación lineal anterior se configura como un único elemento de $\otimes^r T_x(M) \otimes (\otimes^{s+1} T_x(M))$ denominada como: $(\nabla K)(x)$. El campo tensorial asociado $(\nabla K)(x)$ para cada $x \in M$ será designado por ∇K , diferencial covariante de K . Por definición: ∇K será en este caso de $\mathcal{I}_{s+1}^r(M)$. La expresión de ∇K en una carta local (U, x^1, \dots, x^n) se describe como:

$$\nabla K = \nabla_i K_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s} \otimes dx^i$$

donde $\nabla_i K_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ son las componentes de ∇K . Aprovechando la identificación de $E_x \otimes T_x(M)^*$ con $\mathcal{L}(T_x(M), E_x)$ las componentes $\nabla_i K_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ de ∇K serán la matriz de la aplicación $v \rightarrow \nabla_v K$ de $T_x(M)$ a E_x en las bases de $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ de $T_x(M)$ y $\{\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}\}$ de E_x .

1.5.2 Divergencia de un campo tensorial

Sea $K \in \mathcal{I}_s^r(M)$ y suponemos que $r > 0$. Se define la divergencia de K por:

$$div(K) = C_{s+1}^1(\nabla K)$$

donde C_{s+1}^1 indica la contracción tensorial. En particular vemos que: $(\nabla K)_x$ es un elemento de: $T_x(M) \otimes \dots \otimes T_x(M) \otimes T_x(M)^* \otimes \dots \otimes T_x(M)^*$, en este caso C_{s+1}^1 indica que el primer $T_x(M)$ se contrae con el último $T_x(M)^*$. Luego la: $(div(K)) \in \mathcal{I}_s^{r-1}(M)$. Si escribimos las componentes de $div(K)$ en una carta local las podemos recoger como: $(div(K))_{j_1 \dots j_s}^{i_2 \dots i_r} = \nabla_i K_{j_1 \dots j_s}^{i i_2 \dots i_r}$.

Definimos la divergencia de un $K \in \mathcal{I}_s^0(M)$ para el caso $s \neq 0$. La métrica de Riemann para cada punto x , da un isomorfismo canónico definido como: $b : T_x(M) \rightarrow T_x(M)^*$ tal que $b(X)(Y) = g(X, Y)$. Se tiene entonces que:

$$b\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = g_{ij}dx^j \text{ donde } g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

El isomorfismo inverso, lo denominamos $\#$ y viene recogido por la relación: $\#(dx^i) = g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}$. Tenemos que aclarar aquí que esta relación da lugar a un isomorfismo de campos definida mediante la relación:

$$\# : \mathcal{I}_s^0(M) \rightarrow \mathcal{I}_{s-1}^1(M)$$

De tal forma que si $K \in \mathcal{I}_s^0(M)$ con $s \neq 0$ entonces: $div(K) = div(\#K)$. Con que $\#K \in \mathcal{I}_{s-1}^1(M)$, $div(\#K)$ está bien definida. El isomorfismo $\#$ origina un isomorfismo algebraico, el cual en cada punto, da lugar a el isomorfismo de campos descrito arriba; si bien no entraremos en detalle en su estudio ya se ha querido introducir un apartado sobre divergencia de un campo tensorial, para poder exponer en detalle la curvatura escalar relacionada con el tensor de Ricci. Pero no deja de ser un resultado elegantemente bello.

Llegados a este punto, ahora sí, podemos definir con detalle la curvatura escalar y la divergencia del tensor de Ricci. La idea del escalar de curvatura es la siguiente: la contracción del tensor de Ricci con el tensor métrico nos da una cantidad escalar definida en cada punto de la variedad de Riemann. A este escalar lo denominamos: **escalar de curvatura**.

1.5.3 Curvatura escalar y divergencia del tensor de Ricci

Definición 22 Definimos la **curvatura escalar** como la función R dada por: $R = C(\#Ric)$ donde C es la contracción. Dado que hemos podido ver $\# : \mathcal{I}_2^0(M) \rightarrow \mathcal{I}_1^1(M)$, por consiguiente $\#Ric \in \mathcal{I}_1^1(M)$. La contracción C determinarán un escalar. Definiendo una carta local (U, x^1, \dots, x^n) tendríamos:

$$\begin{aligned} Ric &= R_{ij}dx^i \otimes dx^j \\ \#Ric &= g^{ik}R_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} \otimes dx^j \\ R &= C(\#Ric) = g^{ih}R_{ih} = R_i^i \end{aligned}$$

Observamos ahora una propiedad muy importante del tensor de Riemann cuando existe una conexión de Levi-Civita. Para ello, trabajaremos mediante las derivadas covariantes del tensor de Ricci y por medio de la curvatura escalar (o escalar de curvatura). Partiendo de la igualdad de Bianchi para el tensor de Riemann, subiendo el índice a en la identidad y contrayéndolo con d se obtiene:

$$\nabla_e R_{bc} + \nabla_c R_{bae} + \nabla_a R_{bec} = 0$$

(aplicando simetría en el segundo término)

$$\nabla_e R_{bc} - \nabla_c R_{be} + \nabla_a R_{bec} = 0$$

(subiéndolo ahora el índice b y contraemos con e encontramos)

$$\nabla_b R_c^b - \nabla_c R + \nabla_a R_{bc}^{ab} = 0$$

(aplicando propiedades de antisimetría, se desarrolla el tercer término como)

$$\nabla_a R_{bc}^{ab} = \nabla_a R_{cb}^{ba} = \nabla_a R_c^a = \nabla_b R_c^b$$

Términa por salir la relación:

$$2\nabla_b R_c^b - \nabla_c R = \nabla_b(2R_c^b - \delta_c^b R) = 0$$

(subiéndolo ahora el índice c)

$$\nabla_b(R^{bc} - \frac{1}{2}g^{bc}R) = 0$$

Nota 2 En relación al resultado anterior, si hubieramos querido ser un poco más rigurosos desde el punto de vista matemático podemos dar una demostración idéntica pero con mayor formalismo. Para la demostración utilizaremos el siguiente lema:

- **(Lema)** Se cumple que: $g^{jk}\nabla_i R_{jkh}^i = -g^{ir}\nabla_i R_{rkh}^k$
 - **(Proposición)** La $\text{div}(\text{Ric}) = \frac{1}{2}dR$ - donde dR significa la diferencial exterior de la curva escalar (consideraremos todos los cálculos en una carta local)
- Demostración.** Aplicando la segunda identidad de Bianchi $\nabla_r R_{jkh}^i + \nabla_h R_{jrk}^i + \nabla_k R_{jhr}^i = 0$; como se cumple que $(\nabla_k R_{jhr}^i = -\nabla_k R_{jrh}^i)$; haciendo $i = r$ la identidad anterior y sumando con respecto i tendremos que: $\nabla_i R_{jkh}^i + \nabla_h R_{jik}^i - \nabla_k R_{jih}^i = 0$; (donde deducimos en este paso) $g^{jk}\nabla_i R_{jkh}^i + g^{jk}\nabla_h R_{jik}^i - g^{jk}\nabla_k R_{jih}^i = 0$. Transformando el primer miembro de acuerdo al lema $-g^{ir}\nabla_i R_{rkh}^k + g^{jk}\nabla_h R_{jik}^i - g^{jk}\nabla_k R_{jih}^i = 0$. Es decir, reescribiendo la última igualdad vemos que: $-g^{ir}\nabla_i R_{rkh}^k + g^{jk}\nabla_h R_{jik}^i - g^{jk}\nabla_k R_{jih}^i = 0$. Llegados a este punto, el primer y último término son iguales. Teniendo ahora en cuenta que $\nabla_i g^{ir} = 0$, podemos reescribir la igualdad anterior como: $-2(\text{div}(\text{Ric}))_h + \nabla_h R = 0$. Ahora bien como R es una función, $\nabla_h R = \frac{\partial R}{\partial x^h}$; la igualdad anterior implicaría que: $2\text{div}(\text{Ric}) = dR$. \square

1.5.4 Tensor de Einstein

Expuesto todo éste desarrollo introductorio, es conveniente definir un nuevo tensor que aproveche esta identidad. El tensor de Einstein nos describirá como la materia y la energía deforman la curvatura del espacio-tiempo para originar la fuerza gravitatoria (campo gravitatorio), fundamentando así la gravedad, como una de las fuerzas fundamentales que rigen el cosmos.

Definición 23 (Tensor de Einstein). Se define el tensor de Einstein como el tensor: $G^{ab} \equiv R^{ab} - \frac{1}{2}g^{ab}R$. Se trata de un tensor simétrico que posee una sola divergencia independiente $\nabla_a G^{ab}$ y que desaparece por construcción.

Lema 2 El Tensor de Einstein es el único tensor simétrico de rango 2 que cumple las siguientes propiedades:

- Se puede construir con las componentes de $g_{ij}, g_{ij,k}, g_{ij,kl}$
- Sus componentes son lineales en $g_{ij,kl}$
- Tiene divergencia nula
- Se anula si el espacio es plano

¿Qué importancia tiene este tensor matemático? El **tensor de Einstein es la base de toda la Cosmología contemporánea**. El resultado recogido por medio de éste tensor fundamenta toda una teoría que describe dinámica, forma (desde el punto de vista topológico) y geometría (desde el punto de vista analítico) de todo El Universo. Nos introducimos ahora en el bello mundo del análisis de **las ecuaciones de Campo de Einstein**.

Capítulo 2

Principio de Equivalencia y Ecuaciones de Einstein

2.1 El espacio-tiempo de Minkowski

Comenzamos éste capítulo con una de las herramientas más fundamentales de la Relatividad Especial: las transformaciones de Lorentz. Las transformaciones de Lorentz constituyen un conjunto de relaciones que nos definen cómo se relacionan las medidas de una magnitud obtenidas por dos observadores diferentes; y es una de las piedras angulares de buena parte de los resultados obtenidos en campos de la Física.

2.1.1 Las Transformaciones de Lorentz

Sean S' y S dos sistemas de referencia inerciales definidos en un espacio de dimensión 4. Nos situaremos en 3 coordenadas espaciales y 1 temporal. Los dos sistemas de coordenadas estarán sincronizados (tendrán un tiempo coordenado equivalente). Cualquier acontecimiento observado por un observador inmóvil respecto a S , quedará determinado por las coordenadas (x^1, x^2, x^3) del punto del espacio donde se ha producido (respecto a los tres ejes de S) y del tiempo t (de dos relojes sincronizados en S y S' respectivamente). A cada acontecimiento contemplado desde S le corresponderá un punto (x^1, x^2, x^3, t) de \mathfrak{R}^4 . Al mismo acontecimiento contemplado por un observador desde el sistema coordenado S' le corresponderá un punto (x'^1, x'^2, x'^3, t') de \mathfrak{R}^4 . Por consiguiente, entre dos sistemas de referencia inerciales S y S' podemos definir una aplicación $f : \mathfrak{R}^4 \rightarrow \mathfrak{R}^4$ que nos señalará una correspondencia coordenada del mismo acontecimiento visto en S , en relación a las coordenadas del descrito desde S' . A esta aplicación se la denomina **transformación de Lorentz**.

Nota 3 *Por la definición que hemos construido de f , se admite una biyección entre sistemas coordenados inerciales.*

A partir de ahora iremos más al grano, pues no nos interesa definir un marco matemático por el que se exponga la naturaleza de esta biyección, sino más bien, nos interesa focalizarnos en lo que esta biyección nos viene a aportar en el campo de la Relatividad. Demostraremos pues, dos teoremas de especial importancia en relación a las transformaciones de Lorentz.

Nota 4 *A partir de ahora, asumiremos los siguientes dos lemas, que no demostraremos, y que serán empleados para la construcción de las demostraciones de estos teoremas.*

- (Lema 1) f transforma rectas de \mathbb{R}^4 no contenidas en un hiperplano de la forma $t = \text{constante}$, en rectas de \mathbb{R}^4 no contenidas en un hiperplano $t' = \text{constante}$.
- (Lema 2) f transforma hiperplanos que no sean de la forma $t = \text{constante}$, en hiperplanos que no son de la forma $t' = \text{constante}$.

Teorema 2 La biyección f es una afinidad, es decir una aplicación de la forma: $f(\vec{x}) = a(\vec{x}) + \vec{b}$, con $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3, t)$, $\vec{b} = (b^1, b^2, b^3, b^4)$ y a una transformación lineal de \mathbb{R}^4

Demostración. Dado que una recta es la intersección de 3 hiperplanos no horizontales, al actuar f , habría de poder transformar rectas en rectas. Visto de otra forma, f conserva el paralelismo. Sean r y r' dos rectas paralelas, definidas en el plano H (el plano que las contiene). Es directo ver que las rectas, $f(r)$ y $f(r')$ estarán contenidas en $f(H)$ (un plano). Si $f(r)$ y $f(r')$ no fueran paralelas (por el hecho de ser coplanarias), $\exists A$ tal que $f(r) \cap f(r') = A$. Como f es de hecho una biyección, $f^{-1}(A)$ sería un punto de r y r' , lo que contradice el hecho de que r y r' sean paralelas. Por geometría lineal, f es de hecho la definición de una afinidad. \square

Este resultado nos da pie a poder definir la forma explícita de las transformaciones de Lorentz, la cual, la podemos determinar por el siguiente resultado. El procedimiento de obtención del mismo no es representativo; se basa en ir jugando con la afinidad. Le imponemos el Principio de Relatividad, así como el Principio de Invariancia de la velocidad de la luz, y terminamos deduciendo el siguiente resultado. Esta serie de Principios serán introducidos más adelante.

Teorema 3 Sean S, S' dos sistemas inerciales. Podemos realizar cambios ortogonales entre los ejes de S y S' respectivamente (cambios que conserven distancias y ángulos), así como un cambio en el origen del tiempo de los dos sistema, de manera que el cambio entre los dos nuevos sistemas viene definido por la relación:

$$\begin{cases} x'^1 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}x^1 - \frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}t \\ x'^2 = x^2 \\ x'^3 = x^3 \\ t' = -\frac{v}{c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}x^1 + \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}t \end{cases}$$

En el origen del sistema S' ($x'^1 = 0, x'^2 = 0, x'^3 = 0$) la relación entre el tiempo t y el tiempo t' viene definida por medio de: $t = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}t'$. En el origen del sistema S' será visto desde S en el punto: $(\frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}t', 0, 0)$. Por tanto, existe un movimiento rectilíneo uniforme el origen de ambos sistemas de referencia, y viene definido por el vector: $\vec{v} = (v, 0, 0)$.

2.1.2 El espacio-tiempo de Minkowski

Las transformaciones de Lorentz que transforman el origen en el origen, conservan la forma cuadrática de \mathbb{R}^4 $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - c^2t^2$. Definimos en \mathbb{R}^4 el producto escalar g como: $X = (X^1, X^2, X^3, X^4), Y = (Y^1, Y^2, Y^3, Y^4)$

$$g(X, Y) = X^1Y^1 + X^2Y^2 + X^3Y^3 - c^2X^4Y^4$$

Nota 5 Las transformaciones de Lorentz que transforman el origen en el origen, conservan el producto escalar anterior. Es decir, si f es una transformación de Lorentz que transforma el origen en el origen, entonces se cumple: $g(X, Y) = g(f(X), f(Y))$

Si ahora consideramos el cono $C \subset \mathbb{R}^4$ formado por los vectores $X = (x^1, x^2, x^3, t)$ tales que $g(X, X) < 0$, encontramos que C es un espacio topológico dotado de la topología usual que tiene dos componentes conexas, C^+ y C^- . Denotaremos a C^+ la componente contenida en el semiespacio $t > 0$.

Definición 24 Denominamos base orto-c-normal positiva $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ a toda base de \mathbb{R}^4 que cumple las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} g(e_i, e_i) = 1, \forall i \in 1, 2, 3 \\ g(e_4, e_4) = -c^2 \\ g(e_i, e_j) = 0, \forall i \neq j \\ e_4 \in C^+ \end{cases}$$

Definición 25 Se denomina **espacio de Minkowski** a el espacio que resulta de ortorgar en \mathbb{R}^4 una base orto-c-normal positiva, junto a la métrica g y la elección de la componente conexas C^+ de C .

Vemos que todos los fenómenos de la cinemática de relatividad especial no son otra cosa que problemas geométricos del espacio-tiempo de Minkowski. Ésta es la importancia de la matematización que estamos dando.

Nota 6 Una definición más formal del espacio-tiempo de Minkowski, la podríamos encontrar en el siguiente enunciado: el espacio-tiempo de Minkowski es una variedad lorentziana de curvatura nula e isomorfa a $\mathcal{M}_0 = (\mathbb{R}^4, \nu)$ donde el tensor métrico puede llegar a escribirse en un sistema de coordenadas cartesianas como;

$$\nu = -dx^0 \otimes dx^0 + dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3$$

(nos fijamos en su equivalencia dada en forma matricial $\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$)

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) \rightarrow (ct, x, y, z) \\ \nu = -c^2 dt \otimes dt + dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$$

es tensor métrico se suele recoger tan y como exponemos en la relación anterior.

2.2 Principio Cosmológico

¿Podemos trabajar de una forma más eficiente en términos de la matematización expuesta? Esto lo responder el **Principio Cosmológico**. El modelo del Big Bang (y otros modelos) se basan en el Principio Cosmológico, según el cual, el Universo a gran escala es: **isótropo** (todas las direcciones son equivalentes; el Universo es inavariante bajo rotaciones), y por otro lado **homogeneo** (todos los puntos del espacio son homogéneos; el universo es inavariante bajo traslaciones). Su enunciado es el siguiente: "Existe un conjunto de observadores tales que ven el Universo homogéneo e isótropo".

Nota 7 Es necesario puntualizar que la condición de isotropía implica necesariamente homogeneidad (el inverso no se cumple)

Definición 26 Introducimos las siguientes nociones básicas en Cosmología:

- **Fluido Perfecto.** Fluido para el cual no hay transporte de momento ni energía entre las partículas que lo componen. Este fenómeno se da cuando las partículas del fluido colisionan, y en el transcurso de su colisión no se escapan de un elemento de volumen determinado.
- **Horizonte de partículas cosmológico.** Dado que la luz tiene velocidad finita - c , si el Universo tiene una edad finita, la luz no habrá podido recoger más allá de una cierta

distancia finita desde el Big-Bang. Por ello, se acuña el término de horizonte a la región del espacio a partir de la cual más allá de la dirección de propagación de la luz, no habrá llegado ésta, en un tiempo determinado.

- **Tiempo Cosmológico:** tiempo propio de los observadores que ven el Universo isótropo y homogéneo y que es común a todos ellos.

El Principio Cosmológico no se puede demostrar, por ello se toma como un principio - una hipótesis inherente a la naturaleza del espacio-tiempo. Este hecho obedece a una naturaleza observacional que nos permite ejercer una serie de simplificaciones sin precedentes que a continuación procedemos a exponer.

- **Isotropía:** Esta propiedad se observa por todos lados (si no fuera por las pequeñas anisotropías). La podemos apreciar en:
 - La distribución de las galaxias y de sus propiedades (edad, morfologías, color, metalicidad, ...)
 - La velocidad de las galaxias debida a la expansión de El Universo (ley de Hubble), y su dispersión en un entorno del observador (existe una pequeña "anisotropía dipolar" - es decir, se observa un vector privilegiado en la distribución angular de las velocidades - se interpreta como debida al movimiento de la Galaxia (Vía Láctea) con respecto al fluido de galaxias a gran escala, atraída por otros sistemas galácticos que producen inhomogeneidades a pequeña escala)
 - La temperatura de la radiación CMB. A pesar de que se detecta una pequeña anisotropía en relación a la temperatura (anisotropía dipolar) $\frac{\Delta T}{T} \equiv 10^{-3}$ (esta anisotropía dipolar es provocada por nuestro movimiento respecto al fluido de galaxias en expansión o de fotones CMB)
- **Homogeneidad:** Esta propiedad de El Universo no se puede comprobar directamente, ya que a pesar de que podemos medir en todas las direcciones, tan solo lo podemos realizar desde un único punto. Dado que existe isotropía hay dos opciones: o nos encontramos en el centro de una distribución esférica o bien hay isotropía en cada punto del espacio porque evidentemente existe homogeneidad. Pero aplicando el Principio Copernicano (PC), el cuál establece que no ocupamos el centro de El Universo (o el Principio de la Mediocridad (PM): no somos ningún observador especial), necesariamente por nuestra lógica humana, asumimos como cierto el segundo postulado.

Una pregunta muy natural sería plantearnos, ¿es cierto que un principio de esta magnitud sea aplicable a todo El Universo? Y la respuesta es que sí. Nuestras observaciones se limitan necesariamente a la zona interior del horizonte de partículas, o mejor incluso a una zona más pequeña denominada: **superficie de última dispersión de luz**, producida en el instante de la recombinación. Hasta el entorno donde podemos llegar a medir, se cumplen estas propiedades; pero más allá de esta región podrían dejar de cumplirse: las anisotropías e inhomogeneidades podrían comenzar a ser significativas. Por consiguiente no es descabellado suponer que este tipo de propiedades se cumplirán a lo largo y ancho de El Universo, a fin de cuentas, las soluciones "locales" que damos en el entorno en el que nuestra civilización se desarrollan, tienen amplio significado y sentido para nuestra realidad: más allá de esto poca tranquilidad emocional y espiritual encontraremos los humanos que no la abarque la metafísica. Como bien expusimos en el *Prefacio* de esta obra, todo el modelaje cosmológico tiene una componente filosófica muy marcada.

El Principio Cosmológico tiene una consecuencia muy importante: el único movimiento posible de la materia es un movimiento de dilatación (positiva, negativa o nula). Cualquier otro movimiento (de rotación o de cizalla) definiría un vector que

contradeciría la isotropía del espacio.

2.3 Métrica de Robertson-Walker

¿Se moldea la métrica a este Principio? La respuesta es que sí. Las matemáticas con las que trabajamos nos permiten moldear nuestra concepción de El Universo - **que ni si quiera podemos asegurar que sea única** - con una flexibilidad a los datos observacionales asombrosa.

Definición 27 *Un espacio de Minkowski se denomina de **Robertson-Walker** si está dotado de una métrica que expande el espacio, y cuya expresión está recogida en esféricas.*

En éste tipo de espacios se pueden escoger un sistema de coordenadas tales que la métrica colapsa a la siguiente expresión:

$$ds^2 = -dt^2 + S^2(t)d\sigma^2$$

donde $d\sigma^2$ es la métrica de un espacio tridimensional de curvatura constante e independiente del tiempo. La geometría de estos espacios tridimensionales es cualitativamente diferente de acuerdo a la constante de la curvatura se tome postiva, negativa o nula. En cuanto a la función $S(t)$, se puede normalizar la curvatura K para que adquiera valores de +1 o -1. En estos casos la métrica $d\sigma^2$ puede ser reescrita como:

$$d\sigma^2 = d\chi^2 f^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2)$$

donde: $f(\chi) = \begin{cases} \sin(\chi) \Leftrightarrow K = +1 \\ \chi \Leftrightarrow K = 0 \\ \sinh(\chi) \Leftrightarrow K = -1 \end{cases}$

El dominio de la coordenada $\chi \in [0, \infty] \Leftrightarrow K \in \{0, -1\}$ y en el caso de que $K = 1$, vemos que el dominio se corresponderá con: $\chi \in [0, 2\pi]$. Vemos que cuando $K \in \{0, -1\}$, los espacios tridimensionales son difeomorfos a \mathbb{R}^3 (por lo que son infinitos), pero si $K = 1$ el espacio tridimensional es difeomorfo a una esfera de $S^3 \subset \mathbb{R}^3$ (por lo que son compactos).

Es decir, se demuestra (Weinberg, 1972) que la métrica más general que describe un espacio cuatro dimensional, tres espaciales y una temporal, cuyo subespacio tridimensional espacial es simétrico y de curvatura arbitraria, tiene, en coordenadas esféricas la forma:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-\epsilon r^2} + r^2 d\phi^2\right]$$

y se denomina **métrica de Robertson-Walker**. En este caso $c = 1$, t -tiempo cosmológico, la función $a = a(t)$ se denomina factor de escala, el término ϵ es el signo de la curvatura tomándo esta $\epsilon \in \{0, 1, -1\}$ (según la curvatura sea nula, positiva o negativa), la coordenada r está normalizada al radio de curvatura comóvil y por tanto no tiene dimensiones (sus dimensiones las ha asumido el factor de escala); y finalmente la función $d\phi$ definida por medio de la siguiente relación: (utilizando la formulación de relatividad especial; $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \equiv -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Phi^2$

Nota 8 El factor de escala. *El factor de escala es una constante de proporcionalidad con dependencia temporal adaptada en Cosmología tras haber determinado la evolución de la métrica de acuerdo con las observaciones astronómicas. Es decir, encontramos una variación de la propia medida de la distancia en función del tiempo. Asumir esta condición da lugar a que las distancias radiales D que nos separan de los objetos del universo (denominadas distancias propias) vienen recogidas por:*

$$D = a(t)r.$$

donde $a = a(t)$ es el factor de escala, una función del tiempo, y r es una coordenada radial que llamaremos *conmóvil*.

El hecho que las hipersuperficies generadas son espacios homogéneos hace que el escalar de curvatura (y el radio de curvatura) sea constante sobre ellos (solo variaría a lo largo del tiempo). Esta métrica nos permite definir una serie de parámetros que utilizaremos para el estudio de nuestro Universo, entre ellos uno muy importante: la **distancia propia**.

Definición 28 La **distancia propia** - l es la distancia entre dos objetos medida sobre la hipersuperficie espacial generada de densidad uniforme a un tiempo cósmico determinado. En la métrica de Robertson-Walker, nos permite escribirlo como:

$$dl = a(t) \sqrt{\frac{dx^2}{1-x^2/K^2} + x^2(d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta)d\phi^2)}$$

En un tiempo t fijado, vemos que las longitudes propias de algunas curvas espaciales con separación finita las podemos englobar en:

Curva con las coordenadas x, ϕ fijas:

$$l = 2 \int_0^\pi a(t) x d\theta = 2\pi a(t) x$$

Curva con las coordenadas x, θ fijas:

$$l = \int_0^{2\pi} a(t) x \text{sen}(\theta) d\phi = 2\pi a(t) x \text{sen}(\theta)$$

Curva con las coordenadas ϕ, θ fijas, $x \in [x_1, x_2]$:

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \frac{a(t) dx}{\sqrt{1-x^2/K^2}} = \begin{cases} [a(t)K \arcsin(x/K)]_{x_1}^{x_2} \Leftrightarrow K^{-2} > 0 \\ a(t)[x_2 - x_1] \Leftrightarrow K^{-2} = 0 \\ [a(t)K \operatorname{arcsinh}(x/K)]_{x_1}^{x_2} \Leftrightarrow K^{-2} < 0 \end{cases}$$

2.4 Tensor Energía-Momento

¿Pero de verdad podemos cuantificar distribuciones de energía en términos de curvatura espacial? Toda la construcción matemática con la que tratamos, nos permite definir la construcción de un tensor de energía, que define su distribución temporal, con unas propiedades cualitativas y cuantitativas elegantemente simples.

Nota 9 Recordemos que estamos trabajando en el espacio-tiempo de Minkowski, y que por consiguiente, tomaremos: $c = 1$, $\eta^{\alpha\beta} = (-1, 1, 1, 1)$.

Consideramos una distribución S de partículas dependiente del tiempo. Si denotamos a m_0 la masa en reposo de cada una de ellas, y asumimos la no interacción entre ellas. Consideramos ahora S' otra distribución idéntica a la anterior, pero con una velocidad v' respecto a la distribución S . Definimos un punto $p \in S \vee S'$, se puede dar una caracterización de cada distribución por medio de la densidad de materia ρ y la velocidad ν . De esta forma, si $\nu = 0$ la densidad de S viene determinada por: $\rho = m_0 n_0$ - n_0 es el número de partículas por unidad de volumen. Análogamente a S' , el volumen experimentará una contracción de Lorentz en la dirección del movimiento, por lo que el número de partículas por unidad de volumen será: $n' = \gamma n_0$ (recordemos que $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$). De forma equivalente tenemos la masa de cada partícula en S' : $m' = m_0 \gamma$. Vemos que la densidad de materia en S' vendrá dada por: $\rho' = \gamma^2 \rho$. Luego, las componentes de los tensores de orden (1,0), se transforman como sigue:

$$T'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} T^\beta$$

donde en el contexto de las transformaciones de Lorentz: $\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \gamma$.

Es decir, nos damos cuenta que el espacio-tiempo de Minkowski podemos definir un tensor de energía-momento - tensor del tipo (2,0) - que nos dará de forma intuitiva información sobre la densidad y el flujo de energía electromagnética y los esfuerzos que produce la propagación del campo electromagnético. Éste viene recogido por la forma:

$$T_{lm}^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} [\eta^{\mu\alpha} F_{\alpha\lambda} F^{\lambda\nu} + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}]$$

donde $F^{0i} = -E^i$, $F^{ij} = -\epsilon^{ijk} B^k$ - siendo E - campo eléctrico y B - campo magnético. Es decir, el tensor energía-momento se puede escribir en forma matricial como:

$$[T] = \begin{pmatrix} T_{00} & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ T_{10} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

(donde: T_{00} es la densidad de energía; T_{0i} es el flujo de momento; T_{ii} es la presión isotrópica; T_{ij} es la presión anisotrópica)

2.4.1 Tensor Energía-Momento para un fluido perfecto

Incluso las hipótesis del P.Cosmológico coordinan de forma bella con la descripción de este tensor.

- **Si el Universo es isótropo**, las componentes espaciales no diagonales del tensor energía-momento T son nulas, dado que no existirá presión anisotrópica: $T_{ij} = 0 \forall i \neq j$. Si además los movimientos peculiares de las galaxias y cúmulos de galaxias son despreciables frente al flujo de Hubble, lo cual es cierto a distancias suficientemente grandes, el flujo del momento es cero: $T_{0i} = 0 \forall i$.
- **Si el Universo es homogéneo**, la densidad de energía ρ , y la presión p no dependerán de la posición sino solamente del tiempo cósmico. Entonces, tendremos: $T_{00} = \rho$, y la presión p será un escalar: $T_{ii} = \rho g_{ii}$.

Es decir, por las propiedades de homogeneidad e isotropía que nos enuncia el Principio Cosmológico, el tensor de energía-momento adoptará la forma de un **fluido perfecto**:

$$T_{\alpha\beta} = (p + \rho)u_{\alpha}u_{\beta} + pg_{\alpha\beta}$$

donde u_{α} es el cuatrivector velocidad, que en ausencia de movimientos peculiares, tiene componentes (1,0,0,0). Por lo tanto: $T_0^0 = -\rho$; $T_i^i = pg_i^i$; $T_{\alpha}^{\beta} = 0 \forall \alpha \neq \beta$. Este hecho nos conducirá a poder encontrar las ecuaciones del campo de Einstein a través del propio tensor de Einstein.

2.5 Principios y Postulados de la Relatividad General

A la hora de estudiar la dinámica de El Universo (a gran escala) lo que empleamos es un estudio de la gravitación. Esto se debe al papel que juegan las otras tres fuerzas de la naturaleza, y es que, la fuerza nuclear (fuerte y débil) solo tiene un rango de aplicación a distancias inferiores al radio atómico; la electromagnética, aunque presenta un rango de acción hasta el infinito, los objetos en el Universo tienden hacer electricamente neutros, por lo que se produce un apantallamiento a gran escala que hace que la fuerza eléctrica tienda a ser inexistente a gran escala; en cambio la gravedad es la única cuya interacción prevalece a lo largo y basto del espacio-tiempo, y con la cual no se produce este fenómeno de apantallamiento. Comenzamos

aquí nuestro estudio de la gravedad. Hablar de la fuerza gravitatoria implica necesariamente hablar de los límites de la gravitación universal de Newton. Tenemos que entender que la Relatividad General (RG) se constituye como una extensión natural de la Gravitación Universal (GU); y es que bajo ciertas condiciones, la RG es equivalente a utilizar la GU; fuera de estos límites es necesario utilizar la RG. Es necesario emplear la RG cuando se dan alguna de las siguientes situaciones:

- $\frac{\Phi}{c^2} \equiv 1$ donde Φ denota el potencial gravitatorio newtoniano (es decir, con la aparición de campos gravitatorios muy intensos)
- $\frac{v}{c} \equiv 1$ donde v es la velocidad newtoniana (es decir, con la aparición de velocidades próximas a la de la luz)

A efectos del estudio cosmológico, estas condiciones son equivalentes a los dos escenarios que preceden:

- **Escalas muy grandes :** Aplicando el Teorema de Gauss (que no es otra cosa que el Teorema de la Divergencia) se nos expone que el flujo de campos vectoriales a través de una superficie cerrada es proporcional a la magnitud de las fuentes de dicho campo encerradas en el interior de la propia superficie. Aplicándolo al caso de un campo gravitatorio generado por una distribución de masa finita, nos damos cuenta que en una región lo suficientemente grande, el propio campo gravitatorio con el que trabajamos solo dependerá de la masa interior de una esfera de radio r -arbitrariamente grande (superficie más cómoda con la que poder trabajar a efectos de simetría radial de la fuerza gravitatoria). Por ello, el campo gravitatorio será lo suficientemente intenso como para que se cumpla la primera condición.
- **Escalas temporales que se encuentran en un entorno del Big-Bang** (la cuál sencillamente dejaremos indicada)

Llegados a este punto, vemos que existe una equivalencia en emplear la GU de Newton para estudiar la evolución dinámica de El Universo, si nos limitamos a volúmenes pequeños (o escalas espaciales pequeñas comparadas con el radio de curvatura de el Universo), y tiempo grandes (comparadas con la edad actual de el Universo - fechada en 13.800 millones de años aproximadamente)

Expuesto estos puntos podemos introducir los **Principios de la Relatividad General**. La teoría de la RG se basa en tres principios fundamentales:

- **Principio de Covariancia:** Las leyes de la Física se han de poder formular con objetos matemáticos (escalares, tensores, vectores) que no dependan del SR (solamente pueden tener una dependencia de sus componentes). La descripción de las leyes de la Física no pueden tener una dependencia de SRI - Sistemas de Referencia Inerciales.
- **Principio de Relatividad Espacial (o restringida):** Con la teoría electromagnética desarrollada por Maxwell, la velocidad de la luz en el vacío pasa a ser una constante universal invariante respecto a cambios en el SR. Se postula como principio una serie de transformaciones que garantizan este hecho (es una modificación de las transformaciones de galileo de SR). Las transformaciones que garantizarán el principio de relatividad son las conocidas como transformaciones de Lorentz.
- **Principio de Equivalencia:** Dice así:

”En un punto del espacio-tiempo en un campo gravitatorio arbitrario, siempre existe un sistema de coordenadas localmente inercial en el cual los efectos de la gravitación se anulan”

O dicho de otra forma, la masa gravitacional (encargada de generar el campo gravitatorio) y la masa inercial (es la masa que responde a una fuerza resistiéndose al movimiento) son iguales. Y lo que se nos viene a exponer con este famoso principio es que localmente no podemos distinguir entre una caída libre en un campo gravitatorio y un movimiento libre en ausencia de gravedad.

Expuestos estos tres principios, se nos traducen en una serie de diferencias bastante marcadas en relación a la descripción de El Universo que teníamos por Newton; entre otras, el espacio plano (euclidiano) de Newton pasará a estar curvado, por lo que si antes podíamos situar un SR en un punto dado, y cualquier otro punto quedar determinado por un vector posición; con la nueva descripción, al pasar a un espacio-tiempo curvado, no existen vectores de posición entre dos eventos. Llegados a este punto podemos deducir las ecuaciones de campo de Einstein.

2.6 Deducción de las Ecuaciones de Einstein

Para la deducción de las ecuaciones de Einstein, nos situamos en el marco teórico de un medio continuo, en el cual la materia que contiene viene descrita por una densidad dada ρ . Ésta crea un campo gravitatorio, definido por un potencial Φ de forma que obedece la ecuación de Poisson:

$$\Delta\Phi = \nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$$

en este contexto G es la constante de gravitación universal. Dado que la gravedad es una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo, bajo la condición de campo gravitatorio débil, constituido por una masa concentrada en una región acotada, la métrica se proyecta sobre la métrica de Minkowski; es decir, podemos encontrar un sistema de coordenadas (x^1, x^2, x^3, x^4) en las cuales la métrica g se puede expresar como: $g_{\mu\nu} = n_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ con $|h_{\mu\nu}| \ll 1$; es decir, la métrica colapso sobre una métrica estática ($\lim_{x \rightarrow +\infty} h_{ij}(x) = 0$ - la acción del campo gravitatorio desaparece en el infinito, pues la masa que origina la dilatación espacial se encuentra en una región acotada). A efectos de que la métrica viene a ser estática, se cumple:

$$g_{00} = (1 + \frac{2\Phi}{c^2})$$

Como se puede analizar, la forma de describir la materia (energía-momento) la podemos encontrar por un tensor energía-momento diagonalizado bajo la hipótesis de fluido perfecto; en nuestro sistema de reposo instantáneo tendremos:

$$T_{00} = \rho c^2$$

Como estamos en un campo gravitatorio débil y estático en régimen de baja velocidad tendremos en particular:

$$\nabla^2 g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00}$$

Vemos que en el régimen de campo gravitatorio débil, Φ colapso sobre g_{00} , por lo que bajo un marco de hipótesis similar, las ecuaciones del campo gravitatorio deberían estar descritos por medio de derivadas segundas en relación a los coeficientes de la métrica $g_{\mu\nu}$. Como se debería cumplir además que tienen que ser del tipo tensorial (P. de Covariancia), las ecuaciones de campo gravitatorio deberían adoptar la descripción:

$$K_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$$

en este caso $K_{\mu\nu}$ habría de ser un tensor de rango 2 relacionado con la curvatura del espacio-tiempo, y $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$. Como a su vez, la curvatura del espacio-tiempo la expresamos en

términos del tensor de curvatura $R_{\mu\nu\sigma\rho}$, el efecto que tiene en el tensor $K_{\mu\nu}$ es que necesariamente tiene que estar construido a partir de $R_{\mu\nu\sigma\rho}$ y el tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Aplicando ahora que el tensor $K_{\mu\nu}$ cumple:

- En el límite Newtoniano, $K_{\mu\nu}$ debe contener términos que son lineales en las derivadas segundas de los coeficientes de la métrica.
- $T_{\mu\nu}$ es un tensor simétrico por definición $\Rightarrow K_{\mu\nu}$ también debe serlo.

Como $R_{\mu\nu\sigma\rho}$ es lineal con las derivadas segundas de la métrica, la forma más genérica que podemos dar de $K_{\mu\nu}$ es la combinación lineal de todas sus componentes:

$$K_{\mu\nu} = aR_{\mu\nu} + bRg_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu}$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor métrico de Ricci, R es la curvatura escalar, y a, b, λ son constantes. Si queremos que todos los miembros sean lineales en términos de la derivada segunda de $g_{\mu\nu}$, entonces se tiene que concluir que $\lambda = 0$. Por lo que:

$$K_{\mu\nu} = aR_{\mu\nu} + bRg_{\mu\nu}$$

Para encontrar los coeficientes a, b podemos basarnos en la relación dada por: $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. De acuerdo con esta relación:

$$\nabla_\mu K^{\mu\nu} = \nabla_\mu (aR^{\mu\nu} + bRg^{\mu\nu}) = 0$$

y dada la relación encontrada para el tensor de Einstein:

$$\nabla_\mu (R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R) = 0$$

y teniendo en cuenta que: $\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0$, obtenemos por relación que:

$$\nabla_\mu K^{\mu\nu} = (\frac{1}{2}a + b)g^{\mu\nu}\nabla_\mu R = 0$$

Aquí hay que realizar varios comentarios: por un lado, $\nabla_\mu R$ será no nula en una región del espacio-tiempo a menos que sea plano, y por lo tanto no exista campo gravitatorio. Encontramos pues, que $b = -a/2$, por lo que las ecuaciones de Einstein nos quedan expresadas como:

$$a(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) = \kappa T_{\mu\nu}$$

y finalmente podemos fijar el valor de a si realizamos una comparación a efectos de que en el límite de campo gravitatorio débil, estas ecuaciones tienen que relacionarse con con la ecuación de Poisson en la gravedad Newtoniana; por lo que llevado de consistencia con la propia teoría de Newton, debemos exigir que el valor del parámetro $a = -1$.

Definición 29 *Se denominan ecuaciones de campo de Einstein sin constante cosmológica al conjunto de 10 ecuaciones independientes entre sí, definidas de forma tensorial por medio de la relación:*

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

(donde estamos tomando la notación expuesta hasta este momento)

2.6.1 Efectos de estudio de campo débil en las ecuaciones de Einstein

Al trabajar con un campo gravitacional débil, los efectos de curvatura pasan a ser poco considerables. Esto nos permite poder trabajar con una expresión alternativa de las ecuaciones de Einstein, pues colapsan sobre las componentes 00.

$$R_{00} = -\kappa(T_{00} - \frac{1}{2}Tg_{00})$$

Situándonos en un marco teórico similar al expuesto, un espacio tiempo débilmente curvado, encontramos un sistema de coordenadas que nos permite $g_{00} \equiv 1$. Exponiéndolo desde la definición del tensor de Ricci encontramos que:

$$R_{00} = \partial_0 \Gamma_{0\mu}^\mu - \partial_\mu \Gamma_{00}^\mu + \Gamma_{0\mu}^\nu \Gamma_{\nu 0}^\mu - \Gamma_{00}^\nu \Gamma_{\nu\mu}^\mu$$

Como los efectos de curvatura son prácticamente nulos, los términos Γ_{ab}^c tienden al cero, por lo que en nuestra aproximación serán considerados efectos perturbativos despreciables. Imponiendo una métrica estacionaria: $R_{00} = -\partial_i \Gamma_{00}^i$, y mediante una aproximación a primer orden en $h_{\mu\nu}$: $\Gamma_{00}^i \equiv \frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_j h_{00}$; y por lo tanto acabamos recogiendo en la expresión $R_{00} \equiv -\frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_j \partial_i h_{00}$.

Al aplicar las deducciones en la ecuación de campo y asumiendo que la distribución de materia se corresponde con: $p/c^2 \ll \rho$ - aproximación que nos permite simplificar la expresión del tensor de momento-energía, llegamos a la relación: $\begin{cases} \frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_j \partial_i h_{00} \equiv \kappa (T_{00} - \frac{1}{2} T) \\ T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu \Rightarrow T = \rho c^2 \end{cases}$ considerando además que las partículas del fluido tienen velocidades pequeñas comparadas con los fotones que componen la luz; éste hecho nos permite dar pie a aproximar $\gamma \equiv 1 \Rightarrow u_0 \equiv c$. La ecuación nos quedará definida como $\frac{1}{2} \delta^{ij} \partial_i \partial_j h_{00} \equiv \frac{1}{2} \kappa \rho c^2$ - donde reescribimos $\delta^{ij} \partial_i \partial_j = \nabla^2$. Asumiendo que $g_{00} = (1 + \frac{2\Phi}{c^2})$ nos queda finalmente que $h_{00} = \frac{2\Phi}{c^2}$ y que por lo tanto, de manera natural, volvemos a reformular la ecuación de Poisson de la teoría de la gravitación de Newton:

$$\nabla^2 \Phi \equiv 4\pi G \rho$$

Los efectos aproximados para un campo gravitatorio débil en el que se han asumido efectos despreciables de curvatura como correcciones a órdenes de magnitud mayores, nos describen un espacio-tiempo prácticamente plano.

2.6.2 La famosa constante cosmológica (Λ)

Situémonos en el contexto histórico que toca.

Einstein introduce un parámetro denominado constante cosmológica ya que su ambición era la construcción matemática de un modelo del Universo que fuera inmutable y estático. Estamos a mediados de 1916, momento en el que todo el Universo conocido era la Vía Láctea (nuestra galaxia), y se interpretaba que se constituía como una distribución uniforme de estrellas fijas. La introducción, veremos ahora "forzada" de esta parámetro, nos lleva a la existencia de un Universo estático (entraremos en detalle por medio de las ecuaciones de Friedmann en posteriores capítulos). No es hasta 1929, cuando Hubble el padre de la astronomía moderna, descubre la expansión de El Universo midiendo distancias y desplazamientos al rojo en galaxias cercanas. Se prueba entonces que El Universo está en expansión y la necesidad de un término cosmológico desaparece. Hasta que entorno a 1998, con las observaciones de un señor llamado Turner, descubrimos que existe algo denominado "energía oscura", y se ve que el valor de esta constante no es cero, pero sí próximo a él: $\Lambda \leq 10^{-47} (km^{-2})$

Las ecuaciones de Einstein son:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

En las derivaciones se propuso que el término: $K_{\mu\nu}$ fuera lineal dependiendo de un conjunto de parámetros (a, b, λ) . Se asumió que solo contenía términos lineales en las segundas derivadas de $g_{\mu\nu}$, lo que nos condujo a afirmar: $\lambda = 0$. Dado que la relación: $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, implicaba que $\nabla_\mu K^{\mu\nu} = 0$. Además se cumple que: $\nabla_\mu g^{\mu\nu} = 0$. Así pues, se puede asumir que

añadiendo cualquier constante que multiplicara a $g_{\mu\nu}$ en el lado izquierdo de la relación se seguiría cumpliendo la construcción axiomática generada.

Definición 30 *Se denomina ecuaciones de campo de Einstein con constante cosmológica o simplemente ecuaciones de campo de Einstein al conjunto de 10 ecuaciones independientes entre sí, definidas de forma tensorial por medio de la relación:*

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

(donde estamos tomando la notación expuesta hasta este momento) y en este caso el parámetro Λ es una constante universal de la naturaleza conocida como constante cosmológica.

Esta relación es la ecuación fundamental de la Relatividad General, la cual relaciona la métrica (geometría del espacio-tiempo) con el tensor energía momento. Realizando un análogo al tensor de Einstein expuesto en el primer capítulo, en física se suele referir a esta relación como el tensor de Einstein (con constante cosmológica):

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu}$$

(es un tensor simétrico y covariante de orden dos). A partir de ahora nos referiremos al tensor de Einstein como el tensor de Einstein (con constante cosmológica).

Nota 10 *Se puede demostrar que en el límite de un campo débil, la ecuación de campo de la gravedad newtoniana que se deduce de las ecuaciones de Einstein es: $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho - \Lambda c^2$*

Capítulo 3

Análisis de posibles universos por existir

Una vez deducidas las ecuaciones de Einstein que describen la naturaleza del espacio-tiempo, ¿podemos dar una solución analítica? A pesar de tener garantizada la existencia y unicidad de las soluciones - en términos de las condiciones de frontera de Cauchy - Einstein solamente fue capaz de dar una única solución que representa el caso más simétrico posible: distribución homogénea e isotrópica de materia y energía a lo largo del espacio. A día de hoy solamente conocemos un par de soluciones: la solución de Schwarzschild (simetría esférica), la solución de Kerr, la solución de Friedman (Friedmann), y unas pocas más muchísimo menos realistas.

3.1 Solución de Schwarzschild

La simetría esférica moldea gran parte de nuestra realidad observable de lo que es El Universo (planetas, estrellas, agujeros negros,...). Si bien, exponer el concepto de la simetría esférica a un espacio tiempo, es aplicar el grupo de simetrías $SO(3)$, y de cuyas órbitas - conjunto de puntos que resultan de la acción de un grupo sobre un punto base determinado, el de la rotación en este caso - constituye el conjunto de esferas de radios arbitrarios (positivos - con cota inferior - de acuerdo a las leyes de la física), cuyo representante podemos establecer como $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ por elección. Es por ello, propiedad universal, establecer que: "El Universo es esféricamente simétrico".

- **Hipótesis isotrópica.** El espacio-tiempo se constituye como un "tejido" de simetría esférica.
- **La existencia de masa estática \Rightarrow la existencia de un campo gravitatorio estático.** Este hecho tiene por consecuencias: (1) la independencia de las componentes de la métrica respecto al tiempo - el tiempo pasa igual en todos los puntos situados en la misma esfera; (2) la invariancia de la métrica bajo cambios del tipo: $t \rightarrow -t$; el sentido del movimiento es inexistente.
- **Ausencia de materia en el exterior de la masa:** $T_{ij} = 0$. Podemos considerar ecuaciones de campo en el vacío.

El hecho de que el espacio-tiempo sea simétrico es equivalente a que su métrica sea invariante respecto a un cierto tipo de transformaciones, o lo que es lo mismo, de la existencia de un

conjunto de Killing asociados a estas transformaciones. En nuestro caso, las transformaciones correspondientes hacen que la métrica sea invariante bajo las rotaciones.

Establecemos $S^2 \subset \mathfrak{R}^3$ como una subvariedad de simetría maximal ($\frac{n(n+1)}{2} = 3$ Killings - $n = 2$) - obtenida al imponer una restricción a la métrica euclídea de $r, t = constante$ - métrica sobre una órbita). Por consiguiente:

$$ds^2|_{inducida} = f^2(R, T)(d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta)d\phi^2)$$

∂_ϕ es de Killing (ϕ no debería aparecer en la métrica) ya que se corresponde a una rotación.

Aplicando el siguiente resultado - cuya demostración podemos encontrar con todo lujo de detalle en el Weinberg - se establece el siguiente teorema:

Teorema 4 *Si una variedad contiene una subvariedad maximalmente simétrica, siempre podemos encontrar unas coordenadas R, T ortogonales tales que la métrica de la variedad se pueda escribir como:*

$$ds^2 = g_{00}(R, T)dT^2 + 2g_{0R}(R, T)dRdT + g_{RR}(R, T)dR^2 + f^2(R, T)(d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta)d\phi^2)$$

Es decir, $g_{T\theta} = g_{R\theta} = g_{T\phi} = g_{R\phi} = 0$. La nueva métrica más general que podemos escribir en simetría esférica toma la **forma de Schwarzschild**:

$$ds^2 = -e^{2\Phi(t,r)}dt^2 + e^{2\Lambda(t,r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta)d\phi^2)$$

En este caso, las coordenadas de Schwarzschild r, t se definen como:

$$r = f(R, T) \Rightarrow dR = f_R dR + f_T dT, e^\Phi dt = bdT + adr$$

3.1.1 Significado físico de la métrica

Se puede demostrar que tomando un vector de Killing $\vec{\zeta} = \partial_t$ (un espacio-tiempo estacionario) en la métrica de Schwarzschild (un sistema con simetría esférica) nos determina un espacio-tiempo estático. Tomando un espacio-tiempo estático con la métrica de Schwarzschild, y un vector temporal tipo killing tal que: $\vec{\zeta} = \partial_t$, trataremos de encontrar el significado físico de r, ϕ, Λ .

Significado físico de la variable r . Imponemos a la métrica $r, t = constantes$. Retomamos así la métrica 2-esfera: $ds^2 = r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta)d\phi^2)$. Integrando para todo θ, ϕ obtenemos el área de esta 2-esfera. Es decir, podemos definir el parámetro r mediante la relación:

$$r^2 = \frac{A}{4\pi} - (A \equiv \text{área } S^2 \text{ con } r=\text{const})$$

Con esta definición, el parámetro r se establece como la distancia.

Nota 11 *Podemos emplear el uso de definiciones apoyadas en el área, ya que es una magnitud bien definida en RG - la podemos calcular localmente - mientras que la distancia al centro no se puede definir - ya que la existencia de un centro no se nos garantiza.*

Imponemos un espacio-tiempo asintóticamente plano, es decir, lejos de la distribución de masa y energía que provoca la distorsión del tejido espacio-temporal, podamos retomar a la métrica de Minkowski:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r) = 0, \lim_{r \rightarrow \infty} \Lambda(r) = 0$$

Seguindo con nuestro estudio, el significado físico que adquiere Λ sería el de un parámetro con el que medir distancias radiales. Finalmente para obtener el sentido físico de Φ podemos proceder con el siguiente experimento. Enviando un fotón desde r_1 a r_2 , éstos, han de cumplir:

$\begin{cases} (1) k_\alpha k^\alpha = 0 \\ (2) k^\alpha \nabla_\alpha k^\beta = 0 \end{cases}$ ya que por un lado (1) son partículas de luz; y (2) son geodésicas. De

hecho, es fácil ver que si $\vec{\zeta}$ es de Killing, entonces se cumple: $g_{\alpha\beta} \zeta^\alpha k^\beta$ es constante a lo largo de la trayectoria de un fotón:

$$k^\alpha \nabla_\alpha (k^\beta \zeta_\beta) = (k^\alpha \nabla_\alpha k^\beta) \zeta_\beta + k^\alpha k^\beta \nabla_\alpha \zeta_\beta = 0$$

De esta forma, aplicando los resultados con un Killing $\vec{\zeta} = \partial_t$, de componentes $\zeta^\alpha = \delta_0^\alpha$ tal que $\zeta \zeta = g_{00}$, podemos definir el 4-vector velocidad para un observador estacionario como: $u^\alpha = \frac{\zeta^\alpha}{\sqrt{-\zeta_\mu \zeta^\mu}}$. De tal forma, que como vemos este análisis nos permite desarrollar un estudio de las frecuencias de los fotones medidas por observadores estacionarios en r_1 y r_2 :

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{g_{\alpha\beta} \zeta^\alpha k^\beta|_{r_1}}{g_{\alpha\beta} \zeta^\alpha k^\beta|_{r_2}} = \frac{g_{\alpha\beta} \zeta^\alpha k^\beta|_{r_1} \sqrt{-\zeta \zeta}|_{r_2}}{g_{\alpha\beta} \zeta^\alpha k^\beta|_{r_2} \sqrt{-\zeta \zeta}|_{r_1}} = \frac{\sqrt{-g_{00}(r_2)}}{\sqrt{-g_{00}(r_1)}} = e^{\Phi(r_2) - \Phi(r_1)}$$

Es decir, el factor Φ está relacionado con el redshift gravitacional (o corrimiento al rojo).

Nota 12 Aplicando Minkowski con $k^\alpha = (h\nu, h\nu\vec{n})$ (donde \vec{n} es normalizada), y $u^\alpha = (1, \vec{0})$, obtenemos $-n_{\alpha\beta} k^\alpha u^\beta = h\nu$. Esto nos da el energía medida por un observador con velocidad u^α de un fotón.

3.1.2 Solución en el vacío

Resolvemos ahora las ecuaciones de Einstein en simetría esférica en el caso del vacío. Trabajando con todo lo establecido, el tensor energía-impulso ante la ausencia de distribuciones de masa y energía es cero: $T_{\alpha\beta} = 0$, y en particular $T = T_{\alpha\alpha} = 0$. Tenemos que las ecuaciones de Einstein vienen determinadas por:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \Leftrightarrow R_{\mu\nu} = \kappa (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T)$$

(donde estamos tomando la versión sin constante cosmológica a efectos de facilitar los cálculos; así mismo es equivalente la relación descrita con $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$). En este caso, $R_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow R = 0$. Si efectuamos una serie de cálculos largos, se pueden los símbolos de Christoffel a efectos de encontrar la forma implícita de la ecuación que estamos describiendo, obteniendo los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= A'; \Gamma_{10}^1 = \dot{\Lambda}; \Gamma_{22}^1 = -r e^{-2A}; \Gamma_{00}^1 = e^{2(\Phi-\lambda)} \Phi' \\ \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2(\theta) e^{-2A}; \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{r}; \Gamma_{23}^2 = -\sin(\theta) \cos(\theta); \Gamma_{13}^1 = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{23}^3 &= \cot(\theta); \Gamma_{11}^0 = \dot{\Lambda} e^{2(\lambda-\Phi)}; \Gamma_{10}^0 = \Phi'; \Gamma_{00}^0 = \dot{\Phi} \end{aligned}$$

empleando la notación siguiente: $f' = \partial_r f$, $\dot{f} = \partial_t f$. Calculamos directamente, las componentes de Ricci:

$$\begin{aligned} R_{00} &= e^{2(\Phi-\lambda)} [\Phi'' + (\Phi')^2 - \Phi' A' + 2 \frac{\Phi'}{r}] - \ddot{\Lambda} - (\dot{\Lambda})^2 + \dot{\Lambda} \dot{\Phi} \\ R_{11} &= -\Phi'' - (\Phi')^2 - \Phi' A' + 2 \frac{A'}{r} + e^{2(\lambda-\Phi)} [\ddot{\Lambda} + \dot{\Lambda}^2 - \dot{\Lambda} \dot{\Phi}] \\ R_{10} &= 2 \frac{\dot{\Lambda}}{r}; R_{22} = -e^{-2A} [1 + r(\Phi' - A')] + 1; R_{33} = \sin^2(\theta) R_{22} \end{aligned}$$

Aplicando ahora que: $R_{\alpha\beta} = 0$, llegamos a:

$$\begin{cases} R_{10} = 0 \Rightarrow \dot{\Lambda} = 0 \Rightarrow \Lambda = \Lambda(r) \\ R_{22} = 0 \Rightarrow \Phi' = \Phi'(r) \Rightarrow \Phi = \Phi(r) + g(t) \end{cases}$$

donde la función $g(t)$ siempre la podemos eliminar escogiendo un sistema de coordenadas temporales adecuadas:

$$e^{-2(\Phi(r,t))} dt^2 = e^{-2\tilde{\Phi}(r)} e^{2g(t)} dt^2 \equiv e^{-2\tilde{\Phi}(r)} dt'^2$$

Enviamos a 0 a toda la función de $g(t)$. Y dado que ninguna de estas funciones muestra dependencia temporal (así como en la métrica) podemos concluir que ∂_t es de Killing; y que por lo tanto, la solución obtenida es estática según Birkhoff (**Teorema de Birkoff**: "Toda solución en el vacío con simetría esférica es estática"). Aplicando ahora que es estática, podemos encontrar finalmente la solución de la métrica como:

$$e^{2(\Phi-\Lambda)}R_{11} + R_{00} = 0 \Rightarrow (\Lambda' + \Phi')\frac{1}{r} = 0 \Rightarrow \Phi' = -\Lambda'$$

Resultando: $\Phi(r) = -\Lambda(r)$ (con una constante de integración que negligiremos a efectos de poder ser eliminada con un origen de tiempo adecuado). Volviendo a efectuar $R_{22} = 0$ y aplicando ahora que $\Phi' = -\Lambda'$:

$$1 = e^{-2\Lambda}[1 - 2r\Lambda'] = \frac{d}{dr}[e^{-2\Lambda}r] \Rightarrow e^{-2\Lambda} = 1 + \frac{K}{r}$$

Sabiendo que se cumple la relación: $\Lambda(r) = -\Phi(r)$, se termina deduciendo que: $e^{2\Phi} = 1 - \frac{K}{r}$.

Para deducir el valor de la constante K procedemos de la siguiente forma. Si $K = 0$ obtenemos las ecuaciones de Minkowski en coordenadas polares: el valor de K lo podemos relacionar con la masa. Si ahora lo que hacemos es considerar no una ausencia total de masa, sino que por el contrario, supondremos una concentración lejana ($r \rightarrow \infty$) con la métrica en cartesianas. En el límite, la métrica es la de Minkowski con una pequeña perturbación $h_{\alpha\beta}$, concretamente será el coeficiente temporal $h_{00} = \frac{K}{r}$. Imponiendo que éste coincida con el límite newtoniano que habíamos deducido, es fácil obtener la relación:

$$h_{00} = \frac{-2\Phi}{c^2} = \frac{2GM}{c^2r}$$

donde Φ es el potencial newtoniano - no la componente de la métrica - que cumple que: $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$ y $\Phi = \frac{-GM}{r}$. Igualando los dos términos e imponiendo ahora sí unidades geométricas: $G = c = 1$; obtenemos que $K = 2M$.

Nota 13 Podemos deducir las ecuaciones de Einstein para la simetría esférica por medio del Lagrangiano de un espacio-tiempo con simetría esférica: $L = e^{2\Lambda}(\frac{dr}{d\lambda})^2 + r^2(\frac{d\theta}{d\lambda})^2 + r^2\text{sen}^2(\theta)(\frac{d\phi}{d\lambda})^2 - e^{2\Phi}(\frac{dx^0}{d\lambda})^2$; al que se le imponen las ecuaciones de Euler-Lagrange $\frac{d}{d\lambda}[\frac{\partial L}{\partial(\frac{dx^\alpha}{d\lambda}}] - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0$.

Definición 31 Dada un $M = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 - \{0\})$, con las coordenadas (t, r, θ, ϕ) . Se denomina **métrica de Schwarzschild o solución de Schwarzschild** a la solución más general para la métrica en el vacío que adquiere simetría esférica recogida por la ecuación:

$$ds^2 = (1 - \frac{r_0}{r})dt^2 + (1 - \frac{r_0}{r})^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta)d\phi^2)$$

Observar que cuando $M = 0$, adquirimos la métrica de Minkowski en esféricas.

Con esta métrica observaremos como la distorsión del espacio-tiempo vendrá determinada por distribuciones locales de masa y energía que efectuarán el fenómeno de la curvatura a escala local. Tenemos la existencia de dos singularidades: $r = 0$ y $r = r_0$. La última aparece cuando una estrella colapsa haciendo su radio menor a r_0 , dando lugar a un **agujero negro**. La esfera $r = r_0$ es conocida como **horizonte de sucesos**. Podemos evitar esta singularidad (singularidad matemática) considerando un $r > r_0$ (campo gravitatorio externo a una estrella) y efectuando un cambio de la carta en la propia variedad (extendiendo la variedad a $r > 0$). Procediendo como: $d\Omega^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta)d\phi^2$, podemos reescribir la métrica de Schwarzschild como:

$$ds^2 = (1 - \frac{r_0}{r})[dt^2 - \frac{dr^2}{(1-\frac{r_0}{r})^2}] - r^2d\Omega^2$$

Denotamos $dr_* = \frac{dr}{1-\frac{r_0}{r}}$. Integrando obtenemos: $r_*^2 = r + r_0 \ln(r - r_0)$. Definiendo ahora $v = t + r_*$ y considerando el cambio $(t, r) \mapsto (v, r)$ se tiene finalmente que la métrica de Schwarzschild en las coordenadas (v, r, θ, ϕ) es:

$$ds^2 = (1 - \frac{r_0}{r})dv^2 - 2dvdr - r^2d\Omega^2$$

donde en este caso: $-\infty < v < \infty, 0 < r < \infty, 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi$. Son las llamadas **coordenadas de Eddington-Finkelstein**. Este tipo de cartografías las trabajamos en el anexo de Cosmología.

3.2 Modelos Cosmológicos

¿Tiene sentido hablar de un modelo global que obedezca y describa la dinámica celeste? Y si es así, ¿cómo podríamos trabajar con él? Nos remontamos a 1929, cuando el astrónomo Hubble da a conocer al mundo su modelo de expansión de El Universo. Años anteriores a las observaciones de Hubble, los astrónomos habían observado un corrimiento al rojo en el espectro electromagnético de la luz obtenida al observar objetos más lejanos que nuestra galaxia. Hubble descubrió una correlación lineal entre la distancia de estos objetos y el desplazamiento al rojo. A esta correlación y su posterior interpretación se le conoce como *Ley de Hubble*.

Nota 14 *El flujo de Hubble es el movimiento de las galaxias a lo largo de El Universo debido exclusivamente al ejercicio de expansión de éste.*

Ley de Hubble. En un entorno local a un observador, el espacio-tiempo se proyecta en el espacio tangente, y el tiempo cósmico como el tiempo propio de los objetos en movimiento solidarios al fluido cósmico. En este contexto, tiene sentido hablar de *velocidad relativa* entre dos puntos en reposo respecto al fluido de las galaxias a distancia: $l(t): v(t) = \frac{dl(t)}{dt}$. Si bien, la única dependencia temporal de $l(t)$ viene dada por el factor de escala $a(t)$, de tal forma que $l(t) = \frac{a(t)l(t_0)}{a(t_0)}$. La velocidad relativa la podemos describir por medio de la relación:

$$v(t) = \frac{dl(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{a(t)l(t_0)}{a(t_0)} \right) = \frac{\dot{a}}{a} l(t)$$

es decir, es la velocidad resultante a la distancia entre los dos puntos. Identificando este movimiento de la materia con las observaciones hechas, se ha obtenido una constante de proporcionalidad (con dependencia temporal) denominada **constante de Hubble, $H(t)$** , y que en el presente viene determinada por el valor: $H_0 \equiv \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}$.

La **interpretación del redshift** (o corrimiento al rojo de la longitud de onda de la luz recogida de las galaxias lejanas) es el efecto físico producido por la velocidad relativa de las galaxias con respecto al observador. Éste solo tiene sentido en un entorno próximo al observador, de manera que el espacio-tiempo es prácticamente una proyección al espacio de Minkowski. Para distancias cosmológicas grandes, el efecto cambia. Los fotones (partículas que componen la luz) viajan hacia nosotros recorriendo geodésicas (satisfaciendo la relación: $c^2 dt^2 = dl^2$). Si consideramos el Universo como homogéneo (P.Cosmológico), la luz viaja hacia nosotros - situados en el origen de coordenadas - siguiendo trayectorias con θ, ϕ fijas. Por tanto: $d\phi = d\theta = 0$. Imponiéndolo a la métrica de Walker, obtenemos la relación:

$$c^2 dt^2 = dl^2 = a^2(t) \frac{dx^2}{1 - \frac{x^2}{K^2}} \rightarrow c dt = \pm a(t) \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2/K^2}}$$

Asumiendo como criterio de signos + correspondiéndose al cono de luz que viene hacia el futuro; y - al cono de luz que proviene del pasado. Tomando como signo negativo (cuando dt aumenta y cuando dx disminuye), e integrando (t_1 tiempo de emisión, t_0 tiempo de recepción, T_0 , y T_1 tiempo de retardo de la emisión y el retardo respectivamente):

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{c}{a(t)} dt = - \int_{x_1}^{x_0} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2/K^2}} dx$$

$$\int_{t_1+T_1}^{t_0+T_0} \frac{c}{a(t)} dt = - \int_{x_1}^{x_0} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2/K^2}} dx$$

Como la integral en x es la misma, las dos integrales en t han de ser iguales:

$$\int_{t_1+T_1}^{t_0+T_0} \frac{c}{a(t)} dt = \int_{t_1}^{t_0} \frac{c}{a(t)} dt$$

donde trabajando un poco la relación nos termina quedando la expresión:

$$\int_{t_1}^{t_1+T_1} \frac{c}{a(t)} dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} \frac{c}{a(t)} dt$$

$$\frac{cT_1}{a(t_1)} = \frac{cT_0}{a(t_0)}$$

Es decir, nos termina quedando que: $\frac{a(t_0)}{a(t_1)} = \frac{T_0}{T_1} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1}$; con: $\frac{\lambda_0 - \lambda_1}{|\lambda_1|} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - 1 \iff 1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}$ (con $a(t_0) = 1$). El redshift cosmológico no es otra cosa que la expansión de el Universo. Existe entonces un fenómeno similar al efecto Doppler debido a las velocidades de alejamiento de las galaxias más próximas pero sin que intervengan velocidades. Así mismo observamos que en un Universo en expansión el redshift es positivo (corrimiento al rojo), mientras que para otro en contracción la radiación se acerca al azul (blueshift).

Si desarrollamos en serie el inverso del factor de escala alrededor de $t = t_0$, y lo cortamos en segundo orden se obtiene la serie de Taylor dada por:

$$z = \frac{a_0}{a} - 1 \approx \frac{\dot{a}_0}{a_0}(t_0 - t) + \left[\left(\frac{\dot{a}_0}{a_0} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\ddot{a}_0}{a_0} \right] (t_0 - t)^2 \equiv H_0(t_0 - t) + H_0^2 \left[1 + \frac{1}{2} q_0 \right] (t_0 - t)^2$$

donde el parámetro q_0 se denomina **parámetro de desaceleración** y es el valor actual de la función del tiempo: $q = -\frac{\ddot{a}}{aH^2}$

3.2.1 Deducción de las ecuaciones de Friedmann

Retomando a la métrica de Robertson-Walker, la cual nos describe un universo homogéneo e isótropo, con un tensor energía-momento de un fluido perfecto, la ecuación de Einstein nos permite obtener dos ecuaciones diferenciales de segundo orden, no lineales, denominadas de Friedmann. Calculamos los símbolos de Christoffel a partir de la relación

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\epsilon\alpha} (g_{\epsilon\mu,\lambda} + g_{\epsilon\lambda,\mu} - g_{\mu\lambda,\epsilon})$$

junto con la métrica conocida de Robertson-Walker

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1-\epsilon r^2} + r^2 d\Phi^2 \right]$$

y a partir de estos, el tensor de Ricci y el escalar de Ricci. Se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} R_0^0 = 3\frac{\ddot{a}}{a} \\ R_1^1 = R_2^2 = R_3^3 = \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{(2\dot{a}^2 + 2\epsilon)}{a^2} \\ R_{\alpha}^{\beta} = 0, \forall \alpha \neq \beta \\ R = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{(\dot{a}^2 + \epsilon)}{a^2}\right) \end{cases}$$

Fundamentándonos en un tensor energía-momento para un fluido perfecto: $T_{\alpha\beta} = (\rho + p)u_{\alpha}u_{\beta} + pg_{\alpha\beta}$; y aplicando el conjunto a la descripción del tensor de Einstein $G_{\alpha\beta}$ (con constante cosmológica) se obtiene el nuevo sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \rho = \frac{1}{8\pi} \left[3\frac{(\dot{a}^2 + \epsilon)}{a^2} - \Lambda \right] \\ p = \frac{-1}{8\pi} \left[2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{(\dot{a}^2 + \epsilon)}{a^2} - \Lambda \right] \end{cases}$$

Dado que $a = a(t)$, es directo ver que: $p = p(t)$, $\rho = \rho(t)$. Hemos deducido entonces una ecuación estado del tipo $p = p(\rho)$ cuya representación paramétrica definida por $p = p(t)$, $\rho = \rho(t)$ vendrá recogida por la expresión anterior. Arreglando la primera relación y sumando la primera con la segunda, se obtienen las **ecuaciones de Friedmann**.

$$\begin{cases} \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \\ \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}\rho - \frac{\epsilon}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \end{cases}$$

Las podemos reescribir en función del parámetro de desaceleración y de la constante de Hubble como:

$$\begin{cases} -qH^2 = -\frac{4}{3}\pi(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \\ H^2 = \frac{8\pi}{3}\rho - \frac{\epsilon}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \end{cases}$$

Podemos deducir también derivando con respecto al tiempo, y sumando las relaciones expuestas: $\dot{\rho} = -3(\rho + p)\frac{\dot{a}}{a}$.

Las ecuaciones de Friedmann nos relacionan tres variables entre sí $(a(t), \rho(t), p(t))$, incluyen 3 incógnitas y 2 parámetros libres: la curvatura y la constante cosmológica. Para resolver el sistema y obtener la evolución de los posibles universos - la evolución del factor de escala para cada curvatura - es necesario aplicar una tercera ecuación: se conoce como **ecuación de estado** $p = p(\rho)$.

La ecuación de estado - por lo general - admite una factorización del tipo $p = w\rho$ - donde aparecerá una constante de proporcionalidad que dependerá del constituyente de materia o energía con el que se trabaje. La designamos como w^i y cumple que: $-1 \leq w^i \leq 1$. Analizando esta última relación es directo, pasado de una integración, que la evolución del parámetro $a(t)$ estará relacionada con la densidad como:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = -3(\rho + p)\frac{\dot{a}}{a} \\ p = w\rho \end{cases} \Rightarrow \rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w)}$$

(el subíndice 0 indica el instante actual, y el subíndice t un tiempo $t > t_0$) Este resultado - que no es más que la evolución de la densidad en función del factor de escala - nos permite darle una nueva interpretación a las variables Λ y la curvatura ϵ , como densidades de energías correspondientes.

- **Caso constante cosmológica.** Se interpreta como una densidad de energía constante $p_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi}$, con $w = -1$. Es decir, la energía de la constante cosmológica se relaciona con la energía del vacío, ya que se interpreta que en cualquier instante de un universo, volúmenes propios iguales tendrán la misma energía de constante cosmológica.
- **Caso energía de curvatura.** Se define una densidad de energía asociada a la curvatura: $p_\epsilon = -\frac{3\epsilon}{8\pi a^2}$; nula si la curvatura es nula.

Esto nos permite reescribir las ecuaciones de Friedmann en función de estas densidades de energía como:

$$\begin{cases} \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi[(\rho + \rho_\Lambda) + 3(p + p_\Lambda)] \\ \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}(\rho + \rho_\Lambda + \rho_\epsilon) \end{cases}$$

Tenemos que tener en cuenta que estamos suponiendo que en el fluido cósmico existen interacciones entre distintos constituyentes; resultado de aplicar las leyes de Dalton ("la presión total vendrá dada por la suma de las presiones parciales p_i de cada uno de las componentes interaccionadas"). Deducimos que la relación anterior muestra de forma implícita: $p = \sum_i p_i = w^i \rho_i$, $\rho = \sum_i \rho_i$

En una descripción todavía más genérica de la dinámica de los posibles universos, las relaciones nos quedan como:

w	$\rho(a)$	Forma de la densidad de energía
+1	$\rho \sim a^{-6}$	Campos escalares sin masa, estado estacionario
+1/3	$\rho \sim a^{-4}$	Materia relativista y radiación
0	$\rho \sim a^{-3}$	Materia no relativista (polverulenta)
-1/3	$\rho \sim a^{-2}$	Energía de curvatura - cuerdas cósmicas
-2/3	$\rho \sim a^{-1}$	Paredes de dominios
$-1/3 > w > -1$	$\rho \sim a^{-3(1+w)}$	Quintaescencia
-1	$\rho \sim a^0$	Constante cosmológica o energía de vacío
< -1	$\rho \sim a^n, n > 0$	
Energía fantasma		

Table 3.1: Dependencia de la densidad de energía para diferentes ecuaciones de estado

$$\begin{cases} \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi[\sum_i \rho_i + 3w^i \rho_i] \\ (\frac{\dot{a}}{a})^2 = \frac{8\pi}{3}(\sum_i \rho_i) \\ \dot{\rho} = -3(\sum_i \rho_i + w^i \rho_i)\frac{\dot{a}}{a} \end{cases}$$

En el caso de que uno de los constituyentes domine energéticamente sobre los demás, la contribución de los demás se desprecia, y el factor de escala seguirá la evolución que proporcione las relaciones expuestas, con la ecuación de estado del constituyente energéticamente dominante. Esta es la aproximación usual que se adopta en Cosmología y generalmente es una aproximación que nos permite describir la mayor parte de los 13.700 millones de años aproximados de nuestro universo. Las ecuaciones de Friedmann nos indican que El Universo no es estático; de hecho **las soluciones que nos permiten obtener un Universo estático son generalmente inestables**: salvo en el caso en el que $\Lambda = 0$, con $w = -1/3$ (cualquier pequeña perturbación provocaría la pérdida del equilibrio con la subsiguiente expansión o contracción - se les denomina **Universos Holgazanes**). De hecho la expansión de el Universo no es constante: o bien se está acelerando ($\ddot{a} > 0$) o bien decelerando ($\ddot{a} < 0$). Es interesante introducir los siguientes parámetros que definiremos a continuación.

Dado que estamos en un sistema que evoluciona con el tiempo, y en el que el ritmo de expansión dependerá de las proporciones de energía que consideremos, así como que estas mismas densidades de energías disminuirán con la propia expansión; sería interesante ver como evolucionará la curvatura con la densidad de sustancias consideraras. De la relación:

$$(\frac{\dot{a}}{a})^2 = \frac{8\pi}{3} \sum_i \rho_i - \frac{\epsilon}{a^2}$$

La curvatura es nula, sí y solo sí, la densidad es igual a la **densidad crítica**: $\rho_c := \frac{3H^2}{8\pi}$. En general, será función del tiempo, ya que: $H = H(t)$, y nos permitirá definir las **densidades adimensionales de energía** como:

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c} = \sum_i \frac{\rho_i}{\rho_c} \equiv \sum_i \Omega_i$$

donde Ω es una densidad adimensional total de energía (salvo la de curvatura). Por lo general, estas densidades de energía son parámetros que evolucionarán con el tiempo: $\Omega = \Omega(t), \Omega_i = \Omega_i(t)$ puesto que $\rho_i = \rho_i(t), \rho_c = \rho_c(t)$ (esto incluye la constante cosmológica, ya que aunque ρ_Λ sea constante; Ω_Λ en general dependerá del tiempo y la dependencia de la densidad crítica con H , salvo que domine la constante cosmológica).

Se puede deducir en base a lo expuesto que: $\frac{\epsilon}{a^2} = (\Omega - 1)H^2 \Leftrightarrow \Omega = \frac{\epsilon}{a^2} + 1$, lo que nos permite deducir que para cualquier instante de tiempo se cumplirá la relación:

$$\begin{cases} \epsilon = 0 \Leftrightarrow \Omega = 1 \Leftrightarrow \rho = \rho_c \\ \epsilon = +1 \Leftrightarrow \Omega > 1 \Leftrightarrow \rho > \rho_c \\ \epsilon = -1 \Leftrightarrow \Omega < 1 \Leftrightarrow \rho < \rho_c \end{cases}$$

En consecuencia, en un universo plano (euclídeo) la densidad adimensional no depende del tiempo, sino que es siempre igual a la unidad, y por lo tanto, la densidad de energía del universo varía linealmente como la densidad crítica. En un universo con curvatura positiva, la densidad de energía es mayor que la densidad crítica aunque puede tomar valor próximos a un entorno de ésta. Por último en un Universo con curvatura negativa, la densidad de energía es menor que la densidad crítica, y la densidad adimensional es siempre menor que la unidad, pudiendo adoptar valores tan próximos como se quiera al cero.

Nota 15 *El valor de la densidad adimensional en el momento actual se denomina parámetro de densidad (nos referiremos a ella tanto a la densidad total Ω_0 , como a la correspondiente a cada ecuación de estado Ω_{i_0}). Serán valores constantes.*

Nota 16 *Combinando las ecuaciones anteriores, se puede deducir el denominado **densidad***

adimensional de energía de curvatura: $\Omega_\epsilon = \frac{-\epsilon}{a^2 H^2}$, nos permite deducir $\begin{cases} \epsilon = +1 \Rightarrow \Omega_\epsilon < 0 \\ \epsilon = 0 \Rightarrow \Omega_\epsilon = 0 \\ \epsilon = -1 \Rightarrow \Omega_\epsilon > 0 \end{cases}$;

el cual nos da pie a que por medio de las relaciones anteriores, podamos reescribir:

$$\Omega = \sum_i \Omega_i = 1$$

igualdad que es válida para cada instante del tiempo cosmológico siempre que las densidades adimensionales de energía incluyan la energía de curvatura.

De forma equivalente, combinando esta nueva relación con las anteriores, es directo encontrar: $H = H_0 \sqrt{\sum_i \Omega_{i_0} (1+z)^{3(1+w^i)}}$. Es una relación que siempre nos será válida, siempre y cuando, se incluya la curvatura como una densidad de energía, y nos permitirá una fácil integración numérica para obtener edades y distintas medidas de distancia en el Universo en función del desplazamiento al rojo.

El **parámetro de desaceleración** lo podemos reescribir en función de las densidades y vendrá recogido por la siguiente expresión: $q = \frac{1}{2}(\sum_i \Omega_i + 3w^i \Omega_i)$

Podemos obtener una mejor aproximación en el cálculo de la edad de El Universo si procedemos de la siguiente forma. Combinando las relaciones expuestas, se encuentra, por medio de las ecuaciones de Friedmann: $(\frac{\dot{a}}{a})^2 = H_0^2 \sum_i \Omega_{i_0} (\frac{a_0}{a})^{3(1+w^i)}$. Integrando por variables seraradas entre $t = 0$, cuando $a = 0$ y un tiempo t :

$$t = \int_0^t dt = \int_0^a \frac{da}{H_0 a \sqrt{\sum_i \Omega_{i_0} (\frac{a_0}{a})^{3(1+w^i)}}$$

Despreciamos contribución de la curvatura (estamos suponiendo que el universo es de curvatura nula, donde domina energéticamente una única ecuación de estado) la integración es directa. En el instante de tiempo actual o edad del universo t_0 para el cual $a = a_0 \Rightarrow t_0 \approx \frac{2}{3(1+w)H_0}$. Si bien, no es válida para el caso de un universo euclídeo dominado por constante

Λ	ϵ	ρ_{w_0}	w	Comentario
0	+1	$\frac{3}{8\pi a_0^2}$	-1/3	Universos dominados por cuerdas cósmicas
$\neq 0$	+1	$\frac{3-\Lambda a_0^2}{8\pi a_0^2}$	$\frac{1-\Lambda a_0^2}{\Lambda a_0^2 - 3}$	La densidad de energía equilibra la constante cosmológica.

Table 3.2: Valores para obtener un Universo estático

cosmológica; la razón es que al integrar el factor de escala no puede anularse, por lo que tomará un valor finito a_1 en el origen del tiempo cósmico, dando lugar a: $t_0 \approx \frac{\ln(a_0/a_1)}{H_0}$

Finalmente, la evolución de un universo euclídeo ($\epsilon = 0$) dominado por una única ecuación de estado viene determinada por:

$$\frac{t}{t_0} = \frac{H_0}{H} \Rightarrow (1+z) = \frac{a_0}{a} = \left(\frac{t_0}{t}\right)^{\frac{2}{3(1+w)}}$$

Llegados a este punto, vamos hallar las soluciones de las ecuaciones de Friedmann para varios casos, que nos originarán diferentes modelos cosmológicos ("cosmologías") los cuales se distinguirán por el valor de la constante de Hubble H_0 y el de los parámetros de densidad Ω_{w_0} para cada ecuación de estado existente en el Universo. **Las soluciones que damos no son las únicas. El Universo en el que vivimos no es más que un caso particular de esta familia de soluciones; si bien, la hipótesis de unicidad (en el sentido de saber si las leyes de la física son únicas de nuestro universo) no la podemos jugar, pues a menos de que seamos "Dios" una pregunta de este calibre carece de sentido pleno a nuestro plano lógico-existencial: es hacer de las matemáticas filosofía, cosa que trataremos en lo menor de lo posible hacer.** Hacemos una exposición resumida de cada universo, haciendo siempre referencia a las ecuaciones de Friedmann (son con las que trabajamos).

3.2.2 Universo de Einstein y Universo De Sitter

- **Universo de Einstein.** Einstein parte de un universo compuesto por materia no relativista y sin constante cosmológica. En estas circunstancias no existe una solución estática, y la única forma de conseguirlo es introduciendo una constante cosmológica. Si bien, estos Universos holgazanes no son soluciones estables.
- **Universo de De-Sitter.** Es un Universo sin materia y de curvatura nula en expansión. Si a las ecuaciones de Friedmann le imponemos que la densidad de energía a otras ecuaciones de estado sean nula, y que la curvatura, sea nula, obtenemos: $\Lambda = 3H^2$ con $q = -1$ (expansión acelerada). $H \neq H(t) \Rightarrow a = a_1 \exp(H_0 t)$. El modelo de expansión resultante es exponencial, y el origen de los tiempos en el factor de escala es finito a_1 . La edad de este universo será: $t_0 = \frac{\ln(a_0/a_1)}{H_0} = \frac{\ln(z_M+1)}{H_0}$ (z_M - máximo corrimiento al rojo detectado)

3.2.3 Universos euclídeos con una única ecuación de estado

Imponiendo $\epsilon = 0$ en la segunda ecuación de estado de Friedmann, así como asumiendo una ecuación de estado con $w > -1$ (constante), obtenemos: $a = a_0 \left(\frac{3(1+w)H_0 t}{2}\right)^{\frac{2}{3(1+w)}}$. Para un tiempo $t = t_0 \Rightarrow t_0 = \frac{2}{3(1+w)H_0}$. Esto nos permite reescribir la relación anterior como: $a = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3(1+w)}}$; por la relación al desplazamiento al rojo: $t = \frac{2}{3(1+w)H_0} (1+z)^{-3(1+w)/2}$; deduciéndose por último: $\rho = \rho_0 \left(\frac{t_0}{t}\right)^2$ (donde estamos tomando que al ser curvatura nula $\rho_0 = \rho_{c0} = 3H_0^2/(8\pi)$)

w	Densidad de Energía	q
+1/3	Radiación	Ω_r
0	Pulverulenta	$\Omega_m/2$
-1/3	Cuerdas Cósmicas	0
-2/3	Paredes	$-\Omega_p/2$
-1	Constante Cosmológica	$-\Omega_\Lambda$

Table 3.3: Valores de la desaceleración en los que domina una única ecuación de estado

Table 3.4: Edad de un universo ecúlideo dominado por una única ecuación de estado

w	Edad H_0^{-1}
+1/3	1/2
0	2/3
-1/3	1
-2/3	2
-1	$\ln(a_0/a_1)$

Estos comportamientos asintóticos son válidos para una $w = \text{const}$, siempre y cuando $w \neq -1$, que corresponde con el modelo De Sitter.

3.2.4 Universos dominados por la masa en reposo

Se considera nula la constante cosmológica, y la densidad de energía es debida únicamente a la materia no relativista: $\rho \equiv \rho_{m0} \Rightarrow \Omega_0 \equiv \Omega_{m0} \Rightarrow q_0 = \Omega_0/2$. Estos modelos presentan una singularidad en el origen de los tiempos cosmológicos, por los que el factor de escala llegará a un valor bastante reducido como para que la materia pase de no relativista a relativista (la cual corresponde a otra ecuación de estado). En este caso, las ecuaciones no serán válidas.

- **Curvatura nula (Universo de Einstein-Sitter):** Constituye una aproximación de nuestro universo actual para pequeños desplazamientos al rojo. Con curvatura nula, la densidad resulta ser la crítica, y $\Omega_{m0} = 1 \Rightarrow q_0 = 1/2$. Para el caso $w = 0$:

$$\begin{cases} a = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} \\ 1 + z = \left(\frac{t_0}{t}\right)^{2/3} \\ t_0 = \frac{2}{3H_0} \end{cases}$$

Este universo presenta una singularidad material y de curvatura en el origen. Su expansión es ilimitada; y tiende a una densidad de energía nula en el infinito.

- **Curvatura positiva:** La ecuación de Friedmann para el caso de materia no relativista se reduce a $\dot{a}^2 = \frac{\alpha}{a} - \epsilon$ donde estamos tomando $\alpha = \frac{8\pi}{3}\rho_{m0}a_0^3 = \frac{\Omega_{m0}}{\pm H_0[\epsilon(\Omega_{m0}-1)]^{3/2}} > 0$. Cuando la curvatura es positiva, el factor de escala no puede crecer indefinidamente dado que la primera derivada del factor de escala toma valores imaginarios. El máximo valor que puede adoptar es α (con $\dot{a} = 0$). Introduciremos una función acotada como solución. Si realizamos el cambio $a = \alpha \text{sen}^2(Q/2)$ nos permite realizar la integración de la ecuación de Friedmann, en función de la nueva variable Q . Se nos permite obtener entonces: $t = \frac{\alpha}{2}(Q - \text{sen}(Q))$. El máximo valor $a_{max} = \alpha$ tendrá lugar para $Q = \pi$, con $t = \alpha\frac{\pi}{2}$, y el factor de escala volverá anularse con $Q = 2\pi$ correspondiente a $t = \pi\alpha$. Además que cuando $\pi < Q < 2\pi \Rightarrow \alpha\pi/2 < t < \pi\alpha \dot{a} < 0$ (ya que $\dot{a} = \frac{\alpha}{2}\text{sen}(Q)\dot{Q}$). Por consiguiente, el universo se expande hasta llegar a un máximo, y luego se contrae hasta llegar a otra singularidad que representa el fin del universo. El fin del universo tendrá lugar en un tiempo: $t_f = \alpha\pi = \frac{\pi\Omega_{m0}}{\pm H_0(\Omega_{m0}-1)^{3/2}} \equiv \frac{\pi\Omega_{m0}}{|H_0|(\Omega_{m0}-1)^{3/2}}$; junto con una edad del universo de $t_0 = \frac{\Omega_{m0}}{\pm 2H_0(\Omega_{m0}-1)^{3/2}} [\arccos(\frac{2-\Omega_{m0}}{\Omega_{m0}}) - \frac{2\sqrt{\Omega_{m0}-1}}{\Omega_{m0}}]$ (se obtiene hallando el valor Q_0 para el cual $a = a_0$, y realizando una sustitución - la cual no la daremos de forma explícita). Finalmente, podemos también obtener la densidad de energía en función del factor de escala como: $\rho_m = 8\rho_{c0} \frac{(\Omega_{m0}-1)^3}{\Omega_{m0}^2(1-\cos Q)^3}$

- **Curvatura negativa:** Procederemos de forma totalmente análoga al caso anterior, pero esta vez, introduciendo el cambio: $a = \alpha \text{senh}^2(\frac{Q}{2}) \Rightarrow t = \frac{\alpha}{2}(\text{senh}(Q) - Q)$. Obtenemos la edad del universo de forma totalmente análoga: $t_0 = \frac{\Omega_{m0}}{2H_0(1-\Omega_{m0})^{3/2}} \left[\frac{2(1-\Omega_{m0})^{1/2}}{\Omega_{m0}} - \ln\left(\frac{2(1-\Omega_{m0})^{1/2}}{\Omega_{m0}} + \frac{2-\Omega_{m0}}{\Omega_{m0}}\right) \right]$. En este caso eliminamos el signo \pm ya que en un universo con

un Big-Bang inicial siempre $H_0 > 0$. Finalmente, para la densidad de energía en función del factor de escala, vendrá determinado por: $\rho_m = 8\rho_{c0} \frac{(1-\Omega_{m0})^3}{\Omega_{m0}^2 (\cosh(Q)-1)^3}$ lo que nos permite observar que la densidad disminuye al aumentar el factor de escala, y que existe una singularidad material al origen de los tiempos cosmológicos.

3.2.5 Universos dominados por radiación

En estos modelos la constante cosmológica es nula, y la densidad de energía dominante es la de radiación y materia relativista: $\rho = \rho_{r0} \Rightarrow \Omega_o = \Omega_{r0} \Rightarrow q_0 = \Omega_0$. Estos modelos presentan una singularidad inicial en el origen de los tiempos cosmológicos, y son representativos de las primeras etapas de El Universo. Para valores suficientemente grandes del tiempo cosmológico la densidad de energía de la materia no relativista terminará dominando sobre la radiación; y por lo tanto las deducciones que realizaremos perderán su validez, siendo sustituidas por las del apartado anterior. Para valores reducidos del tiempo cosmológico, el factor de escala es suficientemente pequeño como para que la distancia característica de las zonas en contacto causal en el universo sean del orden de la longitud de onda Compton, momento en el que los efectos cuánticos serán representativos y la descripción matemática para la radiación dejará de ser válida, en este tipo de valores próximos a la singularidad.

- **Curvatura nula:** Dado que la curvatura es nula: $\Omega_{r0} = 1 \Rightarrow q_0 = 1$. Para el caso con $w = 1/3$ se deduce fácilmente:
$$\begin{cases} a = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2} \\ 1 + z = \left(\frac{t_0}{t}\right)^{1/2} \\ t_0 = \frac{1}{2H_0} \end{cases} .$$
 Este universo no está acotado, la expansión es ilimitada, tendiendo a una densidad de energía nula y presenta una singularidad material y de curvatura en el origen.
- **Curvatura positiva:** Directamente con la integración de la segunda ecuación de Friedmann, nos proporciona: $a = [(\frac{32\pi\rho_{r0}}{3})^{1/2} a_0^2 t - t^2]^{1/2}$. En este caso tenemos dos ceros: $t = 0$ y $t = a_0^2 \sqrt{32\pi\rho_{r0}/3} \equiv t_f$. Un universo de curvatura positiva dominado por radiación también tiene un origen, y un final en un tiempo $t = t_f$. Para ambos instantes encontraremos singularidades de densidad de energía y de curvatura. Reescribimos el tiempo $t_f = \frac{2\sqrt{\Omega_{r0}}}{\pm H_0(\Omega_{r0}-1)} \equiv \frac{2\sqrt{\Omega_{r0}}}{|H_0|(\Omega_{r0}-1)}$ (en este caso los signos \pm corresponde a "+" una fase de expansión con $H_0 > 0$ y "-" a una fase de contracción con $H_0 < 0$). La edad del universo se obtiene cuando $t = t_0 \Rightarrow t_0 = \frac{\sqrt{\Omega_{r0}\pm 1}}{|H_0|(\Omega_{r0}-1)}$ (en este caso el signo corresponde a las soluciones con el mismo $|H_0|$: cuando el universo se contrae (+), y cuando el universo se expande (-)). Finalmente la densidad se obtiene cuando $w = 1/3$ y equivale a: $\rho_r = \frac{3\Omega_{r0}}{8\pi[2\sqrt{\Omega_{r0}t - |H_0|(\Omega_{r0}-1)t^2]}$. En este caso, el factor de escala no puede crecer indefinidamente y el universo tiene un principio y un final en un tiempo finito.
- **Curvatura negativa:** En este caso obtenemos los siguientes resultados:

$$\begin{cases} a = [t^2 + (\frac{32\pi\rho_{r0}}{3})^{1/2} a_0^2 t]^{1/2} \\ a = [t^2 + \frac{2\sqrt{\Omega_{r0}}}{H_0(1-\Omega_{r0})} t]^{1/2} \\ t_0 = \frac{1-\sqrt{\Omega_{r0}}}{H_0(1-\Omega_{r0})} \end{cases}$$

La expansión no está limitada, y el doble signo de H_0 se ha omitido puesto que ahora en un universo con un Big-Bang inicial siempre se tiene que $H_0 > 0$.

Finalmente encontramos la evolución de la densidad como: $\rho_r = \frac{3\Omega_{r0}}{8\pi[2\sqrt{\Omega_{r0}t + H_0(1-\Omega_{r0})t^2]}^2$. La densidad varía como t^{-2} para los instantes iniciales y como t^{-4} para tiempos mayores.

Podemos concluir, que en un universo dominado por radiación, $a \sim t^{1/2}$ en los primeros instantes, luego $(1+z) \sim (t_0/t)^{1/2}$ y respectivamente $\rho \sim t^{-2}$.

3.2.6 Universos dominados por constante cosmológica

En este tipo de universos la densidad de energía asociada a la masa no relativista o a la radiación es nula o despreciable, ya sea porque inicialmente era así, o bien porque la expansión está suficientemente avanzada como para que sea así. La densidad de energía asociada a la constante cosmológica es constante, por lo tanto, debido a la expansión del universo, cualquier otra densidad de energía con el tiempo llegará a ser despreciable frente a la constante cosmológica. Luego, todos los modelos que contengan constante cosmológica y de expansión ilimitada terminarán dominados por la densidad de energía de la constante cosmológica. La densidad de energía es constante, y se verifica: $q = -\Omega_\Lambda = -\frac{\Lambda}{3H^2}$. El caso de curvatura nula constituye el modelo de De-Sitter. A continuación analizaremos los dos restantes:

- **Curvatura positiva:** Tanto en el caso de la curvatura nula como en éste, no puede existir singularidad inicial, ya que el factor de escala no puede anularse. El mínimo valor $a = a_1$ que corresponde al origen de los tiempos cosmológico $t = 0$ es el que anula la primera derivada del factor de escala. Luego, en estos modelos, en el origen de tiempos cosmológicos la velocidad de expansión es nula:

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} = \frac{1}{H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}} \\ a = \frac{\cosh(H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}t)}{H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}} \\ 1+z = \frac{\cosh(H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}t_0)}{\cosh(H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}t)} \end{cases}$$

Al contrario que en el caso de la radiación y el polvo, la expansión no está limitada aunque la curvatura sea positiva. Obtenemos el instante $t = t_0 \Rightarrow t_0 = \frac{\text{arccosh}(\sqrt{\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{\Omega_{\Lambda 0}-1}})}{H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}}$ que muestra que para una misma H_0 cuando el parámetro de densidad aumenta, la edad se reduce.

- **Curvatura negativa:** En este caso el factor de escala si puede anularse, por lo que existirá un Big-Bang cosmológico. La descripción de un universo de este tipo vendrá determinada

por:
$$\begin{cases} a = \frac{\sinh(H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}t)}{H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}} \\ 1+z = \frac{\sinh(H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}t_0)}{\sinh(H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}t)} \end{cases}$$
 La expansión es ilimitada y acelerada, ya que $q < 0$, pero existe una singularidad inicial que en este caso es únicamente de curvatura, dado que la

densidad es constante. La edad la obtenemos cuanto $t = t_0 \Rightarrow t_0 = \frac{\text{arcsenh}(\sqrt{\frac{\Omega_{\Lambda 0}}{1-\Omega_{\Lambda 0}}})}{H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda 0}}}$ donde al contrario que con la curvatura positiva, para un mismo valor de la constante de Hubble, la edad aumenta cuando lo hace el parámetro de la densidad.

3.2.7 Universos simbióticos

Cuando no podemos considerar que domina una única ecuación de estado, no siempre existirán soluciones analíticas de las ecuaciones de Friedmann. En este apartado damos una solución más general posible a las ecuaciones de Friedmann. Asumiendo w constante, puede expresarse que: $\frac{\dot{a}}{a} = H_0\sqrt{\sum_i \Omega_{i0}(1+z)^{3(1+w^i)}}$ donde Ω_{i0} representan los parámetros de densidad para cada ecuación de estado w^i incluyendo la curvatura. Derivando con respecto al tiempo la relación: $1+z = \frac{a_0}{a}$, obtenemos $\frac{\dot{a}}{a} = -\frac{\dot{z}}{(1+z)}$, que nos permite expresar por un lado:

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \int_0^t dt = \int_z^\infty \frac{dz}{H_0(1+z)\sqrt{\sum_i \Omega_{i0}(1+z)^{3(1+w^i)}}} \\ t_0 = \int_0^{t_0} dt = \int_0^\infty \frac{dz}{H_0(1+z)\sqrt{\sum_i \Omega_{i0}(1+z)^{3(1+w^i)}}} \end{array} \right.$$

3.2.8 El modelo estándar

Denominamos al **modelo estándar** como al modelo que mejor se adapta al comportamiento de nuestro universo, basado en las hipótesis de homogeneidad e isotropía, validez de la RG, y densidades de energía que persistan durante toda la historia de nuestro universo. En nuestro universo las observaciones indican que las ecuaciones de estado existentes son las correspondientes a:

- La radiación ($w = 1/3$), ya que observamos el fondo cósmico de microondas (ρ_r, Ω_{r0})
- La materia pulverulenta ($w = 0$), ya que observamos galaxias, cúmulos de estrellas (ρ_m, Ω_{m0})
- Energía oscura ($w < -1/3$) puesto que las observaciones indican que esta densidad de energía es la culpable de la aceleración de El Universo ($\rho_\Lambda, \Omega_{\Lambda0}$)
- Las observaciones de la anisotropía de la radiación de fondo de microondas indican que el universo es euclídeo ($\Omega_{\epsilon0} = 0$)

Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} t &= \int_0^t dt = \int_z^\infty \frac{dz}{H_0(1+z)\sqrt{\Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}} \\ t_0 &= \int_0^{t_0} dt = \int_0^\infty \frac{dz}{H_0(1+z)\sqrt{\Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}} \end{aligned}$$

Las observaciones actuales nos indican un modelo con: $H_0 = 65 \text{ km/s/Mpc}$, con curvatura nula, y de: $\Omega_{r0} = 0.0001$, $\Omega_{m0} = 0.3$, y $\Omega_{\Lambda0} = 0.7$; con un $t_0 \approx 14.5 \text{ Ga}$.

Capítulo 4

La Teoría de la Causalidad - Teoremas de Singularidad

En este trabajo hemos hablado sobre la naturaleza del tensor de Einstein, de las soluciones que induce cuando trabajamos en ciertos contextos teóricos, de las ecuaciones de Friedmann y de la dinámica a la que está expuesto el Universo. En buena medida nos hemos estado realizando una misma pregunta: ¿qué forma tiene el Universo? Cerramos nuestro estudio sobre esta breve historia, con un tema que recoge uno de los enunciados más bonitos y simples de la unión entre las Matemáticas y la Física: **la existencia de una singularidad espacio-temporal**. Para poder exponer los principales teoremas de singulares espacio-temporales, es necesario introducir antes nociones básicas sobre la causalidad. **La causalidad es el estudio de las relaciones que hay entre los diferentes puntos de una variedad de Lorentz**. Es una teoría preciosa y compleja, que no deja de ser un marco teórico que nos permitirá precisar la naturaleza del tejido espacio-temporal.

Englobar algo tan complejo con tan poca brevedad ha sido muy complicado, pero espero haber podido construir la idea de que bajo ciertas hipótesis, podemos llegar a encontrar singularidades en el Universo: **geodésicas causales inextensible e incompletas**. El principal libro que ha guiado este capítulo es el: *The large scale structure of space-time* S. Hawking y por otro lado S. Hawking y R. Penrose: *The singularities of gravitational collapse and cosmology*. Animo a todo lector a devorarlos.

4.1 Preámbulo a los teoremas de singularidades

A partir de ahora, y por objeto de agilizar la notación, nos referiremos al conjunto M como una variedad de Lorentz n -dimensional, conexa y orientada temporalmente.

Definición 32 Sea $\alpha : [0, \Gamma) \rightarrow M$ una curva diferenciable. Se dice que α **es extendible** si admite una extensión continua $\alpha^- : [0, \Gamma] \rightarrow M$. El punto $q = \alpha^-(\Gamma)$ se dice que es un punto final de α . Si la curva no es extendible, decimos que α **es inextensible**.

Definición 33 Una geodésica inextensible $\lambda : I \rightarrow M$ es **completa** si $I = \mathbb{R}$. Si λ no es completa, se dice que λ es **incompleta**. Decimos que M es **geodésicamente completa o completa** si cada geodésica inextensible es completa.

Definición 34 Sea M una variedad de Lorentz n -dimensional, conexa y orientada temporalmente. Decimos que:

- M es **espacialmente completa** si toda geodésica espacial es completa.

- M es **temporalmente completa** si toda geodésica temporal es completa.
- M es **luminosamente completa** si toda geodésica nula es completa.
- M es **espacialmente incompleta** si existe una geodésica espacial incompleta.
- M es **temporalmente incompleta** si existe una geodésica temporal incompleta.
- M es **luminosamente incompleta** si existe una geodésica nula incompleta.

Definición 35 Decimos que M es **luminosamente incompleta hacia el futuro** si existe una geodésica nula incompleta que apunta hacia el futuro. De forma equivalente con los demás casos.

Definición 36 Sea M una variedad semi-Riemanniana y $P \subset M$ una subvariedad. Sea $\lambda : [0, 1] \rightarrow M$ con $\lambda(0) \in P$, $\lambda'(0) \perp P$ y $r \in (0, 1]$. Entonces, $\lambda(r)$ es un **punto focal** de P a través de λ si existe un campo de Jacobi J no nulo a lo largo de λ tal que $J(r) = 0$.

Proposición 10 Sea P una hipersuperficie espacial, y λ una geodésica normal a P con $p = \lambda(0)$. Por hipótesis supondremos que: (1) $k(\lambda'(0)) > 0$ (2) $\text{Ric}(\lambda', \lambda') \geq 0$. Entonces existe un punto focal $\lambda(r)$ de P con $0 < r \leq (1/k(\lambda'(0)))$ siempre que λ esté definida en este intervalo.

Definición 37 Sea M una variedad de Lorentz. Decimos que M tiene una **singularidad futura** si admite una geodésica causal incompleta apuntando hacia el futuro. En concreto, si M es temporalmente o luminosamente incompleta apuntando hacia el futuro, entonces M tiene una singularidad futura. De forma similar definimos el concepto de **singularidad pasada**.

Esta definición es muy importante, ya que como veremos, es una de las consecuencias por las que sabemos que el Universo tuvo una singularidad pasada. La conocemos como "Big Bang".

4.2 Introducción a la Teoría de la Causalidad

Definición 38 Dados dos puntos $p, q \in M$ se dice que q es el futuro causal de p (o p es el pasado causal de q) si existe una curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ temporal o nula tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$. Esta situación la denotaremos como: $p \leq q$.

De forma equivalente con la notación presentada tendremos:

- $p \ll q$: existe una curva temporal apuntando hacia el futuro, empieza en p y acaba en q
- $p < q$: existe una curva causal apuntando hacia el futuro que empieza en p y acaba en q
- $p \leq q$: notación significa que $p < q$ o $p = q$

Empleamos este tipo de notación pues nos permite flexibilizar buena parte de los resultados e implicaciones en el estudio de las variedades de Lorentz. Por ejemplo, como bien sabemos **toda curva temporal es causal**, pues empleando la notación indicada se nos permite observar: $p \ll q \Rightarrow p < q$. Por lo que vemos, se trata de una notación bastante práctica y coherente.

Definición 39 Sea $A \subset M$. Se define el **futuro cronológico de A** como el conjunto:

$$I^+(A) = \{q \in M : \exists p \in A; p \ll q\}$$

De manera similar podemos definir:

$$(\text{futuro causal de } A) J^+(A) = \{q \in M : \exists p \in A; p \leq q\}$$

$$(\text{pasado cronológico de } A) I^-(A) = \{q \in M : \exists p \in A; q \ll p\}$$

$$(\text{pasado causal de } A) J^-(A) = \{q \in M : \exists p \in A; q \leq p\}$$

El conjunto de $I^+(A)$ es el conjunto de todos los puntos de M a los que se puede llegar mediante una curva temporal futura definida en A ; $J^+(A)$ es el conjunto de puntos al que se pueden llegar mediante una curva causal futura que esté definida en A (y de forma equivalente con los conjuntos $I^-(A)$, y $J^-(A)$)

Proposición 11 *Llegados a este punto, vamos a proponer los siguientes resultados que aquí no demostraremos:*

- La relación \ll es transitiva.
- Si $p \ll q$ y $q \leq r$, entonces tendremos que: $p \ll r$. De forma similar, si $p \leq q$ y $q \ll r$ entonces se cumple: $p \ll r$
- Hablar del futuro es proporcional al pasado, simplemente cambiando la orientación espacial. La notación que emplearemos por comodidad será: $I^+(p)$
- El futuro cronológico de A está contenido en el futuro causal de A . Esto implica que: $A \cup I^+(A) \subset J^+(A)$
- La relación \ll es una relación abierta (si $p \ll q, \exists U(p \in U), \exists V(q \in V)$ - entornos abiertos tal que - $\forall p' \in U, q' \in V$ se cumple: $p' \ll q'$)

Aplicando estos resultados, podemos ver que: $I^+(A) = I^+(I^+(A)) = I^+(J^+(A)) = J^+(I^+(A)) \subset J^+(J^+(A)) = J^+(A)$

4.2.1 Condición de cronología y derivados en las variedades de Lorentz

Definición 40 *Decimos que M es cronológico si M no contiene ninguna curva temporal cerrada. Decimos que M es causal si M no contiene ninguna curva causal cerrada. Si M es causal $\Rightarrow M$ es cronológico.*

Teorema 5 *El espacio-tiempo de nuestro Universo a "gran escala" (escala superior al mundo subatómico) es cronológico.*

Proposición 12 *Si M es compacto $\Rightarrow M$ no cronológico.*

Demostración. Sea $\mathcal{A} = \{I^+(p) | p \in M\}$. Es directo ver que \mathcal{A} es un recubrimiento por abiertos de M . Como M es compacto, admite un subrecubrimiento por abierto finito tal como: $\{I^+(p_1), \dots, I^+(p_k)\}$. Suponiendo que $I^+(p_1)$ no está contenido en ningún otro $I^+(p_i)$, veremos que necesariamente $p_1 \in I^+(p_1)$. Si p_1 no está en $I^+(p_1)$ debe de encontrarse en algún $I^+(p_i)$, por lo que $I^+(p_1) \subset I^+(p_i)$ (pero esto no ocurre por construcción). Tenemos entonces que $p_1 \in I^+(p_1)$ por lo que existe una curva temporal cerrada que comienza en p_1 y acaba en p_1 ; y que por lo tanto existe una curva cerrada en M , y por ello M no es cronológico. \square

Definición 41 *Decimos que M es fuertemente causal en $p \in M$, siempre que dado U entorno de p , exista otro entorno $V \subset U$ tal que toda curva causal con extremos en V está definida en U . Si esta condición se cumple $\forall p \in M$, decimos entonces que M es fuertemente causal.*

Proposición 13 *Sea $K \subset M$ un compacto fuertemente causal. Entonces se cumple que toda curva causal inextensible apuntando hacia el futuro empezando en K lo abandona en algún momento: $\exists s > 0$ tal que $\alpha(t) \notin K, \forall t \geq s$.*

Proposición 14 *Sea K un compacto fuertemente causal, y sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión de curvas causales apuntando hacia el futuro en K de forma que $\{\alpha_n(0)\} \rightarrow p, \{\alpha_n(1)\} \rightarrow q \neq p$. Entonces existe una geodésica a trozos causal λ de p a q y una subsucesión $\{\alpha_m\}$ de $\{\alpha_n\}$ tal que: $\lim_{m \rightarrow +\infty} L(\alpha_m) \leq L(\lambda)$ (donde estamos empleando la notación $L(\cdot)$ para referirnos a la longitud de la curva)*

En ésta última proposición hablamos en términos de la longitud de una curva dentro de una variedad de Lorentz. Cuando presentamos la geodésica dentro de una variedad semi-riemanaiana, tuvimos que plantear un análisis totalmente diferente a si lo hubieramos hecho en una variedad de Riemann. Pues en este punto, hemos llegado a un caso parecido. ¿existe una equivalencia entre la distancia de una variedad de Riemann a otra de Lorentz? La respuesta es sí. Esto es el concepto de separación temporal

4.2.2 Separación temporal

Definición 42 *Dados $p, q \in M (p \neq q)$ podemos definir la **separación temporal** entre p y q como:*

$$\tau(p, q) = \sup\{ L(\alpha) \mid \alpha \text{ es una curva causal apuntando hacia el futuro uniendo } p \text{ con } q \}$$

Es decir, la definición que hemos dado os permite establecer las siguientes interpretaciones. Por un lado, $\tau(p, q) = \infty$ es el conjunto de las longitudes en todas las curvas causales apuntando al futuro que unen p con q ; es un conjunto acotado. Si por el contrario, $\tau(p, q) = 0$ no existen curvas causales apuntando hacia el futuro uniendo p con q . Debido a la propia axiomática con la que estamos procediendo en su construcción, la aplicación τ no es simétrica por lo general: $\tau(p, q) \neq \tau(q, p)$.

Como consecuencia directa a esta definición, encontramos resultados muy interesantes:

Lema 3 *Si M es una variedad de Lorentz n -dimensional, conexa y orientada temporalmente. Entonces se cumple:*

- $\tau(p, q) > 0$ si $p \ll q$
- Se cumple la desigualdad triangular invertida: $p \leq q \leq r$ entonces tendremos: $\tau(p, r) \geq \tau(p, q) + \tau(q, r)$

Demostración. *Podemos ver que si $\tau(p, q) > 0$, entonces existe una curva causal α apuntando hacia el futuro que une p con q tal que $L(\alpha) > 0$. Dado que α no puede ser una geodésica nula, existe una deformación de α a una curva temporal con extremos p y q . Por lo tanto, $p \ll q$. De forma recíproca, si $p \ll q$ existe una curva temporal α que va de p a q tal que $L(\alpha) > 0$, y por lo tanto $\tau(p, q) > 0$. Para demostrar el segundo enunciado, podemos dar el siguiente argumento. Dado un $\epsilon > 0$. Como $p \leq q \leq r$, suponiendo la existencia de curvas causales α (uniendo p con q) y β (uniendo q con r) tal que $\tau(p, q) - L(\alpha) \leq \frac{\epsilon}{2}$, $\tau(q, r) - L(\beta) \leq \frac{\epsilon}{2}$; entonces se cumple que: $\tau(p, r) \geq L(\alpha + \beta) \geq L(\alpha) + L(\beta) \geq \tau(p, q) + \tau(q, r) - \epsilon$. Como hemos tomado un ϵ arbitrariamente grande, es directo obtener el resultado. \square*

Definición 43 *Dados $A, B \subset M$, podemos definir la separación temporal entre ambos sucesos como:*

$$\tau(A, B) = \sup\{\tau(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Definición 44 *Dados dos $p, q \in M (p \neq q)$ dos eventos cualquiera, podemos definir:*

$$J(p, q) = J^+(p) \cap J^-(q)$$

como el conjunto formado por los eventos que están en el futuro causal de p y en el pasado causal de q (siendo el menor conjunto que tiene a todas las curvas causales de p con q)

Teorema 6 *Sea $p < q$ en M . Si $J(p, q)$ es compacto, fuertemente causal, entonces existe una geodésica causal λ de p en q tal que $L(\lambda) = \tau(p, q)$*

El resultado nos permite saber que llevados a una variedad de Lorentz n -dimensional, conexa y orientada temporalmente, dos eventos $p < q$ se pueden unir mediante una geodésica causal de mayor longitud.

Definición 45 Decimos que M es **globalmente hiperbólico** si M es fuertemente causal y $J(p, q)$ es compacto, para cada $p, q \in M$ tales que $p < q$. El espacio-tiempo de Lorentz, con la métrica de Minkowski es globalmente hiperbólico. De forma equivalente, $A \subset M$. Decimos que A es globalmente hiperbólico siempre que A sea fuertemente causal y $J(p, q) \subset A$ sea compacto, para todo $p, q \in A$ con $p < q$.

Definición 46 Un conjunto $A \subset M$ es **acronal** si $\forall p, q \in A$ no se tiene que $p \leq q$. La traducción la encontramos en que A tendrá la propiedad de ser acronal, siempre que ninguna curva temporal apuntando hacia el futuro corte a A más de una vez para cualquier $p, q \in A$, $q \neq I^+(p)$.

4.2.3 Hipersuperficie de Cauchy

Para presentar la hipersuperficie de Cauchy en una variedad de Lorentz necesariamente tenemos que introducir el concepto de hipersuperficie topológica. La hipersuperficie de Cauchy es una herramienta muy importante que emplearemos en el desarrollo de las demostraciones de los teoremas de singularidad espacio-temporal.

Definición 47 Sea $S \subset M^n$. Decimos que S se constituye como una **hipersuperficie topológica** si para todo $p \in S$, existe un entorno U en p , un abierto $V \subset \mathbb{R}^n$, y un homeomorfismo $\beta : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\beta(U \cap S) = \beta(U) \cap \Pi$ - Π es un hiperplano definido en \mathbb{R}^n .

Lema 4 Una vez introducido este concepto, podemos extrapolarlo al hecho de trabajar en las inmediaciones de un conjunto acronal $A \subset M$:

- Tomando $A \subset M$ es acronal. Luego, A es hipersuperficie topológica $\Leftrightarrow A \cap \text{borde}(A) = \emptyset$ (A no tiene puntos del borde de A)
- Un conjunto acronal A es hipersuperficie topológica cerrada $\Leftrightarrow \text{borde}(A) = \emptyset$

Definición 48 Una **hipersuperficie de Cauchy** en M es un subconjunto $S \subset M$ tal que toda curva temporal inextensible hacia el pasado corta S una única vez. Se cumple, toda hipersuperficie de Cauchy es un conjunto acronal. A su vez, no toda variedad de Lorentz n -dimensional, conexa y orientada temporalmente tiene porqué tener una hipersuperficie de Cauchy - la existencia no está garantizada.

Lema 5 Una hipersuperficie de Cauchy - S - es una hipersuperficie topológica cerrada y acronal. Además de que cada curva causal inextensible corta a S .

4.3 Desarrollo de Cauchy

Definición 49 Sea A un conjunto acronal. Se define el **desarrollo de Cauchy futuro de A** como:

$$D^+(A) = \{p \in M \mid \text{ toda curva causal inextendible al pasado que parte de } p \text{ corta en } A \}$$

Se trata de un subconjunto que tiene todos los puntos del futuro causal de A que son predecible desde A . Ninguna curva temporal o nula inextendible hacia el pasado puede alcanzar un evento $q \in D^+(A)$ sin antes pasar por A . De forma equivalente, se define **desarrollo de Cauchy pasado de A** como:

$$D^-(A) = \{p \in M \mid \text{toda curva causal inextendible al futuro que parte de } p \text{ corta en } A \}$$

Definimos entonces el **desarrollo de Cauchy de A** como:

$$D(A) = D^+(A) \cup D^-(A)$$

Teorema 7 Si A es acronal, $\text{int}(A) \neq \emptyset \Rightarrow \text{int}(D(A))$ es globalmente hiperbólico.

A efectos de la definición es directo ver que si: M es hipersuperficie de Cauchy, entonces es globalmente hiperbólico. Se puede afirmar sin pérdida de generalidad que en cualquier variedad de Lorentz n -dimensional, conexa y orientada temporalmente que contenga una hipersuperficie de Cauchy, si tenemos dos eventos $p < q$, existe una geodésica causal de longitud máxima uniendo estos puntos.

Definición 50 Decimos que $A \subset M$ es **acausal**, si $\forall p, q \in A$ no se tenga que $p < q$ (es decir, no existirá una curva causal apuntando hacia el futuro uniendo dos puntos de A). De forma equivalente, ninguna curva causal apuntando hacia el futuro corta a A en más de una de un punto. Tener en cuenta que si A acausal $\Rightarrow A$ acronal.

Lema 6 Llegados a este punto, terminamos introduciendo los siguientes tres lemas que nos servirán para deducir existencia de singularidades espacio-temporales:

- Una hipersuperficie espacial y acronal es acausal.
- Si S es una hipersuperficie topológica acausal en M , entonces $D(S)$ es abierto y globalmente hiperbólico.
- Sea A un conjunto acronal. Si $p \in \text{int}(D(A)) - I^-(A)$ entonces $J^-(p) \cap D^+(A)$ es compacto.

Teorema 8 Sea S una hipersuperficie espacial cerrada y acronal. Si $q \in D^+(S)$, existe una geodésica λ de S en q de longitud $\tau(S, q)$. Entonces, λ es temporal, normal en S , y no tiene puntos focales de S antes de q (siempre que $q \in S$)

Demostración. Sea S una hipersuperficie espacial, cerrada y acronal. De acuerdo con el lema anterior, S es hipersuperficie espacial, cerrada y acausal. A efectos de ello, $D(S)$ es un conjunto abierto globalmente hiperbólico. Como $q \in D^+(S)$, $q \in D(S)$, se tiene al ser abierto, $q \in \text{int}(D(S)) - I^-(S)$ obtenemos así que $J^-(q) \cap D^+(S)$ es compacto. Intersecando con S es compacto: $J^-(q) \cap S$. Luego la relación de distancias entre observadores, recogida como: $\tau : (J^-(q) \cap S) \rightarrow \mathfrak{R}$ es continua por construcción ($\tau(p) = \tau(p, q)$). Por lo tanto, y dado que alcanza el máximo en p , $\tau(p, q) = \tau(S, q)$ (ya que se cumple la relación: $\tau(S, q) = \tau(r, q) \geq \tau(p, q)$ - donde estamos cogiendo $r \in J^-(q) \cap S$). De acuerdo con los teoremas presentados, podemos afirmar la existencia de una λ geodésica causal uniendo p con q de longitud dada por: $\tau(p, q) = \tau(S, q)$. Suponemos ahora que $q \neq S$ se tiene que $p \ll q$ y $\tau(p, q) > 0$, por lo que necesariamente λ es temporal y normal a S . Finalmente aplicando resultados conocidos en geometría analítica, esto supone que no hay puntos focales de S antes de q . \square

Definición 51 Sea A un conjunto acronal. Se define el **horizonte de Cauchy futuro** como el conjunto dado por:

$$H^+(A) = \overline{D^+(A)} - I^-(D^+(A)) = \{p \in \overline{D^+(A)} : I^+(p) \text{ no corta en } D^+(A)\}$$

Es el límite de la región controlada por A . De forma similar definimos el **horizonte de Cauchy pasado**:

$$H^-(A) = \overline{D^-(A)} - I^+(D^-(A)) = \{p \in \overline{D^-(A)} : I^-(p) \text{ no corta en } D^-(A)\}$$

Llamaremos **horizonte de Cauchy de A**: $H(A) = H^+(A) \cup H^-(A)$

Definición 52 Una subvariedad espacial es **convergente hacia el futuro** si su campo vectorial curvatura media es temporal apuntando hacia el pasado. Decimos que se trata de una **superficie atrapada** si la dimensión de la subvariedad es 2.

Definición 53 Sea $A \subset M$. Definimos el conjunto $E^+(A) = J^+(A) - I^+(A)$. Un subconjunto cerrado y acronal se dice que está **atrapado hacia el futuro** siempre que $E^+(A)$ sea compacto.

Nota 17 El conjunto $E^+(A)$ es acronal, ya que si $p, q \in E^+(A)$ cumplen que $p \ll q$ entonces necesariamente $q \in I^+(A)$; y por tanto, $q \notin E^+(A)$. Por otra parte, $A \subset E^+(A) \Leftrightarrow A$ acronal.

4.4 Teoremas de singularidad Hawking - Penrose

¿Existen singularidades en el espacio-tiempo? Ahora sí contamos con las herramientas como para poder enfrentarnos a este tipo de preguntas. Con el comienzo de este apartado, y habiendo expuesto un gran resumen de la teoría de la causalidad, dejaremos de dar respuestas matemáticas, para tratar, por medio de la axiomática expuesta de garantizar la credibilidad de los enunciados y resultados presentados. Por medio de esta teoría, vamos a construir una matematización de la naturaleza física de los agujeros negros y singularidades espacio-temporales.

Definición 54 Se define una **singularidad** en el tejido espacio-temporal como la existencia de una geodésica causal inextendible e incompleta.

4.4.1 Teoremas de Hawking

Teorema 9 (Teorema de Hawking fuerte: futuro) Sea M una variedad de Lorentz n -dimensional, conexa y orientada temporalmente. Suponemos que $\text{Ric}(v, v) \geq 0$ para cualquier vector temporal v tangente a M . Sea S hipersuperficie de Cauchy espacial con convergente futura $k \geq b > 0$. Entonces cada curva temporal apuntando hacia el futuro que empieza en S tiene una longitud a lo sumo de $1/b$.

Teorema 10 (Teorema de Hawking fuerte: pasado - Axiomática del Big-Bang) Sea M una variedad de Lorentz n -dimensional, conexa y orientada temporalmente. Suponemos que $\text{Ric}(v, v) \geq 0$ para cualquier vector temporal v tangente a M . Sea S hipersuperficie de Cauchy espacial con convergente pasada $k \leq b < 0$. Entonces cada curva temporal apuntando hacia el pasado que empieza en S tiene una longitud a lo sumo de $1/b$.

Es decir, en un espacio-tiempo M de Robertson-Walker, cualquier curva temporal apuntando hacia el pasado que empieza en S tiene una longitud a lo sumo de $1/b$. Dado que las curvas temporales moldean las partículas materiales, esa partícula material en concreto no han estado existiendo indefinidamente, por lo que se determina que todas las curvas temporales apuntando hacia el pasado tienen una longitud finita; es decir, el Universo tuvo un comienzo.

Teorema 11 (Teorema de Hawking débil) Sea M una variedad de Lorentz n -dimensional, conexa y orientada temporalmente. Suponemos que $\text{Ric}(v, v) \geq 0$ para cualquier vector temporal v tangente a M . Sea S hipersuperficie espacial compacta con convergencia futura $k > 0$. Entonces M es temporalmente incompleta hacia el futuro.

4.4.2 Teoremas de Penrose

Lema 7 Sea M una variedad de Lorentz n -dimensional, conexa y orientada temporalmente tal que:

- $Ric(v, v) \geq 0 \forall v$ vector de luz tangente a M
- M luminosamente completa hacia el futuro

Si $P \subset M$ es subvariedad $(n - 2)$ -dimensional compacta, espacial y acronal que es convergente hacia el futuro, entonces P está atrapada en el futuro.

Lema 8 Sean S una hipersuperficie de Cauchy, X un campo de vectores temporales en M , $p \in M$. Una curva integral inextendible que comience en p corta a S en un único punto $\rho(p)$. La aplicación dada por. $\rho : M \rightarrow S$ es una retracción continua, abierta y supryectiva. En particular, S es conexa.

Nota 18 (Recordemos que en una hipersuperficie de Cauchy S es hipersuperficie topológica cerrada y acronal; además de que cada curva causal inextendible corta a S).

Procedemos ahora a demostrar el Teorema de Penrose:

Teorema 12 Sea M una variedad de Lorentz n -dimensional, conexa y orientada temporalmente tal que:

- $Ric(v, v) \geq 0$ para todos los vectores de luz tangente a M
- M tiene una hipersuperficie de Cauchy S
- M admite una subvariedad $(n - 2)$ -dimensional P compacta, espacial y acronal que es convergente hacia el futuro
- M es luminosamente completa hacia el futuro

Entonces se cumple: $E^+(P)$ es una hipersuperficie de Cauchy en M .

Demostración. Como M tiene una hipersuperficie de Cauchy $\Rightarrow M$ es globalmente hiperbólico $\Rightarrow J^+(p), J^-(p)$ son cerrados $\forall p \in M$. Como P es compacto, $J^+(P)$ es cerrado. Aplicando resultados anteriores, $int(J^+(P)) = I^+(P)$, por lo tanto, $E^+(P) = J^+(P) - I^+(P) = \partial J^+(P)$. Como es una frontera, $E^+(P)$ es una subvariedad topológica, y por lo tanto compacto (aplicando el lema anterior).

Sea $\rho : E^+(P) \rightarrow S$ la restricción de $E^+(P)$ a la retracción. Luego, ρ es continua, y $E^+(P)$ es acronal, la unicidad de las curvas integrales implica ρ inyectiva. Dado que ρ es abierta, $\rho(E^+(P))$ es abierto. Como S es conexo \Rightarrow los únicos conjuntos abiertos y cerrados al mismo tiempo son \emptyset y el total. Por ello, $\rho(E^+(P)) = S$. Como además ρ es homeomorfismo de $E^+(P)$ en algún subconjunto de $S \Rightarrow \rho$ es homeomorfismo. Al ser S hipersuperficie de Cauchy, $E^+(P)$ homeomorfo a $S \Rightarrow E^+(P)$ es hipersuperficie de Cauchy. \square

Como consecuencia de este teorema, encontramos los siguientes dos corolarios de especial trascendencia:

Corolario 1 Sea M una variedad de Lorentz n -dimensional, conexa y orientada temporalmente tal que:

- $Ric(v, v) \geq 0$ para todos los vectores de luz tangente a M
- M tiene una hipersuperficie de Cauchy S
- M admite una subvariedad $(n - 2)$ -dimensional P compacta, espacial y acronal que es convergente hacia el futuro

Entonces M es luminosamente completa hacia el futuro.

Demostración. Suponemos que M no es luminosamente incompleta hacia el futuro. Aplicando el teorema anterior, $E^+(P)$ es hipersuperficie de Cauchy en M . Como las hipersuperficies de Cauchy son homeomorfas entre sí (S hipersuperficie de Cauchy no compacta) $\Rightarrow E^+(P)$ es

no compacta. Aplicando los lemas anteriores, P está atrapada hacia el futuro, y $E^+(P)$ es compacto. Luego es una contradicción. \square

Corolario 2 Sea M una variedad de Lorentz n -dimensional, conexa y orientada temporalmente tal que:

- $Ric(v, v) \geq 0$ para todos los vectores de luz tangente a M
- M tiene una hipersuperficie de Cauchy S
- M admite una subvariedad $(n - 2)$ -dimensional P compacta, espacial y acronal que es convergente hacia el futuro
- Existe una curva causal inextendible que no corta a $E^+(P)$

Entonces M es luminosamente incompleta hacia el futuro.

Demostración. Suponemos M no es luminosamente incompleta al futuro. Entonces, $E^+(P)$ es hipersuperficie de Cauchy en M . Por el lema anterior, cada curva causal inextendible corta a $E^+(P)$. Llegamos aquí a una contradicción. \square

Llegados a este punto, ¿qué significan estos resultados? ¿son aplicables las hipótesis de los colorarios a nuestro Universo, o al menos de forma local? La respuesta es sí. Considerando M un espacio-tiempo de Robertson-Walker, las tres hipótesis del colorario anterior las podemos encontrar de forma local. Por un lado, $Ric(v, v) \geq 0 - \forall v$ nulo tangente a M ; por otro lado, podemos emplear condiciones de restricción más débiles al sustituir la hipótesis de la hipersuperficie de Cauchy compacta, por una no compacta - Hawking-Penrose (1970); se puede definir una subvariedad de dimensión 2, convergente hacia el futuro - una superficie atrapada en regiones espacio-temporales desgarradas por un campo gravitacional extremadamente grande: un agujero negro. Es decir, podemos encontrar regiones locales donde M es luminosamente incompleta hacia el futuro, lo que nos permite argumentar la existencia de una geodésica nula inextendible e incompleta, o lo que es lo mismo, de su existencia dentro de un agujero negro.

Pues ahora, vamos otro paso más allá, y es que resulta que los agujeros negros también se "evaporan" (emiten una radiación denominada de Hawking que termina desintegrándolos en una escala temporal dada). Una pregunta natural sería entonces: **¿qué le ocurre a la singularidad de un agujero negro tras su evaporación por la radiación de Hawking?** Esta misma pregunta tuve el honor de poder formularla en persona al Doctor Hawking en el festival Starmus 2014 - celebrado en la isla de Tenerife. Cuando se la hice con apenas 16 años cumplidos, no terminaba de entender la trascendencia de lo que estaba preguntando. **¿Prevalece desgarrado a nivel local el espacio-tiempo?** Si es así, ¿qué forma tiene un agujero negro? ¿tiene sentido realizarnos preguntas en términos topológicos sobre forma y estructura de un espacio-tiempo desgarrado a escala local? **¿Tiene sentido un espacio-tiempo en el que localmente no existe el espacio y el tiempo se detiene?** O por lo menos, ¿tiene sentido esta concepción en términos de nuestra lógica humana? Galileo Galilei dijo un día, que el lenguaje en el que Dios había escrito el Universo, era en el de las matemáticas. Las matemáticas, esta lengua en la que comprendemos el mundo, y su infinita belleza, moldean la descripción de nuestro universo. Ésta es la belleza de la Cosmología: que no hay respuestas hoy, para las preguntas que van más allá de nuestra imaginación. Ésta es la belleza de este modelaje: un modelaje donde los límites de la Filosofía, Matemáticas y Física no están definidos, por lo menos, en términos de nuestra ignorancia humana. Hoy, he llegado a comprender un poco más esta pregunta, pero sigo sin poder imaginar la brutalidad de su respuesta. Sobre la naturaleza, dinámica, geometría y singularidades de nuestro Universo, esto ha sido un tratado sobre una brevísima historia que vale la pena poder contar.

Capítulo 5

Conclusión

Por un lado, hemos deducido la solución de Schwarzschild, la cual nos ha permitido palpar la geometría que describe la deformación del tejido espacio-temporal por la presencia de masa y energía.

Hemos visto como por medio de las ecuaciones de campo de Einstein podemos elaborar una serie de modelos físicos - soluciones de Friedmann - permitiéndonos obtener una aproximación bastante exacta - en términos de dinámica - de cerca de los 13.770 millones de años que tiene nuestro Universo.

Con estas 50 páginas de TFG, y 25 en anexos, hemos podido imprimir dinámica y geometría - a grandes razgos - de nuestro Universo. Si bien, el estudio sobre las variedades de Lorentz, y posterior análisis de singularidades, es una teoría ambiciosa que se ha querido tratar desde un primer momento, la extensión de este trabajo es finita, y buena parte de los resultados han tenido que ser señalados y no demostrados. Hemos querido trabajar con una "Brevísima Historia de El Universo", y no me hubiera quedado tranquilo si como proyecto de físico y matemático que pretendo ser, no hubiera expuesto la naturaleza de las singularidades.

El Teorema de Existencia de Singularidades de Penrose, ha sido la principal motivación para la elaboración de éste TFG, y el motivo por el que a Penrose le han otorgado un Premio Nobel de Física este año 2019.

Bella. Completa. Atrevida. La Teoría de la Causalidad, nos da uno de los resultados más complejos y delicados de la unión entre las Matemáticas y la Física Teórica. Todo bajo un mismo pretexto: ¿cómo funciona ésto llamado Universo?

Con éste trabajo hemos narrado una brevísima historia de nuestro Universo: ¿cómo funciona? ¿cómo se configura? ¿a qué dinámica obedece? La Cosmología es una ciencia bellísima y por medio de ella, obtenemos respuestas. Espero haber motivado por medio de este trabajo, a que un público curioso, con conocimientos básicos en matemáticas, encuentre en ella una excusa para empezar a plantearse la realidad en la que vivimos y la realidad que experimentamos.

ANEXO: Geometría Diferencial

El siguiente anexo se basa en una exposición esquematizada de los principales resultados, análisis, proposiciones, teoremas y herramientas matemáticas de la vertiente de la Geometría Diferencial. Se trata de una presentación muy abreviada y resumida de las principales herramientas que emplearemos en el desarrollo teórico de los capítulos de este TFG. Se debe trabajar con él como si fuere de un resumen de aspectos generalizados de ésta teoría.

5.1 Variedades Diferenciables

Definición 55 Sea M un espacio topológico. Una carta (local) m -dimensional de M es una pareja (U, ϕ) ; donde $U \subset M$ es un abierto tal que $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subset \mathbb{R}^m$ es un homeomorfismo dado por un abierto de \mathbb{R}^m .

Una carta (U, ϕ) también se denomina **sistema de coordenadas**. El dominio U se denomina **abierto coordinado** y las funciones ϕ^i de ϕ se denominan *funciones coordenadas* de la carta. De tal forma que $\forall p \in U$, el conjunto dado por $\phi(p) = (\phi^1(p), \dots, \phi^m(p))$ se denominan *coordenadas locales* de p en la carta (U, ϕ) .

Proposición 15 Sean (U, ϕ) y (V, ψ) dos cartas m -dimensionales de M . Denominaremos **cambio de coordenadas** (o cambio de carta) a la aplicación entre abiertos de \mathbb{R}^m , que denotaremos por $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$.

Sea $r \in \mathbb{N}$. Las cartas (U, ϕ) y (V, ψ) decimos que son C^r -compatibles si el cambio de coordenadas y su inverso son aplicaciones de clase C^r .

Definición 56 Un **atlas** m -dimensional de clase C^r en M es un conjunto de cartas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) | \alpha \in A\}$ m -dimensionales tales que su dominio recubren en su totalidad M , y dos cartas cualesquiera son C^r -compatibles: (1) $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$; (2) $(\forall \alpha, \beta \in A) \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ es de clase C^r .

Dos atlas \mathcal{A}, \mathcal{B} son C^r -compatibles si $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ es un atlas C^r ; equivalente a afirmar que cada carta de \mathcal{A} es C^r -compatible con cada carta de \mathcal{B} .

Definición 57 Una **estructura diferenciable** m -dimensional de clase C^r en M es una clase de equivalencia de atlas m -dimensionales de clase C^r de M .

Definición 58 Una **variedad diferenciable** de clase C^r y dimensión m es un espacio topológico M dotado de una estructura diferenciable de clase C^r y dimensión m .

La dimensión de M se representa por: $\dim M$. Se denomina **curvas** a las variedades de dimensión 1; y **superficie** a las variedades de dimensión 2.

Nota 19 En la definición de variedad diferenciable, se impondrán las siguientes condiciones topológicas a el espacio M :

- el espacio es Hausdorff
- que su topología tenga una base numerable de abiertos (o de forma más genérica, que sea paracompacto)

Siempre asumiremos que se cumple la primera condición; para resultados particulares asumiremos la segunda.

Definición 59 Una variedad de clase C^0 se denomina **variedad topológica**. Una variedad de clase C^ω se denomina **variedad analítica**. Una variedad de clase C^∞ se denomina **variedad diferenciable**. A partir de este punto, realizaremos abuso del lenguaje y salvo condición que se indique previamente, solo consideraremos **variedad diferenciable** (de clase C^∞), y se las denominará **variedad**.

Proposición 16 Se M una variedad diferenciable, $W \subset M$ un subespacio abierto. Las cartas (U, ϕ) de M con dominio $U \subset W$ son cartas del espacio topológico W , y el conjunto de todas ellas es un atlas de W . Por medio de esta estructura diferenciable, W se le denomina **subvariedad abierta**.

Definición 60 Sean M, N variedades diferenciables. Sean $\langle (U_\alpha, \phi_\alpha) | \alpha \in A \rangle$ un atlas de M , $\langle (V_\beta, \psi_\beta) | \beta \in B \rangle$ un atlas de N . Para cada $(\alpha, \beta) \in A \times B$, la pareja $(U_\alpha \times V_\beta, \phi_\alpha \times \psi_\beta)$ es una carta de $M \times N$, denominada **carta producto**. El conjunto de todas las cartas producto es un atlas, por lo que $M \times N$ es una variedad diferenciable, denominada **variedad producto** de M y N .

Si $\dim M = m$ y $\dim N = n$ entonces $\dim(M \times N) = m + n$

Definición 61 Un **difeomorfismo** (o **isomorfismo de variedades diferenciables**) es una biyección $\xi : M \rightarrow N$ tal que ξ y ξ^{-1} son diferenciables.

Dos variedades se dicen **difeomorfas** si existe un difeomorfismo entre ellas. Necesariamente tienen la misma dimensión y son homeomorfas.

Definición 62 Un **difeomorfismo local** es una aplicación $\xi : M \rightarrow N$ tal que para todo punto $p \in M$, existe un abierto U ($p \in U$) tal que $\xi(U) \subset N$ es un abierto y la restricción $\xi|_U : U \rightarrow \xi(U)$ es un difeomorfismo.

Proposición 17 Un **espacio vectorial real de dimensión n** también es una variedad diferenciable. En efecto, si tomamos una base $\{\vec{e}_i\}$, entonces un vector de este espacio se puede escribir como: $\vec{x} = a^1 \vec{e}_1 + \dots + a^n \vec{e}_n$. Los coeficientes que acompañan los vectores de la base (es decir, las componentes) forman un n -tupla del cuerpo \mathbb{R}^n . Definida una base el homeomorfismo es directo:

$$\begin{aligned} V &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \vec{x} &\rightarrow (a^1, \dots, a^n) \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

(recordemos que un espacio vectorial sobre un cuerpo κ , es un conjunto V diferente del vacío, dotado de dos operaciones, y que cumple una serie de propiedades que aquí no detallaremos)

Nota 20 Si bien todo espacio vectorial es una variedad diferenciable, la proposición inversa no se cumple.

5.2 Vectores tangentes y cotangentes

5.2.1 Vectores tangentes y espacio tangente

Definición 63 Un **camino** es una aplicación continua $\gamma : I \rightarrow M$ definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ no degenerado. A partir de ahora solo consideraremos caminos definidos en intervalos abiertos de \mathbb{R} .

Definición 64 Sea M una variedad diferenciable de dimensión m , $p \in M$. Consideraremos el conjunto:

$$\mathcal{C}_{\mathcal{M},\mathcal{P}} = \langle \gamma : I \rightarrow M \mid 0 \in I, \gamma \in C^1, \gamma(0) = p \rangle_{I \subset \mathbb{R}}$$

$(I \subset \mathbb{R} \text{ intervalo abierto})$

Dos caminos $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{C}_{\mathcal{M},\mathcal{P}}$ decimos que son **tangentes** (en 0) cuando existe una cata (U, ϕ) de M en p tal que sus respectivas expresiones locales son tangentes:

- $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$
- $\mathcal{D}_{\gamma_1}(0) = \mathcal{D}_{\gamma_2}(0)$

Esta propiedad no depende de la carta escogida.

Definición 65 La tangencia es la relación de equivalencia en $\mathcal{C}_{\mathcal{M},\mathcal{P}}$ inducida por la aplicación:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mathcal{M},\mathcal{P}} &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ \gamma &\rightarrow \mathcal{D}(\phi \circ \gamma)(0) \end{aligned}$$

siendo ϕ un sistema de coordenadas cualquiera en p .

Definición 66 Una clase de equivalencia por la relación de tangencia se denomina **vector tangente** de M en p . Si $\gamma \in \mathcal{C}_{\mathcal{M},\mathcal{P}}$, denotaremos por $[\gamma]_p$ su clase de tangencia. Denotaremos por $\mathcal{T}_p M$ el conjunto cociente $\mathcal{C}_{\mathcal{M},\mathcal{P}}$, dada por la relación de tangencia (es decir, el conjunto de los vectores tangentes de M en p).

Un resultado muy interesante que no demostraremos en esta sección nos permite realizar lo siguiente:

Proposición 18 Sea (U, ϕ) una carta de M en p . La aplicación dada por:

$$\begin{aligned} \theta_{\phi,p} : \mathcal{T}_p M &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ [\gamma]_p &\rightarrow \mathcal{D}(\phi \circ \gamma)(0) \end{aligned}$$

es biyectiva (la inversa viene determinada por: $\mathbf{v} \rightarrow [t \rightarrow \phi^{-1}(\phi(p) + t\mathbf{v})]_p$)

La biyección $\theta_{\phi,p}$ permite transportar la estructura de espacio vectorial de \mathbb{R}^m a $\mathcal{T}_p M$: dados $u, v \in \mathcal{T}_p M$, $c \in \mathbb{R}$ se define:

$$\begin{aligned} u + v &= \theta_{\phi,p}^{-1} \cdot (\theta_{\phi,p}(u) + \theta_{\phi,p}(v)) \\ cu &= \theta_{\phi,p}^{-1}(c \cdot \theta_{\phi,p}(u)) \end{aligned}$$

La estructura transportada no depende de la carta utilizada.

El **espacio tangente** de M en p es el conjunto $\mathcal{T}_p M$ de los vectores tangentes de M en p dotados de esta estructura de espacio vectorial real de dimensión m .

5.2.2 La aplicación tangente y expresiones coordenadas

Definición 67 Sean M, N variedades, $F : M \rightarrow N$ es una aplicación de clase C^1 . La **aplicación tangente** de $F : M \rightarrow N$ en p es:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_p F &: \mathcal{T}_p M \rightarrow \mathcal{T}_{F(p)} N \\ \mathcal{T}_p F \cdot [\gamma]_p &= [F \circ \gamma]_{F(p)}\end{aligned}$$

Es decir, $\mathcal{T}_p F$ es la aplicación obtenida pasando los cocientes de la aplicación: $\mathcal{C}_{M,p} \rightarrow \mathcal{C}_{N,F(p)}$ tal que $\gamma \rightarrow F \circ \gamma$

Nota 21 La aplicación tangente $\mathcal{T}_p F$ es lineal. De hecho: $\mathcal{T}_p F = \theta_{\phi, F(p)}^{-1} \circ DF(p) \circ \theta_{\phi, p}$

Proposición 19 La aplicación tangente satisface las siguientes propiedades:

- $\mathcal{T}_p(\text{Id}_M) = \text{Id}_{\mathcal{T}_p M}$
- Sean $F : M \rightarrow N$, $G : N \rightarrow P$ aplicaciones de clase C^1 , $p \in M$ entonces se cumple:

$$\mathcal{T}_p(G \circ F) = \mathcal{T}_{F(p)} G \circ \mathcal{T}_p F$$

- Si $F : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo, $\mathcal{T}_p F : \mathcal{T}_p M \rightarrow \mathcal{T}_{F(p)} N$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, con inverso $\mathcal{T}_{F(p)} F^{-1}$

Nota 22 Si $F : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo local, entonces se cumple que para todo $p \in M$ la aplicación $\mathcal{T}_p F : \mathcal{T}_p M \rightarrow \mathcal{T}_{F(p)} N$ es isomorfismo entre espacios vectoriales.

Definición 68 Sea M una variedad, $p \in M$, $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una carta de M definida sobre p tal que: $\phi(p)$ son las coordenadas de p en la carta. Consideramos el isomorfismo: $\theta_{\phi, p} : \mathcal{T}_p M \rightarrow \mathbb{R}^m$ definido por la carta.

Designamos por e_i los vectores de la base canónica de \mathbb{R}^m . El isomorfismo $\theta_{\phi, p}$ los transforma en unos vectores tangentes:

$$E_i^\phi|_p = \theta_{\phi, p}^{-1}(e_i) \in \mathcal{T}_p M$$

que constituyen una base en el espacio tangente $\mathcal{T}_p M$. Se denominan **vectores tangentes coordinados** asociados a la carta.

Proposición 20 Sea $u \in \mathcal{T}_p M$. En la base de los vectores tangentes coordinados se expresa: $u = u^i E_i^\phi|_p$ es decir, $\theta_{\phi, p}(u) = (u^i) \in \mathbb{R}^m$. Los números u^i se denominan las **componentes del vector** en el sistema de coordenadas.

Proposición 21 Sea M una variedad, $p \in M$, (U, ϕ) , (U, ψ) dos cartas de M desarrolladas en el entorno del punto p (supondremos en el mismo dominio). Consideraremos las respectivas bases de vectores tangentes coordinados de $\mathcal{T}_p M$. La matriz del cambio de base que expresa la primera en términos de la segunda es la matriz jacobiana del cambio de coordenadas: $\delta = \psi \circ \phi^{-1}$ en $\phi(p)$:

$$E_i^\phi|_p = D_i \delta^j(\phi(p)) E_j^\psi|_p$$

5.2.3 Derivación definida por un vector tangente

Definición 69 Sea M una variedad, $p \in M$, $u \in \mathcal{T}_p M$. Sea $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 definida en un abierto de p . La **derivada de f según el vector tangente u** es:

$$\mathcal{L}_u f = D(f \circ \gamma)(0)$$

siendo γ un camino de la clase de tangencia u

Nota 23 En una base de vectores tangentes coordinados se expresa: $u = u^i E_i|_p$. Entonces $\mathcal{L}_u f = D_{p,u} f = D_i f(p) u^i$. Tomando como vector uno de los de la base tenemos: $\mathcal{L}_{E_i|_p} f = D_i f(p)$ y en particular encontraremos que la derivada de las funciones coordinadas es: $\mathcal{L}_{E_i|_p} \phi^j = \delta_i^j$

Proposición 22 Sea $u \in \mathcal{T}_p M$, $\lambda \in \mathfrak{R}$. El operador \mathcal{L}_u satisface las siguientes propiedades:

- $\mathcal{L}_u(f + g) = \mathcal{L}_u(f) + \mathcal{L}_u(g)$
- $\mathcal{L}_u(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \mathcal{L}_u(f)$
- $\mathcal{L}_u(f \cdot g) = \mathcal{L}_u(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot \mathcal{L}_u(g)$

Una vez llegados a este punto desarrollaremos el concepto de **espacio tangente de un espacio vectorial**.

Proposición 23 Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita, $p \in V$ un punto. Luego existe un isomorfismo canónico entre V y su espacio tangente en p , dado por:

$$\begin{aligned} \lambda_p : V &\rightarrow \mathcal{T}_p V \\ v &\rightarrow [t \rightarrow p + t \cdot v] \end{aligned}$$

La aplicación inversa es: $[\gamma] \rightarrow D_\gamma(0)$. Además se cumple que si f es una función de clase C^1 definida en un entorno de p : $\mathcal{L}_{\lambda_p(v)} f = D_{p,v} f$

Proposición 24 Sean V, W dos espacios vectoriales reales de dimensión finita, $F : V \rightarrow W$ una aplicación de clase C^1 , $p \in V$. La aplicación tangente $\mathcal{T}_p F : \mathcal{T}_p V \rightarrow \mathcal{T}_{F(p)} W$ trasladada en V y W por los isomorfismos anteriores, coincide con la derivada $DF(p) : V \rightarrow W$

Definición 70 Sea $\gamma_1 : J \rightarrow M$ un camino de clase C^1 , $t_0 \in J$, $p_0 = \gamma(t_0)$. Consideremos el camino trasladado por: $\gamma_2 : (J - t_0) \rightarrow M$ definido por: $\gamma_2(t) = \gamma(t_0 + t)$; pasa por p_0 cuando $t = 0$. **La velocidad o vector tangente de γ_1 en t_0** es la clase de tangencia $[\gamma_2]_{p_0}$. La denotaremos como: $\gamma_1'(t_0)$.

5.2.4 Derivaciones puntuales

Definición 71 Sea M una variedad diferenciable, $p \in M$, y consideramos el álgebra de las funciones diferenciables $C^\infty(M)$. Una **derivación puntual de $C^\infty(M)$ en p** es una aplicación \mathfrak{R} -lineal $\delta : deC^\infty(M) \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que:

$$\delta(f \cdot g) = \delta(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot \delta(g)$$

Proposición 25 Las derivaciones puntuales en p constituyen un \mathfrak{R} -espacio vectorial. A partir de ahora lo denotaremos como: $\mathcal{D}_p(M)$

Nota 24 La aplicación $\mathcal{T}_p M \rightarrow \mathcal{D}_p M$ que envía $u \rightarrow \mathcal{L}_u$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Una vez llegados a este punto, podemos plasmar definiciones alternativas para cada uno de los resultados y desarrollos que han acontecido. Planteamos aquí una serie de definiciones alternativas, así como un cambio de notación que facilitará el desarrollo de nuestro estudio.

- **Vectores tangentes de M en p :** derivaciones puntuales δ de $C^\infty(M)$ en p .
- **Espacio tangente de M en p :** el espacio vectorial de las derivaciones puntuales $\mathcal{T}_p(M) = \mathcal{D}_p(M)$
- **Aplicación tangente de una aplicación diferenciable $F : M \rightarrow N$ en p :** $\mathcal{T}_p(F) : \mathcal{T}_p(M) \rightarrow \mathcal{T}_{F(p)}(N)$ definida por: $(\mathcal{T}_p(F) \cdot \delta) \cdot g = \delta \cdot F^*(g)$
- **Isomorfismo canónico $\lambda_p : V \rightarrow \mathcal{T}_p(V)$ (donde V es un espacio vectorial):** $\lambda_p(v) = \mathcal{D}_{p,v}$
- **Base de los vectores tangentes coordenados asociados a la carta $\phi = (x^1, \dots, x^m)$ de M en p (tal que $\phi(p) = \hat{p}$):** $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = (\mathcal{T}_p \phi)^{-1}(\mathcal{D}_{\hat{p}, e_i})$ es decir,

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p f = \mathcal{D}_i(f \circ \phi^{-1})(\phi(p)) \equiv \mathcal{D}_i \widehat{f}(\widehat{p})$$

(observamos que si $M = \mathfrak{R}^m$ el operador $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ coincide con la $\mathcal{D}_i \Big|_p$)

Nota 25 En todas estas definiciones alternativas que estamos dando es necesario que todas las aplicaciones consideradas sean de clase C^∞

Estableceremos una vez dadas definiciones alternativas, un cambio de notación que nos ayudará a familiarizarnos con el tema que estamos trabajando en concreto:

Consideramos una carta ϕ de M en p , donde representaremos las funciones coordenadas como: $\phi = (x^1, \dots, x^m)$. Dado que hemos identificado los vectores tangentes como derivaciones puntuales, a partir de ahora escribiremos los vectores tangentes coordenados con la notación:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \equiv E_i^\phi \Big|_p$$

La derivada de una función f según un vector $u = u^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ la escribiremos como: $\mathcal{L}_u f \equiv u \cdot f \equiv u^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p f \equiv u^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p = u^i \mathcal{D}_i \widehat{f}(\widehat{p})$

La aplicación tangente: $F : M \rightarrow N$ en p , escribiremos sus respectivas bases de vectores tangentes coordenados como $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ y $\frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{F(p)}$ se expresa como:

$$\mathcal{T}_p F \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \mathcal{D}_i \widehat{F}^j(\widehat{p}) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{F(p)} = \frac{\partial (y^j \circ F)}{\partial x^i} \Big|_p \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{F(p)}$$

Si consideramos ahora dos sistemas coordenados ϕ y $\bar{\phi}$ en M , y denotamos sus respectivas bases de vectores tangentes coordenados de $\mathcal{T}_p M$ por $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ y $\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} \Big|_p$ entonces el cambio de base se expresa como:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \left(\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \Big|_p \right) \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} \Big|_p \right)$$

5.2.5 Espacio cotangente y diferencial de una función en un punto

Definición 72 Sea M una variedad, $p \in M$. El **espacio cotangente de M en p** es el dual del espacio tangente $\mathcal{T}_p M$ y se denota como: $\mathcal{T}_p^* M \equiv \mathcal{L}in(\mathcal{T}_p M, \mathfrak{R})$. Sus elementos se denominan vectores cotangente. Si $\alpha_p \in \mathcal{T}_p^* M$ y $u_p \in \mathcal{T}_p M$ utilizaremos la notación: $\alpha_p \cdot u_p \equiv \langle \alpha_p, u_p \rangle \equiv \alpha_p(u_p)$

Definición 73 Sea $f : M \rightarrow \mathfrak{R}$ una función de clase C^1 . A partir del isomorfismo canónico $\lambda_z : \mathfrak{R} \rightarrow \mathcal{T}_z(\mathfrak{R})$ se define un vector cotangente $d_p f \in \mathcal{T}_p^* M$ denominado **diferencial** de f en p :

$$d_p f := \lambda_{f(p)}^{-1} \circ \mathcal{T}_p f : \mathcal{T}_p M \rightarrow \mathfrak{R}$$

Nota 26 Si $\gamma : I \rightarrow M$ es un camino de clase C^1 , $\langle d_{\gamma(t)} f, \gamma'(t) \rangle = D(f \circ \gamma)(t)$.

Si $f : M \rightarrow \mathfrak{R}$ es de clase C^1 y $u_p \in \mathcal{T}_p M$: $\langle d_p f, u_p \rangle = \mathcal{L}_{u_p} f$ (esta nueva propiedad la podemos emplear como definición alternativa de $d_p f$)

Proposición 26 Sea (U, ϕ) una carta de M en p . Denotaremos las funciones coordenadas por: $\phi = (x^1, \dots, x^m)$. Los covectores $d_p x^j$ constituyen una base de $\mathcal{T}_p^* M$ y es la base dual de los vectores $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$:

$$\langle d_p x^j, \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \rangle = \delta_i^j$$

(donde $d_p x^j$ - es la base de vectores cotangentes asociada a la carta)

Respecto a esta base tenemos que: $d_p f = \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p \cdot d_p x^i$.

Consideremos otra carta (U, ψ) en p , con funciones coordenadas $\psi = (y^1, \dots, y^m)$. Entonces tendremos que: $d_p y^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \Big|_p \cdot d_p x^i$

5.3 Concepto de subvariedad

Definición 74 Sea M una variedad diferenciable de dimensión m . Un subconjunto $N \subset M$ se denomina **subvariedad regular (o simplemente subvariedad)** de dimensión n (siendo $n \leq m$) si cumple la propiedad siguiente: $\forall p \in N, \exists$ una carta (U, ϕ) de M en p tal que, identificando $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^m$, se cumple:

$$\phi(U \cap N) = \phi(U) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$$

Se dice que (U, ϕ) es una **carta adaptada a la subvariedad**. Se denominará **codimensión de N dentro de M** a la diferencia $(m-n)$.

Proposición 27 Sea $N \subset M$ una variedad regular. Las restricciones $(U \cap N, \phi|_{U \cap N})$ de las cartas adaptadas constituye un atlas de N , con el cual es una variedad diferenciable.

Los subespacios discretos de M son las subvariedades de dimensión 0. Los subespacios abiertos de M son las subvariedades de dimensión m . Una variedad $N \subset M$ de codimensión 1 se denomina **hipersuperficie**.

5.4 Los fibrados tangente y cotangente

5.4.1 El fibrado tangente

Definición 75 Sea M una variedad diferenciable. El **fibrado tangente** de M es la unión disjunta de los espacios tangentes tales como:

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} \mathcal{T}_p M$$

Denotaremos a sus elementos principalmente empleando las siguientes nomenclaturas: $(p, u), u_p, u, \dots$

La proyección canónica de TM es la aplicación: $\tau_M : TM \rightarrow M$ definida por $\tau_M(u_p) = p$. Sus **fibras** son los espacios tangentes dados por: $\tau_M(p)^{-1} = \mathcal{T}_p M$.

Proposición 28 Sea M una variedad diferenciable de dimensión m . El fibrado tangente TM tiene una \tilde{A}^0 estructura diferenciable de dimensión $2m$ caracterizada por la propiedad siguiente:

$$\begin{aligned} \Psi : \tau_M(p)^{-1}(U) &\rightarrow \phi(U) \times \mathbb{R}^m \\ \Psi(u_p) &= (\phi(p), d_p \phi \cdot u_p) \end{aligned}$$

(es una carta de TM). Esta aplicación se puede expresar como: $\Psi(u^i \frac{\partial}{\partial x^i} |_p) = (\phi(p); u^1, \dots, u^m)$. Con esta estructura, TM es una variedad diferenciable. Si M tiene base numerable de abiertos o es paracompacta, TM también lo es.

Proposición 29 Si (V, ϕ) es otra carta de M , y denotamos por: $\Phi : \tau_M^{-1}(V) \rightarrow \phi(V) \times \mathbb{R}^m$ la carta de TM definida analogamente, entonces el cambio de coordenadas viene dado por la relación:

$$(\Phi \circ \Psi^{-1})(x, u) = ((\phi \circ \psi^{-1})(x), D((\phi \circ \psi^{-1})(x)) \cdot u)$$

La carta, y las coordenadas de TM construidas de esta manera a partir de M , se denominan **naturales**.

Nota 27 Si $U \subset \mathbb{R}^m$ es un abierto, tenemos una identificación canónica: $TU \simeq U \times \mathbb{R}^m$

5.4.2 La aplicación tangente

Proposición 30 Sea $F : M \rightarrow N$ una aplicación de clase C^1 . La aplicación tangente: $\mathcal{T}_p F : \mathcal{T}_p M \rightarrow \mathcal{T}_{F(p)} N$ induce globalmente en cada punto la **aplicación tangente de F** :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}F : \mathcal{T}M &\rightarrow \mathcal{T}N \\ u_p &\rightarrow \mathcal{T}_p F \cdot u_p \end{aligned}$$

Si F es diferenciable de clase C^k , entonces $\mathcal{T}F$ es diferenciable de clase C^{k-1} .

Proposición 31 La aplicación tangente satisface las siguientes propiedades:

- $T(Id_M) = Id_{\mathcal{T}M}$
- Si $F : M \rightarrow N$, $G : N \rightarrow P$ son aplicaciones de clase C^1 ; entonces se cumple:

$$T(G \circ F) = TG \circ TF$$

- Si $F : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo, $TF : \mathcal{T}M \rightarrow \mathcal{T}N$ es un difeomorfismo; y: $T(F^{-1}) = (TF)^{-1}$

5.4.3 Campos Vectoriales

Definición 76 Sea M una variedad. Un campo vectorial (o campo de vectores tangentes) en M es una sección del fibrado tangente: $\tau_M : \mathcal{T}M \rightarrow M$, es decir, consiste en una aplicación $X : M \rightarrow \mathcal{T}M$ tal que $\tau_M \circ X = Id_M$. Por tanto, en cada punto $p \in M$ tenemos un vector $X(p) \equiv X_p \in \mathcal{T}_p M$

Proposición 32 Sea (U, ϕ) una carta de M . Se puede escribir $X(p) = X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} |_p$, donde las funciones $X^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ son **las componentes de X en la carta**. La expresión local de X respecto a la carta de M y a la carta natural correspondiente de $\mathcal{T}M$ es: $\widehat{X}(x) = (x^i; \widehat{X}^i(x))$.

El campo vectorial es de clase: C^k si lo son sus componentes en una carta.

Definición 77 Los **campos vectoriales coordinados** definidos por una carta (U, ϕ) son los campos vectoriales $\frac{\partial}{\partial x^i}$ en U tales que aplican: $p \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^i} |_p$. Son en todo caso diferenciables.

Las operaciones del espacio vectorial $\mathcal{T}_p M$, hechas para cada $p \in M$ permiten definir la suma de los campos vectoriales X, Y en M , como el campo vectorial definido por: $(X + Y)(p) = X(p) + Y(p)$. Análogamente, el producto $f \cdot X$ de una función f por X es el campo vectorial definido por: $(fX)(p) = f(p) \cdot X(p)$. Este tipo de operaciones entre aplicaciones de clase C^k dan lugar a resultados de clase C^k .

Definición 78 Denotaremos por $\mathcal{X}(M)$ a el conjunto de campos vectoriales diferenciables en M . Se trata de un \mathbb{R} -espacio vectorial y también un $C^\infty(M)$ -módulo.

Si (U, ϕ) es una carta, $\mathcal{X}(U)$ es un $C^\infty(U)$ -módulo libre, con base de los $\frac{\partial}{\partial x^i}$. Cualquier campo vectorial se puede expresar de forma única como: $X|_U = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Dada otra carta (U, ψ) con campos vectoriales coordinados como; $\frac{\partial}{\partial y^j}$. Podemos encontrar una relación entre las bases por medio de la siguiente relación:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

donde $\frac{\partial y^j}{\partial x^i}$ es la función que vale $\frac{\partial y^j}{\partial x^i} |_p$ en el punto p (matriz jacobiana del cambio de variables).

Nota 28 Nos hemos de fijar que $\mathcal{X}(\mathbb{R}^m)$ es un $C^\infty(\mathbb{R}^m)$ -módulo libre con base los campos vectoriales coordinados por $\frac{\partial}{\partial x^i}$ definidos por su carta canónica. Un campo vectorial $v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ en \mathbb{R}^m se identifica con la función vectorial dada por sus correspondientes componentes: $v = (v^1, \dots, v^n)$.

En particular el **campo vectorial unidad** de \mathfrak{R} (representado por: d/dt) constituye una base global de los campos vectoriales en \mathfrak{R} .

Definición 79 Una variedad se dice **parametrizable** si su fibrado tangente es **trivializable**; es decir, si existen m campos vectoriales diferenciables (necesariamente linealmente independientes en cada punto) E_1, \dots, E_m tales que para todo campo vectorial X en M se escribirá de manera única: $X = f^i E_i$ donde f^i son funciones.

5.4.4 Campos vectoriales como derivaciones

Definición 80 Sea M una variedad, X un campo vectorial en M . Si $W \subset M$ es un abierto y $f : W \rightarrow \mathfrak{R}$ es una función de clase C^1 , se puede definir la **derivada de f según el campo vectorial X** como la función $X \cdot f \equiv \mathcal{L}_X f : W \rightarrow \mathfrak{R}$ definida por: $(\mathcal{L}_X f)(p) = \mathcal{L}_{X_p} f$

Nota 29 El operador $\mathcal{L}_X f$ es un operador local: si $g|_V = g'|_V$, entonces $(\mathcal{L}_X g)|_V = (\mathcal{L}_X g')|_V$

Proposición 33 Sea (U, ϕ) una carta de M . Si $X|_U = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$; entonces se cumple: $(\mathcal{L}_X f)|_U = \frac{\partial f}{\partial x^i} X^i$ (donde $\frac{\partial f}{\partial x^i} \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} f \equiv \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} f$)

Una vez llegados a este punto queremos remarcar los siguientes resultados:

- Si X es de clase C^k , y f es de clase C^{k+1} , entonces $\mathcal{L}_X f$ es de clase C^k .
- Sea $X : M \rightarrow TM$ un campo vectorial. X es diferenciable sí y solo sí, para toda función $f : M \rightarrow \mathfrak{R}$ diferenciable, $\mathcal{L}_X f$ es diferenciable.
- Sea $X \in \mathcal{X}(M)$ un campo vectorial diferenciable en M . La aplicación dada por: $\mathcal{L}_X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ es una derivación.

Teorema 13 Teorema de equivalencia entre campos vectoriales y derivaciones

Sea $D : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ una derivación. Existe un único campo vectorial diferenciable $X \in \mathcal{X}(M)$ tal que $D = \mathcal{L}_X$

A partir de ahora hemos introducido la base matemática como para poder desarrollar una de las herramientas más importantes en la Física Teórica: el conmutador; y en especial, nos centraremos en el **conmutador de Lie (paréntesis de Lie)**.

Definición 81 Sea M una variedad, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ campos vectoriales diferenciables. El conmutador $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] := \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X$ de las correspondientes derivaciones $C^\infty(M)$ también es una derivación; por lo tanto es de la forma $\mathcal{L}_Z - Z$ otro campo vectorial diferenciable. Este tipo de "operaciones" se denotan como: $[X, Y]$ y se denominan **paréntesis de Lie de los campos vectoriales X, Y** .

Analicemos este último paso en detalle. Dados dos campos vectoriales X, Y , se define el conmutador de los dos campos como el campo: $[X, Y]$ que asigna a cada punto p el vector tangente $[X, Y]_p$ definido por:

$$[X, Y]_p(f) = X_p(Y(f)) - Y_p(X(f))$$

(donde f es una función diferenciable)

Nota 30 El concepto de conmutador es una herramienta que actúa bajo dos operadores lineales A, B definidos sobre un mismo dominio denso de un espacio de Hilbert; originando un nuevo operador definido por la diferencia del producto de operadores: $[A, B] = AB - BA$

Proposición 34 $\mathcal{X}(M)$ con el paréntesis de Lie constituye una \mathfrak{R} -álgebra de Lie. En particular, el paréntesis de Lie cumple las siguientes propiedades:

- es \mathfrak{R} -bilineal

- es antisimétrico: $[X, X] = 0$; $[X, Y] = -[Y, X]$
- satisface la identidad de Jacobi: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$
- no es $C^\infty(M)$ -bilineal; es decir: $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(X \cdot g)Y - g(Y \cdot f)X$

Proposición 35 Sea (U, ϕ) una carta de M . Si $X|_U = f^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ y $Y|_U = g^j \frac{\partial}{\partial x^j}$; entonces se cumple:

$$[X, Y]|_U = (f^i \frac{\partial g^j}{\partial x^i} - g^j \frac{\partial f^i}{\partial x^j}) \frac{\partial}{\partial x^j} = (X \cdot g^j - Y \cdot f^j) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

(en particular $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$)

Nota 31 La expresión anterior es válida para los campos vectoriales de clase C^1 . Si X, Y son de clase C^k , $[X, Y]$ es de clase C^{k-1} .

5.4.5 El fibrado cotangente

Definición 82 Sea M una variedad. El **fibrado cotangente** de M es la unión disjunta de los espacios cotangentes: $T^*M = \coprod_{p \in M} T_p^*M$. Denotaremos sus elementos por: $(p, \alpha), \alpha_p$. La **proyección canónica** de T^*M es la aplicación dada por: $\pi_M : T^*M \rightarrow M$ (aplicación diferenciable), definida mediante $\pi_M(\alpha_p) = p$. Sus fibras constituyen los espacios cotangentes: $\pi_M^{-1}(p) = T_p^*M$.

Proposición 36 Sea M una variedad diferenciable de dimensión m . El fibrado cotangente T^*M tiene una única estructura diferenciable de dimensión $2 \cdot m$ caracterizada por la propiedad siguiente: si (U, ϕ) es una carta de M , entonces la aplicación:

$$\Psi^+ : \pi_M^{-1}(U) \rightarrow \phi(U) \times \mathbb{R}^m$$

$$\Psi^+(\alpha_p) = (\phi(p), {}^t(d_p\phi)^{-1} \cdot \alpha_p)$$

es una carta de T^*M . Este tipo de carta también la podemos expresar como: $\Psi^+(a_i d_p x^i) = (\phi(p); a_1, \dots, a_m)$

Nota 32 Expresar el cambio entre dos cartas de M como: $x \rightarrow y(x)$, el cambio entre las cartas correspondientes de T^*M se expresa como:

$$(x^i, a_i) \rightarrow (y^j(x), a_i \frac{\partial x^i}{\partial y^j}(x))$$

(la carta y las coordenadas de T^*M construidas de esta manera a partir de las de M se denominan: **naturales**)

5.4.6 Formas diferenciables y diferencial de una función

Definición 83 Sea M una variedad. Una **(1)-forma diferencial en M** es un campo de vectores cotangentes, es decir, una sección del fibrado cotangente $\pi_M : T^*M \rightarrow M$, es decir, una aplicación $\omega : M \rightarrow T^*M$ tal que $\pi_M \circ \omega = Id_M$. Por tanto, en cada $p \in M$ tenemos un covector $\omega(p) \equiv \omega_p \in T_p^*M$

Proposición 37 Sea (U, ϕ) una carta de M . Se puede escribir como: $\omega(p) = \omega_i(p) d_p x^i$ donde las funciones $w_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ son las componentes de ω en la carta. La expresión local de ω en coordenadas naturales es: $\hat{\omega}(x) = (x^i; w_i(x))$

Nota 33 • Una forma diferencial es de clase C^k sí y solo si lo son sus componentes en una carta.

- Las aplicaciones $dx^i : U \rightarrow T^*U$ definidas por $p \rightarrow d_p x^i$ son m formas diferenciales diferenciables en U .

- **Denominaremos por $\Omega^1(M)$ el conjunto de las 1-formas diferenciales de clase C^∞ en M . Es un \mathfrak{R} -espacio vectorial; y de hecho constituye una estructura de $C^\infty(M)$ -módulo.**

Proposición 38 Sea (U, ϕ) una carta, $\Omega^1(U)$ es un $C^\infty(M)$ -módulo libre, con base las dx^i . Cualquier forma diferencial se escribe sobre U como: $\omega|_U = w_i \cdot dx^i$.

Nota 34 Sea $f : M \rightarrow \mathfrak{R}$ una función de clase C^1 . La diferencial de f es la 1-forma diferencial df definida por: $df(p) = d_p f$.

Proposición 39 • En un abierto coordinado la diferencial se expresa como: $df|_U = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$. La expresión local de df es entonces: $\widehat{df}(x) = (x; D_i \widehat{f}(x))$

- Si f es diferenciable [clase C^k], df es diferenciable [clase C^{k-1}]
- La aplicación $d : C^\infty(M) \rightarrow \Omega^1(M)$ es \mathfrak{R} -lineal; y se cumple: $d(f \cdot g) = g \cdot d(f) + f \cdot dg$

5.4.7 Dualidad entre campos vectoriales y 1-formas diferenciales

Definición 84 Sea M una variedad, X un campo vectorial y ω una 1-forma diferencial en M . La **contracción** entre ω y X es una función:

$$\begin{aligned} \langle \omega, X \rangle &\equiv \omega(X) \equiv i_X \omega : M \rightarrow \mathfrak{R} \\ \langle \omega, X \rangle(p) &= \langle \omega_p, X_p \rangle \end{aligned}$$

Proposición 40 En coordenadas se tiene que: $\langle dx^j, \frac{\partial}{\partial x^i} \rangle = \delta_i^j$. A partir de esta relación se puede calcular la contracción: $\langle \omega, X \rangle$: si $\omega|_U = w_i dx^i$ y se tiene que $X|_U = X^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ entonces se cumple: $\langle \omega, X \rangle|_U = w_i X^i$. Si ω y X son de clase C^k , $\langle \omega, X \rangle$ también lo es.

Nota 35 • Si X es un campo vectorial, f es una función de clase C^1 entonces se cumple: $\langle df, X \rangle = X \cdot f$

- Una 1-forma diferencial ω es diferenciable sí y solo sí, para todo campo vectorial diferenciable X , la función $\langle \omega, X \rangle$ es diferenciable.
- Si $\omega \in \Omega^1(M)$, la aplicación dada por $\widehat{\omega} : \mathcal{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$ tal que $\widehat{\omega}(X) = \langle \omega, X \rangle$ es $C^\infty(M)$ -lineal.

Teorema 14 Teorema de dualidad entre campos vectoriales y 1-formas diferenciales Sea $L : \mathcal{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$ una aplicación $C^\infty(M)$ -lineal. Existe una única $\omega \in \Omega^1(M)$ tal que $L(X) = \langle \omega, X \rangle$.

5.5 Derivada de Lie de funciones y de campos vectoriales

Definición 85 Un **campo vectorial a lo largo de una aplicación** $F : M \rightarrow N$ es una aplicación $V : M \rightarrow TN$ tal que para todo $p \in M, V(p) \in T_{F(p)}N$. Es decir, $\tau_N \circ V = F$. Si $V(p) = v^j(p) \frac{\partial}{\partial y^j} |_{F(p)}$. Su expresión local la podemos englobar como: $\widehat{V}(x) = (\widehat{F}(x); \widehat{v}^j(x))$

Definición 86 Sea $\gamma : I \rightarrow M$ un camino clase C^1 . El vector tangente $\gamma'(t) = T_t \gamma \cdot \frac{d}{dt} |_{t \in T_{\gamma(t)}M}$ para cada $t \in I$ define una aplicación $\gamma' \equiv \widehat{\gamma} : I \rightarrow TM$ que se puede expresar como: $\gamma' = T_\gamma \circ \frac{d}{dt}$ (donde $\frac{d}{dt}$ es el campo vectorial unidad de \mathfrak{R}). Es un campo vectorial a lo largo de γ , denominado: **velocidad o derivada** de γ en TM .

Definición 87 Sea M una variedad diferenciable, $X : M \rightarrow TM$ un campo vectorial en M de clase C^0 . Un camino $\gamma : I \rightarrow M$ de clase C^1 se denomina **curva integral** de X si se cumple: $\gamma' = X \circ \gamma$. Este tipo de expresiones reciben el nombre de **ED - Ecuación Diferencial** (ordinaria, explícita, de primer orden, autónoma) en M ; siendo γ **solución** de la ecuación. Si X es de clase C^k , necesariamente γ ha de ser clase C^{k+1} . Si $\gamma(t_0) = p_0$ decimos que γ satisface la condición inicial (t_0, p_0) .

Definición 88 Sea $\gamma : I \rightarrow M$, $\delta : J \rightarrow M$ las dos curvas integrales de X . Se dice que δ es una **prolongación** de γ si $I \subset J$ y además $\gamma = \delta|_I$. Una curva integral se dice **maximal** si no admite ningún tipo de prolongación a un intervalo más grande.

Proposición 41 Si en una carta M tenemos las expresiones locales $\hat{\gamma}$ y $\hat{X}(x) = (x, f(x))$ entonces la expresión local de la ecuación es: $D_{\hat{\gamma}} = f \circ \hat{\gamma}$

Teorema 15 : Teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales

Sea M una variedad, $X : M \rightarrow TM$ un campo vectorial de clase C^1 . Dados $t_0 \in \mathbb{R}$, $p_0 \in M$; existe una única curva integral maximal de X con condición inicial (t_0, p_0) .

5.5.1 Flujo de un campo vectorial

Definición 89 Sea $X : M \rightarrow TM$ un campo vectorial en M de clase C^1 . Dado un $p \in M$, sea $\gamma_p : I_p \rightarrow M$ la curva integral maximal de X con la condición inicial $(0, p)$. Escribimos $F_X(t, p) = \gamma_p(t)$. El dominio de F_X es el conjunto:

$$\mathcal{D}_X = \{(t, p) | p \in M, t \in I_p\} = \bigcup_{p \in M} I_p \times \{p\} \subset \mathbb{R} \times M$$

La aplicación $F_X : \mathcal{D}_X \rightarrow M$ se denomina **flujo del campo vectorial X** .

Proposición 42 Por definición el flujo de X cumple:

- $F(0, p) = p$
- $F'(t, p) = X(F(t, p))$

Aquí denotamos por: $F' : \mathcal{D} \rightarrow TM$ la aplicación definida por $F'(t, p) = F(-, p)'(t)$ (vector tangente del camino $F(-, p) : I_p \rightarrow M$ en el instante t)

Teorema 16 Teorema Fundamental sobre el flujo de un campo vectorial

Sea $X : M \rightarrow TM$ un campo vectorial en M de clase C^k ($k \geq 1$). El dominio $\mathcal{D}_X \subset \mathbb{R} \times M$ de su flujo es un abierto, y el flujo $F_X : \mathcal{D}_X \rightarrow M$ es una aplicación de clase C^k .

Nota 36 Dado que $\mathcal{D}_X \subset \mathbb{R} \times M$ es abierto, y el flujo F es de clase C^1 ; esto nos da libertad para poder expresar F' como: $F' = TF \circ \frac{\partial}{\partial t}$; siendo en este caso $\frac{\partial}{\partial t}$ el campo vectorial en $\mathbb{R} \times M$ definido a partir del campo vectorial unidad de \mathbb{R} .

5.5.2 Grupos uniparamétricos de transformaciones

Definición 90 Un campo vectorial (clase C^1) X de M se denomina **completo** si el dominio de sus curvas integrales maximales es \mathbb{R} . Es decir: $\mathcal{D}_X = \mathbb{R} \times M$. **El flujo de un campo vectorial completo es un grupo uniparamétrico de transformaciones.**

Definición 91 Un grupo uniparamétrico de transformaciones de M es una acción de \mathbb{R} sobre M , es decir, se trata de una aplicación $F : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ tal que $\forall s, t \in \mathbb{R}, \forall p \in M$ se cumple:

- $F(0, p) = p$
- $F(t + s, p) = F(t, F(s, p))$

Proposición 43 Sea $t \in \mathfrak{R}$. Definimos $F^t : M \rightarrow M$ por la aplicación $F^t(p) = F(t, p)$. Las propiedades anteriores las reescribimos como:

- $F^0 = Id_M$
- $F^{t+s} = F^t \circ F^s$

F^t es una biyección, con inversa F^{-t} . Denotaremos por \mathcal{C}_M el conjunto de permutaciones de M .

Definición 92 Supondremos que F es de clase C^1 . Entonces podemos definir el vector tangente como: $X_p = \gamma'_p(0) \in \mathcal{T}_p M$. De esta forma podemos definir un campo vectorial X en M descrito por: $X = F'(0, -)$ (donde $F'(t, p)$ es el vector tangente de $F(-, p)$ en el instante t ; $F' = TF \circ \frac{\partial}{\partial t}$). El campo vectorial X obtenido se denomina **generador infinitesimal del grupo paramétrico F** .

Nota 37 • Si F es un grupo uniparamétrico de transformaciones de M de clase $(C^k, k \geq 1)$ entonces su generador infinitesimal X es de clase (C^k) .

- La expresión local de X en la carta de M es: $\widehat{X}(x) = (x, D_1 \widehat{F}(0, x))$

Proposición 44 Si $F : \mathfrak{R} \times M \rightarrow M$ es un grupo uniparamétrico diferencial con generador infinitesimal X , entonces los caminos $\gamma_p(t) = F(t, p)$ son curvas integrales de X , F es el flujo de X , y X es un campo vectorial completo.

Proposición 45 Sea X un campo vectorial de M de clase C^1 , $F : \mathcal{D} \rightarrow M$ su flujo. Si $f : M \rightarrow \mathfrak{R}$ es una función de clase C^1 , podemos calcular la derivada: $\mathcal{L}_X f$ denominada **derivada de Lie de f respecto de X** como:

$$\mathcal{L}_X f(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F^{t*}(f)(p) - f(p)}{t} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F^{t*}(f)(p)$$

En el caso de que X no sea completo, entonces tendremos que los difeomorfismos F^t del flujo no estarán definidos en todo M .

Nota 38 Con respecto a la proposición anterior hay que tener en cuenta que: $\forall p \in M$ existen una serie de abiertos $0 \in I$ y $p \in U_p$ tales que: $I \times U_p \subset \mathcal{D}$ de tal forma que $\forall t \in I$ están definidos los: $F^t : U_p \rightarrow M$, por lo que las $F^{t*}(f)$ están definidas en U_p .

Proposición 46 Sea Y un campo vectorial de clase C^1 . De manera análoga a como hemos procedido anteriormente (con las mismas condiciones si X no es completo), definimos:

$$\mathcal{L}_X Y(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_{F^t(p)} F^{-t} \cdot Y(F^t(p)) - Y(p)}{t} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F^{t*}(Y)(p) \in \mathcal{T}_p M$$

Se obtiene así un campo vectorial $\mathcal{L}_X Y$ denominado **derivada de Lie de Y respecto de X** .

Una vez llegados a este punto propondremos una serie de propiedades o descripciones cualitativas que encontramos en el estudio de la naturaleza de la derivada de Lie:

Proposición 47 • Si X, Y son dos campos vectoriales de clase C^1 en M : $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$

- $\mathcal{L}_X Y = -\mathcal{L}_Y X$
- $\mathcal{L}_X [Y, Z] = [\mathcal{L}_X Y, Z] + [Y, \mathcal{L}_X Z]$
- $\mathcal{L}_{[X, Y]} Z = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] Z$
- $\mathcal{L}_X (fY) = (\mathcal{L}_X f)Y + f(\mathcal{L}_X Y)$
- Si $H : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo, $H_*(\mathcal{L}_X Y) = \mathcal{L}_{H_*(X)} H_*(Y)$

5.6 Campos Tensoriales

Definición 93 Sea M una variedad diferenciable de dimensión m , $p \in M$ un punto y $k, l \in \mathbb{N}$. A partir del espacio tangente $T_p M$ podemos construir los **productos tensoriales** $(\mathcal{T}ens)_l^k[T_p M] = \otimes^l T_p^* M \otimes^k T_p M$. Sus elementos los denominaremos tensores en p .

Igual que cuando procedimos con la construcción de los fibrados tangentes y cotangentes, la unión disjunta de estos espacios vectoriales, cuando p recorre M ; es un **fibrado vectorial** $(\mathcal{T}ens)_l^k[T_p M]$.

Definición 94 Un **campo tensorial k -contravariante l -covariante o del tipo (k, l)** es una aplicación R que asigna a cada punto $p \in M$ un tensor del tipo: $R(p) \equiv R_p \in (\mathcal{T}ens)_l^k[T_p M]$. Es una sección del fibrado tensorial $(\mathcal{T}ens)_l^k[T_p M]$ correspondiente.

Proposición 48 Sea (U, ϕ) una carta de M en un entorno de un punto p . La correspondiente base de vectores tangentes coordenados $\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$ da lugar a la base dual $\left. dx^i \right|_p$ de $T_p^* M$, y la base correspondiente $\left. dx^{j_1} \right|_p \otimes \dots \otimes \left. dx^{j_l} \right|_p \otimes \left. \frac{\partial}{\partial i^1} \right|_p \otimes \dots \otimes \left. \frac{\partial}{\partial i^k} \right|_p$ de $(\mathcal{T}ens)_l^k[T_p M]$ denominada base natural asociada a la carta.

Definición 95 Si R es un campo tensorial k -contravariante l -covariante en cada punto $p \in U$ podemos describir:

$$R(p) = R_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k}(p) \left. dx_p^{j_1} \right|_p \otimes \dots \otimes \left. dx_p^{j_l} \right|_p \otimes \left. \frac{\partial}{\partial i^1} \right|_p \otimes \dots \otimes \left. \frac{\partial}{\partial i^k} \right|_p$$

donde las funciones $R_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k}$ se denominan **componentes** de R en la carta dada. La expresión anterior la podemos reescribir como: $R|_U = R_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_l} \otimes \frac{\partial}{\partial i^1} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial i^k}$ interpretando en este caso que se ha de evaluar cada término en p .

Definición 96 Un campo tensorial R se dice que es diferenciable [de clase C^r] cuando lo son sus funciones componentes de una carta. Denotaremos por $\mathcal{T}_l^k(M)$ el **conjunto de los campos tensoriales del tipo (k, l)** diferenciables en M . Escribiremos $\mathcal{T}^k(M) = \mathcal{T}_0^k(M)$ para los campos tensoriales contravariantes; y respectivamente $\mathcal{T}_l(M) = \mathcal{T}_l^0(M)$ para los campos covariantes. En particular tenemos que: $\mathcal{T}_0^0(M) = C^\infty(M)$, $\mathcal{T}^1(M) = \mathcal{X}(M)$ y $\mathcal{T}_1(M) = \Omega^1(M)$.

Proposición 49 Un tensor $R_p \in (\mathcal{T}ens)_l^k[T_p M]$ define una función multilineal de k -covectores y l -vectores. Por lo tanto un campo tensorial R define una aplicación multilineal actuando sobre k campos vectoriales cotangentes $\theta_1, \dots, \theta_k$ y l campos vectoriales tangentes X_1, \dots, X_l que dan lugar a la función:

$$\widehat{R}(X_1, \dots, X_l, \theta_1, \dots, \theta_k)(p) = R_p(X_1(p), \dots, X_l(p), \theta_1(p), \dots, \theta_k(p))$$

Utilizaremos por notación para referirnos a esta aplicación como: $R(X_1, \dots, X_l, \theta_1, \dots, \theta_k)$. Expresándolo en coordenadas estos campos tensoriales y todos los campos de vectores y covectores, se calcula esta función como: $R_{j_1, \dots, j_l}^{i_1, \dots, i_k} = R|_U \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_l}}, dx^{i_1}, \dots, dx^{i_k} \right)$

5.6.1 Operaciones con campos tensoriales

Las operaciones con tensores en un punto, la suma y el producto por escalar, dan lugar a operaciones con los campos tensoriales. Así, si $f \in C^\infty(M)$, $R, R' \in \mathcal{T}_l^k(M)$ tenemos que el producto: fR y la suma $R + R'$ son de $\mathcal{T}_l^k(M)$. Con este tipo de construcciones podemos asegurar que $\mathcal{T}_l^k(M)$ es un $C^\infty(M)$ -módulo.

Definición 97 De forma análoga definimos el producto tensorial dado por $R \in \mathcal{T}_l^k(M)$, y $S \in \mathcal{T}_{l'}^{k'}(M)$ como: $R \otimes S \in \mathcal{T}_{l+l'}^{k+k'}(M)$ a partir del producto en cada punto: $(R \otimes S)_p = R_p \otimes S_p$. El producto tensorial de campos tensoriales se puede expresar como:

$$(\theta_1 \otimes \cdots \otimes \theta_l \otimes X_1 \otimes \cdots \otimes X_k) \otimes (\theta_{l+1} \otimes \cdots \otimes \theta_{l+l'} \otimes X_{k+1} \otimes \cdots \otimes X_{k+k'}) = \\ (\theta_1 \otimes \cdots \otimes \theta_{l+l'} \otimes X_1 \otimes \cdots \otimes X_{k+k'})$$

Definición 98 Sea E un espacio vectorial. Consideramos el espacio dado por: $(\prod^k E) \prod (\prod^r E^*)$ de tensores k -contravariantes, y r -covariantes. Dada una pareja de índices (i, j) , con $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq r$ consideramos la aplicación:

$$E \times \binom{k}{\cdot} \times E \times E^* \times \binom{r}{\cdot} \times E^* \xrightarrow{f} (\otimes^{k-1} E) \times (\otimes^{r-1} E^*) \\ (x_1, \dots, x_k, y'_1, \dots, y'_r) \rightarrow y'_j(x_i)x_1 \otimes \cdots \otimes x_i^C \otimes \cdots \otimes x_k \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_j^C \otimes \cdots \otimes y_r$$

donde el por notación los signos x_i^C e y_j^C indican que se han suprimido x_i y y_j respectivamente. Esta aplicación es multilineal (única). Denominaremos **contracción de los signos (i, j)** , y se la designará a lo largo de este escrito como: C_j^i

5.6.2 Formas diferenciales

Definición 99 Una **k -forma diferencial** es una aplicación w que asigna a cada punto $p \in M$ un k -vector cotangente $w(p) \equiv w_p \in \Lambda^k(T_p^*M)$ (por tanto es un tensor k -covariante antisimétrico). Una k -forma diferencial es una sección del fibrado exterior $\Lambda^k(T^*M)$

Nota 39 • Una k -forma diferencial se identifica como un campo tensorial k -covariante antisimétrico.

- Denotaremos como $\Omega^k(M)$ el conjunto de k -formas diferenciales diferenciables.
- EL producto exterior definido en cada punto de M permite definir el producto exterior de formas diferenciales. Si $\alpha \in \Omega^k(M)$, y $\beta \in \Omega^l(M)$ entonces: $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{k+l}(M)$. Considerando α y β como campos tensoriales covariantes, su producto exterior se obtiene antisimetrizando como: $\alpha \wedge \beta = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \mathcal{C}_{k+l}} \epsilon_\sigma \sigma(\alpha \otimes \beta)$ donde ϵ_σ es el signo de la permutación.

Definición 100 Sea $\omega \in \Omega^k(M)$, $X \in \mathcal{X}(M)$. La **contracción de X** con ω es una $(k-1)$ -forma diferencial, denotada por: $i_X \omega \equiv i(X)\omega$ definida a partir de la contracción en cada punto: $(i_X \omega)_p = i_{X_p} \omega_p$. La acción de $i_X \omega$ sobre $(k-1)$ campos vectoriales es entonces:

$$i_X \omega(Y_1, \dots, Y_{k-1}) = \omega(X, Y_1, \dots, Y_{k-1})$$

5.6.3 Derivada de Lie de campos tensoriales y formas diferenciales

Definición 101 Sea $X \in \mathcal{X}(M)$ y $F: \mathcal{D} \rightarrow M$ su flujo. Sea $R \in \mathcal{T}_l^k(M)$ un campo tensorial. Generalizando la definición de la derivada de Lie de funciones y de campos vectoriales, se puede definir la **derivada de Lie de R respecto X** , que es el campo tensorial $\mathcal{L}_X R \in \mathcal{T}_l^k(M)$ definido en cada punto $p \in M$ como:

$$\mathcal{L}_X R(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F^{t*}(R)(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F^{t*}(R)(p) - R(p)}{t} \in \text{Tensor}_l^k(T_p M)$$

En el caso particular que $\theta \in \mathcal{T}_1(M)$ la derivada de Lie $\mathcal{L}_X \theta$ está definida por: $\langle \mathcal{L}_X \theta, Y \rangle = \mathcal{L}_X \langle \theta, Y \rangle - \langle \theta, \mathcal{L}_X Y \rangle$

Definición 102 Considerando las formas diferenciales como campos covariantes antisimétricos, la derivada de Lie aplica formas diferenciales en formas diferenciales. Es decir, se cumple que:

$$\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = (\mathcal{L}_X\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\mathcal{L}_X\beta)$$

Nota 40 Si α es una k -forma diferencial entonces:

$$(\mathcal{L}_X\alpha)(X_1, \dots, X_k) = \mathcal{L}_X(\alpha(X_1, \dots, X_k)) - \sum_i \alpha(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_k)$$

5.7 Definición de los vectores de Killing

A grandes razgos, el concepto de vector de Killing lo expondremos de la siguiente forma:

Definición 103 Dado un campo vectorial \vec{V} , decimos que este campo de vectores es de Killing si se cumple:

$$\mathcal{L}_{\vec{V}}G = 0$$

donde G representa un tensor métrico $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ simétrico y no degenerado (recordamos que la derivada de Lie de un campo vectorial, tensorial y escalar; se encuentra definida en el ANEXO: Geometría Analítica).

Empleando un desarrollo en componentes de la métrica, la expresión anterior es equivalente a:

$$0 = \mathcal{L}_{\vec{V}}G = V^k \partial_k g_{ij} + g_{kj} \partial_i V^k + g_{ij} \partial_j V^k = 0$$

Considerando un punto p y una carta local (U, ϕ) , y una dirección α^k definida en el punto p . Vemos que para saber que α^k sea de Killing, es equivalente la anterior definición a que se cumpla la siguiente relación. Se conoce como la **ecuación de Killing**:

$$\nabla_k \alpha_\beta + \nabla_\beta \alpha_k = 0$$

Se constituye a los vectores de Killing como de una herramienta que nos permitirá conocer si las componentes de la métrica se verán alteradas dado un movimiento definido en una dirección, bajo la existencia de una curvatura. Es decir, es una herramienta que nos permite definir que parte de la métrica (o direcciones) permanecen invariables bajo la existencia de una curvatura.

En particular, en la métrica común de \mathbb{R}^3 , se nos define un tensor métrico con componentes $g_{ij} = \delta_{ij}$. Como son constantes, no dependen de un sistema de coordenadas x, y, z definido previamente. En consecuencia, las derivadas $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ son campos de vectores de Killing; ahora empleando coordenadas esféricas, el tensor métrico es directo que adquiere la forma de:

$$g_{rr} = G\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = 1, \quad g_{\theta\theta} = G\left(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) = r^2, \quad g_{\phi\phi} = G\left(\frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial \phi}\right) = r^2 \sin^2(\theta)$$

La métrica en este caso, muestra una dependencia en r, θ ; por lo que podemos deducir que ∂_ϕ es de Killing.

Nota 41 Recordemos un resultado general de álgebra: el **teorema de Fröbenius**. Dados dos vectores \vec{v}, \vec{u} definidos en una subvariedad S , aplicando el conmutador $[\vec{u}, \vec{v}]$ obtenemos un nuevo campo de vectores definido en la subvariedad. El Teorema de Fröbenius, en particular nos expone que: dados m campos vectoriales $v(a)$ en M tales que $[v(a), v(b)]$ es combinación lineal de los campos \Rightarrow las curvas integrales de los campos generan una familia de subvariedades - denominada **foliación**. Una aplicación a este teorema es considerar el caso $m = 1$. En este supuesto solo tenemos $\vec{v} \Rightarrow [\vec{v}, \vec{v}] = 0$. Por lo tanto, aplicando las hipótesis del teorema de Fröbenius, las subvariedades que se derivan son las diferentes curvas integrales que genera el vector. De nuevo, en el caso particular de \mathbb{R}^3 , los vectores obtenidos serán:

$$\vec{l}_x = y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}, \quad \vec{l}_y = z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}, \quad \vec{l}_z = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \phi}$$

Los conmutadores de estos elementos son combinación lineal de los campos.

Partiendo de los resultados de Killing obtenidos, y mediante el resultado que nos da el Teorema de Fröbenius para \mathfrak{R}^3 , la partial $\partial_\phi = \vec{l}_z$. Por la propia simetría del espacio, si \vec{l}_z es de Killing, también lo son: \vec{l}_x y \vec{l}_y respectivamente. Luego hay 6 campos de vectores de Killing en la métrica euclidiana de \mathfrak{R}^3 :

$$\text{(traslaciones)}\{\partial_x, \partial_y, \partial_z\} \text{ (rotaciones)} \{\vec{l}_x, \vec{l}_y, \vec{l}_z\}$$

ANEXO: Glosario de conceptos cosmológicos

Los siguientes conceptos, son ideas muy breves y poco consisas, así como de enunciados, resultados y etapas históricas, en lo referente a la Cosmología. Se ha querido añadir un anexo de este tipo debido a la temática de este TFG, y es que la mayor parte de los resultados expuestos hacen mención a objetos de esta naturaleza. Así mismo, el tratamiento de éste se ha expuesto de forma muy didáctica, a efectos de que un lector sin formación en Física, pueda complementar los resultados de éste TFG por medio de estas nociones básicas.

- **Radicación de CMB, o de fondo de microondas:** Radiación electromagnética descubierta en 1965 y que llena el Universo por completo. Posee la característica de radiación de cuerpo negro a una temperatura de 2,725K, y su frecuencia pertenece al rango de microondas. Es una de las pruebas principales del modelo cosmológico del Big-Bang.
- **Superficie de última dispersión de luz:** Límite impuesto por el Big-Bang que consiste en una región del espacio-tiempo opaca y que no podemos observar. Es el límite de nuestras observaciones, el cual constituye un muro o una barrera a partir de la cual no podemos observar nada.
- **Expansión acelerada de El Universo:** Término que se acuña para referirse al hecho de que en 1998 se descubre que el Universo está en expansión acelerada. Un hecho que se deriva de las observaciones realizadas mediante supernovas tipo IA, deduciéndose en última instancia que desde hace prácticamente 5000 millones de años El Universo se encuentra en un ritmo de expansión acelerada.
- **Materia Oscura:** Materia de origen no bariónico (materia ordinaria que podemos observar) que no interactúa con ninguna fuente de origen electromagnético, pero sí con la gravedad. Constituye cerca del 85% de la materia de nuestro universo.
- **Energía Oscura:** Forma de energía que está presente en todo el espacio, constituyendo cerca del 70% de todo El Universo, produciendo una presión que tiende a acelerarlo. Es la causante de la aceleración en términos de la expansión de nuestro universo. A día de hoy, constituye junto con la materia oscura de uno de los grandes interrogantes de la Cosmología.
- **Cronología de El Universo:** La historia de nuestro universo a grandes rasgos la podemos recoger en las siguientes cuatro etapas. Una **etapa de inflación:** instantes después del Big-Bang, el Universo se expande muchos órdenes de magnitud como consecuencia de la existencia de un campo escalar cuántico, en muy poco tiempo. El campo escalar se descarga formando una serie de partículas, que provoca acto seguido, la finalización de esta etapa inflacionaria en un tiempo t_{inf} , dando lugar a la expansión de Friedmann habitual ($\Lambda = 0$). Una **etapa hadrónica y una era leptónica**, en el cual se producen una serie de aniquilamientos entre diferentes partículas así como de una serie de recombi-

naciones en un tiempo t_{conf} y t_{anib} . Una **etapa de radiación y era de la materia**, en el que un universo dominado inicialmente por la radiación y las partículas materiales relativistas, se van enfriando hasta que la energía en reposo de las partículas materiales acaba dominando la dinámica de El Universo; y por último encontramos una **era oscura, formación galáctica y de reionización**. Esto nos da una idea de la historia de El Universo, en sus diferentes etapas.

- **Fluctuación cuántica de vacío:** Debido al Principio de Incertidumbre de Heisenberg, se originan una serie de fluctuaciones cuánticas del vacío, originando que el vacío no sea vacío. Es decir, acontece la creación constante de partículas (que pueden ser 2 fotones o una pareja de partícula-antipartícula), una con energía E y otra con energía $-E$. Acto seguido se aniquilan, produciendo una perturbación local o una fluctuación en el espacio-tiempo. A este fenómeno se le conoce en Física como fluctuación cuántica de vacío.
- **Radiación de Hawking.** La **Radiación de Hawking** es el término acuñado por el Doctor Hawking y que nos refiere a la interacción de un agujero negro constituido por un colapso gravitacional, mediante un campo escalar cuántico que tiene presencia en el horizonte de sucesos de un agujero negro. Esta interacción tiene por consecuencia la emisión de una radiación que satisface la relación: $T \sim M^{-1}$. Debido a la existencia de fluctuaciones cuánticas de vacío, y la posterior creación de pares partícula-antipartícula del tipo "virtual". Debido a la intensidad gravitatoria del agujero negro estas partículas pasan a ser reales. La desintegración entre ellas se da en un instante de tiempo muy breve, sin embargo, en el límite del horizonte de partículas del agujero negro, existe una probabilidad no nula de que un miembro del par se origine desde el interior, y el otro desde el exterior, por lo que una de las componentes del par pueda escapar del tirón gravitacional, produciendo una serie de radiación emitida desde el agujero negro. Si acontece este fenómeno, el agujero negro deberá ceder parte de su masa para contrarrestar la formación libre de este tipo de radiación; es decir, el agujero negro se evaporará.
- **Diagramas Espacio-Tiempo:** La idea es poder representar trayectorias de los fotones que se mueven por el tejido espacio-tiempo evitando las singularidades matemáticas y físicas en la descripción de la métrica de Schwarzschild. Para poder representar diagramas en espacio-temporales emplearemos las siguientes coordenadas.

La *coordenada radial*: se emplea la descripción de Regge-Wheeler r^* , mediante la relación:

$$\frac{dr^2}{1-\frac{2M}{r}} = (1 - \frac{2M}{r})(dr^*)^2 \Rightarrow r^* = r - 2M \ln(\frac{r}{2M} - 1)$$

La métrica nos queda como: $ds^2 = -(1 - \frac{2M}{r})(dt^2 - (dr^*)^2) + r^2 d\Omega^2$. Este cambio nos permite describir la trayectoria de los fotones mediante las geodésicas definidas como: $t = \pm r^* + C(\text{constante})$

Coordenada de tiempo retardado u y de tiempo adelantado v: las definimos por medio del campo $u = t - r^*$, $v = t + r^*$. Cumplen la relación:

$$dudv = dt^2 - (dr^*)^2 \Rightarrow ds^2 = -(1 - \frac{2M}{r})dudv + r^2 d\Omega^2$$

Una vez introducidas estas coordenadas procedemos mediante el siguiente desarrollo:

$$\begin{cases} r = r(u, v) \\ r^* = (v - u)/2 \end{cases} \quad \text{Vemos que esta relación nos permite hacer:}$$

$\frac{r}{2M} - \frac{v-u}{4M} = \ln(\frac{r}{2M} - 1)^{-1} \Rightarrow \exp[\frac{r}{2M} - \frac{v-u}{4M}] = \frac{1}{\frac{r}{2M} - 1} = \frac{\frac{2M}{r}}{1 - \frac{2M}{r}}$. La descripción de la métrica viene ahora definida como: $ds^2 = \frac{-2M}{r} e^{-r/2M} e^{(v-u)/4M} dudv + r^2 d\Omega^2$. Seguimos teniendo una singularidad para $r = 2M$. Efectuamos ahora el cambio: $V = e^{v/4M}$, $U = -e^{u/4M}$.

La nueva métrica se corresponderá con: $ds^2 = -\frac{32M^3 e^{r/2M}}{r} dU dV + r^2 d\Omega^2$. Evitamos ahora sí la singularidad con $r = 2M$. La descripción que comporta el cambio efectuado con U y V las coordenadas retrasada y avanzada respectivamente, nos permite definir unas coordenadas espaciales y temporales por medio de ellas:

$$T = \frac{U+V}{2}, X = \frac{V-U}{2}$$

Imponiendo ahora los nuevos cambios coordenados, la métrica vendrá descrita por la forma: $ds^2 = \frac{32M^3 e^{-r/2M}}{r} (dT^2 + dX^2) + r^2 d\Omega^2$. Los conos de luz vendrán descritos por medio de la ecuación: $T = \pm X + C(\text{constante})$. Aunque no sea intuitivo, el cambio de coordenadas que hemos expuesto es directo en relación a las coordenadas: $r, t \leftrightarrow X, T$:

$$\begin{cases} (\frac{r}{2M} - 1)e^{r/2M} = X^2 - T^2 \\ \frac{t}{2M} = \ln(\frac{T+X}{T-X}) = 2 \tanh^{-1}(\frac{T}{X}) \end{cases}$$

Esta descripción es proporcional de establecer un cambio de polares a cartesianas, en una geometría del tipo hiperbólica.

- **Solución de Kerr:** En los años posteriores a la solución de Schwarzschild, Kerr presenta una solución exacta para una masa que se encuentra en rotación pero sin carga. Introduce dos parámetros: "m" y "a", interpretados como masa y momento angular por unidad de masa - específico de un agujero negro. Dada la presencia de la rotación para la obtención de esta métrica es necesario imponer estacionalidad y simetría axial, en contraposición con la simetría esférica y estática que describe la métrica de Schwarzschild. Se trata igual que ésta última de una solución para el vacío. Para poder trabajar con estos análisis introducimos unas coordenadas denominadas de Boyer-Lindquist (el equivalente de Kerr a las coordenadas de Schwarzschild). **La métrica de Kerr en las coordenadas de Boyer-Lindquist** se expresa como:

$$ds^2 = \frac{\Delta - a^2 \text{sen}^2(\theta)}{\rho^2} dt^2 + 2a \frac{2Mr \text{sen}^2(\theta)}{\rho^2} dt d\phi - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \text{sen}^2(\theta)}{\rho^2} \text{sen}^2(\theta) d\phi^2$$

donde $\Delta := r^2 - 2Mr + a^2$, y $\rho := (r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^{1/2}$

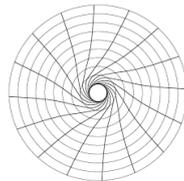


Figure 5.1: Representación de un agujero negro por la métrica de Kerr

Nota 42 En el límite de $a \rightarrow 0$ retomamos las ecuaciones de Schwarzschild.

A la hora de estudiar las singularidades de la métrica de Kerr, tenemos que hacer servir el **invariante de Kretschmann**: $R_{\mu\nu\rho\lambda} R^{\mu\nu\rho\lambda} = \frac{48M^2 (r^2 - a^2 \cos^2(\theta))}{(r^2 + a^2 \cos^2(\theta))^6} [(r^2 + a^2 \cos^2(\theta))^2 - 16r^2 a^2 \cos^2(\theta)]$. Est diverge únicamente para el caso de $r = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$ cuestión que representa la existencia de una singularidad física.

- **Condiciones de energía para el tensor de energía-impulso:** En nuestro Universo actual el tensor energía-momento se edifica sobre las contribuciones de incontables y diferentes campos de masa. Es imposible, aún conociendo las contribuciones particulares así como las leyes del movimiento que describen todas y cada una de estas contribuciones, la propia dinámica o descripción del tensor. Sin embargo, existen un conjunto de acotaciones que tienen sentido físico asumir en la dinámica del tensor.

- **La condición de energía débil - The weak energy condition:** El tensor de energía-momento para cada $p \in M$ obedece la inecuación: $T_{ab}W^aW^b \geq 0$ para todo vector temporal $W \in T_p$. Esta inecuación nos asume la existencia de un tensor de energía-momento diagonal respecto a la base ortonormal $\{E_1, E_2, E_3, E_4 - \text{temporal}\}$ de la forma:

(Tensor Tipo I)

$$T^{ab} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

Este es un caso general en el cual el tensor energía-momento admite un autovector(vep) temporal E_4 , el cuál es único a no ser que se cumpla la relación: $\mu = -p_\alpha$ tal que $\alpha \in \{1, 2, 3\}$. El autovalor (vap) μ representa la densidad de energía medida por un observador situado en p tal que sus unidades son tangentes al vector E_4 , mientras que los vaps p_α donde $\alpha \in \{1, 2, 3\}$ representan las principales medidas de presión en las tres direcciones espaciales E_α . Esta es la forma del tensor para todos los campos de observadores con masa no nula y también para todos los campos de masa excepto para el tensor tipo II (especial).

(Tensor Tipo II)

$$T^{ab} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu - k & \nu \\ 0 & 0 & \nu & \nu + k \end{pmatrix}$$

con la condición que $\nu \in \{-1, +1\}$. Este es un caso especial en el que el tensor energía-momento tiene un doble vep no nulo ($E_3 + E_4$). El único observador de esta forma está descrito para campos de masa nula, cuando se representa radiación la cual viaja en la dirección ($E_3 + E_4$). En este caso p_1, p_2, k son cero.

(Tensor Tipo III)

$$T^{ab} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\nu & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \nu \end{pmatrix}$$

(con las mismas condiciones anteriores) Es otro caso especial en el cual el tensor energía-momento tiene un triple vep no nulo ($E_3 + E_4$). No existe ningún campo de observadores los cuales tengan un tensor energía-momento de esta forma.

(Tensor Tipo IV)

$$T^{ab} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k & \nu \\ 0 & 0 & \nu & 0 \end{pmatrix}$$

(bajo la condición de que $k^2 < 4\nu^2$) Este es el caso general en el cual el tensor no tiene un vector propio nulo o temporal. No hay campos de observación los cuales nos

describan un tensor energía-momento de esta forma.

- **Condición de energía dominante - The dominant energy condition:** Para cada vector temporal W_a , $T^{ab}W_aW_b \geq 0$, bajo la condición de que $T^{ab}W_a$ no sea un vector temporal. Es decir, para cada observador la distribución de densidad de energía es no negativa, así como que el vector de energía no tiene una dependencia temporal. Dicho de otra forma: $T^{00} \geq |T^{ab}|, \forall a, b$

Este tipo de hipótesis físicas nos permiten definir los márgenes mediante los cuales, podemos desarrollar una definición consistente del tensor energía-momento, permitiéndonos deducir aplicando en última instancia el Principio Cosmológico, la diagonalización del tensor.

Biblioteca de Imágenes

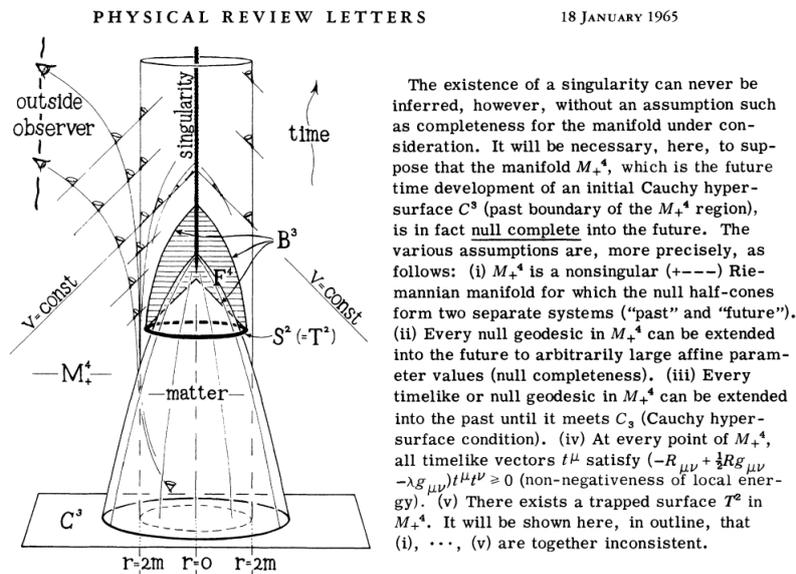


Figure 5.2: Parte del trabajo original publicado por Penrose para el Teorema de Existencia de Singularidad

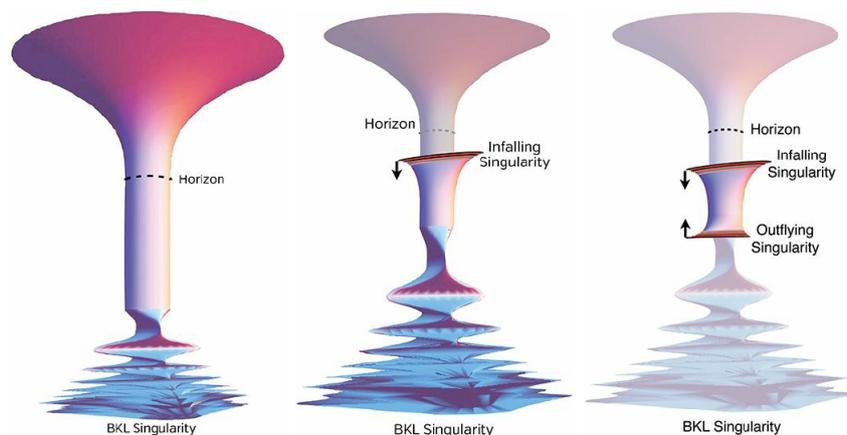


Figure 5.3: Representación de una singularidad por el Teorema de Singularidades de Penrose

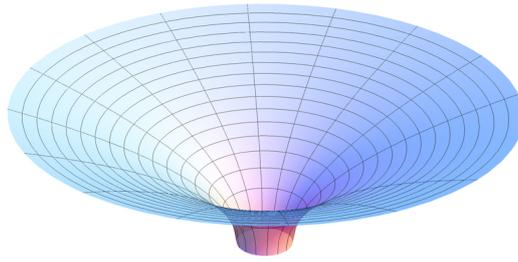


Figure 5.4: Representación de la solución de Schwarzschild

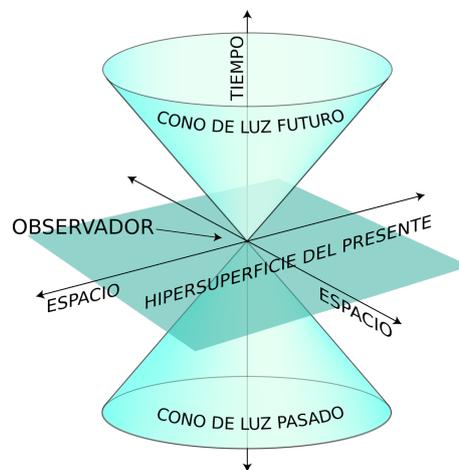


Figure 5.5: Representación grafica del cono de luz sobre el futuro y pasado causal

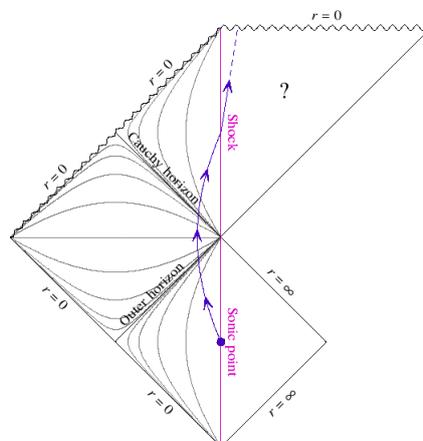


Figure 5.6: Representación grafica del Horizonte de Cauchy para un suceso determinado



Figure 5.7: Alejandro León Pérez, de izquierda a derecha el segundo, recibiendo del Doctor S.Hawking el premio del festival Starmus II, tras haberle hecho la pregunta sobre singularidades espacio-temporales en el año 2014. https://www.youtube.com/watch?v=4oQBJI_ATkw (minuto 4)

Bibliography

- [1] S. HAWKING, *Properties of Expanding Universes - Thesis presented for the degree of Ph.D in the Univerity of Cambridge by S.Hawking*, Cambridge University Library , Feb. 1966.
- [2] S.STERNBERG, *Semi-Riemann Geometry and General Relativity*. Notas de geometría semi-riemannina. Harvard University, Sept. 2003.
- [3] J.CEPA, *Cosmología Física*, Ediciones Akal S.A., 2007
- [4] B. SCHUTZ, *A first course in General Relativity*, Cambridge University Press, NewYork, 2009
- [5] J.GIRBAU, *Geometria Diferencial i Relativitat*, Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB), Bellaterra, 1993
- [6] PODOLSKY, *The Structure of the Extreme Schwarzschild de Sitter Space-time*, Department of Theoretical Physics, Charles University, Faculty of Mathematics and Physics, Prague, Czech Republic.
- [7] S.WEINBERG, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley and Sons, 1972.
- [8] E.V.LINDER, *First Principles of Cosmology*, Addison-Wesley, 1997
- [9] J.PÉREZ POYATOS, *Estudio comparativo de diferentes tipos de agujeros negros*, Universidad de Granada, Trabajo Fin de Grado de Física, 2016.
- [10] J.PÉREZ POYATOS, *Diagramas de Penrose de las Soluciones de Schwarzschild (anti)-de Sitter*, Universidad de Granada, Trabajo Fin de Máster de Física y Trabajo Fin de Máster de Matemáticas, Departamento de Física Teórica y del Cosmos, 2017.
- [11] J. K. BEEM, *Causality and Cauchy horizons.General Relativity and Gravitation*,1995
- [12] S. HAWKING, R.PENROSE *The nature of space and time*, Princeton University Press, 1996.
- [13] S.HAWKING, G. ELLIS, *The large scale structure of space-time*, Cambridge University Press, New York, 1973
- [14] S.HAWKING, R.PENROSE *The singularities of gravitational collapse and cosmology*, Proc. Roy. Soc. Lon. A.314(1970), 529-548.
- [15] MELANIE GRAF, JAMES D.E.GRANT, MICHAEL KUNZINGER, ROLAND STEINBAUER, *The Hawking - Penrose Singularity Theorem for $C^{1,1}$ -Lorentzian Metrics*, Springer-Verlag GmbH Germany, Springer Nature 2017, 30 Noviembre 2017
- [16] B.JANSSEN *Teoría de la Relatividad General*, Apuntes de la asignatura de Relatividad General, Grado de Física, Universidad de Granada.

- [17] T.BERTÓLEZ, *Retalls de Relativitat General*, Apuntes de la asignatura de Relatividad General, Grado de Física, 2019, Universidad de Barcelona (UB)
- [18] F.GUILLÉN, *Geometria Diferencial de Corbes i Superfícies*, Apuntes de la asignatura de Geometría Diferencial, Grado de Matemáticas, 2014, Universidad de Barcelona (UB)
- [19] X.GRÀCIA, *Geometria Diferencial 2. Definicions i resultats*, Apuntes de la asignatura de Geometría Diferencial 2 de la licenciatura de Matemáticas de la FME, 2009, Grado de Matemáticas, Universidad Politècnica de Catalunya (UPC).
- [20] P.G.GUILLEM, *Apunts de Relativitat General*, Apuntes de la asignatura de Relatividad General, Grado de Física, 2019, Universidad de Barcelona (UB)
- [21] B.CHRISTIAN, *Elementary differential geometry*, New York, Cambridge University Press, 2010.
- [22] A.MONTESDEOCA, *Apuntes de Introducció a las Variedades de Riemann*, curso 1992-1993, EHU - Euskal Herriar Unibertsitatea - Universidad del País Vasco.