UNIVERSITAT DE BARCELONA

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Índexs de poder. La importància de la CUP al Parlament de Catalunya l'any 2015

Autor: Marc Morell Giménez

Director: Dr. Mikel Álvarez Mozos

Realitzat a: Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial

Barcelona, 24 de gener de 2021

Abstract

The main goal of this project is to study simple games and, more specifically, the subclass of weighted majority games, seeing how these games can be represented mathematically and are especially useful when we evaluate and represent voting processes where voters can form coalitions to get a desired result. To do so, it will be necessary to review the most important concepts and demostrations related to cooperative games.

In addition, we will study the power of the players who form a certain simple game, which is based on the influence they have to make their will prevail in a voting and we will study the two most important power indices when evaluating this influence within a voting system, the Shapley-Shubik index and the Banzhaf index.

Finally, we will analyze the results of the elections to the Parliament of Catalonia in 2015 and introduce the games with incompatibilities and a priori unions to calculate the real power of the parliamentary groups that participated and explain the why for the different circumstances that occurred until the investiture.

Resum

L'objectiu d'aquest treball és estudiar els jocs simples i, més concretament, la subclasse dels jocs de majoria ponderada, veient com aquests jocs es poden representar matemàticament i són especialment útils a l'hora d'avaluar i representar processos de votació on els votants poden formar coalicions per a obtenir un resultat desitjat. Per a fer-ho, serà necessari repassar els conceptes clau i les demostracions més importants referents als jocs cooperatius.

A més, estudiarem el poder dels jugadors que formen un determinat joc simple, que es basa en la influència que aquests tenen per a fer prevaldre la seva voluntat en una votació i estudiarem els dos índexs de poder més importants a l'hora d'avaluar aquesta influència dins d'un sistema de votació, l'índex de Shapley-Shubik i l'índex de Banzhaf.

Per acabar, analitzarem els resultats de les eleccions al Parlament de Catalunya l'any 2015 i introduirem els jocs amb incompatibilitats i amb unions a priori per calcular el poder real dels grups parlamentaris que hi van participar i explicar el perquè de les diferents circumstàncies que van ocórrer fins a la investidura.

2010 Mathematics Subject Classification. 91A06, 91A12 i 91A35

Agraïments

Vull agrair a la meva família i als meus amics la comprensió, l'afecte i l'escalf que sempre m'han transmès, no només en els mesos en que he confeccionat aquest treball, sinó també en tots i cada un dels moments difícils que m'han brindat aquests cinc anys a la facultat. Gràcies per fer-me trobar les forces necessàries per a seguir endavant i no defallir.

No em vull oblidar tampoc d'agrair al Dr. Mikel Álvarez Mozos la seva inestimable ajuda, les seves sempre encertades correccions i la seva destresa per a guiar-me en l'elaboració d'aquest treball.

Dedicatòria

Al meu avi,

El desconcert dels primers dies ha deixat pas a una terrible enyorança, mai havia imaginat un despertar sense que hi fossis, un dia sense sentir la teva veu o haver d'acostumar-me a pensar-te en passat. Però sobretot, mai havia imaginat que el meu major temor fos oblidar-te.

No m'ha costat veure que això és impossible, quan miro als ulls al papa o a la Júlia és com si et veiés a tu, de fet, estic començant a entendre que aquest és el teu major llegat, haver-nos impregnat de la teva essència i de la teva manera de ser. I per fi, veig que no te'n vas anar, sinó que segueixes tan present com sempre.

T'estimo avi.

Índex

Capítol 1

Introducció

Tot i que es té constància de treballs previs, el naixement de la branca de les matemàtiques que estudia els conflictes d'interessos, denominada Teoria de Jocs, s'estableix l'any 1944 amb la publicació del llibre "Game Theory and Economic Behavior" de John von Neumann i Oskar Morgenstern.

Els seus models s'han aplicat especialment a l'economia i a la política, tot i que, gràcies a la gran capacitat d'aquests models a l'hora d'ajustar-se a l'estudi de la conducta humana també s'han utilitzat en altres camps com la filosofia i la psicologia.

Per a que la Teoria de Jocs pugui modelar correctament la conducta humana a fi de resoldre certs problemes relacionats amb el conflicte d'interessos i la presa de decisions però, aquests han de complir un seguit de condicions. En general, s'entén que existeix un número concret de jugadors, que es coneixen tots els possibles resultats del joc, que els jugadors tenen una preferència que es pot expressar en forma d'utilitat i que l'objectiu de cada jugador és maximitzar aquesta utilitat.

Amb l'objectiu d'aconseguir aquesta màxima utilitat, els jugadors prendran decisions conformant estratègies. La classificació més important entre els tipus de jocs s'ocupa de distingir entre si aquestes decisions són preses de forma individual o involucrant a altres jugadors, donant lloc als jocs no cooperatius (si les decisions són individuals) i als jocs cooperatius (si les decisions són consensuades).

La Teoria de Jocs no cooperatius estudia el comportament dels jugadors que integren un joc determinat on les seves decisions són preses individualment, sense possibilitat de comunicació amb els altres jugadors. És a dir, l'elecció d'una estratègia òptima depèn exclusivament de les prediccions que faci cada jugador sobre les possibles eleccions dels seus oponents.

Els jocs cooperatius, en canvi, formalitzen situacions en que els jugadors poden comunicar-se i negociar amb el fi de comprometre's per arribar a acords vinculants entre ells que els permetin assolir un resultat òptim millor del que podrien obtenir pel seu compte. Per tant, la Teoria de Jocs cooperatius no estudia només les possibles eleccions dels jugadors (com en els jocs no cooperatius) sinó que també estudia aspectes de la comunicació entre jugadors i la formació de coalicions (conjunt no buit de jugadors que han arribat a acords vinculants).

La Teoria de Jocs cooperatius s'ocupa de predir el resultat final de les interaccions entre els diferents jugadors a través de mecanismes que marquen de forma automàtica un resultat. Aquests mecanismes s'anomenen regles d'assignació, tot i que també són conegudes com a solucions.

Pel repartiment dels beneficis obtinguts gracies a la col·laboració dels diferents jugadors es tenen en compte el conjunt de resultats que cada coalició pot obtenir independentment del que facin els jugadors que no participen de la coalició. D'aquesta manera els acords entre els diferents membres de la coalició estableixen el repartiment dels guanys obtinguts i la conducta a seguir de cada membre.

En l'actualitat distingim dos tipus de jocs cooperatius: els jocs d'utilitat transferible i els jocs d'utilitat no transferible, dins d'aquesta última família hi trobem un cas particular força important, els jocs de negociació. Tant en els jocs d'utilitat transferible com en els d'utilitat no transferible s'analitza cada possible resultat segons les diferents coalicions que poden formar els jugadors. En els jocs de negociació, en canvi, només es consideren els possibles resultats dels jugadors si tots cooperen o si cap d'ells ho fa.

La diferenciació de les dues subclasses de jocs d'utilitat recau en la necessitat de modelitzar diferents situacions en funció de la complexitat a l'hora de distribuir els seus pagaments. Si un bé pot dividir-se tantes vegades com sigui necessari per a que la redistribució dels pagaments entre els jugadors de la coalició sigui total, estarem parlant d'un joc cooperatiu amb utilitat transferible (TU). Els exemples més clars per a aquest tipus de jocs són els que involucren els diners com a forma de pagament. Hi ha situacions, en canvi, en que la utilitat dels pagaments no és divisible o és subjectiva i depèn de la preferència dels jugadors, en aquests casos parlarem de jocs cooperatius amb utilitat no transferible (NTU).

D'ara endavant per a referir-nos al conjunt de jugadors escriurem $N := \{1, ..., n\}$ i per referir-nos a les coalicions usarem S on $|S|$ representarà el nombre d'integrants de la coalició S.

Capítol 2

Tipus de jocs cooperatius

2.1 Jocs NTU

Abans de descriure els jocs NTU definim un parell de conceptes previs necessaris a l'hora de caracteritzar aquest tipus de jocs.

Definició 2.1. *Sigui $\mathbb{R}^S$ el conjunt de resultats que els jugadors d'una coalició S poden obtenir per si mateixos. Considerem tal coalició $S \subset N$ i un conjunt $A \subset \mathbb{R}^S$, el conjunt A és comprensiu si per a cada parell $x, y \in \mathbb{R}^S$ tal que $x \in A$ i $y \leq x$ llavors $y \in A$. A més, sigui $B \subset \mathbb{R}^S$ el conjunt comprensiu més petit que conté A, B és el conjunt completament comprensiu d'A.*

Observació: Siguin $x, y \in \mathbb{R}^S$ dos vectors de dimensió $|S|$, per a la definició anterior hem considerat que $x \geq y$ si i només si per cada $i \in S,\ x_i \geq y_i$

Definició 2.2. *Un joc cooperatiu amb utilitat no transferible (joc NTU) és un parell (N, v) on N és el conjunt de jugadors i v es una funció que assigna a cada coalició $S \subset N$ un conjunt $v(S) \subset \mathbb{R}^S$, on $v(S)$ representa la utilitat que es poden assegurar els jugadors de la coalició si cooperen, independentment de les estratègies de la resta de jugadors. A més per cada $S \subset N$ no buida es compleix:*

1. *$v(S)$ és un subconjunt no buit i tancat de $\mathbb{R}^S$.*
2. *$v(S)$ és comprensiu i $\forall i \in N, v(\{i\}) \neq \mathbb{R}$. És a dir, existeix una $v_i \in \mathbb{R}$ tal que $v(\{i\}) = (-\infty, v_i]$.*
3. *El conjunt $v(S) \cap \left\{y \in \mathbb{R}^S \text{ tals que } \forall i \in S, y_i \geq v_i\right\}$ és acotat.*
4. *Per convenció $v(\emptyset) := 0$.*

Observació: Es poden usar condicions lleugerament diferents i que solen ser equivalents a l'hora de caracteritzar $v(S)$. Que $v(S)$ sigui un subconjunt no buit i tancat són dos requisits tècnics, i que sigui comprensiu una suposició molt convenient. A més, també se sol assumir que és un conjunt convex.

Definició 2.3. *Sigui (N, v) un joc NTU. Els vectors de $\mathbb{R}^N$ s'anomenen assignacions. Una assignació $x \in \mathbb{R}^N$ és factible sempre que una partició $\{S_1, ..., S_k\}$ de N satisfaci que per cada $l \in \{1, ..., k\}$, hi ha una $y \in v(S_l)$ tal que per cada $i \in S_l$, $y_i = x_i$.*

Els jocs d'utilitat no transferible constitueixen la classe més general dins dels jocs cooperatius. Aquest tipus de jocs modelitzen situacions en les que una coalició pot obtenir una de les seves assignacions factibles sense l'aprovació dels jugadors que no formen part de la coalició. Com el seu nom indica, en aquests jocs existeixen restriccions que condicionen els pagaments dificultant que la utilitat pugui ser transferida entre els jugadors participants, aquestes restriccions venen donades be perquè les utilitats dels jugadors no són comparables o be pel fet de que el pagament no és divisible. Per aquesta raó, el pagament per a cada coalició ve donat per un conjunt de vectors d'utilitats factibles i no per un únic número real.

Els diferents autors que han estudiat aquest tipus de jocs s'han centrat més en l'estudi de casos especials que en l'estudi del marc general. L'objectiu principal de l'anàlisi teòric és trobar regles per escollir assignacions factibles, aquestes regles s'anomenen solucions. Les solucions tenen com a objectiu seleccionar assignacions amb propietats desitjables per als jugadors segons criteris com l'equitat, la justícia i l'estabilitat.

Exemple joc NTU: (El joc del banquer (Owen 1972)). Considerem el següent joc on els pagaments són en dòlars:

$$v(\{i\}) = \{x_i : x_i \leq 0\},\ i \in \{1,2,3\}$$
$$v(\{1,2\}) = \{(x_1,x_2) : x_1 + 4x_2 \leq 1000 \text{ i } x_1 \leq 1000\}$$
$$v(\{1,3\}) = \{(x_1,x_3) : x_1 \leq 0 \text{ i } x_3 \leq 0\}$$
$$v(\{2,3\}) = \{(x_2,x_3) : x_2 \leq 0 \text{ i } x_3 \leq 0\}$$
$$v(\{N\}) = \{(x_1,x_2,x_3) : x_1 + x_2 + x_3 \leq 1000\}$$

Pel seu compte, cap dels tres jugadors pot obtenir un pagament positiu. El jugador 1, amb l'ajuda del jugador 2, pot obtenir 1000 dollars. Per compensar-li el seu ajut, el jugador 1 pot enviar-li una recompensa al jugador 2 però els diners es perdran amb una probabilitat del 75%. El jugador 3 actua com un banquer, el jugador 1 pot fer una transacció segura per al jugador 2 usant-lo com a intermediari.

En aquest exemple, tot i que el pagament $(1000, 0) \in v(\{1,2\})$ els jugadors 1 i 2 no poden acordar repartir-se els beneficis, per exemple $(500, 500)$, sense l'ajuda del jugador 3. És per això que es considera un joc NTU.

2.1.1 Jocs de negociació

En un joc de negociació existeix un conjunt de possibles assignacions, el conjunt factible, i una d'elles ha de ser escollida pel conjunt de jugadors. Tots els jugadors participants del joc han d'estar d'acord amb l'assignació escollida, si no s'arriba a l'acord unànime per alguna de les assignacions, l'assignació que determinarà la utilitat que rebrà cada jugador serà la corresponent al punt de desacord.

En els jocs de negociació, l'estudi del paper de les possibles coalicions formades entre jugadors perd tota la importància a causa de la capacitat que té cadascun dels jugadors de vetar qualsevol assignació diferent al punt de desacord. Aquest punt marca una gran diferència tant amb els jocs NTU com amb els jocs TU (els veurem a continuació) on l'estudi de tots els escenaris corresponents a les diferents coalicions entre jugadors és bàsic a l'hora d'estudiar les solucions.

Cada individu participant del joc té un ordre de preferències sobre les opcions de negociació. És clar que, quan tots els jugadors prefereixen la mateixa opció arriben a un acord i reben els beneficis corresponents a l'assignació que han acordat. El problema apareix quan un dels jugadors o uns quants no estan d'acord amb l'opció de negociació elegida pels altres i s'ha d'analitzar quina és la millor pel conjunt de jugadors, en aquest estadi serà necessària una negociació entre els jugadors per determinar la opció escollida o fins i tot triar un àrbitre imparcial que decideixi el resultat.

Les solucions per a aquest tipus de jocs són qualsevol assignació que indiqui una de les opcions d'entre totes les opcions de negociació possibles. Per a l'estudi de les solucions dels jocs de negociació és necessari intentar predir el comportament i les decisions que prendrien tots els jugadors, o en el cas que es necessiti un àrbitre, intentar predir la decisió d'aquest.

Un cop explicades les característiques més importants d'aquest tipus de joc cooperatiu NTU procedim a donar la seva definició formal.

Definició 2.4. *Un joc de negociació d'n jugadors amb el conjunt de jugadors N és un parell (F, d) on F representa el conjunt factible i d el punt de desacord. F és un conjunt completament comprensiu d'un subconjunt compacte i convex de $\mathbb{R}^N$ i d és una assignació del conjunt F, a més s'assumeix que existeix $x \in F$ tal que $x > d$.*

El conjunt factible F representa la utilitat que els jugadors poden obtenir dels beneficis associats als acords disponibles, mentre que el punt de desacord d assigna la utilitat quan no s'arriba a un acord.

Observació: Un joc de negociació (F, d) és una subclasse de joc NTU (N, v), on $v(N) := F$ i per cada coalició no buida $S \neq N$ llavors $v(S) := \{y \in \mathbb{R}^S \text{ tal que } \forall i \in S, y_i \leq d_i\}$.

2.2 Jocs TU

Com en els jocs NTU que hem vist anteriorment, els jocs TU modelitzen situacions en les que es possibilita la formació de coalicions capacitades per assegurar assignacions factibles sense el consentiment unànime de la resta dels jugadors aliens a la coalició.

La diferència amb els jocs NTU recau en el fet que en aquest tipus de joc, la distribució dels pagaments obtinguts entre els membres de la coalició, a mode compensatori pels possibles sacrificis o renúncies que algun jugador pugui haver fet respecte els seus guanys individuals en favor d'un major benefici per la coalició, si que són possibles. Aquestes compensacions s'anomenen pagaments laterals.

Una solució d'un joc TU és tota regla d'assignació que garanteix un repartiment total dels pagaments del joc, tot i que, com veurem més endavant, se solen considerar només aquelles assignacions que a més de repartir tots els pagaments són beneficioses per tots els jugadors.

Veiem ara la definició formal d'aquest tipus de joc cooperatiu.

Definició 2.5. *Un joc TU és un parell (N, v) on N és el conjunt de jugadors i $v \colon 2^N \to \mathbb{R}$ una funció, anomenada funció característica del joc, que assigna a cada coalició $S \subseteq N$ un valor $v(S) \in \mathbb{R}$ i satisfà $v(\emptyset) := 0$. On $v(S)$ és el valor de la coalició, és a dir, el benefici que pot generar la coalició o la màxima utilitat que els jugadors de la coalició S poden assegurar-se independentment de les estratègies dels jugadors que no pertanyen a S.*

Observació: Un joc TU (N, v) es pot definir com un joc NTU (N, V) si definim la funció característica del joc NTU, per cada coalició no buida $S \subset N$ com $V(S) := \left\{y \in \mathbb{R}^S : \sum_{i \in S}(y_i) \leq v(S)\right\}$.

Exemple joc TU: (El joc dels guants). Tres jugadors estan disposats a repartir-se els beneficis de vendre un parell de guants. El jugador 1 té un guant per a la mà esquerra i els jugadors 2 i 3 en tenen un per a la mà dreta cadascú. Tenint en compte que un parell de guants (dreta-esquerra) poden vendre's per un euro, aquesta situació es pot representar amb el joc TU (N, v), on $N = \{1, 2, 3\}$, $v(1) = v(2) = v(3) = v(23) = 0$ i $v(12) = v(13) = v(N) = 1$

Exemple joc TU: (El professor visitant). Amb aquest exemple podem veure que a més de modelar situacions que involucren beneficis pels jugadors, els jocs TU també serveixen per analitzar situacions que provoquen costos en els jugadors. Tres grups de recerca, de les universitats de Milà, Gènova i Barcelona volen convidar un professor japonès a les seves universitats perquè imparteixi un curs de Teoria de Jocs. Per minimitzar els costos, les tres universitats intenten coordinar els cursos i estimen el cost (en euros) de la visita del professor per cada possible coalició: $c(1) = 1500$, $c(2) = 1600$, $c(3) = 1900$, $c(12) = 1600$, $c(13) = 2900$, $c(23) = 3000$, $c(N) = 3000$ (per cada coalició S, $c(S)$ indica el cost mínim del viatge que el professor haurà de fer per visitar les universitats de S). Sigui $N = \{1, 2, 3\}$. El joc (N, c) és un joc TU, però a diferència de l'exemple anterior, aquest és un joc de costos. El joc d'estalvi associat a aquesta situació, que mostrà els beneficis obtinguts per cada coalició, és el parell (N, v), on per cada $S \subset N$,

$$v(S) = \sum_{i \in S} c(i) - c(S)$$

Així, $v(1) = v(2) = v(3) = 0, v(12) = 1500, v(13) = 500, v(23) = 500$ i $v(N) = 2000$

D'ara endavant, per a referir-nos als jocs de la classe TU amb un conjunt de jugadors N, utilitzarem la notació G^N. A vegades, fins i tot, per a simplificar encara més la notació, ometrem el conjunt de jugadors i anomenarem un joc simplement per la seva funció característica.

Observació: Donats dos jocs TU $v, w \in G^N$ i $\alpha \in \mathbb{R}$, per a cada coalició $S \subset N$ definim $(v + w) \in G^N$ com $(v + w)(S) = v(S) + w(S)$ i $(\alpha v) \in G^N$ com $(\alpha v)(S) = \alpha v(S)$. D'aquesta manera veiem que el conjunt G^N té estructura d'espai vectorial de dimensió $2^n - 1$ amb les operacions d'additivitat i producte per un escalar.

L'objectiu de les següents definicions és presentar diferents tipus de jocs TU interessants que tenen especial importància. A més, el cas pràctic que ens ocupa al final del treball compleix totes les característiques que ens proporcionen les definicions.

Definició 2.6. *Un joc TU $v \in G^N$ és superadditiu si per cada parell de coalicions $S, T \subset N$, amb $S \cap T = \emptyset$, llavors: $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$.*

Un joc TU és superadditiu quan els jugadors tenen incentius reals per a cooperar en tots els casos, és a dir, es compleix que la unió de cada parell de coalicions disjuntes sempre produeix una utilitat igual o major de beneficis totals. Per aquesta raó, en aquest tipus de jocs es tendeix a formar una única coalició formada per tots els jugadors anomenada gran coalició i representada com N.

Definició 2.7. *Un joc TU $v \in G^N$ és monòton si per cada parell de coalicions $S, T \subset N$ amb $S \subset T$ llavors $v(S) \leq v(T)$.*

Per tant, al créixer el nombre de jugadors que formen una coalició assumim que el benefici obtingut per la coalició no disminuirà. És a dir, no existeixen jugadors que restin beneficis quan s'afegeixen a una coalició.

Definició 2.8. *Un joc TU $v \in G^N$ és 0-normalitzat si, per cada jugador $i \in N$, $v(i) = 0$. Si a més, la gran coalició del joc compleix la condició $v(N) = 1$ el joc s'anomena (0,1)-normalitzat.*

Definició 2.9. *Sigui $v \in G^N$ un joc TU, anomenem zero-normalització de v a un joc w tal que per a cada $S \subset N$, w és de la forma:*

$$w(S) := v(S) - \sum_{i \in N} v(i)$$

Definició 2.10. *Sigui $v \in G^N$ un joc TU, v és un joc zero-monòton si la seva zero-normalització es un joc monòton.*

La Teoria de Jocs cooperatius TU s'ocupa de definir conjunts d'assignacions que són bones pels jugadors. Existeixen dos enfocaments diferenciats a l'hora de definir les solucions dels jocs TU, aquestes solucions són regles d'assignació que han d'interessar als jugadors. En primer lloc tenim l'enfocament basat en l'estabilitat, on les solucions han de triar conjunts d'assignació estables. El segon enfocament es basa en la justícia, on les solucions representen un compromís just per als jugadors.

Capítol 3

Concepte de solució per a jocs cooperatius TU

En la Teoria de Jocs cooperatius existeixen dos tipus de solucions: les solucions de tipus puntual, que representen una sola d'entre totes les possibles assignacions i que veurem més detalladament quan parlem del valor de Shapley i dels índexs de poder i les solucions de tipus conjunt, que limiten un conjunt de possibles assignacions exigint certes propietats. L'objectiu d'aquest capítol és presentar aquests dos tipus de solucions.

3.1 Nucli o Core

En aquesta secció presentarem el concepte més important relacionat amb l'estabilitat de les assignacions dels jocs TU, el nucli o "core". Per a fer-ho, en primer lloc hem d'incloure les següents propietats relacionades amb les assignacions mencionades.

Considerem el joc TU $v \in G^N$ i sigui $x \in \mathbb{R}^N$ una assignació del joc v.

Definició 3.1. *L'assignació x és eficient si es compleix*

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N)$$

Observació: Aquesta propietat d'eficiència es complirà per als jocs superadditius sempre que els beneficis totals de les coalicions es comparteixin entre els jugadors.

El principi d'eficiència imposa que, en el cas que es formi la gran coalició N, el benefici serà repartit en la seva totalitat entre els membres de la coalició.

Definició 3.2. *L'assignació x és individualment racional si per cada jugador $i \in N$, $x_i \geq v(i)$*

És a dir, el principi d'individualitat racional força que com a resultat d'una coalició, un jugador no rebi una utilitat menor a la que pot obtenir de manera individual.

El conjunt d'assignacions eficients i individualment racionals d'un joc TU s'anomena conjunt d'imputacions. Formalment representem el conjunt d'imputacions com:

$$I(v) := \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i \in N} x_i = v(N) \ i \ \forall i \in N, \ x_i \geq v(i) \right\}$$

El principi d'individualitat racional garanteix que cap dels jugadors participants del joc tingui una motivació real per a bloquejar qualsevol de les assignacions del conjunt $I(v)$. Ara, resulta necessària una condició que ens garanteixi això mateix però no per a tots els jugadors, sinó per a totes les coalicions possibles.

Definició 3.3. *L'assignació x és coalicionalment racional si cada coalició $S \subset N$, compleix*

$$\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$$

Aquesta propietat assegura que una determinada coalició de jugadors no tingui incentius per a bloquejar una determinada assignació del conjunt d'imputacions $I(v)$.

Definició 3.4. *Anomenem "core" o nucli del joc $v \in G^N$ al conjunt d'assignacions eficients i individualment i col·lectivament racionals, de manera formal denotem el nucli $c(v)$ com:*

$$c(v) := \left\{ x \in I(v) : \forall S \subset N, \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \right\}$$

El nucli, que és el conjunt delimitat per les condicions d'eficiència i racionalitat individual i col·lectiva és la representació més important de les solucions de tipus conjunt per als jocs TU.

Per a qualsevol assignació del nucli no existeixen jugadors ni coalicions que percebin una utilitat menor a la que podrien rebre per si mateixos, és per això que aquestes assignacions són estables, és a dir, no existeixen incentius per a bloquejar-les.

Es pot donar el cas de que en jocs que representen situacions altament inestables, el nucli del joc sigui buit ($C(v) = \emptyset$). Com hem vist, el nucli dona possibles solucions per al joc cooperatiu acceptables per a tots els jugadors o coalicions, i per tant, és molt important caracteritzar els jocs cooperatius amb el nucli no buit.

El teorema de Bondareva-Shapley, provat de forma independentment per Bondareva l'any 1963 i per Shapley l'any 1967, resol aquesta qüestió i dona una condició necessària i suficient per a que el joc tingui un nucli no buit. Per a fer-ho, ambdós autors demostren que la classe de jocs amb el nucli no buit coincideix els la classe de jocs equilibrats.

Definició 3.5. *Sigui $F = \{S_1, S_2, ..., S_m\} \subset 2^N \setminus \{\emptyset\}$ una família de coalicions diferents i no buides, F és equilibrada si existeixen números positius $\{\alpha_S : S \in F\} = \alpha_{S_1}, \alpha_{S_2}, ..., \alpha_{S_m} \in \mathbb{R}^+$ anomenats coeficients d'equilibri, tals que per cada $i \in N$,*

$$\sum_{S \in F, i \in S} \alpha_S = 1$$

Definició 3.6. *Un joc TU $v \in G^N$ és un joc equilibrat si, per cada família equilibrada F, amb coeficients d'equilibri $\{\alpha_S : S \in F\}$ es compleix:*

$$\sum_{S \in F} \alpha_S v(S) \leq v(N)$$

En el cas de que aquesta condició es compleixi per a cada coalició $S \subset N$ el joc serà totalment equilibrat.

Teorema 3.1. *Sigui $v \in G^N$ un joc TU, el nucli de v serà no buit ($C(v) \neq \emptyset$) si i només si v és un joc equilibrat.*

Demostració. La demostració consisteix en veure que els elements del nucli d'un joc cooperatiu TU (si existeixen) coincideixen amb les solucions òptimes d'un problema de programació lineal (si aquest problema en té).

En primer lloc comprovem que tot joc amb el nucli no buit és equilibrat. Per fer-ho, considerem $v \in G^N$ un joc TU tal que $C(v) \neq \emptyset$, l'assignació $x \in C(v)$ i una família equilibrada de coalicions F amb els corresponents coeficients d'equilibri $\{\alpha_S : S \in F\}$. Llavors:

$$\sum_{S \in F} \alpha_S v(S) \leq \sum_{S \in F} \sum_{i \in S} \alpha_S x_i = \sum_{i \in N} (x_i \sum_{S \in F, i \in S} \alpha_S) = \sum_{i \in N} x_i = v(N)$$

Per tant, queda demostrat que tot joc amb el nucli no buit és equilibrat. Veiem ara la segona implicació, és a dir, que tot joc equilibrat té un nucli no buit.

Suposem que $v \in G^N$ és equilibrat i considerem el problema de programació lineal que minimitza la funció

$$\sum_{i \in N} x_i$$

amb la restricció:

$$\sum_{i \in N} x_i \geq v(S)$$

per cada coalició $S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$.

El nucli del joc complirà $C(v) \neq \emptyset$ si i només si existeix una solució òptima $\hat{x}$ que compleixi $\sum_{i \in N} \hat{x}_i = v(N)$.

Obtenim el dual del nostre problema que consisteix en maximitzar la funció

$$\sum_{S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} \alpha_S v(S)$$

amb la restricció:

$$\sum_{S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} \alpha_S = 1$$

per cada $i \in N$ amb $\alpha_S \geq 0$ per cada coalició $S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$.

Tenint en compte que la regió on es troben les solucions factibles del dual és un compacte no buit i la funció objectiu és contínua, podem afirmar que el dual tindrà almenys una solució òptima $\hat{\alpha}$.

Sigui $\hat{\alpha}$ aquesta solució, la família $\hat{F} := \{S \subset N : \hat{\alpha_S} > 0\}$ és una família equilibrada amb coeficients d'equilibri $\left\{\hat{\alpha_S} : S \in \hat{F}\right\}$.

En virtut del teorema de la dualitat en programació lineal, l'existència d'almenys una solució òptima del dual implica l'existència d'almenys una solució òptima pel nostre problema, que hem anomenat $\hat{x}$ i que compleix:

$$\sum_{i \in N} \hat{x}_i = \sum_{S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} \hat{\alpha_S} v(S)$$

En vista d'aquesta propietat de $\hat{x}$, del fet que és una solució òptima del problema de programació lineal que hem plantejat al principi de la demostració i, atès que v és un joc equilibrat, tenim:

$$v(N) \leq \sum_{i \in N} \hat{x}_i = \sum_{S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} \hat{\alpha_S} v(S) \leq v(N)$$

i en conseqüència $v(N) = \sum_{i \in N} \hat{x}_i$, és a dir: $\hat{x} \in C(v)$ i clarament $C(v) \neq \emptyset$.

□

3.2 Valor de Shapley

Com hem vist en la secció anterior, el nucli limita el conjunt de possibles solucions en pagaments que compleixen certes condicions. A vegades però, és necessària una solució o assignació concreta que representi un únic repartiment dels pagaments de la funció característica.

L'objectiu d'aquesta secció és presentar el valor de Shapley, que representa la regla d'assignació més important per als jocs TU. El valor de Shapley ens proporcionarà un valor que ens permetrà revelar quin és el pagament esperat per a cada jugador i, que a més, compleix una sèrie de propietats raonables.

Primer de tot definim el concepte de regla d'assignació o solució puntual.

Definició 3.7. *Una regla d'assignació per a un joc TU d'n jugadors és una funció de la forma* $\varphi \colon G^N \to \mathbb{R}^N$.

A continuació, presentem dues definicions que seran necessàries en la caracterització del valor de Shapley.

Definició 3.8. *Sigui* $v \in G^N$ *i siguin* i, j *dos jugadors del joc* v*, aquest parell de jugadors són simètrics si, per cada coalició* $S \subset N \setminus \{i, j\}$ *es compleix la igualtat* $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$.

Definició 3.9. *Sigui* $v \in G^N$ *diem que el jugador* i *és un jugador nul sempre que compleixi que per cada coalició* $S \subset N$, $v(S \cup \{i\}) - v(S) = 0$.

Les quatre propietats dictaminades per Shapley alhora de caracteritzar axiomàticament el valor de Shapley i que hem esmentat amb anterioritat són les següents:

- Eficiència: Una regla d'assignació φ compleix la condició d'eficiència si, per cada joc $v \in G^N$, llavors $\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N)$. Tota regla d'assignació eficient repartirà entre el conjunt de jugadors el valor total de la gran coalició.

- Jugador nul: Una regla d'assignació φ compleix la condició de jugador nul si, per cada joc $v \in G^N$ i cada jugador nul $i \in N$, llavors $\varphi_i(v) = 0$. Tota regla d'assignació que compleixi la condició del jugador nul no repartirà cap tipus de benefici als jugadors que no contribueixin ni generin benefici per a la coalició a la que pertanyen.

- Simetria: Una regla d'assignació φ compleix la condició de simetria si, per cada joc $v \in G^N$ i cada parell de jugadors simètrics $i, j \in N$, llavors $\varphi_i(v) = \varphi_j(v)$. Tota regla d'assignació simètrica garantirà el mateix repartiment de beneficis per als jugadors que contribueixin d'una forma idèntica a la coalició.

- Additivitat: Una regla d'assignació φ compleix la condició d'additivitat si per cada parell de jocs $v, w \in G^N$, llavors $\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w)$. Tota regla d'assignació additiva procura que els jugadors rebin els mateixos pagaments independentment de si els jocs es juguen per separat o de forma simultània.

Un cop definides aquestes propietats ja podem presentar el valor de Shapley.

Definició 3.10. *Sigui $v \in G^N$ un joc TU d'n jugadors, anomenarem valor de Shapley a l'assignació que proporciona a cada jugador $i \in N$ el valor següent:*

$$\Phi_i(v) = \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(n - |S| - 1)!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

Tenim doncs, que el valor de Shapley és un vector de dimensió igual al nombre de jugadors totals, en el nostre cas n, que representa la mitjana ponderada de les contribucions que cada un dels jugador i faria a les diferents coalicions $S \subset N \setminus \{i\}$ en el moment d'unir-s'hi.

La fórmula que permet calcular el valor de Shapley consta de dues parts: la primera és un component que permet calcular el número total de possibles ordres en que cada jugador entra dins d'una coalició, la importància d'aquesta part recau en el fet que el valor de Shapley representa les contribucions de cada jugador al moment d'unir-se a una determinada coalició, ja que resulta obvi que el benefici que cada jugador pot aportar a la coalició a la que s'uneix varia en funció de si entra abans o després que qualsevol altre jugador. L'ordre d'entrada de cada jugador es decideix de forma aleatòria i cada un dels n! possibles ordres és equiprobable.

La segona component representa la contribució marginal de cada jugador i al entrar a una coalició. És a dir, la diferència de valors entre la coalició més el jugador i que s'hi ha adherit $(v(S \cup \{i\}))$ i la coalició abans de que el jugador i s'hi afegeixi $(v(S))$.

Per a fer-ho més entenedor, podem interpretar el valor de Shapley imaginant-nos que els jugadors formen la gran coalició adherint-se d'un en un a les coalicions que es van formant, en un ordre totalment aleatori. El valor de Shapley assigna a cada jugador una quantitat igual a la seva contribució a la coalició ja formada quan s'incorpora. Per a que aquesta interpretació sigui valida considerarem els supòsits que la gran coalició pot formar-se i que tots els ordres d'entrada a les coalicions són possibles i equiprobables.

No és però la única definició que té el valor de Shapley. Analitzant la naturalesa de la descripció donada amb anterioritat i veient que el valor de Shapley depèn de la contribució de cada jugador en el moment d'entrada a la coalició, li podem donar una nova definició utilitzant els vectors de contribucions marginals.

Definició 3.11. *Sigui $v \in G^N$ un joc TU. Sigui $\pi(N)$ el conjunt de permutacions de tots els jugadors del joc v i per cada $\pi \in \pi(N)$ sigui $P^\pi(i)$ el conjunt de jugadors predecessors al jugador i segons l'ordre dictaminat π ($j \in P^\pi(i)$ si i només si $\pi(j) < \pi(i)$). La component í-èssima del vector de contribucions marginals associat a la permutació π queda definida com $m_i^\pi(v) := v(P^\pi(i) \cup \{i\}) - v(P^\pi(i))$ i el valor de Shapley es pot representar de la següent manera:*

$$\Phi_i(v) := \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \pi(N)} m_i^\pi(v)$$

Per a provar el teorema que ve a continuació, a més, és necessari presentar amb anterioritat una classe de joc TU que encara no hem definit, els jocs d'unanimitat.

Definició 3.12. *Dins la classe dels jocs TU, G^N, per a tota coalició $S \subset N$ tal que $S \neq \emptyset$ anomenem joc d'unanimitat de la coalició S al parell (N, w^S) on:*

$$w^S(T) = \begin{cases} 1 \text{ si } S \subseteq T \\ 0 \text{ en cas contrari} \end{cases}$$

Teorema 3.2. *El valor de Shapley és l'única regla d'assignació que satisfà les condicions d'eficiència, del jugador nul, de simetria i d'additivitat.*

Demostració. Per a la demostració del teorema, en primer lloc veurem que el valor de Shapley compleix les quatre condicions i posteriorment, per demostrar la unicitat veurem que tota regla d'assignació que compleix les quatre condicions especificades és únicament determinada.

- Eficiència: Per a complir la condició d'eficiència el valor de Shapley ha de satisfer $\sum_{i \in N} \Phi_i(v) = v(N)$. Per a veure-ho utilitzarem els vectors de contribució marginal i la definició equivalent que hem presentat per el valor de Shapley.

$$\sum_{i \in N} \Phi_i(v) = \sum_{i \in N} \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \pi(N)} m_i^\pi(v) = \sum_{i \in N} \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \pi(N)} v(P^\pi(i) \cup \{i\}) - v(P^\pi(i))$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{i \in N} \sum_{\pi \in \pi(N)} v(P^\pi(i) \cup \{i\}) - v(P^\pi(i)) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \pi(N)} \sum_{i \in N} v(P^\pi(i) \cup \{i\}) - v(P^\pi(i))$$

Recordem que $P^\pi(i)$ representa el conjunt de jugadors que han entrat a la coalició amb anterioritat respecte el jugador i, per tant:

$$\sum_{i \in N} v(P^\pi(i) \cup \{i\}) - v(P^\pi(i)) = v(\pi^{-1}(1)) - v(\emptyset) + v(\pi^{-1}(1 \cup 2))$$

$$-v(\pi^{-1}(1)) + v(\pi^{-1}(1 \cup 2 \cup 3)) - v(\pi^{-1}(1 \cup 2)) + ... + v(\pi^{-1}(N))$$

$$-v(\pi^{-1}(1 \cup 2 \cup 3 \cup ... \cup n-1)) = v(\pi^{-1}(N)) - v(\emptyset) = v(N) - v(\emptyset)$$

Gràcies a aquest càlcul tenim:

$$\sum_{i\in N}\Phi_i(v)=\frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\pi(N)}\sum_{i\in N}v(P^\pi(i)\cup\{i\})-v(P^\pi(i))$$
$$=\frac{1}{n!}\sum_{\pi\in\pi(N)}v(N)-v(\emptyset)=\frac{1}{n!}n!v(N)=v(N)$$

On la penúltima igualtat la deduïm del fet que en un joc amb n jugadors hi ha $n!$ possibles permutacions dels jugadors.

- Jugador nul: Per a que el valor de Shapley compleixi la condició del jugador nul hem de veure que per cada jugador nul $i\in N$, llavors $\Phi_i(v)=0$. Per veure-ho apliquem la definició 3.9, segons la qual un cert jugador i és nul si la seva entrada a una coalició no augmenta el benefici d'aquesta, formalment $v(S\cup\{i\})-v(S)=0$. Per tant, obtenim directament:

$$\Phi_i(v)=\sum_{S\subset N\setminus\{i\}}\frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!}(v(S\cup\{i\})-v(S))=0$$

- Simetria: Per a complir la condició de simetria, el valor de Shapley ha de garantir que per cada parell de jugadors simètrics $i,j\in N$, llavors $\Phi_i(v)=\Phi_j(v)$. Per veure-ho apliquem la definició 3.8, segons la qual un parell de jugadors són simètrics si, per cada coalició $S\subset N\setminus\{i,j\}$, es compleix la igualtat $v(S\cup\{i\})=v(S\cup\{j\})$ obtenint:

$$\Phi_i(v)=\sum_{S\subset N\setminus\{i\}}\frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!}(v(S\cup\{i\})-v(S))$$
$$=\sum_{S\subset N\setminus\{i,j\}}\frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!}(v(S\cup\{i\})-v(S))$$
$$+\sum_{S\subset N\setminus\{i,j\}}\frac{(|S|+1)!(n-(|S|+1)-1)!}{n!}(v(S\cup\{i,j\})-v(S\cup\{j\}))$$

Apliquem ara la definició de jugadors simètrics i obtenim:

$$\Phi_i(v)=\sum_{S\subset N\setminus\{i,j\}}\frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!}(v(S\cup\{i\})-v(S))$$
$$+\sum_{S\subset N\setminus\{i,j\}}\frac{(|S|+1)!(n-(|S|+1)-1)!}{n!}(v(S\cup\{i,j\})-v(S\cup\{j\}))$$
$$=\sum_{S\subset N\setminus\{i,j\}}\frac{|S|!(n-|S|-1)!)}{n!}(v(S\cup\{j\})-v(S))$$
$$+\sum_{S\subset N\setminus\{i,j\}}\frac{(|S|+1)!(n-(|S|+1)-1)!)}{n!}(v(S\cup\{i,j\})-v(S\cup\{i\}))$$
$$=\sum_{S\subset N\setminus\{j\}}\frac{|S|!(n-|S|-1)!)}{n!}(v(S\cup\{j\})-v(S))=\Phi_j(v)$$

- Additivitat: Per a que el valor de Shapley compleixi la condició d'additivitat ha de satisfer que per a cada parell de jocs $v, w \in G^N$, llavors $\Phi(v+w) = \Phi(v) + \Phi(w)$.

$$\Phi_i(v+w) = \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(n-|S|-1)!)}{n!}(v+w)(S \cup \{i\}) - (v+w)(S)$$

El joc $v + w \in G^N$ verifica que per cada coalició $S \subseteq N$, $(v+w)(S) = v(S) + w(S)$, per aquesta raó tenim:

$$\sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!}((v+w)(S \cup \{i\}) - (v+w)(S))$$

$$= \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!}(v(S \cup \{i\}) + w(S \cup \{i\}) - v(S) - w(S))$$

$$= \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(n-|S|-1)!)}{n!}(v(S \cup \{i\}) - v(S) + w(S \cup \{i\}) - w(S))$$

$$= \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(n-|S|-1)!)}{n!}(v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

$$+ \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!}(w(S \cup \{i\}) - w(S)) = \Phi_i(v) + \Phi_i(w)$$

Per a demostra la segona part del teorema ens basarem en el fet que tot joc $v \in G^N$ es pot expressar com a combinació lineal de jocs d'unanimitat.

Podem representar cada joc $v \in G^N$ com a un vector $\{v(S)\}_{S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} \in \mathbb{R}^{2^n - 1}$ de manera que G^N queda identificat com a un espai vectorial de dimensió $2^n - 1$ i el conjunt dels jocs d'unanimitat $U(N) := \left\{ w^S : S \in 2^N \setminus \{\emptyset\} \right\}$ és una base d'aquest espai vectorial (deixem pel final la demostració d'aquesta afirmació).

Considerem φ, una regla d'assignació que compleix les quatre condicions esmentades d'eficiència, del jugador nul, de simetria i d'additivitat.

Com φ satisfà les condicions d'eficiència, del jugador nul i de simetria, tenim que per a cada $i \in N$, per cada $\emptyset \neq S \subset N$ i cada $\alpha_S \in \mathbb{R}$.

$$\varphi_i(\alpha_S w^s) = \begin{cases} \frac{\alpha_S}{|S|} \; si \; i \in S \\ 0 \; si \; i \notin S \end{cases}$$

A més com φ també satisfà la condició d'additivitat i el conjunt dels jocs d'unanimitat són una base de G^N podem concloure que φ és únicament determinada.

Per a finalitzar aquesta segona part de la demostració queda demostrar que el conjunt dels jocs d'unanimitat és una base de G^N, resultat que havíem assumit per no perdre el fil de la demostració.

Per a veure que els jocs d'unanimitat $U(N)$ són base de G^N hem de veure que són un conjunt de $2^n - 1$ vectors linealment independents, per a fer-ho utilitzarem una argumentació per reducció a l'absurd i arribarem a contradicció.

Suposem que existeix un conjunt de coeficients $\{\alpha_S\}_{S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} \subset \mathbb{R}$ amb al menys un $\alpha_S \neq 0$, tals que:

$$\sum_{S \in 2^N - \{\emptyset\}} \alpha_S w^S = 0$$

Sigui $T \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ tal que $\alpha_T \neq 0$ i assumim, sense perdre generalitat, que no existeix $\hat{T} \subset T$ tal que $\hat{\alpha_T} \neq 0$. Llavors: $0 = \sum_{S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} \alpha_S w^S(T) = \alpha_T \neq 0$ arribant a contradicció. □

Vist que el valor de Shapley és l'única regla d'assignació que compleix les quatre propietats que hem utilitzat per a la seva caracterització: eficiència, jugador nul, simetria i additivitat. Ens disposem a veure ara la independència lògica de cada propietat respecte a la resta.

Proposició 3.1. *Cap de les condicions utilitzades per a la caracterització del valor de Shapley és baladí.*

Demostració. Per a demostrar que cap de les condicions utilitzades per a la caracterització del valor de Shapley és innecessària només hem de veure que si eliminem qualsevol de les condicions, existeix al menys una altra regla d'assignació a part del valor de Shapley complint les tres condicions restants.

- Tota regla d'assignació definida, per a cada joc $v \in G^N$, per $\varphi(v) = \gamma\Phi(v)$, amb $1 \neq \gamma \in R$ satisfà les condicions del jugador nul, simetria i additivitat però no la d'eficiència.

- La regla de divisió equitativa que, per cada joc $v \in G^N$, és definida com $\varphi_i(v) = \frac{v(N)}{n}$ per cada $i \in N$, anomenada així perquè cada jugador rep la mateixa quantitat de benefici independentment de la seva contribució, compleix les condicions d'eficiència, simetria i d'additivitat però no la del jugador nul.

- Considerem $v \in G^N$ i sigui $\Pi^1(N)$ el conjunt d'ordres dels n jugadors en que el jugador 1 està col·locat en primera posició ($\pi \in \Pi^1(N)$ si i només si $\pi(1) = 1$). La regla d'assignació definida com $\frac{1}{(n-1)!}\sum_{\pi \in \Pi^1(N)} m_i^\pi(v)$ satisfà les condicions d'eficiència, del jugador nul i d'additivitat però no la d'additivitat.

- Sigui $v \in G^N$, per cada $i \in N$ definim la regla d'assignació $\varphi_i(v) = 0$ si i és un jugador nul i $\varphi_i(v) = \frac{v(N)}{n-d}$ on d és el total de jugadors nuls del joc. Aquesta assignació compleix les condicions d'eficiència, jugador nul i simetria però no la d'additivitat.

□

Observació: El valor de Shapley pertany al conjunt d'imputacions en els jocs superadditius.

Per demostrar-ho hem de veure que a qualsevol jugador del joc, el valor de Shapley li assigna un benefici major al benefici que podria obtenir pel seu compte.

Sigui $v \in G^N$. Per cada $i \in N$ i per cada $\pi \in \Pi(N)$, com que $m_i^\pi(v) \geq v(i)$ tenim:

$$\varphi_i(v) := \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \pi(N)} m_i^\pi(v) \geq \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \pi(N)} v(i) = v(i)$$

.

Capítol 4

Jocs simples

Un cop vistes les tres grans classes dins dels jocs cooperatius (jocs NTU, jocs de negociació i jocs TU) i després d'haver detallat el concepte de solució per als jocs TU, ens centrem en una subclasse d'aquest últim tipus de jocs, els jocs cooperatius simples.

Els jocs simples prenen gran importància a l'hora de modelar processos de presa de decisions i de votació en un grup de persones. És per aquesta raó que sovint són usats en diverses branques de les ciències socials, en especial en les ciències polítiques.

El problema central que ocupa els jocs cooperatius simples deixa de ser el repartiment dels beneficis entre els jugadors (com passava en els jocs TU) passant a ser l'anàlisi i mesura del poder i la influència dels diferents jugadors que han de prendre decisions. En aquest sentit, les regles d'assignació o solucions que proposaven un repartiment únic dels beneficis en els jocs TU passen a anomenar-se índexs de poder i s'ocupen de mesurar aquest poder dels jugadors.

Suposem que volem modelar el funcionament d'un determinat comitè que compta amb n representants en el moment que decideixen aprovar o no una determinada acció. El fet de que una coalició S compleixi $v(S) = 1$ implica que si els jugadors de la coalició voten a favor d'una acció aquesta tira endavant. En aquest context, veiem que els índexs de poder es poden interpretar com l'habilitat que tenen els jugadors "a priori"per a canviar el resultat final del joc.

Acabada aquesta explicació dels jocs simples mostrem la formalització d'aquest tipus de jocs.

Definició 4.1. *Anomenem joc simple a un joc d'utilitat transferible $v \in G^N$ que compleix:*

- *És monòton.*
- *Per cada coalició $S \subset N$, $v(S) \in \{0, 1\}$.*
- $v(N) = 1$.

Com hem fet amb els jocs TU d'n jugadors, als jocs simples amb tal quantitat de jugadors els denotarem S^N.

En aquest tipus de jocs, la funció característica només pot assignar els valors 0 i 1 a les diferents coalicions. Distingirem doncs entre les coalicions guanyadores, quan la funció característica assigna el valor 1 a la coalició S ($S \subset N : v(S) = 1$) i les coalicions perdedores, en les que la funció característica assigna el valor 0 a la coalició S ($S \subset N : v(S) = 0$).

Per especificar la col·lecció de coalicions guanyadores usarem $W(v) := \{S \subset N : v(S) = 1\}$, si en canvi, nomes considerem aquelles coalicions que no contenen cap altre coalició guanyadora entre els seus membres obtenim la col·lecció minimal de coalicions guanyadores $W^m(v) := \{S \in W : \forall T \in W, \ si \ T \subset S, \ llavors \ T = S\}$. Per obtenir W a partir de W^m només caldria combinar la resta de jugadors amb les coalicions de W^m.

Parem especial atenció ara en dos tipus de jocs simples, els jocs de majoria i els jocs de majoria ponderada, que són jocs simples especialment útils a l'hora d'avaluar processos de votació ja sigui en parlaments o bé en comitès.

Definició 4.2. *Donat un nombre real $q \in \mathbb{R}$ al que anomenem quota. Un joc simple $v \in S^N$ és un joc de majoria si el conjunt de coalicions guanyadores $W(v)$ del joc v compleix:*

$$W(v) = \{S \subseteq N : |S| \geq q\}$$

Els jocs de majoria proposen situacions en que cada un dels n jugadors té assignat un únic vot i en les quals és necessària una quantitat mínima q de vots per acceptar una proposta.

El joc v es pot expressar mitjançant $v \equiv [q; 1, 1, 1, ..., 1]$ on el primer nombre representa el mínim de vots per a que una coalició esdevingui guanyadora i els següents la quantitat de vots assignats de cada jugador. Si a més es compleix que $q \geq [\frac{n+1}{2}]$ diem que la quota q representa la condició de majoria simple.

Hem vist doncs, que els jocs de majoria modelen situacions en que no existeix heterogeneïtat en el nombre de vots assignats als jugadors, aquests jocs representen la base dels sistemes democràtics i són òptims en votacions electorals on cada ciutadà té dret a un únic vot i ha d'elegir d'entre dues opcions. L'exemple més clar d'aquest tipus de joc són els referèndums de l'estil del Brexit l'any 2016, el referèndum per a la independència d'Escòcia l'any 2014 o el referèndum estatutari de Catalunya l'any 2006.

Si ens centrem en l'àmbit polític, a vegades les situacions que pretenen modelar aquests jocs pateixen petits canvis produïts per l'associació de caràcter polític, econòmic o social, degut a raons ideològiques o estratègiques que provoquen processos on es perd la homogeneïtat del vot, es a dir, cada un dels jugadors participants ja no té la mateixa quantitat de vots assignada.

Exemples d'això els trobem en múltiples organismes polítics, des de l'àmbit local fins l'àmbit internacional passant per tot tipus d'institucions estatals.

Per a modelar aquestes situacions que involucren a partits polítics que imposen el vot als seus representants (suposarem que, com és habitual, tots els integrants d'un grup polític voten igual, tot i que no sempre és així) s'utilitza una generalització dels jocs de majoria que anomenem jocs de majoria ponderada.

Definició 4.3. *Un joc simple $v \in S^N$ és un joc de majoria ponderada si existeix una quota $0 < q \in \mathbb{R}$ i un conjunt de nombres $p_1, ..., p_n$ tals que $v(S) = 1$ si i només si $\sum_{i \in S} p_i \geq q$*

Com hem vist amb els jocs de majoria, un joc v de majoria ponderada també es pot expressar de la següent manera: $v \equiv [q; p_1, p_2, p_3, ..., p_n]$ on el primer nombre representa la quota o el nombre de vots necessaris per a que una coalició sigui guanyadora (com en els jocs de majoria) i la resta son els vots assignats a cada jugador.

Exemple joc de majoria ponderada: (El joc dels guants). Considerem el mateix exemple que hem descrit en la secció dels jocs cooperatius TU. Recordem que el conjunt de jugadors és $N = \{1, 2, 3\}$ i la funció característica del joc ve donada per $v(1) = v(2) = v(3) = v(23) = 0$ i $v(12) = v(13) = v(N) = 1$. El conjunt de coalicions guanyadores és $W = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$, la col·lecció minimal de coalicions guanyadores és $W^m = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$. El joc té una quota $q = 3$ i cada jugador té el pes associat que segueix: $p_1 = 2, p_2 = 1, p_3 = 1$ i es pot expressar: $v \equiv [3; 2, 1, 1]$.

Exemple joc de majoria ponderada: (El consorci). Imaginem un consorci format per 4 empreses, 2 d'elles tenen un volum de facturació semblant i les altres dues, tot i que també tenen una facturació semblant entre sí, facturen menys que les dues primeres. Per aprovar una proposta, aquesta ha d'estar recolzada per les dues empreses principals, o almenys per una de les empreses principals i les dues secundàries. El conjunt de coalicions guanyadores és:

$$W = \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$$

La col·lecció minimal de coalicions guanyadores és:

$$W^m = \{\{1, 2\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$$

El joc té una quota $q = 4$ i cada empresa té el pes associat que segueix: $p_1 = 2, p_2 = 2, p_3 = 1, p_4 = 1$ i es pot expressar: $v \equiv [4; 2, 2, 1, 1]$.

Capítol 5

Índexs de poder

Com hem avançat al principi del capítol dels jocs simples, el concepte de solució per aquests jocs és diferent al que utilitzem per als jocs cooperatius en general. L'aplicació dels jocs simples en la modelització i estudi d'organismes i institucions on els acords es prenen per votació fa que les solucions, anomenades índexs de poder en aquest tipus de joc, se centrin en analitzar la importància i la influència que tindrà cada un dels jugadors en el resultat final de la votació.

Tot i que existeixen conceptes específics per a les solucions dels jocs simples que compleixen amb l'objectiu de mesurar el poder dels jugadors, al ser una subclasse dels jocs cooperatius, aquestes solucions o índexs de poder també compleixen els conceptes de solució general dels jocs cooperatius que hem vist amb anterioritat.

Procedim a presentar la definició formal d'un índex de poder.

Definició 5.1. *Un índex de poder sobre S^N és una regla d'assignació de la forma: $f : S^N \to \mathbb{R}^N$ que assigna a cada joc $v \in S^N$ un vector $f(v) \in \mathbb{R}^N$, la component i-èssima del qual representa el poder que té el jugador i en el joc.*

Tot i que els jocs simples són una subclasse dels jocs cooperatius TU i que, com hem dit, els conceptes utilitzats per a les solucions dels jocs TU es poden aplicar als jocs simples, hem de tenir en compte que les caracteritzacions axiomàtiques dels valors dels jocs cooperatius no seran aplicables als índexs de poder equivalents en molts casos.

A continuació, presentem els índexs de poder més importants a l'hora d'estudiar els jocs simples.

5.1 Índex de Shapley-Shubik

La restricció per als jocs simples del valor de Shapley, que hem vist en el capítol anterior referit a les solucions dels jocs TU, s'anomena índex de Shapley-Shubik. Com hem advertit, en el cas de l'índex de Shapley-Shubik la caracterització del valor de Shapley per als jocs cooperatius TU d'n jugadors (G^N) no és vàlida als jocs simples d'n jugadors (S^N).

La principal raó per la qual no podem aplicar la caracterització dels jocs G^N a l'índex de Shapley-Shubik és que la suma de jocs simples no té com a resultat un joc simple, i per aquesta raó la condició d'additivitat que complia el valor de Shapley no té sentit quan fem la restricció a S^N.

Tot i la presentació de l'índex de poder de Shapley-Shubik a Shapley i Shubik (1954), fins el 1975 no es va poder demostrar la unicitat d'aquest valor mitjançant una caracterització axiomàtica, Dubey (1975). Per a obtenir aquesta caracterització, Dubey va substituir la propietat d'additivitat de la caracterització original per la propietat de transferència, que té un significat semblant, i a més, és vàlida per a jocs simples. L'estudi d'aquesta nova propietat requereix la definició de dos operacions sobre els jocs simples, els jocs màxim i mínim.

Definició 5.2. *Siguin $v, \hat{v} \in G^N$ dos jocs cooperatius. El joc màxim de v i $\hat{v}$ el denotem $(v \vee \hat{v})$ i el definim per a cada coalició $S \subset N$ com $(v \vee \hat{v})(S) := max\{v(S), \hat{v}(S)\}$. Conseqüentment, el joc mínim de v i $\hat{v}$ el denotem $(v \wedge \hat{v})$ i el definim per cada coalició $S \subset N$ com $(v \wedge \hat{v})(S) := min\{v(S), \hat{v}(S)\}$. A més, per la definició dels jocs màxim i mínim es compleix $(v \vee \hat{v})(S)$ i $(v \wedge \hat{v})(S) \in S^N$.*

Observació: De forma equivalent, els jocs màxim i mínim de v i $\hat{v}$ es poden expressar de la manera següent:

$$(v \vee \hat{v})(S) = \begin{cases} 1, & si\ v(S) = 1\ o\ \hat{v}(S) = 1 \\ 0, & si\ v(S) = 0\ i\ \hat{v}(S) = 0 \end{cases}$$

$$(v \wedge \hat{v})(S) = \begin{cases} 1, & si\ v(S) = 1\ i\ \hat{v}(S) = 1 \\ 0, & si\ v(S) = 0\ o\ \hat{v}(S) = 0 \end{cases}$$

La propietat de transferència relaciona els índexs de poder assignats als jocs màxims i mínims de dos jocs simples. A continuació, presentem uns quants resultats necessaris per a veure que l'índex de Shapley-Shubik compleix aquesta propietat.

Si considerem un parell de jocs simples $v, \hat{v} \in S^N$. El conjunt de coalicions guanyadores del joc màxim de v i $\hat{v}$ és la unió dels conjunts de coalicions guanyadores de cada un dels jocs per separat. Anàlogament, el conjunt de coalicions guanyadores del joc mínim de v i $\hat{v}$ és la intersecció dels conjunts de coalicions guanyadores dels dos jocs.

A més, sigui $v \in S^N$ un joc simple amb un conjunt minimal de coalicions guanyadores $W^m = \{S_1, ..., S_k\}$, i denotem amb w^S els joc d'unanimitat de la coalició S, llavors podem expressar v com $v = w^{S_1} \vee w^{S_2} \vee ... \vee w^{S_k}$.

Després d'aquesta breu presentació definim formalment la propietat de transferència.

Definició 5.3. *Un índex de poder φ compleix la propietat de transferència si, per cada parell de jocs $v, \hat{v} \in S^N$, llavors $\varphi(v \vee \hat{v}) + \varphi(v \wedge \hat{v}) = \varphi(v) + \varphi(\hat{v})$.*

Com podem observar, la definició de la propietat de transferència per a un índex de poder, proposada per Dubey, és molt semblant a la d'additivitat usada per a les regles d'assignació en els jocs cooperatius proposada per Shapley.

De la mateixa manera en la que al capítol anterior hem demostrat que el valor de Shapley és la única regla d'assignació dels jocs cooperatius TU que compleix les condicions d'eficiència, del jugador nul, de simetria i d'additivitat; ara veurem que el valor de Shapley-Shubik és l'únic índex de poder que compleix les condicions d'eficiència, del jugador nul, de simetria i de transferència.

***Teorema* 5.1.** *L'índex de Shapley-Shubik és l'única regla d'assignació de S^N que satisfà les condicions d'eficiència, del jugador nul, de simetria i de transferència.*

Demostració. Per a la primera part de la demostració del teorema, usarem el Teorema 3.2 referit al Valor de Shapley. Mitjançant aquest teorema veurem que la demostració de que l'índex de Shapley-Shubik compleix les quatre propietats: Eficiència, jugador nul, simetria i transferència és immediata. La segona part de la demostració, la unicitat d'aquest índex, la demostrarem per inducció sobre el número de coalicions guanyadores minimals de v, $|W^m(v)|$.

Com hem vist en la demostració del Teorema 3.2, el valor de Shapley en G^N satisfà les propietats d'eficiència, del jugador nul, de simetria i d'additivitat. A més, al fer la restricció d'aquest valor a S^N, obtenint l'índex de Shapley-Shubik, hem observat també que la propietat additiva es perd degut a que la suma de dos jocs simples no és sempre un joc simple. Per a la resta de propietats, no hi ha cap impediment al fer la restricció a S^N i per tant, directament dels resultats obtinguts en el Teorema 3.2, obtenim que l'índex de Shapley-Shubik satisfà les propietats d'eficiència, del jugador nul i de simetria.

Per a demostrar que l'índex de Shapley-Shubik també compleix la última de les propietats, la de transferència, ens fixem en que la suma de dos jocs simples $v, \hat{v} \in S^N$ es pot expressar com $(v + \hat{v}) = (v \vee \hat{v}) + (v \wedge \hat{v})$. Com a més sabem que el valor de Shapley satisfà la propietat additiva obtenim de forma directa i gràcies als resultats del Teorema 3.2, que:

$$\Phi(v) + \Phi(\hat{v}) = \Phi(v + \hat{v}) = \Phi(v \vee \hat{v} + v \wedge \hat{v}) = \Phi(v \vee \hat{v}) + \Phi(v \wedge \hat{v})$$

i per tant, l'índex de Shapley-Shubik compleix la propietat de transferència.

Comencem la segona part de la demostració considerant un joc simple qualsevol v, un índex de poder γ que satisfà les condicions d'eficiència, del jugador nul, de simetria i de transferència i suposem que $|W^m(v)| = 1$, és a dir, només existeix una coalició guanyadora minimal en el joc v, i per tant, és un joc d'unanimitat per la coalició $S \in W^m(v)$, com a més γ satisfà les propietats d'eficiència, del jugador nul i de simetria tenim que $\gamma(v) = \Phi(v)$.

Assumim, que per a cada joc simple v que compleixi $|W^m(v)| \leq k-1$, llavors $\gamma(v) = \Phi(v)$ i anem a veure que per $|W^m(v)| = k$ també es compleix la igualtat entre els índexs.

Sigui v un joc simple amb k coalicions guanyadores minimals $|W^m(v)| = k$, és a dir, $W^m(v) = \{S_1, ..., S_k\}$, com hem vist abans, el joc v el podem representar com $v = w^{S_1} \vee w^{S_2} \vee ... \vee w^{S_k}$.

Definim el joc simple $\hat{v}$ com $\hat{v} = w^{S_2} \vee w^{S_3} \vee ... \vee w^{S_k}$ de manera que $v = w^{S_1} \vee \hat{v}$ i $w^{S_1} \wedge \hat{v} = w^{S_2 \cup S_1} \vee w^{S_3 \cup S_1} \vee ... \vee w^{S_k \cup S_1}$.

Resulta evident que el nombre de coalicions guanyadores minimals dels tres jocs simples $\hat{v}$, w^{S_1} i $w^{S_1} \wedge \hat{v}$ és més petit que k i per la hipòtesi d'inducció:

$$\gamma(\hat{v}) = \Phi(\hat{v}), \gamma(w^{S_1}) = \Phi(w^{S_1}), \gamma(w^{S_1} \wedge \hat{v}) = \Phi(w^{S_1} \wedge \hat{v})$$

Com que $w^{S_1} \vee \hat{v} = v$ i gràcies a la propietat de transferència, segons la qual, $\gamma(w^{S_1} \vee \hat{v}) + \gamma(w^{S_1} \wedge \hat{v}) = \gamma(w^{S_1}) + \gamma(\hat{v})$ tenim:

$$\begin{aligned} \gamma(v) &= \gamma(w^{S_1}) + \gamma(\hat{v}) - \gamma(w^{S_1} \wedge \hat{v}) \\ &= \Phi(w^{S_1}) + \Phi(\hat{v}) - \Phi(w^{S_1} \wedge \hat{v}) \\ &= \Phi(w^{S_1} + \hat{v} - w^{S_1} \wedge \hat{v}) = \Phi(v) \end{aligned}$$

□

Recordem que el valor de Shapley per els jocs cooperatius TU ve determinat per l'expressió:

$$\Phi_i(v) = \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!}(v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

Ja hem dit també que aquest valor representa una mitjana ponderada de la contribució que fan els jugadors quan entren a les diferents coalicions.

Quan treballem amb jocs simples, els valors de $v(S)$ i $v(S \cup \{i\})$ només poden ser iguals a 1 (per a coalicions guanyadores) o a 0 (per a coalicions perdedores), a més, si el joc és monòton la diferència entre aquests dos valors $(v(S) - v(S \cup \{i\}))$ seguirà sent 0 o 1. Això simplifica en gran mesura el càlcul de l'índex de Shapley-Shubik respecte al càlcul del valor de Shapley, ja que només serà necessari que ens fixem en aquelles coalicions tals que S és una coalició perdedora i, en canvi, $S \cup \{i\}$ és una coalició guanyadora. Una coalició S que ho compleixi s'anomenarà swing per el jugador i. La definició formal és la següent:

Definició 5.4. *Considerem el joc $v \in S^N$ i sigui $i \in N$ un jugador del joc v. Un swing per el jugador i és una coalició $S \subset N \setminus \{i\}$ tal que $S \notin W$ i $S \cup \{i\} \in W$. El conjunt de coalicions S que són swings del jugador i el denotarem com SW_i.*

Restringint el sumatori del valor de Shapley a les coalicions que són swings per al jugador i obtenim que l'índex de poder de Shapley-Subik ve determinat per l'expressió:

$$\Phi_i(v) = \sum_{S \in SW_i(v)} \frac{|S|!(n-|S|-1)!}{n!}$$

Denotarem el nombre de swings per a un jugador i com $\mu_i(v)$ i el número total de swings del joc v com $\bar{\mu}(v) := \sum_{i \in N} \mu_i(v)$

L'índex de Shapley-Shubik resulta ser una mitjana ponderada dels swings de cada jugador on el pes de cada swing depèn del nombre de jugadors que formen cada coalició.

Exemple càlcul de l'índex de Shapley-Shubik: Considerem un joc simple on el conjunt de jugadors és $N = \{1,2,3,4\}$, les coalicions guanyadores del joc són $W = \{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,3,4\}$ i la col·lecció minimal de coalicions guanyadores és $W^m = \{\{1,2,3\},\{1,2,4\}\}$. Els swings per al jugador 1 són $(\{1,2,3\},\{2,3\})$, $(\{1,2,4\},\{2,4\})$ i

$(\{1,2,3,4\},\{2,3,4\})$, per tant $\mu_1 = 3$ i el seu índex de Shapley-Shubik $\Phi_1 = 2 \cdot \frac{2!(4-2-1)!}{4!} + \frac{3!(4-3-1)!}{4!} = \frac{5}{12}$. L'únic swing per al jugador 3 és $(\{1,2,3\},\{1,2\})$, per tant $\mu_3 = 1$ i el seu índex de Shapley-Shubik $\Phi_3 = \frac{2!(4-2-1)!}{4!} = \frac{1}{12}$. En aquest joc, els jugadors 1, 2 i els jugadors 3, 4 són simètrics, com hem vist els índexs de poder per a jugadors simètrics són iguals i en conseqüència $\Phi_2 = \frac{5}{12}$ i $\Phi_4 = \frac{1}{12}$.

5.2 Índex de Banzhaf

Per al càlcul de l'índex de Shapley-Shubik, hem vist que el pes de cada swing, és a dir, el nombre de jugadors de la coalició S que és swing per al jugador i, era molt important. En altres paraules, per al càlcul de l'índex de Shapley-Shubik, hi ha swings que presenten una major rellevància que d'altres.

L'índex de poder de Banzhaf, també conegut com índex de Banzhaf-Coleman, va ser proposat a Banzhaf (1965) i de manera independent a Coleman (1971) com a índex de poder, és a dir, només aplicable a jocs simples. Amb posterioritat, a Owen (1975), hi trobem una extensió d'aquest valor als jocs TU.

Shapley i Dubey (1979) va proporcionar la primera caracterització axiomàtica de l'índex de Banzhaf demostrant la seva unicitat per a jocs simples.

El propòsit d'aquest nou índex és considerar tots els swings de cada jugador i amb la mateixa importància, independentment dels jugadors que formen la coalició swing S.

En la majoria d'aplicacions en les que s'usen els índexs de poder, però, és més important saber la ràtio dels swings que el seu nombre total, és per això que l'índex de Banzhaf és una normalització del nombre de swings de cada jugador. La seva definició formal és la que presentem a continuació.

Definició 5.5. *Per a cada joc $v \in S^N$ i per cada jugador $i \in N$, l'index de Banzhaf (B_{Z_i}) es defineix com:*

$$B_{Z_i}(v) := \frac{\mu_i(v)}{2^{n-1}}$$

Per a la interpretació d'aquest índex definim un nou tipus de jugador que podem trobar-nos als jocs simples.

Definició 5.6. *Per a cada coalició $S \subset N \setminus \{i\}$ anomenarem jugador pivot per a S al jugador i, sempre que la coalició S sigui un swing del jugador i.*

L'índex de Banzhaf, B_{Z_i}, representa la probabilitat de que un determinat jugador i sigui pivot d'una coalició S elegida de manera totalment aleatòria.

El teorema que presentem a continuació és un resultat de la caracterització axiomàtica de Dubey i Shapley que hem mencionat amb anterioritat per a l'índex de Banzhaf.

***Teorema* 5.2.** *L'índex de Banzhaf és l'única regla d'assignació $\varphi \in S^N$ que satisfà les propietats del jugador nul, de simetria, de transferència i que a més, per cada joc $v \in S^N$ compleix $\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = \frac{\bar{\mu}(v)}{2^{n-1}}$*

Demostració. Comencem veient que l'índex de Banzhaf compleix les quatre propietats que anuncia el teorema. De fet, el raonament que utilitzarem per a demostrar que compleix la propietat de transferència és idèntic al que hem usat per al índex de Shapley-Shubik (Teorema 5.1) i les altres tres propietats són immediates de demostrar, ja que es dedueixen de les definicions de jugador nul i jugador simètric en jocs simples i de la naturalesa de l'índex de Banzhaf.

- Jugador nul: Per a complir la condició del jugador nul, l'índex $B_Z(v)$ ha de satisfer que per cada jugador nul $i \in N$ llavors $B_{Z_i}(v) = 0$. En un joc simple, que un jugador sigui nul implica que la seva entrada en una coalició mai provoca que aquesta esdevingui guanyadora quan no ho era, és a dir, no existeixen coalicions S que siguin swings per a un jugador nul i, i per tant:

$$B_{Z_i}(v) = \frac{\mu_i(v)}{2^{n-1}} = \frac{0}{2^{n-1}} = 0$$

- Simetria: Per a complir la condició de simetria, l'índex $B_Z(v)$ ha de garantir que per cada parell de jugadors simètrics $i, j \in N$, llavors $B_{Z_i}(v) = B_{Z_j}(v)$. En un joc simple, dos jugadors i, j són simètrics si per a tota coalició $S \subseteq N \setminus \{i, j\}$ on S no és una coalició guanyadora, es compleix que si l'entrada del jugador i a la coalició fa que aquesta esdevingui guanyadora, l'entrada del jugador j també farà que ho sigui, i si en canvi, l'entrada del jugador i a la coalició no produeix un canvi en la utilitat d'aquesta, l'entrada de j tampoc ho farà. A més, com que els jugadors són simètrics, el nombre de coalicions $j \in S \subseteq N \setminus \{i\}$ que són swings del jugador i, coincideix amb el nombre de coalicions $i \in S \subseteq N \setminus \{j\}$ que són swings del jugador j. En definitiva, dos jugadors són simètrics si tenen el mateix nombre de coalicions swings, i per tant:

$$B_{Z_i}(v) = \frac{\mu_i(v)}{2^{n-1}} = \frac{\mu_j(v)}{2^{n-1}} = B_{Z_j}(v)$$

- Transferència: Com ja hem avançat, usem un raonament semblant al de l'índex de Shapley-Shubik. Ja hem vist que la suma de dos jocs simples $v, \hat{v} \in S^N$ es pot expressar com $(v + \hat{v}) = (v \vee \hat{v}) + (v \wedge \hat{v})$, a més, el valor de Banzhaf (l'extensió de l'índex de Banzhaf als jocs cooperatius TU [1]) compleix la propietat additiva, ja que és una expressió lineal respecte a la funció característica, i per tant, podem escriure

$$B_Z(v) + B_Z(\hat{v}) = B_Z(v + \hat{v}) = B_Z(v \vee \hat{v} + v \wedge \hat{v}) = B_Z(v \vee \hat{v}) + B_Z(v \wedge \hat{v})$$

demostrant així que l'índex de Banzhaf compleix la propietat de transferència.

- Per acabar aquesta primera part de la demostració, hem de veure que $\sum_{i \in N} B_{Z_i}(v) = \frac{\bar{\mu}(v)}{2^{n-1}}$, aquesta demostració és trivial ja que $\bar{\mu}(v) = \mu_1(v) + \mu_2(v) + ... + \mu_n(v)$ i per tant:

$$\sum_{i \in N} B_{Z_i}(v) = \frac{\mu_1(v)}{2^{n-1}} + \frac{\mu_2(v)}{2^{n-1}} + ... + \frac{\mu_n(v)}{2^{n-1}} = \frac{\bar{\mu}(v)}{2^{n-1}}$$

Per a demostrar la unicitat de l'índex de Banzhaf, usarem el mateix procés que hem utilitzat per a veure la unicitat de l'índex de Shapley-Shubik, és a dir, inducció sobre el nombre de coalicions guanyadores minimals del joc v. Com la demostració és pràcticament

[1] $\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} v(S \cup \{i\} - v(S))$

idèntica, deixarem indicats els passos per recordar-la però no la farem amb tant detall com a l'apartat anterior.

Considerem un joc simple qualsevol v, un índex de poder γ que satisfà les propietats del jugador nul, de simetria, de transferència i que a més, compleix $\sum_{i\in N}\gamma_i(v) = \frac{\bar{\mu}(v)}{2^{n-1}}$ i suposem que $|W^m(v)| = 1$. Només existeix una coalició guanyadora minimal, per tant, el joc v és un joc d'unanimitat per a la coalició $S \in W^m(v)$ i com que γ compleix les propietats de simetria, del jugador nul i a més satisfà $\sum_{i\in N}\gamma_i(v) = \frac{\bar{\mu}(v)}{2^{n-1}}$, tenim que $\gamma(v) = B_Z(v)$.

Assumim que per a cada joc simple v que compleix $|W^m(v)| \leq k-1$ llavors $\gamma(v) = B_Z(v)$ i veiem que també es compleix quan $|W^m(v)| = k$. Sigui v un joc simple amb k coalicions guanyadores minimals, podem definir el joc v com $v = w^{S_1} \vee w^{S_2} \vee w^{S_3} \vee ... \vee w^{S_k}$. Definim també $\hat{v} = w^{S_2} \vee w^{S_3} \vee ... \vee w^{S_k}$, d'aquesta manera obtenim tres jocs simples $\hat{v}$, w^{S_1} i $w^{S_1} \wedge \hat{v}$ amb menys de k coalicions guanyadores minimals i per hipòtesis l'índex de Banzhaf i l'índex γ són iguals en aquest jocs.

Per acabar, com que $w^{S_1} \vee \hat{v} = v$ i els dos índexs compleixen la propietat de transferència, obtenim fàcilment que:

$$\gamma(v) = \gamma(w^{S_1}) + \gamma(\hat{v}) - \gamma(w^{S_1} \wedge \hat{v}) = B_Z(w^{S_1}) + B_Z(\hat{v}) - B_Z(w^{S_1} \wedge \hat{v}) = B_Z(v)$$

□

Per a facilitar l'aplicació de l'índex de Banzhaf en diversos contextos o per obtenir resultats més eficients quan s'estudien certes situacions, a vegades, s'utilitza una variació d'aquest índex, l'índex normalitzat de Banzhaf.

5.2.1 Índex normalitzat de Banzhaf

L'índex normalitzat de Banzhaf consisteix en una normalització dels swings de cada jugador alternativa a la que hem vist per a l'índex de Banzhaf. A continuació presentem la definició formal d'aquest nou índex.

Definició 5.7. *Considerem el joc $v \in S^N$, siguin $\mu_i(v)$ els swings del jugador i i $\bar{\mu}$ els swings totals del joc v, l'índex normalitzat de Banzhaf és un vector $\beta \in \mathbb{R}^n$ la component i-éssima del qual es defineix com:*

$$\beta_i(v) = \frac{\mu_i(v)}{\bar{\mu}(v)}$$

Donat un joc $v \in S^N$, recordem que l'índex de Banzhaf, B_{Z_i}, representa la probabilitat de que un determinat jugador i sigui pivot d'una coalició S elegida al atzar, l'índex β_i, en canvi, ens indica la probabilitat de que al elegir un swing qualsevol del joc, aquest sigui del jugador i, és a dir, ens indica una proporció dels cops que el jugador i, amb la seva entrada a una coalició S, serà decisiu a l'hora de que la coalició S sigui guanyadora quan abans no ho era, respecte dels cops que ho fa qualsevol jugador.

És senzill veure que l'índex normalitzat de Banzhaf compleix les propietats d'eficiència, del jugador nul i de simetria.

- Eficiència: Per a complir la condició d'eficiència, l'índex β ha de satisfer la igualtat: $\sum_{i\in N}\beta_i(v) = v(N) = 1$. Ho comprovem:

$$\sum_{i\in N}\beta_i(v) = \sum_{i\in N}\frac{\mu_i(v)}{\bar{\mu}(v)} = \frac{\mu_1(v)}{\mu_1(v)+\mu_2(v)+...+\mu_n(v)}$$

$$+\frac{\mu_2(v)}{\mu_1(v)+\mu_2(v)+...+\mu_n(v)} + ... + \frac{\mu_n(v)}{\mu_1(v)+\mu_2(v)+...+\mu_n(v)}$$

$$= \frac{\mu_1(v)+\mu_2(v)+...+\mu_n(v)}{\mu_1(v)+\mu_2(v)+...+\mu_n(v)} = 1$$

- Jugador nul: Per a complir la condició del jugador nul, l'índex β ha de satisfer que per cada jugador nul $i \in N$ llavors $\beta_i(v) = 0$. Com hem vist per a l'índex de Banzhaf, en un joc simple, no existeixen coalicions S que siguin swings per a un jugador nul i, i per tant:

$$\beta_i(v) = \frac{\mu_i(v)}{\bar{\mu}(v)} = \frac{0}{\bar{\mu}(v)} = 0$$

- Simetria: Per a complir la condició de simetria, l'índex β ha de garantir que per cada parell de jugadors simètrics $i, j \in N$, llavors $\beta_i(v) = \beta_j(v)$. Com també hem vist per a l'índex de Banzhaf, en un joc simple, dos jugadors són simètrics si tenen el mateix nombre de coalicions swings, i per tant:

$$\beta_i(v) = \frac{\mu_i(v)}{\bar{\mu}(v)} = \frac{\mu_j(v)}{\bar{\mu}(v)} = \beta_j(v)$$

A més, en virtut del teorema de la secció anterior on hem vist que l'índex de Shapley-Shubik és l'única regla d'assignació de S^N que satisfà les condicions d'eficiència, del jugador nul, de simetria i de transferència. Podem afirmar que l'índex normalitzat de Banzhaf no satisfà la propietat de transferència, és a dir, amb aquesta variació de l'índex de Banzhaf, utilitzant una normalització del nombre de swings alternativa a la que haviem usat, hem aconseguit un nou índex que compleix la propietat d'eficiència amb el cost de perdre la propietat de transferència.

Exemple càlcul índex de Banzhaf i índex de Banzhaf normalitzat: Recordem l'exemple que hem vist amb anterioritat on el conjunt de jugadors és $N = \{1, 2, 3, 4\}$, les coalicions guanyadores del joc són $W = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}$ i la col·lecció minimal de coalicions guanyadores és $W^m = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}\}$. A més, ja havíem vist que el nombre de swings per a cada jugador són: $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 3$, $\mu_3 = 1$, $\mu_4 = 1$ i el nombre total de swings del joc és $\mu = 8$. En conseqüència els índexs de Banzhaf normalitzats per a cada jugador són: $\beta_1 = \beta_2 = \frac{3}{8}$ i $\beta_3 = \beta_4 = \frac{1}{8}$ i els de Banzhaf: $B_{Z_1} = B_{Z_2} = \frac{3}{2^{4-1}} = \frac{3}{8}$ i $B_{Z_3} = B_{Z_4} = \frac{1}{2^{4-1}} = \frac{1}{8}$. En aquest cas els dos índexs coincideixen per a tots els jugadors.

Capítol 6

Eleccions al Parlament de Catalunya 2015

L'objectiu d'aquest últim capítol és treballar en un exemple pràctic i veure la utilitat d'aquests índexs que hem presentat en l'anàlisi d'un dels àmbits on més s'usen, el polític.

El 27 de setembre de l'any 2015 es van celebrar, de forma anticipada, unes eleccions condicionades en gran part per l'enorme polarització de l'eix nacional. Aquestes eleccions són especialment particulars degut a la presència de noves formacions que no havien participat en unes eleccions catalanes amb anterioritat i a la formació de coalicions pre-electorals entre partits que tradicionalment s'havien mostrat reticents a pactar. És per això que contextualitzarem quina fórmula van utilitzar cadascuna de les formacions polítiques per a presentar-se en aquestes eleccions.

Els partits polítics Convergència Democràtica de Catalunya (CDC) i Unió Democràtica de Catalunya (UDC), que amb la seva federació de partits (CiU) vigent des de l'any 1980 havien aconseguit convertir-se en la formació hegemònica en l'àmbit català van presentar-se per primer cop en unes eleccions catalanes per separat en aquests comissis, la raó d'aquesta ruptura la trobem en les desavinences entre les dues direccions dels partits pel que fa a les aspiracions sobiranistes catalanes.

Tot i la recent ruptura amb Unió, Convergència no va presentar-se en solitari a aquestes eleccions sinó que va formar una coalició pre-electoral amb Esquerra Republicana de Catalunya (ERC), anomenada Junts pel Sí (JxSí), que va tenir com a objectiu aglutinar el conjunt de votants independentistes. D'aquesta manera es presentaven en coalició les dues formacions que més representants havien obtingut en el parlament les anteriors eleccions l'any 2012 i Unió es presentava en solitari a uns comissis que no li van atorgar representació política.

Junts pel Sí no va ser la única coalició pre-electoral que es va presentar a les eleccions, també van utilitzar aquesta fórmula els partits d'Iniciativa per Catalunya Verds i Esquerra Unida i Alternativa (que ja s'havien presentat junts en els anteriors comissis) que es van unir al projecte de Podem, formant la candidatura unitària de Catalunya Si Que es Pot. Aquesta candidatura si que es va mostrar a favor del dret a decidir però no es va arribar a significar a favor o en contra d'una eventual independència de Catalunya.

La resta de formacions polítiques que van obtenir representació parlamentaria (Ciutadans (Cs), Partit Socialista de Catalunya (PSC), Partit Popular (PP) i Candidatura d'Unitat Popular (CUP)) van presentar-se en solitari, tal i com havien fet en les eleccions del 2012. Les tres primeres formacions es van significar en contra de la independència mentre que la CUP ho va fer a favor.

Els 135 escons en els que està dividit el Parlament de Catalunya van quedar repartits de la següent forma: Junts pel Sí va obtenir 62 escons, Ciutadans es va convertir en la segona força obtenint-ne 25, el PSC va aconseguir-ne 16, Catalunya Si Que es Pot i PP 11 i, per últim, la CUP en va rebre 10. El joc de majoria ponderada que representa l'arc parlamentari català després de les eleccions del 2015 es pot expressar com:

$$u = [68; 62, 25, 16, 11, 11, 10]$$

Intuïtivament i sabent que tan l'índex de Shapley-Shubik com el de Banzhaf es basen en els swings de cada un dels jugadors per a calcular el seu poder en el joc, deduïm que Junts pel Sí, que té un nombre d'escons molt proper a la majoria i que es va imposar amb claredat a la resta de partits, obtindrà uns índexs de poder molt més elevats als dels seus opositors.

Per a reforçar aquesta hipòtesis, busquem la col·lecció minimal de coalicions guanyadores del joc de majoria ponderada, que és:

$$W^m = \{\{\text{JxSí,Cs}\}, \{\text{JxSí,PSC}\}, \{\text{JxSí,CSQP}\}, \{\text{JxSí,PP}\}, \{\text{JxSí,CUP}\},$$

$$\{\text{Cs,PSC,CSQP,PP,CUP}\}\}$$

Pel que fa al nombre de swings de cada partit, Junts pel Sí en té 30 i la resta de partits en tenen 2. És a dir, amb l'excepció de Junts pel Sí tots els partits són jugadors simètrics del joc de majoria ponderada. Els índex de Shapley-Shubik de cada partit són:

$$\Phi_{JxSi} = \frac{2}{3} \text{ i } \Phi_{Cs} = \Phi_{PSC} = \Phi_{CSQP} = \Phi_{PP} = \Phi_{CUP} = \frac{1}{15}$$

Els índexs de Banzhaf normalitzats de cada partit són:

$$\beta_{JxSi} = \frac{3}{4} \text{ i } \beta_{Cs} = \beta_{PSC} = \beta_{CSQP} = \beta_{PP} = \beta_{CUP} = \frac{1}{20}$$

Els índexs de Banzhaf de cada partit són:

$$B_{Z_{JxSi}} = \frac{15}{16} \text{ i } B_{Z_{Cs}} = B_{Z_{PSC}} = B_{Z_{CSQP}} = B_{Z_{PP}} = B_{Z_{CUP}} = \frac{1}{16}$$

Tot i que l'índex de Banzhaf i l'index de Banzhaf normalitzat atribueixen un major poder a Junts pel Sí, que l'índex de Shapley-Shubik reparteix entre la resta de partits, els tres índexs adjudiquen resultats molt semblants a cada un dels partits.

La interpretació dels resultats ens fa pensar que el partit guanyador de les eleccions, Junts pel Sí, que gaudeix d'un ampli poder i que a més, gràcies a una gran fragmentació del vot, no té cap rival amb un poder que se li aproximi, podrà formar govern amb facilitat. De fet, si ens fixem en la col·lecció minimal de coalicions guanyadores del joc, veiem que Junts pel Sí necessita només el suport d'un dels altres partits per a formar una coalició guanyadora capaç de governar, en canvi, tots els altres partits només tenen una opció de governar deixant fora a Junts pel Sí, que és formant una coalició que els integri a tots.

La realitat però va ser força diferent, van caldre més de 100 dies de negociacions intenses i dues investidures fallides del candidat presidenciable de Junts pel Sí, Artur Mas, perquè, a poques hores del límit que abocava a unes noves eleccions al març de 2016, Junts pel Sí i la CUP arribessin a un acord on la CUP oferia els vots afirmatius necessaris a la investidura sempre i quan el candidat proposat pel grup de Junts pel Sí no fos Artur Mas. D'aquesta manera el 10 de gener de 2016 Carles Puigdemont va convertir-se en el 130è president de la Generalitat.

Sembla del tot contradictori que la CUP, que en el joc que estem analitzant té un poder d'entre el 6% i el 7% pogués vetar un candidat a la presidència del partit que s'havia erigit com el clar vencedor de les eleccions. Hem d'assumir doncs que en el model que intentem exposar hem de tenir en compte les possibles restriccions entre els diferents partits, és a dir, les línies vermelles que es posen uns i altres partits a l'hora de pactar.

Ja hem comentat abans que les eleccions del 2015 van ser les més polaritzades a Catalunya des de la restauració de la democràcia, per aquesta raó, sembla lògic pensar que partits que defensessin posicions enfrontades sobre una eventual independència de Catalunya no podrien arribar a pactar una investidura de manera conjunta.

6.1 Jocs amb restriccions

Els jocs cooperatius on la comunicació entre certs jugadors és limitada van ser estudiats per primer cop a Myerson (1977). En aquest primer escrit, Myerson va proposar la representació de les limitacions mitjançant un graf on els diferents jugadors actuen com a nodes i dos nodes diferents estan connectats per arcs només si els dos jugadors poden negociar de forma directa. Arrel de la presentació d'aquesta nova eina, molts autors van elaborar escrits de força interès sobre aquest nou tipus de jocs, anomenats jocs de comunicació, Owen i Borm (1986) i van den Nouweland i Tijs (1991) en són exemples. L'adaptació d'aquests grafs per als jocs cooperatius simples va ser duta a terme a Carreras (1991).

Segons la naturalesa de la situació que pretén modelar el joc simple hi ha dues vies per a representar les restriccions entre jugadors. La primera es basa en l'elaboració d'un graf d'afinitats, d'una manera equivalent a la que proposava Myerson en els seus escrits, la segona, en canvi, requereix un graf on dos nodes estiguin connectats per un arc si i només si aquests jugadors són incompatibles, aquesta via és aplicable en situacions on alguns dels jugadors no poden cooperar entre ells.

6.1.1 Situacions amb incompatibilitats

Per a descriure les situacions amb incompatibilitats i definir els jocs que les modelen necessitem uns quants conceptes previs.

Definició 6.1. *Un graf és un conjunt d'objectes, anomenats nodes o vèrtexs, que poden estar units o connectats entre ells per línies anomenades arcs.*

Observació: Els diferents vèrtexs del graf representen els jugadors del joc amb restriccions que volem estudiar, per representar una restricció entre un parell de jugadors i, j, l'arc que els connecta se simbolitza com (i, j) .

Definició 6.2. *Un conjunt B format per parelles d'elements $i, j \in N$ és un graf no dirigit sense "loops" ni arcs paral·lels sempre i quan per cada parella de jugadors $(i, j) \in B, i \neq j$ i per les diferents parelles de jugadors $(i, j), (k, l) \in B, (i, j) \neq (k, l)$. Com que el graf és no dirigit, per cada parella de jugadors $(i, j) \in B$ es compleix la igualtat $(i, j) = (j, i)$*

El conjunt de tots els grafs no dirigits sense "loops" ni arcs paral·lels el denotarem $g(N)$.

Per cada coalició $S \subset N$ i cada graf $B \in g(N)$ diem que els jugadors $i, j \in S$ estan connectats en S per B si el graf B indueix un camí en S que connecta i i j. La partició de la coalició S, S/B, representa el conjunt de components connectats d'S.

Definició 6.3. *Un joc amb incompatibilitats és un trio (N, v, B) on $v \in G^N$ i on $B \in g(N)$ representa les incompatibilitats existents entre els jugadors (i, j incompatibles només si $(i, j) \in B$).*

Definició 6.4. *Una coalició $S \subset N$ és B-admissible si i només si $(i, j) \notin B$ per tota $i, j \in S$*

El conjunt de jocs amb incompatibilitats dels jugadors d'N el denotarem $I(N)$ i al conjunt de particions d'S les classes del qual són B-admissibles com $P(S, B)$.

Observació: En una situació amb incompatibilitats només les coalicions admissibles podran cooperar.

Per aquestes situacions amb incompatibilitats serà necessari definir una nova regla d'assignació $\varphi \colon I(N) \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ que les tingui en compte a l'hora d'assignar els pagaments als jugadors.

Donada una situació amb incompatibilitats (N, v, B) denotarem amb v^B la B-restricció de la funció característica v. Definim v^B com:

$$v^B(S) = \max_{P \in P(S,B)} \sum_{U \in P} v(U) \quad \forall S \subset N$$

La forma més habitual i la que utilitzarem per a definir una regla d'assignació per a situacions d'incompatibilitat és usar el joc restringit per B, v^B, aquesta regla d'assignació vindrà donada per l'expressió $\varphi^I(N, v, B) = \Phi(v^B)$ per a cada $(N, v, B) \in I(N)$. La restricció del valor de Shapley per a aquests jocs queda doncs definida com $\Phi^I : I(N) \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ donada per $\Phi^I(v, B) = \Phi(v^B)$ per a tot joc $(v, B) \in I(N)$.

Jocs simples amb incompatibilitats

Definició 6.5. *Un joc simple amb incompatibilitats és un trio (N, v, B) on $v \in S^N$ i $B \in g(N)$.*

Observació: De forma equivalent, un joc simple es pot definir amb el trio (N, W, B) on W és la col·lecció de coalicions guanyadores del joc i $B \in g(N)$.

Usant aquesta notació alternativa, obtenim la definició de Carreras (1991) per al conjunt minimal de coalicions guanyadores d'un joc simple restringit: $(W_B)^m = \{S \in W^m$ tals que S es $B -$ admissible$\}$.

Un cop vista aquesta definició, el nostre objectiu és trobar la funció característica d'W_B.

Lemma 6.1. *Donada una situació amb incompatibilitats (N, v, B), i sigui W la col·lecció de coalicions guanyadores del joc v, la funció característica de v^B ve donada per:*

$$v^B(S) = \max_{U \in S_B} v(U) \ \forall S \subset N, \ \textit{on } S_B = \{U \subset S \textit{ tal que } U \textit{ es } B - \textit{admissible}\}$$

Demostració. En el cas en que la coalició $S \in W_B$, llavors existeix una coalició $U \subset S$ tal que $U \in W_B^m$. Resulta evident doncs que $U \in W^m \cap S_B$, $v(U) = 1$ i en conseqüència $v^B(S) = 1$. En canvi, si $S \notin W_B$, llavors per cada $U \in S_B$ no es compleix $U \in W$ i en conseqüència $v^B(S) = 0$ □

Per acabar amb aquest capítol, veiem que la definició que hem usat per a la restricció dels jocs simples seguint els escrits de Bergantiños, García Jurado i Carreras (1993), v^B, és equivalent a la suggerida per Carreras (1991), v_B.

***Teorema* 6.1.** *Sigui (N, v, B) un joc simple amb incompatibilitats. Llavors $v^B = v_B$*

Demostració. Per a cada coalició $U \subset N$ tal que U és B-admissible tenim $v(U) \leq v_B(U)$. Llavors per cada coalició $S \subset N$,

$$v^B = \max_{P \in P(S,B)} \sum_{U \in P} v(U) \leq \max_{P \in P(S,B)} \sum_{U \in P} v_B(U) \leq \max_{P \in P(S)} \sum_{U \in P} v_B(U) = v_B(S)$$

D'altra banda, per cada $S \subset N$ i cada partició $P \in P(S)$ podem trobar una partició $P' \in P(S, B)$ tal que:

$$\sum_{U \in P'} v(U) \geq \sum_{T \in P} v_B(T)$$

Per aquesta raó podem dir que $v_B(S) \leq v^B(S)$, a més, tenint en compte la primera part de la demostració, arribem a la igualtat $v^B = v_B$.

□

Observació: Per a tot joc v superadditiu, v_B també ho és. Vist això, una conseqüència immediata del Teorema que acabem de presentar és que per cada joc superadditiu simple v es compleix $v^B = v_B$

Com ja havíem comentat abans d'introduir els jocs amb restriccions, les eleccions de l'any 2015 es van caracteritzar per ser altament polaritzades. Això implica que el nombre d'incompatibilitats entre partits polítics per a aquestes eleccions sigui força més alt que en comissis anteriors, on partits que durant la campanya electoral semblaven defensar posicions allunyades podien arribar a pactar després de les eleccions.

Per a elaborar el graf de restriccions que ens indica les incompatibilitats del joc, anirem afegint les incompatibilitats d'una en una, començant per les més evidents, de manera que podrem anar analitzant com van canviant els índexs de poder i el conjunt de coalicions guanyadores per a cada cas. Amb l'objectiu de que el graf d'incompatibilitats que crearem sigui el màxim representatiu de la situació catalana després de les eleccions, no usarem només les declaracions pre-electorals dels partits especificant amb qui podrien pactar i amb qui no, ja que aquestes no són del tot fiables perquè solen estar condicionades a obtenir un major rèdit electoral, sinó que també usarem la ubicació ideològica dels diferents partits segons els votants.

Si ens fixem en l'estudi que va publicar el Centre d'Investigacions Sociològiques (CIS) el 30 de setembre, que analitzava el panorama post-electoral català, veiem que per al gruix dels votants, els partits que apareixen en les antípodes tant en l'eix nacional com en el social són la CUP i el PP. Aquesta serà la primera incompatibilitat que afegirem al nostre joc restringit.

Aquesta primera incompatibilitat té una importància força gran, ja que si recordem la col·lecció minimal de coalicions guanyadores del joc, que és:

$$W^m = \{\{\text{JxSí,Cs}\}, \{\text{JxSí,PSC}\}, \{\text{JxSí,CSQP}\}, \{\text{JxSí,PP}\}, \{\text{JxSí,CUP}\},$$

$$\{\text{Cs,PSC,CSQP,PP,CUP}\}\}$$

Ens adonem que la coalició que reunia a tots els partits amb l'excepció de Junts pel Sí no és admissible. Dins de la col·lecció minimal de coalicions guanyadores, aquesta coalició era la única que no comptava amb Junts pel Sí, al no ser admissible, podem confirmar que Junts pel Sí serà present en totes les coalicions guanyadores i, per tant, formarà part del govern amb total seguretat. Tot i que hem afegit una incompatibilitat al graf que restringeix el joc, ens adonem que aquesta ha fet augmentar el poder de Junts pel Sí, per tant, amb el fi de representar fidelment la situació que es va viure abans de la investidura, hem de seguir buscant les incompatibilitats presents en el joc.

La següent incompatibilitat que tindrem en compte per al nostre model serà l'existent entre Junts pel Sí i el PP. Els motius són els mateixos que els que hem argumentat per a la primera incompatibilitat, Junts pel Sí és vist pels votants i es defineix com un partit partidari de la independència mentre que el PP ocupa la posició contrària. Pel que fa a l'eix social, la diferència no és tan gran com en la primera incompatibilitat, però també és significativa (els votants veuen el PP com un partit de dretes mentre que a Junts pel Sí l'ubiquen al centre).

Al incorporar aquesta incompatibilitat al graf, veiem que el PP desapareix de la col·lecció minimal de coalicions guanyadores, és a dir, el PP ha deixat de ser decisiu en totes i cada una de les coalicions guanyadores a les que pot pertànyer. Deixa doncs de tenir coalicions swing, fent que els seus índexs de poder siguin iguals a 0. Les dues incompatibilitats que hem trobat amb el PP fan que aquest es quedi sense poder d'influència dins del joc. Una altre conseqüència d'aquesta nova incompatibilitat, tot i que és força menys important ja que els canvis dels índexs són poc significatius, és que Junts pel Sí perd part del seu poder i la resta de partits: Ciutadans, PSC, Catalunya Si Que es Pot i la CUP en guanyen.

Partits	Índex de Shapley-Shubik	Índex de Banzhaf	Índex de Banzhaf normalitzat
JxSí	$0,8000$	$0,9375$	$0,7895$
Cs	$0,0500$	$0,0625$	$0,0526$
PSC	$0,0500$	$0,0625$	$0,0526$
CSQP	$0,0500$	$0,0625$	$0,0526$
CUP	$0,0500$	$0,0625$	$0,0526$

Taula 6.1: Poder que atorguen els tres índexs a cada partit després de les incompatibilitats estudiades.

Si ens seguim fixant en l'estudi que hem mencionat, és fàcil apreciar que Ciutadans ocupa una ubicació semblant a la del PP tan en l'eix nacional com en el social. Sembla un pas lògic doncs, reeditar les incompatibilitats que ja havíem justificat per al PP però ara amb Ciutadans. Després d'aplicar aquestes incompatibilitats, notem que els resultats són idèntics als del PP, Ciutadans deixa de ser decisiu en totes i cada una de les coalicions guanyadores a les que pot pertànyer, deixa doncs de tenir coalicions swing, fent que els seus índexs de poder siguin iguals a 0. De fet és totalment comprensible, ja que recordem que són jugadors simètrics i per tant si els hi apliquem les mateixes restriccions per força hem d'obtenir resultats idèntics. Pel que fa a la resta de partits, Junts pel Sí segueix perdent poder en favor del PSC, Catalunya Sí Que es Pot i la CUP.

Partits	Índex de Shapley-Shubik	Índex de Banzhaf	Índex de Banzhaf normalitzat
JxSí	$0,7500$	$0,8750$	$0,7000$
PSC	$0,0833$	$0,1250$	$0,1000$
CSQP	$0,0833$	$0,1250$	$0,1000$
CUP	$0,0833$	$0,1250$	$0,1000$

Taula 6.2: Poder que atorguen els tres índexs a cada partit després de les incompatibilitats estudiades.

La taula anterior mostra els índexs de poder per als 4 partits que tenen influència al tenir en compte les incompatibilitats més evidents que ja hem comentat, els resultats mostren el gran poder que continuaria tenint Junts pel Sí enfront dels seus adversaris polítics.

Tot i que el nostre model reflecteix un augment considerable del poder de la CUP, aquest encara està molt allunyat del que posseeix Junts pel Sí, seguim doncs sense poder explicar les dificultats per formar un govern amb les que es va trobar Junts pel Sí i el motiu pel qual va haver de cedir a les condicions imposades per la CUP, senyal inequívoc que hem de considerar encara més incompatibilitats, emparades més, en el context històric en el que es van donar les eleccions, que no en les dinàmiques tradicionals que hi havia hagut en el Parlament català.

Ja hem comentat que les eleccions del 2015 van estar fortament condicionades al debat sobre l'encaix que havien de tenir Catalunya i Espanya. Això provoca que, tot i que el PSC havia arribat a acords d'investidura amb ERC per a les eleccions del 2003 i del 2006, que aquests dos partits havien mostrat afinitat històricament i encara que el conjunt de votants consideraven que els socialistes i Junts pel Sí ocupaven posicions semblants en l'eix esquerra-dreta, les posicions allunyades pel que fa a la independència de Catalunya impliquen una incompatibilitat entre els dos partits.

Les conseqüències d'aquesta incompatibilitat són idèntiques a les de les que ja havíem afegit, de fet, ja hem justificat que al ser tots els partits simètrics (amb l'excepció de Junts pel Sí), és natural que es repeteixin els resultats. El PSC desapareix de la col·lecció minimal de coalicions guanyadores i es queda sense poder d'influència en el joc (els seus índexs són 0). Per primer cop, al afegir aquesta incompatibilitat, Junts pel Sí obté un poder menor al que li havíem calculat per al joc sense restriccions (al voltant del 60%), la CUP i Catalunya Sí Que es Pot, en canvi, augmenten significativament el seu poder (al voltant del 20% per a cada partit).

Partits	Índex de Shapley-Shubik	Índex de Banzhaf	Índex de Banzhaf normalitzat
JxSí	$0,6667$	$0,7500$	$0,6000$
CSQP	$0,1667$	$0,2500$	$0,2000$
CUP	$0,1667$	$0,2500$	$0,2000$

Taula 6.3: Poder que atorguen els tres índexs a cada partit després de les incompatibilitats estudiades.

Tot i que el poder de Junts Pel Sí segueix sent molt superior al dels seus rivals, les nombroses incompatibilitats existents han provocat que la col·lecció minimal de coalicions guanyadores es redueixi a

$$W^m = \{\{\text{JxSí,CSQP}\}, \{\text{JxSí,CUP}\}\}$$

L'escassetat de combinacions possibles per a formar govern provoca que els partits minoritaris puguin imposar certes condicions a Junts pel Sí. Arribats a aquest punt podem considerar dos escenaris: Considerar una incompatibilitat entre Junts pel Sí i Catalunya Sí Que es Pot, basada en el fet que Catalunya Sí Que es Pot no va mostrar-se a favor de la independència, tot i que si que reivindicava un referèndum, i en el gran descontentament del partit d'esquerres amb la gestió que havia fet CIU de la crisi econòmica en la passada legislatura. Com a resultat d'aquesta nova incompatibilitat, la col·lecció minimal de coalicions guanyadores es reduiria a la coalició formada per Junts pel Sí i la CUP i tots els índexs de poder atorgarien un 50% a cada un dels grups, d'aquesta manera s'explicaria com la CUP va ser capaç d'imposar l'elecció d'un candidat presidenciable alternatiu al que Junts pel Sí anhelava.

El segon escenari resulta de no considerar aquesta incompatibilitat addicional. Junts pel Sí hauria de negociar amb la CUP i Catalunya Si Que es Pot per a formar govern sabent que ambdues formacions no recolzaven el seu candidat. La major afinitat existent entre la CUP i Junts pel Sí, degut a que comparteixen l'objectiu de la independència, ens porta a pensar que la CUP acabaria entrant a govern amb Junts pel Sí repartint-se el poder i la CUP podria fer valdre el seu veto a Artur Mas. L'altre opció és que es formés un govern de tres integrants, en aquest cas, es mantindrien els índexs calculats i per tant, CUP i Catalunya Sí Que es Pot reunirien un poder suficient per vetar al candidat de Junts pel Sí.

Cal remarcar, per a ser curosos, que en el nostre graf d'incompatibilitats no les hem tingut en compte totes. Aquestes incompatibilitats però, per la particularitat del cas que estem treballant, no influeixen en el resultat dels índexs de poder i en conseqüència, no alteren el poder de cada un dels partits, és per això que no les hem inclòs. Aquestes incompatibilitats serien les de Catalunya Sí Que es Pot amb el PP i Ciutadans (l'electorat identifica el primer com un partit d'esquerres i als altres dos com partits de dretes, a més, els seus models d'encaix per a Catalunya i Espanya no coincideixen) i la de la CUP i el PSC (tot i que són formacions que l'electorat identifica d'esquerres, el diferent enfoc envers una eventual independència catalana provoca la incompatibilitat entre els partits). Tot i que aquesta si que l'hem mencionat durant l'anàlisi, la incompatibilitat entre la CUP i Ciutadans també forma part d'aquest grup i tampoc té efecte sobre el càlcul del poder dels partits.

6.1.2 Partició per blocs

Com ja havíem avançat a l'inici de la secció dels jocs amb restriccions, existeix un altre mètode, alternatiu a les incompatibilitats, que ajuda a modelar aquestes restriccions, la partició per blocs usant unions a priori. Com hem vist, la formació de coalicions altera la distribució inicial del poder. És essencial doncs, disposar d'una mesura complementària als índexs amb els que hem treballat capaç d'evolucionar de manera sincronitzada amb la dinàmica coalicional i reflectir els resultats finals després de les respectives negociacions.

El valor coalicional, Owen (1977), és una generalització del valor de Shapley que compleix aquests propòsits. De fet, és una mesura de la distribució de poder que s'ajusta a cada possible estructura de coalicions, ponderant el valor obtingut per cada coalició al moment de formar-se, la distribució d'aquest valor entre els membres de la coalició i el valor que reben els jugadors que no s'han integrat en cap de les coalicions formades.

El nostre objectiu serà seleccionar coalicions que haurien de formar-se i raonar el criteri segons el qual les seleccionem. Per fer-ho haurem de tenir en compte la capacitat d'aquestes coalicions per a proporcionar una posició acceptable a cada un dels seus integrants i l'estabilitat de la coalició. A més, els guanys de la coalició han de repartir-se entre els seus membres tenint en compte la contribució de cada un.

A continuació, presentarem una sèrie de conceptes que ens seran útils per a entendre el valor coalicional d'Owen i que utilitzarem per a formalitzar-lo.

Sigui $P = \{P_1, ..., P_m\}$ la partició del conjunt N que descriu l'estructura coalicional del joc v, és a dir, cada P_i representa un jugador que decideix anar per separat o una coalició de jugadors i denotem per $P(N)$ el conjunt de particions d'N. A més, denotem per M el conjunt $\{1, ..., m\}$ sent $m = |P|$. Un joc amb una estructura coaliconal és un trio (N, v, P) on $v \in G^N$ i on $P \in P(N)$.

Definició 6.6. *Considerem un joc $v \in G^N$ amb l'estructura coalicional descrita per $P =$*

$\{P_1, ..., P_m\}$ *i on el conjunt* $M = \{1, ..., m\}$ *indica els jugadors o coalicions del joc* v. *Anomenem joc quocient a la parella* (M, v_P), *on* $v_P = v/P$ *ve donada per l'expressió* $v_P(S) = v(\cup_{j \in S} P_j)$ *per a cada coalició* $S \subset M$.

El joc quocient, és el joc induït per v quan es consideren les coalicions de la partició P, que en el nostre exemple seran les coalicions entre partits, com a jugadors. Un cop introduït aquest nou concepte és senzill veure la quantitat de pagament que li correspon a cada una de les coalicions.

Per cada $i \in N$, denotem per $y_i[v;P]$ les expectatives del jugador i en el joc v un cop assumida l'estructura coalicinal P. És natural doncs, pensar que cada coalició rebrà un pagament seguint la fórmula:

$$\sum_{i \in P_j} y_i[v;P] = y_j[v/P] \text{ per a cada } P_j \in P$$

El principal problema ara, un cop hem vist com es reparteix el pagament entre les diferents coalicions del joc, és determinar la divisió de $y_j[v/P]$ entre tots els membres de la coalició j. Aquesta divisió, per a ser justa, enlloc de repartir a parts iguals els beneficis, hauria de compensar en cert sentit les diferents possibilitats de cada un dels membres de la coalició.

Per a calcular un repartiment que atorgui a cada un dels jugadors de la coalició el pagament que li correspon segons la seva contribució a la mateixa, usarem una adaptació de la definició alternativa del valor de Shapley que havíem vist en la definició 3.11. De fet, tot i que usualment en la literatura s'utilitza la definició del valor coalicional d'Owen adaptada a la definició clàssica del valor de Shapley (definició 3.10), l'adaptació que farem és molt més intuïtiva, ja que la definició 3.11 usa els vectors de contribucions marginals de cada jugador i, per tant, s'adapta perfectament al nostre propòsit.

Definició 6.7. *Sigui* $v \in G^N$ *un joc TU. Considerem una partició del joc* $P \in P(N)$, *sigui* $\pi(N,P) \subseteq \pi(N)$ *el conjunt de permutacions de tots els jugadors del joc* v *on els jugadors d'una mateixa coalició de* P *queden ordenats de manera consecutiva, i per cada* $\pi \in \pi(N,P)$ *sigui* $P^\pi(i)$ *el conjunt de jugadors anteriors al jugador* i *segons l'ordre dictaminat* π *(*$j \in P^\pi(i)$ *si i només si* $\pi(j) < \pi(i)$*). El pagament corresponent a cada un dels jugadors* i *es pot representar de la següent manera:*

$$\Phi_i(v) := \frac{1}{|\pi(N,P)|!} \sum_{\pi \in \pi(N,P)} m_i^\pi(v)$$

on m_i^π *és la component í-èssima del vector de contribucions marginals associat a la permutació* π *que ja hem definit a la definició 3.11*

Observació: Per a representar aquest valor, hem usat la mateixa notació que la usada pel valor de Shapley. Tot i que no representen el mateix càlcul, a partir de la definició que hem donat, és fàcil veure que aquest valor és una extensió del valor de Shapley, ja que per a les particions trivials (tots els jugadors junts en una mateixa coalició o tots per separat), el valor que hem definit coincideix amb el valor de Shapley.

En aquesta última secció del cas pràctic estudiarem el poder que obtindrien les diferents coalicions factibles i estables des de el punt de vista ideològic o tàctic. Amb l'objectiu de veure diferents escenaris al que hem estudiat en el cas de les incompatibilitats, ara no estudiarem la coalició formada per Junts pel Sí i la CUP, ja que, de fet, si consideréssim aquesta coalició la resta de partits no tindrien cap poder.

La particularitat del parlament que estem estudiant simplifica l'aplicació del valor coalicional d'Owen que hem presentat. Ja hem comentat que, per similituds amb la secció anterior, no estudiarem la coalició de Junts pel Sí i la CUP, per tant, totes les coalicions que analitzarem estaran integrades per jugadors simètrics, de manera que l'aportació que faran a la coalició en la que estan integrats serà idèntica, en conseqüència també ho serà el poder que els hi correspon a cada un.

D'aquesta manera, només utilitzarem la primera part del càlcul que hem presentat, utilitzant el joc quocient, per tractar les coalicions com si fossin un únic jugador. Per a la segona part del càlcul, la divisió del poder segons la contribució a la coalició, no ens caldrà la definició que utilitza els vectors de contribucions marginals dels jugadors, serà suficient repartir el poder atorgat a la coalició entre cada un dels integrants a parts iguals.

Introduïm a continuació diferents escenaris que atenen a consideracions del tipus coalicional, descrivint a cada pas el corresponent efecte sobre la distribució del poder entre els partits.

Per una part, sembla natural considerar una coalició entre els tres partits que s'havien mostrat en contra de la independència de Catalunya, Ciutadans, PSC i PP. Aquesta unió té com a resultat la següent estructura de coalicions:

$$\mathrm{Cs} + \mathrm{PSC} + \mathrm{PP} = \{\mathrm{JxSi}, \{\mathrm{Cs}, \mathrm{PSC}, \mathrm{PP}\}, \mathrm{CSQP}, \mathrm{CUP}\}$$

el seu valor coalicional es dona a la tercera columna de la taula que apareix a continuació[1]

Partits	Percentatge d'escons	Índex de Shapley-Shubik	Cs + PSC + PP
JxSí	$0,4593$	$0,6667$	$0,5000$
Cs	$0,1852$	$0,0667$	$0,0556$
PSC	$0,1185$	$0,0667$	$0,0556$
CSQP	$0,0815$	$0,0667$	$0,1667$
PP	$0,0815$	$0,0667$	$0,0556$
CUP	$0,0741$	$0,0667$	$0,1667$

Taula 6.4: Percentatge d'escons i poder de cada partit abans i després de la formació de la coalició de Ciutadans, PSC i PP.

Com podem observar, sense tenir en compte coalicions i com ja havíem vist, Junts pel Sí és l'únic partit que se situa en una millor situació estratègica de la que indica el seu percentatge d'escons. Al tenir en compte la formació de la coalició, aquest poder es redueix i es reparteix entre les formacions restants. Veiem que els tres partits que han

[1]Per a l'elaboració de les taules d'aquesta secció hem fet servir el valor coalicional basat en l'índex de Shapley-Subik, als annexos A i B hi podem trobar les taules en que hem fet servir l'índex de Banzhaf i Banzhaf normalitzat

format la coalició tenen ara un poder menor al que ostentaven abans de formar la coalició, per aquesta raó, l'estratègia d'agrupar-se perd eficàcia si no hi ha expectatives d'altres unions entre partits (ja sigui a la mateixa coalició o formant-ne de noves).

Hem vist la coalició que agrupa a partits amb un grau major d'afinitat, la resta de coalicions que estudiarem ajunten partits que a priori no en tenen tanta, per tant, assumim com a punt de partida un escenari on es forma la coalició de Ciutadans, PSC i PP i a partir d'aquí estudiem la resta de coalicions que es podran crear.

Sembla natural també, pensar en una eventual unió de Catalunya Sí Que es Pot i la CUP, de fet, les dues candidatures són d'esquerres i estan a favor del dret a decidir, considerant aquesta unió obtenim la següent estructura de coalicions:

$$\mathrm{Cs} + \mathrm{PSC} + \mathrm{PP}; \mathrm{CSQP} + \mathrm{CUP} = \{\mathrm{JxSi}, \{\mathrm{Cs}, \mathrm{PSC}, \mathrm{PP}\}, \{\mathrm{CSQP}, \mathrm{CUP}\}\}$$

el seu valor coalicional es dona a la tercera columna de la taula que apareix a continuació.

Partits	Índex de Shapley-Shubik	Cs + PSC + PP	Cs + PSC + PP CSQP + CUP
JxSí	$0,6667$	$0,5000$	$0,3333$
Cs	$0,0667$	$0,0556$	$0,1111$
PSC	$0,0667$	$0,0556$	$0,1111$
CSQP	$0,0667$	$0,1667$	$0,1667$
PP	$0,0667$	$0,0556$	$0,1111$
CUP	$0,0667$	$0,1667$	$0,1667$

Taula 6.5: Poder de cada partit abans de la formació de coalicions i després dels dos escenaris estudiats.

Veient els resultats, queda clar que la unió dels partits minoritaris en diferents coalicions augmenta el seu poder i en conseqüència el partit dominant perd la seva gran influència, de fet, arribats a aquest punt, la situació s'ha capgirat, Junts pel Sí és l'únic partit que té un poder menor al que li havíem calculat abans de la formació de les coalicions, tots els altres partits aconsegueixen un poder superior.

Existeix però, un altra alternativa per a Catalunya Sí Que es Pot, el seu no pronunciament a favor o en contra de la independència permet que, tot i que la seva afinitat amb la resta d'integrants no sigui evident, es pugui imaginar un escenari on aquest partit formi una coalició amb el bloc de partits contraris a a independència de Catalunya. Si CSQP opta per aquesta alternativa, obtenim l'estructura

$$\mathrm{Cs} + \mathrm{PSC} + \mathrm{PP} + \mathrm{CSQP} = \{\mathrm{JxSi}, \{\mathrm{Cs}, \mathrm{PSC}, \mathrm{PP}, \mathrm{CSQP}\}, \mathrm{CUP}\}$$

el seu valor coalicional es dona a la tercera columna de la següent taula.

Partits	Cs + PSC + PP	Cs + PSC + PP CSQP + CUP	Cs + PSC + PP + CSQP
JxSí	$0,5000$	$0,3333$	$0,3333$
Cs	$0,1111$	$0,1111$	$0,0833$
PSC	$0,1111$	$0,1111$	$0,0833$
CSQP	$0,1667$	$0,1667$	$0,0833$
PP	$0,1111$	$0,1111$	$0,0833$
CUP	$0,1667$	$0,1667$	$0,3333$

Taula 6.6: Poder de cada partit després dels tres escenaris estudiats.

Els resultats ens mostren que la millor opció estratègica per a Catalunya Sí Que es Pot és no formar part de cap coalició o formar-ne una amb la CUP, en els dos casos obtindria el poder que li hem calculat per al primer escenari.

La conclusió més important que extraiem de l'anàlisi d'aquest últim escenari és que la CUP augmenta el seu poder d'influència i l'equipara al de Junts pel Sí. D'aquí al final de la secció intentarem explicar el perquè d'aquest canvi dràstic en comparació amb la situació abans de considerar les diferents coalicions i ho compararem als resultats obtinguts en l'estudi d'incompatibilitats.

Com ja hem comentat, els índexs de poder que hem utilitzat es basen en el nombre de swings que té cada partit per a calcular el seu poder. El descens que experimenta el poder de Junts pel Sí s'explica per la pèrdua de swings que experimenta aquest partit quan dos o més partits decideixen formar una coalició.

Ser el clar vencedor en nombre d'escons de les eleccions i estar tan a prop de la majoria absoluta provoca que Junts pel Sí reuneixi la majoria de swings del joc (30) un 75% dels swings totals (40), mentre que la resta de partits només en tenen 2 (la coalició que podrien formar amb Junts pel Sí i la coalició que agrupa tots els partits minoritaris).

La particularitat d'aquest cas provoca que per cada coalició que es pugui formar, es redueixi substancialment el nombre de swings de Junts pel Sí (Junts pel Sí ja només tindrà un únic swing amb la coalició de partits i no tots els que tenia abans amb cada un dels integrants de la coalició), i en canvi, no es redueixin els dels seus rivals (es manté la opció de formar una coalició amb Junts pel Sí o de formar la coalició de tots els partits minoritaris) de manera que els partits minoritaris o les coalicions de partits minoritaris mantindran els seus dos swings passi el que passi.

L'augment del poder de la CUP també té una lectura semblant però a la inversa. La integració dels partits minoritaris en diferents coalicions provoca tant el descens del nombre de possibilitats de Junts pel Sí per a formar una coalició guanyadora com el descens del nombre de swings totals del joc.

De fet, quan estudiem l'escenari en que Ciutadans, PSC i PP formen coalició, veiem com el nombre total de swings passa de 40 a 12. Aquí el poder de Junts pel Sí segueix sent elevat degut a que segueix podent pactar amb la coalició esmentada, Catalunya Sí Que es Pot i la CUP. Al afegir al nostre estudi la coalició d'aquests dos últims partits o al considerar la integració de Catalunya Sí Que es Pot al bloc no favorable a la independència, el nombre de swings totals del joc queda reduït a 6, 2 per a cada un dels jugadors o coalicions.

Vistos tots els escenaris possibles basats en les afinitats possibles entre els partits i analitzant els resultats de cada un dels escenaris arribem a una conclusió idèntica a la que hem plantejat en el cas de les incompatibilitats, la CUP es troba en una posició envejable que li permet ser l'eix de la governabilitat si decideix no entrar en cap coalició i allargar les negociacions amb Junts pel Sí. En realitat, cap de les coalicions que hem esmentat van arribar a dur-se a terme, ja que cap d'elles obtenia els escons suficients per a esdevenir guanyadora, però el seu estudi ens han servit per adonar-nos del poder ascendent de la CUP i la necessitat imperiosa per a Junts pel Sí de negociar un acord amb aquesta formació, no és d'estranyar doncs que la CUP, tot i ser el partit amb menor representació, 10 dels 135 del Parlament de Catalunya, pogués imposar a Junts Pel Sí que renunciés al seu candidat presidenciable.

Capítol 7

Conclusions

En la realització d'aquest treball hem introduït els conceptes més rellevants i fonamentals de la teoria de jocs cooperatius per acabar centrant-nos en els jocs simples i més concretament en els jocs de majoria ponderada, tot això amb l'objectiu d'estudiar les situacions decisòries dins d'un sistema de votació i per a intentar explicar el gran poder que va mostrar la CUP en els mesos anteriors a la investidura de les eleccions catalanes l'any 2015. A més, hem presentat les solucions per a aquest tipus de jocs, els índexs de poder, i hem definit i caracteritzat els dos índexs més importants, el de Shapley-Shubik i el de Banzhaf.

En l'aplicació que hem fet per analitzar els resultats del parlament estudiat, hem pogut constatar que, al aplicar-los en un àmbit polític amb una pluralitat tan àmplia d'opinions, si no són contextualitzats, és a dir, si no s'especifiquen les relacions entre els jugadors, ja siguin d'afinitat (estudiant si cada un dels partits pot o no formar coalició amb d'altres, basant-nos en la seva ideologia o en el rèdit que li pot proporcionar una coalició) o d'incompatibilitat (analitzant quins partits no poden formar coalició en base els punts més importants de la seva ideologia), llavors són merament orientatius i no compleixen el seu objectiu que és explicar el poder real de cada jugador. Aquestes especificacions no són necessàries en sistemes de votació on voten individus, però resulten essencials en sistemes en els que voten formacions d'individus que votaran conjuntament en bloc.

Després de l'elaboració i aplicació del graf d'incompatibilitats i de considerar les diferents afinitats que poden tenir els partits, hem observat que els resultats que ofereixen els dos índexs estudiats, el de Shapley-Shubik i el de Banzhaf (i Banzhaf normalitzat) són molt semblants i suggereixen una distribució del poder pràcticament idèntica que s'adapta perfectament a la situació estudiada.

És a dir, en parlaments on hi ha un gran nombre d'incompatibilitats, com en el cas que estem estudiant, tot i la naturalesa diferenciada dels dos índexs, aquests mostren resultats pràcticament idèntics i podem optar per una aplicació indistinta dels dos índexs sense perdre eficàcia en el nostre anàlisi.

Annex A

Índexs de Banzhaf per blocs

En les dues taules que apareixen a continuació hi apareixen els resultats que hem calculat en la secció de Partició per blocs amb l'índex de Banzhaf. En la primera, podem comparar el percentatge d'escons amb el poder que atorga a cada partit aquest índex abans de considerar la formació de qualsevol coalició i després de considerar la coalició de Ciutadans, PSC i PP. En la segona, podem comparar el poder atorgat als partits després de la formació de cada una de les possibles coalicions estudiades.

Partits	Percentatge d'escons	Índex de Banzhaf	Cs + PSC + PP
JxSí	$0,4593$	$0,9375$	$0,7500$
Cs	$0,1852$	$0,0625$	$0,0833$
PSC	$0,1185$	$0,0625$	$0,0833$
CSQP	$0,0815$	$0,0625$	$0,2500$
PP	$0,0815$	$0,0625$	$0,0833$
CUP	$0,0741$	$0,0625$	$0,2500$

Taula A.1: Percentatge d'escons i poder de cada partit abans i després de la formació de la coalició de Ciutadans, PSC i PP.

Partits	Cs + PSC + PP	Cs + PSC + PP CSQP + CUP	Cs + PSC + CSQP + PP
JxSí	$0,7500$	$0,5000$	$0,5000$
Cs	$0,0833$	$0,1667$	$0,1250$
PSC	$0,0833$	$0,1667$	$0,1250$
CSQP	$0,2500$	$0,2500$	$0,1250$
PP	$0,0833$	$0,1667$	$0,1250$
CUP	$0,2500$	$0,2500$	$0,5000$

Taula A.2: Poder dels partits segons la formació d'una determinada coalició.

Annex B

Índexs de Banzhaf normalitzat per blocs

En les dues taules que apareixen a continuació hi apareixen els resultats que hem calculat en la secció de Partició per blocs amb l'índex de Banzhaf normalitzat. Com en l'annex A, amb aquestes taules podem comparar el percentatge d'escons de cada partit amb el poder que atorga l'índex de Banzhaf normalitzat abans i després de la formació de les coalicions estudiades.

Partits	Percentatge d'escons	Índex de Banzhaf normalitzat	Cs + PSC + PP
JxSí	$0,4593$	$0,7500$	$0,5000$
Cs	$0,1852$	$0,0500$	$0,0556$
PSC	$0,1185$	$0,0500$	$0,0556$
CSQP	$0,0815$	$0,0500$	$0,1667$
PP	$0,0815$	$0,0500$	$0,0556$
CUP	$0,0741$	$0,0500$	$0,1667$

Taula B.1: Percentatge d'escons i poder de cada partit abans i després de la formació de la coalició de Ciutadans, PSC i PP.

Partits	Cs + PSC + PP	Cs + PSC + PP CSQP + CUP	Cs + PSC + CSQP + PP
JxSí	$0,5000$	$0,3333$	$0,3333$
Cs	$0,0556$	$0,1111$	$0,0833$
PSC	$0,0556$	$0,1111$	$0,0833$
CSQP	$0,1667$	$0,1667$	$0,0833$
PP	$0,0556$	$0,1111$	$0,0833$
CUP	$0,1667$	$0,1667$	$0,3333$

Taula B.2: Poder dels partits segons la formació d'una determinada coalició.

Bibliografia

[1] Banzhaf, J.F.: Weighted voting doesn't work: A mathematical analysis, *Rutgers Law Review* 19, 317-343, 1965.

[2] Bergantiños, G.; Carreras, F.; García-Jurado, I.: Cooperation when some players are incompatible, *Methods and Models of Operations Research (ZOR)* 38, 187-201, 1993.

[3] Carreras, F.: Restriction of simple games, *Mathematical Social Sciences* 21, 245-260, 1991.

[4] Carreras, F.; Owen, G.: Valor coalicional y estrategias parlamentarias, *Revista Española de Investigaciones Sociológicas* 71, 157-176, 1995.

[5] Centro de Investigaciones Sociológicas (CIS): *Preelectoral de Cataluña. Elecciones Autonómicas 2015*, 30/08/2015.

[6] Centro de Investigaciones Sociológicas (CIS): *Postelectoral de Cataluña. Elecciones Autonómicas 2015*, 30/09/2015.

[7] Chun, Y.: A new axiomatization of the Shapley value, *Games and Economic Behaviour* 1, 119-130, 1989.

[8] Dubey, P.: On the uniqueness of the Shapley value, *International Journal of Game theory* 4, 131-139, 1975.

[9] Dubey, P.; Shapley, L.S.: Mathematical properties of the Banzhaf power index, *Mathematics of Operations Research* 4, 99-131, 1979.

[10] González-Díaz, J.; García-Jurado, I.; Fiestras-Janeiro, M.G.: Cooperative Games, *An introductory Course on Mathematical Game Theory*, American Mathematical Society, 2010.

[11] Laruelle, A.; Valenciano, F.: Shapley-Shubik and Banzhaf indices revisited, *Mathematics of Operations Research* 26, 89-104, 2001.

[12] von Neumann, J.; Morgenstern, O.: *Theory of Games and Economic Behaviour*, Princeton University Press, 1944.

[13] Owen, G.: Values of games with a priori unions. In: Henn R.; Moeschlin O. (eds), *Essays in Mathematical Economics and Game Theory*, 76-88, Springer, Berlin, Heidelberg, 1977.

[14] Shapley, L.S.: A value for n-person games, In: Roth, A. (ed), *The Shapley Value, Essays in honor of Lloyd S.Shapley*, 31-41, Cambridge University Press, 1988.

[15] Shapley, L.S.; Shubik, M.: A method for evaluating the distribution of power in a committee system, In: Roth, A. (ed), *The Shapley Value, Essays in honor of Lloyd S.Shapley*, 41-51, Cambridge University Press, 1988.