UNIVERSITAT DE BARCELONA
Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

CÀLCUL DE LES GREGUES PEL MODEL BLACK-SCHOLES UTILITZANT EL CÀLCUL DE MALLIAVIN

Autor: Irene Puigtió Bernaus

Director: Dr. Josep Vives i Santa-Eulàlia
Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 24 de gener de 2021

Abstract

We study in this work the application of the Malliavin calculus for Greeks computation in the case of European options in the Black-Scholes model. Then we apply the formulas obtained in Monte Carlo simulation and we compare the results to the closed form Greeks. Finally, we introduce some considerations about the developed method.

Resum

En aquest treball investiguem les aplicacions del càlcul de Malliavin al càlcul de les Gregues en el cas d'opcions Europees utilitzant el model de Black-Scholes. Després realitzem una simulació numèrica utilitzant el mètode de Monte Carlo i comparem els resultats amb els valors obtinguts utilitzant les fórmules analítiques de les Gregues. Finalment, mencionem algunes consideracions sobre el mètode desenvolupat.

2010 Mathematics Subject Classification. 60H07, 91B70, 91G20

Agraïments

Especialment vull donar les gràcies al meu tutor, el Dr. Josep Vives, pel seu temps i la seva dedicació. També per haver-me ajudat i guiat sempre que ho he necessitat.

També voldria mencionar el Dr. Jan Pospíšil de la Universitat Západočeská de Pilsen per introduir-me en el càlcul estocàstic i per inspirar aquest treball.

Finalment, agrair a la meva família i amics el seu suport i ànims en tot moment.

Índex

1 Introducció **1**

2 Introducció al càlcul estocàstic **3**

2.1 Moviment Brownià 3

2.2 Martingales 4

2.3 Integrals estocàstiques 4

2.4 Càlcul d'Itô 5

3 Introducció al càlcul de Malliavin **8**

3.1 L'espai de Wiener 8

3.2 L'operador elemental 8

3.3 L'operador de divergència 10

3.3.1 La integral de Skorohod 12

3.4 Fórmula d'integració per parts 13

4 Introducció al model de Black-Scholes **14**

4.1 El comportament dels preus 14

4.2 Estratègies autofinançades 14

4.3 Canvi de mesura de probabilitat 15

4.4 Valoració d'opcions Europees 16

4.5 Gregues per opcions Europees en el model de Black-Scholes 19

4.5.1 Delta 19

4.5.2 Gamma 19

4.5.3 Vega 20

4.5.4 Rho 20

4.5.5 Theta 21

4.6 Valoració de l'opció digital 21

4.7 Gregues per l'opció digital en el model de Black-Scholes 22

4.7.1 Delta 22

4.7.2 Gamma 22

5 Càlcul de les gregues del model de Black-Scholes utilitzant càlcul de Malliavin **23**

5.0.1 Delta 23

5.0.2 Gamma 24

5.0.3 Vega 26

5.0.4 Rho 27
5.0.5 Theta 27
5.1 Càlcul de les Gregues per opcions vanilla 28
5.1.1 Delta 29
5.1.2 Gamma 30
5.1.3 Vega 30
5.1.4 Rho 31
5.1.5 Theta 31
5.2 Càlcul de les Gregues per l'opció digital 32
5.2.1 Delta 32
5.2.2 Gamma 32

6 Simulació numèrica **34**

7 Consideracions **40**

8 Conclusions **43**

Referències **44**

ANNEX **45**
A. Codi per opcions vanilla 45
B. Codi per opcions digitals 50
C. Funcions utilitzades 53

1 Introducció

El 1976, Paul Malliavin publica un article on introdueix el càlcul estocàstic variacional que anomenem càlcul de Malliavin. Es tracta d'un càlcul de dimensió infinita per a funcions en l'espai de Wiener. A partir d'aquest moment, diferents autors han anat desenvolupant aquest tipus de càlcul i se n'han trobat aplicacions en múltiples camps. El càlcul de Malliavin s'ha utilitzat en l'estudi de molts aspectes d'economia i finances.

Les Gregues són les sensibilitats del preu de les opcions financeres. Són de gran utilitat per preveure com varia el preu d'una opció financera al llarg del temps, ja que ens permeten saber com contribueix i afecta cada paràmetre als canvis en el preu. És per això que són de gran importància per calcular i evitar el risc.

Els darrers anys s'han desenvolupat diverses tècniques per al càlcul de les Gregues. El mètode més utilitzat tradicionalment és el mètode de diferències finites. Aquest mètode es pot aplicar en gairebé tots els casos, però no és gaire eficient i quan tractem amb opcions que tenen funcions de beneficis discontínues, no funciona bé. És per aquest motiu que Broadie i Glasserman van proposar el mètode de 'pathwise' i el mètode de raó de versemblança. Els dos mètodes són més eficients que l'anterior, però el mètode de 'pathwise' no funciona en funcions de beneficis discontínues, i el mètode de raó de versemblança només serveix en els casos en què coneixem la densitat del model.

Per evitar les limitacions que comporten els mètodes mencionats, Fournié, Lasry, Lebochoux, Lions i Touzi [1], [2] van introduir l'ús de la Fórmula d'integració per parts per derivar el preu de les opcions financeres utilitzant el càcul de Malliavin. D'aquesta manera podem expressar les gregues com l'esperança de la funció de beneficis multiplicada per una funció que anomenarem pes, i que serà específica per a cada Grega.

En aquest treball, ens centrem en el càlcul de les Gregues del Model de Black-Scholes mitjançant el càlcul de Malliavin. Seguim el procés que utilitza D. Nualart en [6] i acabem de calcular les Gregues més importants del call i el put d'opcions Europees. També introduim el càlcul d'aquestes per a l'opció digital. A més a més, demostrem que les fórmules obtingudes mitjançant el càlcul de Malliavin són equivalents a les fórmules analítiques. Finalment, realitzem algunes consideracions sobre el mètode desenvolupat i la seva eficiència.

Estructura de la Memòria

La memòria està estructurada en 6 seccions. En la primera secció introduïm els conceptes més importants del càlcul estocàstic aplicat a les finances que utilitzarem en el treball.

La segona secció explica alguns conceptes del càlcul de Malliavin. L'objectiu d'aquesta part de la memòria és construir la fórmula d'integració per parts, per fer-ho s'hi defineixen la derivada de Malliavin i l'operador de divergència.

A continuació, en la tercera secció, definim el Model de Black-Scholes i tots els conceptes necessaris per acabar obtenint el valor del preu de les opcions vanilla i digital. D'altra banda, expliquem breument les diferents Gregues, i les seves fórmules analítiques per a les opcions mencionades en el model de Black-Scholes.

En la quarta secció, procedim a calcular les fórmules de les diferents Gregues pel model de Black-Scholes utilitzant la fórmula d'integració per parts. A més a més, en aquesta secció veiem que les fórmules calculades són equivalents a les fórmules analítiques

d'aquestes Gregues.

En la cinquena secció, realitzem la simulació numèrica de les Gregues calculades anteriorment utilitzant el mètode de Monte Carlo.

Finalment, analitzem els beneficis del mètode desenvolupat i introduïm la tècnica de localització que ens servirà per millorar la seva eficiència.

2 Introducció al càlcul estocàstic

En aquesta secció s'introdueixen alguns dels conceptes bàsics del càlcul estocàstic aplicat a les finances. Per fer-ho, seguim el capítol 3 de [4].

Comencem definint alguns conceptes bàsics dels models continus.

Definició 2.1. *Sigui $(E, \mathcal{E})$ un espai mesurable. Un procés estocàstic amb espai d'estats $(E, \mathcal{E})$ és una familia $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ de variables aleatòries definides en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ que pren valors de $(E, \mathcal{E})$.*

En la següent definició, introduïm el concepte de filtració.

Definició 2.2. *Una filtració en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ és una familia creixent $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ de σ-àlgebres que pertanyen a $\mathcal{F}$. Una σ-àlgebra $\mathcal{F}_t$ representa la informació disponible al moment t.*

Definició 2.3. *Direm que un procés $(X_t)_{t\geq 0}$ és un procés adaptat a $\mathbb{F}$ si per qualsevol t, X_t és $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

Observació 2.4. Anomenem conjunts $\mathbb{P}$-buits o $\mathbb{P}$-negligibles els conjunts A' tal que $A' \subset A \in \mathcal{F}$ i $\mathbb{P}(A) = 0$.

Observació 2.5. A partir d'ara treballarem amb filtracions que compleixin la propietat següent:

$$\text{Si } A' \subset A \in \mathcal{F} \text{ i } \mathbb{P}(A) = 0, \text{ aleshores per qualsevol } t,\ A' \in \mathcal{F}_t,$$

és a dir, $\mathcal{F}_t$ conté tots els conjunts $\mathbb{P}$-buits de $\mathcal{F}$. Si aquesta propietat es compleix, $X = Y$ $\mathbb{P}$-quasi-segurament i si Y és $\mathcal{F}_t$-mesurable, aleshores X també és $\mathcal{F}_t$-mesurable.

Si construïm una filtració generada per un procés $(X_t)_{t\geq 0}$, i tal que $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$, aquesta generalment no compleix la condició anterior. De totes maneres, si substituïm $\mathcal{F}_t$ per la σ-àlgebra generada per $\mathcal{F}_t$ i $\mathcal{N}$ (la σ-àlgebra generada per tots els conjunts $\mathbb{P}$-buits de $\mathcal{F}$), que denotem $\tilde{\mathcal{F}}_t$, obtenim una filtració que satisfà la condició anterior. Anomenem aquesta filtració la filtració natural del procés $(X_t)_{t\geq 0}$. A partir d'ara quan parlem d'una filtració, ens estarem referint a la filtració natural del procés en qüestió. Un procés sempre està adaptat a la seva filtració natural.

2.1 Moviment Brownià

El moviment Brownià és un exemple de procés estocàstic molt important, ja que s'utilitza en la majoria de models financers.

Definició 2.6. *Un moviment Brownià és un procés estocàstic $(X_t)_{t\geq 0}$ que és continu, pren valors reals i els seus increments són independents i estacionaris. És a dir,*

- *Continuïtat: $s \to X_s(\omega)$ és continu $\mathbb{P}$-quasi-segurament.*
- *Increments independents: si $s \leq t, X_t - X_s$ és independent de $\mathcal{F}_s = \sigma(X_u, u \leq s)$.*
- *Increments estacionaris: si $s \leq t, X_t - X_s$ i $X_{t-s} - X_0$ tenen la mateixa llei de probabilitat.*

Definició 2.7. *Diem que un moviment Brownià és estàndard si* $X_0 = 0$ $\mathbb{P}$*-quasi-segurament,* $\mathbb{E}(X_t) = 0$ *i* $\mathbb{E}(X_t^2) = t$.

D'ara en endavant, quan parlem de moviment Brownià, ens estarem referint a un moviment Brownià estàndard.

La funció de distribució de X_t d'un moviment Brownià estàndard és

$$\int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx,$$

on dx és la mesura de Lebesgue en $\mathbb{R}$.
Hem vist que per qualsevol t, X_t és una variable aleatòria normal. Aleshores,

Teorema 2.8. *Si* $(X_t)_{t\geq 0}$ *és un moviment Brownià i* $0 \leq t_1 < ... < t_n$*, aleshores* $(X_{t_1}, ..., X_{t_n})$ *és un vector Gaussià.*

A continuació veurem la definició de moviment Brownià respecte una filtració $\mathbb{F}$.

Definició 2.9. *Un procés estocàstic continu i que pren valors reals, és un moviment* $\mathbb{F}$*-Brownià si es compleix:*

- *Per qualsevol* $t \geq 0$*,* X_t *és* $\mathcal{F}_t$*-mesurable.*
- *Si* $s \leq t, X_t - X_s$ *és independent de la* σ*-àlgebra* $\mathcal{F}_s$*.*
- *Si* $s \leq t, X_t - X_s$ *i* $X_{t-s} - X_0$ *tenen la mateixa llei de probabilitat.*

Podem observar que un moviment $\mathbb{F}$-Brownià és també un moviment Brownià respecte la seva filtració natural.

2.2 Martingales

El concepte de martingala és crucial per al càlcul estocàstic. A continuació en veiem la definició.

Definició 2.10. *Considerem un espai de probabilitat* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *i una filtració* $\mathbb{F}$ *en aquest espai. Sigui* $(M_t)_{t\geq 0}$ *una familia adaptada de variables aleatòries integrables, és a dir, tal que* $\mathbb{E}(|M_t|) < \infty$ *per qualsevol t. Aleshores és*

- *Una martingala si, per qualsevol* $s \leq t$*,* $\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s$*.*
- *Una supermartingala si, per qualsevol* $s \leq t$*,* $\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) \leq M_s$*.*
- *Una submartingala si, per qualsevol* $s \leq t$*,* $\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) \geq M_s$*.*

Observació 2.11. De la definició anterior en podem deduir que si $(M_t)_{t\geq 0}$ és una martingala, aleshores $\mathbb{E}(M_t) = \mathbb{E}(M_0)$ per qualsevol t.

2.3 Integrals estocàstiques

Considerem un moviment $\mathbb{F}$-Brownià $(W_t)_{t\geq 0}$ i un procés $\mathbb{F}$-adaptat $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ tal que $\int_0^t H_s^2 ds < +\infty$ $\mathbb{P}$-quasi-segurament.

Seguint Lamberton Lapeyre [6] pàgines 59-65, considerem la integral estocàstica d'Itô de la forma

$$\left(\int_0^t H_s dW_s\right)_{0\leq t\leq T}.$$

Aleshores, per qualsevol $t \in [0,T]$, es compleix

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T H_s dW_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left(\int_0^T H_s^2\right).$$

2.4 Càlcul d'Itô

El càlcul d'Itô és un càlcul diferencial que es basa en la integral estocàstica. L'element més important del càlcul d'Itô és la fórmula d'Itô.

Inicialment definim el tipus de processos als que podem aplicar-hi la fórmula d'Itô.

Definició 2.12. *Sigui $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ un espai de probabilitat filtrat on $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in [0,T]\}$, i $(W_t)_{t\geq 0}$ un moviment $\mathbb{F}$-Brownià. $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ és un procés d'Itô si el podem escriure $\mathbb{P}$-quasi-segurament $\forall t \leq T$ com*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s,$$

on

- *X_0 és $\mathcal{F}_0$-mesurable.*
- *$(K_t)_{0\leq t\leq T}$ i $(H_t)_{0\leq t\leq T}$ són processos $\mathbb{F}$-adaptats.*
- *$\int_0^T |K_s| ds < +\infty$ $\mathbb{P}$-quasi-segurament.*
- *$\int_0^T |H_s|^2 ds < +\infty$ $\mathbb{P}$-quasi-segurament.*

La següent Proposició justifica la unicitat de la descomposició anterior.

Proposició 2.13. *Si $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ és una martingala contínua tal que*

$$M_t = \int_0^t K_s ds,$$

amb $\mathbb{P}$-quasi-segurament

$$\int_0^T |K_s| ds < +\infty,$$

aleshores

$$\mathbb{P}\text{-q.s. } \forall t \leq T,\ M_t = 0.$$

Això implica que:

- *La descomposició d'un procés d'Itô és única. Per tant, si*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s = X_0' + \int_0^t K_s' ds + \int_0^t H_s' dW_s,$$

aleshores

$$X_0 = X_0' \ d\mathbb{P}\text{-}q.s \ H_s = H_s' \ ds \times d\mathbb{P}\text{-}q.s. \ K_s = K_s' \ ds \times d\mathbb{P}\text{-}q.s.$$

- *Si* $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ *és una martingala de la forma*

$$X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s,$$

aleshores $K_t = 0 \ dt \times d\mathbb{P}$*-q.s.*

A continuació, enunciem la fórmula d'Itô per martingales contínues.

Teorema 2.14. *(Fórmula d'Itô) Sigui* $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ *un procés d'Itô,*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s,$$

i sigui f una funció contínua i dues vegades diferenciable. Aleshores,

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle X, X\rangle_s$$

on, per definició,

$$\langle X, X\rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds$$

i

$$\int_0^t f'(X_s)dX_s = \int_0^t f'(X_s)K_s ds + \int_0^t f'(X_s)H_s dW_s.$$

D'altra banda, si $(t, x) \to f(t, x)$ *és una funció que és dues vegades diferenciable respecte* x *i diferenciable respecte* t*, i aquestes derivades parcials són contínues respecte* (t, x)*, és a dir, f és una funció de classe* $C^{1,2}$*, aleshores la fórmula d'Itô esdevé,*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_s'(s, X_s)ds + \int_0^t f_x'(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}''(s, X_s)d\langle X, X\rangle_s.$$

Considerem equacions generals del tipus

$$X_t = Z + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s.$$

Aquestes equacions s'anomenen equacions diferencials estocàstiques, i una solució d'aquestes s'anomena una difusió.

Definició 2.15. *Considerem un espai de probabilitat* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *amb una filtració* $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$*. Tenim les funcions* $b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *i* $\sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*; una variable aleatòria* Z $\mathcal{F}_0$*-mesurable i un moviment Brownià* $\mathbb{F}$*-adaptat* $(W_t)_{t\geq 0}$*. Una solució de l'equació anterior és un procés estocàstic continu i* $\mathbb{F}$*-adaptat* $(X_t)_{t\geq 0}$ *que satisfà:*

1. *Per qualsevol* $t \geq 0$*, les integrals* $\int_0^t b(s, X_s)ds$ *i* $\int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s$ *existeixen, és a dir,*

$$\int_0^t |b(s, X_s)|ds < +\infty \ i \int_0^t |\sigma(s, X_s)|^2 ds < +\infty \ \mathbb{P} - q.s.$$

2. $(X_t)_{t\geq 0}$ *satisfà l'equació anterior, i equivalentment* $\forall t \geq 0$ $\mathbb{P}$*-q.s.,*

$$X_t = Z + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s.$$

El teorema següent justifica l'existència i la unicitat de la solució de l'equació anterior.

Teorema 2.16. *Siguin* b *i* σ *funcions contínues, i* K *una constant tal que*

1. $|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K|x-y|$,
2. $|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq K(1+|x|)$ *i*
3. $\mathbb{E}(Z^2) < \infty$.

Aleshores, per qualsevol $T \geq 0$*, l'equació té una única solució en l'interval* $[0,T]$*. A més a més, aquesta solució* $(X_s)_{0\leq t\leq T}$ *satisfà*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq T} |X_s|^2\right) < +\infty.$$

3 Introducció al càlcul de Malliavin

En aquesta secció, introduïm alguns conceptes importants del càlcul de Malliavin. Principalment, presentem els conceptes necessaris per poder construir la fórmula d'integració per parts. L'objectiu és definir la derivada de Malliavin d'una variable aleatòria F respecte el paràmetre ω i l'operador divergència, que és el dual de l'operador derivada. Per fer-ho, seguim el llibre de Nualart [6]. La majoria dels resultats que enunciem en aquest apartat no els provarem, però en podem trobar la prova a [6].

3.1 L'espai de Wiener

El càlcul de Malliavin es desenvolupa a l'espai de Wiener. Per tant, es tracta de càlcul diferencial de dimensió infinita. Per definir aquest espai, inicialment considerem l'espai de funcions amb valors reals definides en $[0,T]$ i amb valor 0 en $t=0$, és a dir,

$$\Omega = C_0([0,T]) = \{w_t : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R} |\ w_t \text{ és contínua, } w_0 = 0\}.$$

Associem a Ω la σ-àlgebra $\mathcal{F}$ generada pels conjunts

$$\{w |\ w_{t_1} \in A_1, ..., w_{t_n} \in A_n\},$$

on, $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n \leq T$ i $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{B}$ són conjunts de Borel en $\mathbb{R}$.

Per tant, podem definir la mesura de probabilitat a $(\Omega, \mathcal{F})$,

$$\mathbb{P}(w |\ w_{t_1} \in A_1, ..., w_{t_n} \in A_n)$$

$$= \int_{A_1} p(t_1, w_1) dw_1 \int_{A_2} p(t_2 - t_1, w_2 - w_1) dw_2 \ \cdots \int_{A_n} p(t_n - t_{n-1}, w_n - w_{n-1}) dw_n,$$

on

$$p(t,w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-w^2/2t}.$$

Anomenem aquesta mesura de probabilitat mesura de Wiener.

A continuació definim el procés que connecta Ω amb l'espai real $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} W_t \ : \ & \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ & w \longmapsto w_t. \end{aligned}$$

Aleshores, el procés $W = (W_t)_{t \in [0,T]}$ és un moviment Brownià en l'espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i aquest espai s'anomena espai de Wiener. Observem que $\mathcal{F}$ és la σ-àlgebra generada pel moviment Brownià $W = (W_t)_{t \in [0,T]}$.

3.2 L'operador elemental

Abans de començar introduïm el concepte de procés Gaussià isonormal. Suposem que H és un espai de Hilbert. Denotem el seu producte escalar com $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Denotem la norma d'un element $h \in H$ com $||h||_H$.

Definició 3.1. *Un procés estocàstic $W = \{W(h), h \in H\}$ definit en un espai de probabilitat complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ és un procés isonormal Gaussià si W és una família Gaussiana centrada de variables aleatòries tal que $\mathbb{E}[W(h)W(g)] = \langle h, g \rangle_H$ per tot $h, g \in H$.*

Sigui $W = \{W(h), h \in H\}$ un procés Gaussià isonormal associat amb l'espai de Hilbert H. Suposem que W està definit en un espai de probabilitat complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, i que $\mathcal{F}$ està generat per W.

Denotem per $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ el conjunt de totes les funcions infinitament diferenciables $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que f i totes les seves derivades parcials tenen creixement polinomial.

Sigui $\mathcal{S}$ la classe de variables aleatòries regulars formada per amb variables de la forma

$$F = f(W(h_1), ..., W(h_n)),$$

on $f \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$, $h_1, ..., h_n \in H$, $n \geq 1$, i $W(h_i) = \int_0^\infty h_i(t)dW_t$.

Definició 3.2. *La derivada d'una variable aleatòria regular és la variable aleatòria DF, que pren valors en H, definida com*

$$DF = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(W(h_1), ..., W(h_n))h_i.$$

La derivada de Malliavin d'una variable aleatòria $F \in \mathcal{S}$ compleix la regla del producte i la linealitat de la derivada ordinària. En la següent proposició veiem aquestes propietats:

Proposició 3.3. *Suposem que F i G són variables aleatòries regulars i $a, b \in \mathbb{R}$. Aleshores,*

1. $D(FG) = FD(G) + GD(F)$.
2. $D(aF + bG) = aD(F) + bD(G)$.

A continuació, enunciem la fórmula d'integració per parts.

Lema 3.4. *Sigui F una variable aleatòria regular i $h \in H$. Aleshores,*

$$\mathbb{E}[\langle DF, h\rangle_H] = \mathbb{E}[FW(h)].$$

Si apliquem el resultat anterior a un producte, obtenim el resultat següent.

Lema 3.5. *Siguin F i G variables aleatòries regulars i sigui $h \in H$. Aleshores,*

$$\mathbb{E}[G\langle DF, h\rangle_H] = \mathbb{E}[-F\langle DG, h\rangle_H + FGW(h)].$$

Proposició 3.6. *La derivada k-èssima de F per qualsevol $k \geq 1$, que es denota $D_t^k F$, és una variable aleatòria amb valors a $H^{\otimes k}$, i s'obté derivant k vegades la variable F.*

Proposició 3.7. *Siguin $p \geq 1$, $k \geq 1$, l'operador diferencial D^k és tancat i densament definit a $L^p(\Omega; H^{\otimes k})$ i el seu domini és l'espai $\mathbb{D}^{k,p}$. Definim $\mathbb{D}^{k,p}$ com la completació de $\mathcal{S}$ respecte la seva seminorma, definida com*

$$\|F\|_{k,p} = (\mathbb{E}[|F|^p] + \sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}[\|D^j F\|^p_{H^{\otimes j}}])^{\frac{1}{p}}.$$

Observació 3.8. En la proposició anterior, $|\cdot|$ denota la norma Euclidiana, mentre que $||\cdot||$ denota la norma a l'espai de Hilbert.

Si prenem $k = 1$ i $p = 2$, aleshores l'espai $\mathbb{D}^{1,2}$ esdevé un espai de Hilbert amb el producte escalar

$$\langle F, G\rangle_{1,2} = \mathbb{E}[F, G] + \mathbb{E}[\langle DF, DG\rangle_H].$$

Observació 3.9. Si prenem un element fix h de l'espai de Hilbert H, definim l'operador D^h en l'espai de variables aleatòries regulars com

$$D^h F = \langle DF, h\rangle_H.$$

El resultat següent és la regla de la cadena aplicada a l'operador D.

Proposició 3.10. *Sigui $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ una funció contínuament diferenciable i suposem que les seves derivades parcials estan acotades. Fixem $p \geq 1$. Suposem que $F = (F^1, ..., F^m)$ és un vector aleatòri i que les seves components formen part de l'espai $\mathbb{D}^{1,p}$. Aleshores, $\varphi(F) \in \mathbb{D}^{1,p}$ i*

$$D(\varphi(F)) = \sum_{i=1}^{m} \partial_i \varphi(F) DF^i.$$

És important tenir en compte que podem estendre la proposició anterior al cas de funcions de Lipschitz, ja que ens serà útil en el càlcul de les Gregues.

Proposició 3.11. *Sigui $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ una funció que satisfà*

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq K|x - y|$$

per qualsevol $x, y \in \mathbb{R}^m$. Suposem que $F = (F^1, ..., F^m)$ és un vector aleatori i les seves components formen part de l'espai $\mathbb{D}^{1,2}$. Aleshores $\varphi(F) \in \mathbb{D}^{1,2}$, i existeix un vector aleatori $G = (G_1, ..., G_m)$ acotat per K de manera que

$$D(\varphi_n(F)) = \sum_{i=1}^{m} G_i DF^i.$$

3.3 L'operador de divergència

En aquesta secció, considerem l'operador de divergència, que és l'adjunt de l'operador derivada.

Inicialment, introduïm l'operador de divergència per un procés Gaussià isonormal $W = \{W(h), h \in H\}$, associat amb l'espai de Hilbert H.

Recordem que l'operador diferencial D és un operador tancat i no acotat amb valors a $L^2(\Omega; H)$ definit en l'espai dens $\mathbb{D}^{1,2}$ de $L^2(\Omega)$.

Definició 3.12. *Denotem l'adjunt de l'operador D per δ. És a dir, δ és un operador no acotat en $L^2(\Omega; H)$ i els seus valors formen part de $L^2(\Omega)$ tals que:*

1. *El domini de δ, Domδ, és el conjunt de variables aleatòries de quadrat integrable que prenen valors a H, $u \in L^2(\Omega; H)$ tal que*

$$|\mathbb{E}[\langle DF, u\rangle_H]| \leq c\|F\|_2,$$

per tot $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, on c és una constant que depèn de la variable u.

2. *Si la variable aleatòria u forma part del domini de l'operador δ, aleshores $\delta(u)$ és un element de $L^2(\Omega)$, que es defineix com*

$$\mathbb{E}[F\delta(u)] = \mathbb{E}[\langle DF, u\rangle_H]$$

per qualsevol $F \in \mathbb{D}^{1,2}$.

Observació 3.13. En la definició anterior, $||\cdot||_2$ denota la norma a $L^2(\Omega)$.

Anomenem a l'operador δ operador de divergència, es tracta d'un operador tancat i densament definit.

Denotem $\mathcal{S}_H$ la classe d'elements regulars de la forma

$$u = \sum_{j=1}^{n} F_j h_j,$$

on F_j són variables aleatòries regulars i h_j són elements d'H.

Proposició 3.14. *Sigui $u \in S_H$, $F \in \mathcal{S}$ i $h \in H$, aleshores*

$$D^u(\delta(u)) = \langle u, h\rangle_H + \delta(D^h u).$$

El lema següent ens permet estendre la proposició anterior a una classe més general de variables aleatòries.

Lema 3.15. *Sigui $G \in L^2(\Omega)$ i suposem que existeix $Y \in L^2(\Omega)$ tal que*

$$\mathbb{E}[G\delta(hF)] = \mathbb{E}[YF],$$

per tot $F \in \mathbb{D}^{1,2}$. Aleshores $G \in \mathbb{D}^{h,2}$ i $D^h G = Y$.

La següent proposició ens permet factoritzar una variable aleatòria escalar d'un operador de divergència.

Proposició 3.16. *Sigui $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ i u una variable aleatòria que forma part del domini de δ, tal que $Fu \in L^2(\Omega; H)$. Aleshores Fu forma part del domini de δ i es compleix la següent igualtat*

$$\delta(Fu) = F\delta(u) - \langle DF, u\rangle_H,$$

suposant que $F\delta(u) - \langle DF, u\rangle_H$ és de quadrat integrable.

Si substituïm la variable aleatòria u de la proposició anterior per una funció determinística $h \in H$, en tindrem prou amb que F sigui diferenciable en la direcció d'h.

Proposició 3.17. *Sigui $h \in H$ i $F \in \mathbb{D}^{h,2}$. Aleshores $Fh \in Dom\delta$ i es compleix*

$$\delta(Fh) = FW(h) - D^h F.$$

La proposició que enunciem a continuació ens serveix per justificar l'existència de la divergència.

Proposició 3.18. *Sigui $u \in L^2(\Omega; H)$ tal que existeix una successió $u_n \in Dom\delta$ que convergeix a u. Suposem que existeix $G \in L^2(\Omega)$ tal que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\delta(u_n)F] = \mathbb{E}[GF]$ per tot $F \in \mathcal{S}$. Aleshores, $u \in Dom\delta$ i $\delta(u) = G$.*

3.3.1 La integral de Skorohod

A partir d'ara, suposem que l'espai de Hilbert H és un espai de la forma $H = L^2([0,T], \mathcal{B}, \lambda)$, on λ és una mesura σ-finita i no atòmica en un espai mesurable $([0,T], \mathcal{B})$.

Observem que ara Domδ és un subespai de $L^2([0,T] \times \Omega)$ i els seus elements són processos de quadrat integrable. En aquest cas, l'operador de divergència es denota per $\delta(\cdot)$ i opera sobre els processos $u = \{u_t, t \in [0,T]\}$. Anomenem aquest operador Integral estocàstica de Skorohod del procés u i la seva notació és

$$\delta(u) = \int_0^T u_t \delta W_t$$

quasi-segurament.

La següent versió ampliada de la proposició 3.16 ens resultarà molt útil.

Proposició 3.19. *Suposem que $H = L^2([0,T], \mathcal{B}, \lambda)$. Sigui $A \in B$, i $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ una variable aleatòria. Sigui u un element de $L^2(\Omega; H)$ tal que $u\mathbf{1}_A \in Dom\delta$ i tal que $Fu\mathbf{1}_A \in L^2(\Omega; H)$. Aleshores $Fu\mathbf{1}_A \in Dom\delta$ i es compleix la igualtat següent:*

$$\delta(Fu\mathbf{1}_A) = F\delta(u\mathbf{1}_A) - \int_A D_t F u_t \lambda(dt),$$

suposant que $F\delta(u) - \langle DF, u\rangle_H$ és de quadrat integrable.

Teorema 3.20. *Sigui $G \in L^2([0,T] \times \Omega)$ un procés definit adaptat. En aquesta situació, la integral de Skorohod coincideix amb la integral d'Itô, és a dir,*

$$\delta(H) = \int_0^T G_t \delta W_t = \int_0^T G_t dW_t$$

quasi-segurament.

L'espai $\mathbb{D}^{1,2}(L^2([0,T]))$, al que ens referim com $\mathbb{L}^{1,2}$, coincideix amb la classe de processos $u \in L^2([0,T] \times \Omega)$ tal que $u(t) \in \mathbb{D}^{1,2}$ per quasi tots els valors de t.

Proposició 3.21. *Suposem que $u \in \mathbb{L}^{1,2}$, que per quasi tots els valors de t el procés $\{D_t u_s, s \in [0,T]\}$ és integrable Skorohod i que hi ha una versió del procés $\{\int_T D_t u_s dW_s,\ t \in [0,T]\}$ que forma part de $L^2([0,T] \times \Omega)$. Aleshores $\delta(u) \in \mathbb{D}^{1,2}$ i tenim*

$$D_t(\delta(u)) = u_t + \int_T D_t u_s dW_s.$$

El lema següent ens proporciona un mètode per construir un procés u Skorohod integrable que no pertany a l'espai $\mathbb{L}^{1,2}$.

Lema 3.22. *Sigui $A \in \mathcal{B}$ i F una variable aleatòria de quadrat integrable mesurable respecte la σ-àlgebra $\mathcal{F}_{A^c}$. Aleshores el procés $F\mathbf{1}_A$ és integrable Skorohod i*

$$\delta(F\mathbf{1}_A) = FW(A).$$

En la següent proposició, reescrivim la Proposició 3.16 utilitzant el producte escalar a l'espai de Hilbert H.

Proposició 3.23. *Suposem que existeix una variable aleatòria diferenciable de Malliavin F i un procés Skorohod integrable u. Aleshores,*

$$\delta(Fu) = F\delta(u) - \int_0^T D_t F u_t \lambda(dt).$$

3.4 Fórmula d'integració per parts

Finalment, presentem la fórmula d'integració per parts, que més endavant utilitzarem per calcular les Gregues.

Proposició 3.24. *Siguin F, G dues variables aleatòries. Suposem que $F \in \mathbb{D}^{1,2}$. Considerem una variable aleatòria u que pren valors a H, tal que $D^u F = \langle DF, u\rangle_H \neq 0$ q.s. i $Gu(D^u F)^{-1} \in Dom\delta$. Aleshores, per qualsevol funció f tal que $f \in C^1$ i la seva derivada és acotada, tenim*

$$\mathbb{E}[f'(F)G] = \mathbb{E}[f(F)H(F,G)],$$

on $H(F,G) = \delta(Gu(D^u F)^{-1})$.

Demostració. Utilitzem la Proposició 3.10 i la Definició 3.12,

$$D^u f(F) = \langle Df(F), u\rangle_H = \langle f'(F)DF, u\rangle_H = f'(F)\langle DF, u\rangle_H.$$

Suposem que $\langle DF, u\rangle \neq 0$, i aleshores podem escriure

$$f'(F) = \langle Df(F), u\rangle_H (\langle DF, u\rangle_H)^{-1}.$$

A continuació multipliquem els dos costats de l'equació anterior per G,

$$f'(F)G = \langle Df(F), u\rangle_H G(\langle DF, u\rangle_H)^{-1}.$$

Finalment, prenent l'esperança als dos costats, obtenim

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f'(F)G] &= \mathbb{E}[\langle Df(F), u\rangle_H G(\langle DF, u\rangle_H)^{-1}] \\
&= \mathbb{E}[\langle Df(F), Gu(\langle DF, u\rangle_H)^{-1}\rangle_H] \\
&= \mathbb{E}[\langle Df(F), Gu(D^u F)^{-1}\rangle_H] \\
&= \mathbb{E}[f(F)\delta(Gu(D^u F)^{-1})].
\end{aligned}$$

□

Observació 3.25. Si prenem el cas particular de la Fórmula d'Integració per parts que acabem d'enunciar on $G = 1$ i $u = 1$, aleshores

$$\mathbb{E}[f'(F)] = \mathbb{E}[f(F)H(F,1)],$$

i $H(F,1) = \delta((D^1 F)^{-1})$.

4 Introducció al model de Black-Scholes

En aquesta secció, introduïm el model de Black-Scholes i les seves sensitivitats. Per fer-ho, seguim [3], [4] i [7].

4.1 El comportament dels preus

El model Black-Scholes és un model de mercat continu que suposa que tenim un actiu amb risc i un altre sense risc.

Suposem que l'actiu sense risc es comporta d'acord amb l'equació diferencial $dS_t^0 = rS_t^0 dt$, on $r \geq 0$ és una constant que denota la taxa d'interès. Definim $S_0^0 = 1$. Aleshores $S_t^0 = e^{rt}$ per tot $t \geq 0$.

Suposem que el preu de mercat actua segons l'equació diferencial $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$, on $W = \{W_t, t \in [0,T]\}$ és un moviment brownià definit en un espai de probabilitat complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in [0,T]\}$ és la filtració generada per W i completada per $\mathbb{P}$, μ és el rendiment i σ és la volatilitat.

Proposició 4.1. *L'equació diferencial estocàstica $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$ té una solució en forma tancada,*

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t},$$

on S_0 és el preu quan $t = 0$. Es diu que la llei de S_t és lognormal, és a dir, $logS_t$ és un moviment Brownià, i per tant el procés $logS_t$ és continu i els seus increments són independents i estacionaris.

4.2 Estratègies autofinançades

Una estratègia es defineix com el procés $\phi = (\phi_t)_{0 \leq t \leq T} = (H_t^0, H_t)_{0 \leq t \leq T}$ amb valors en $\mathbb{R}^2$, adaptat a la filtració natural $\mathbb{F}$ del moviment Brownià. H_t^0 i H_t són les quantitats d'actiu amb risc i sense risc respectivament de la cartera en el moment t. El valor de la cartera en t es defineix com

$$V_t(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t.$$

Definició 4.2. *Una estratègia autofinançada es defineix per un procés $\phi = (H_t^0, H_t)_{0 \leq t \leq T}$ que satisfà:*

1. $$\int_0^T |H_t^0| dt + \int_0^T H_t^2 dt < +\infty$$

   quasi-segurament.

2. $$H_t^0 S_t^0 + H_t S_t = H_0^0 S_0^0 + H_0 S_0 + \int_0^t H_u^0 dS_u^0 + \int_0^t H_u dS_u$$

   quasi-segurament, per tot $t \in [0,T]$.

Denotem $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$ el preu descomptat de l'actiu amb risc.

Proposició 4.3. *Sigui* $\phi = (H_t^0, H_t)_{0\leq t\leq T}$ *un procés adaptat a valors a* $\mathbb{R}^2$ *que satisfà*

$$\int_0^T |H_t^0| dt + \int_0^T H_t^2 dt < +\infty$$

quasi-segurament. Sigui $V_t(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t$ *i* $\tilde{V}_t(\phi) = e^{-rt} V_t(\phi)$*. Aleshores,* ϕ *defineix una estratègia autofinançada si i només si*

$$\tilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t H_u d\tilde{S}_u$$

quasi-segurament, per tot $t \in [0, T]$*.*

4.3 Canvi de mesura de probabilitat

Passem a introduir els conceptes d'arbitratge i de probabilitat neutral al risc, així com la relació que existeix entre ells.

Definició 4.4. *Una estratègia* $\phi = (H_t^0, H_t)_{0\leq t\leq T}$ *és admissible si és autofinançada i* $\tilde{V}_t(\phi) = H_t^0 + H_t \tilde{S}_t$ *és positiu per qualsevol valor de* t *i tal que* $\sup_{t\in[0,T]} \tilde{V}_t$ *és de quadrat integrable sota* $\mathbb{P}$*.*

Definició 4.5. *Una estratègia autofinançada i admisible* ϕ *és una estratègia d'arbitratge si* $V_0(\phi) = 0$ *i per qualsevol* $t \in [0, T]$*,* $\mathbb{P}\{V_t(\phi) \geq 0\} = 1$ *i* $\mathbb{P}\{V_t(\phi) > 0\} > 0$*, és a dir, si ens dóna la possibilitat de guanyar diners sense risc.*

Definició 4.6. *Diem que una probabilitat* $\mathbb{P}$ *és neutral al risc si sota aquesta probabilitat els preus descomptats són martingala.*

Teorema 4.7. *(Primer teorema fonamental de les finances) Si un model de mercat té probabilitat neutral al risc, aleshores no admet arbitratge.*

Observació 4.8. Quan un model de mercat no admet arbitratge, es diu que és un mercat viable.

A continuació definim la mesura de probabilitat equivalent. Ens serveix per definir la probabilitat neutral al risc que utilitzarem a partir d'ara.

Definició 4.9. *Sigui* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espai de probabilitat. Considerem que una mesura de probabilitat* $\mathbb{Q}$ *sobre* $(\Omega, \mathcal{F})$ *és absolutament contínua sobre* $\mathbb{P}$ *si*

$$\forall A \in \mathcal{F},\ \mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow \mathbb{Q}(A) = 0.$$

Les mesures de probabilitat $\mathbb{P}$ *i* $\mathbb{Q}$ *són equivalents si ambdues són absolutament contínues respecte l'altra.*

El Teorema següent ens serveix per caracteritzar la continuïtat absoluta.

Teorema 4.10. *(Radon-Nikodym) Una mesura de probabilitat* $\mathbb{Q}$ *és absolutament contínua respecte una altra mesura de probabilitat* $\mathbb{P}$ *si i només si existeix una variable aleatòria positiva* Z *que compleix,*

$$\forall A \in \mathcal{F},\ \mathbb{Q}(A) = \int_A Z(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

S'escriu $Z = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ *i es diu que* Z *és la densitat de* $\mathbb{Q}$ *respecte* $\mathbb{P}$*.*

Per trobar un moviment Brownià sota la mesura de probabilitat neutral al risc $\mathbb{Q}$ utilitzarem el teorema de Girsanov:

Teorema 4.11. *(Girsanov) Sigui $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ un espai de probabilitat filtrat i $(B_t)_{0\leq t\leq T}$ un moviment Brownià $\mathbb{F}$-estàndard . Sigui $(\theta_t)_{0\leq t\leq T}$ un procés adaptat que satisfà $\int_0^T \theta_s^2 ds<\infty$ quasi-segurament i tal que el procés*

$$L_t = exp(-\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds)$$

és una martingala. Aleshores, el procés $(W_t)_{0\leq t\leq T}$ definit per $W_t = B_t + \int_0^t \theta_s ds$ és un moviment Brownià $\mathbb{F}$-estàndard sota la mesura de probabilitat $\mathbb{Q}$ amb densitat L_T respecte $\mathbb{P}$.

Considerem el model que hem introduït a l'inici d'aquesta secció. Volem veure que existeix una probabilitat $\mathbb{Q}$ equivalent a $\mathbb{P}$, tal que el preu descomptat $\tilde{S}_t = e^{-rT}S_t$ sota la mesura de probabilitat $\mathbb{Q}$ és una martingala. A partir de l'equació diferencial estocàstica de la Proposició 4.1, obtenim

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t &= -re^{-rt}S_t dt + e^{-rt}dS_t \\ &= \tilde{S}_t((\mu - r)dt + \sigma dB_t). \end{aligned}$$

Definim $W_t = B_t + (\mu - r)t/\sigma$ i obtenim,

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \sigma dW_t.$$

Pel Teorema de Girsanov, aplicat amb $\theta_t = (\mu - r)t/\sigma$, existeix una probabilitat $\mathbb{Q}$ equivalent a $\mathbb{P}$, i $(W_t)_t \in [0, T]$ és un moviment Brownià estàndard sota $\mathbb{Q}$. A més a més, sota la mesura de probabilitat $\mathbb{Q}$, $\tilde{S}_t$ és una martingala.

Podem reescriure l'equació diferencial estocàstica inicial utilitzant el nou moviment Brownià sota la probabilitat neutral al risc $\mathbb{Q}$ que hem obtingut. Aleshores, la nova equació diferencial estocàstica és,

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$$

i el seu preu inicial és S_0.

Aleshores, la solució d'aquesta equació està sota una mesura de probabilitat neutral al risc i és

$$S_t = S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t}.$$

4.4 Valoració d'opcions Europees

En aquesta secció ens centrem en les opcions Europees. Les opcions Europees són aquelles que només es poden exercir en un moment determinat, i les defineix una variable G, que habitualment podem definir com $f(S_T)$, on $f(x) = (x - K)^+$ quan es tracta d'un call i $f(x) = (K - x)^+$ quan es tracta d'un put. El call i el put europeus s'anomenen opció vanilla. G és una variable aleatòria, $\mathcal{F}_T$-mesurable i positiva.

Definim el valor de l'opció amb un argument de replicabilitat. Per a fer-ho, necessitem definir prèviament les estratègies admissibles.

Definició 4.12. *Una estratègia* $\phi = (H_t^0, H_t)_{0\leq t\leq T}$ *és admissible si és autofinançada i* $\tilde{V}_t(\phi) = H_t^0 + H_t\tilde{S}_t$ *és positiu per qualsevol valor de* t *i tal que* $\sup_{t\in[0,T]} \tilde{V}_t$ *és de quadrat integrable sota* $\mathbb{Q}$.

Definició 4.13. *Una opció és replicable si els seus beneficis en la data de venciment són iguals que el valor final d'una estratègia admissible.*

Aleshores, per a que l'opció definida per G sigui admissible, G haurà de ser de quadrat integrable sota la mesura de probabilitat $\mathbb{Q}$.

Teorema 4.14. *En el model de Black-Scholes, qualsevol opció definida per una variable aleatòria,* $\mathcal{F}_T$*-mesurable i positiva* G*, que és de quadrat integrable sota la probabilitat* $\mathbb{Q}$*, és replicable i el valor en el temps* t *de qualsevol cartera replicable es defineix com*

$$V_t = \mathbb{E}_Q\left[e^{-r(T-t)}G|\mathcal{F}_t\right].$$

Quan $G = f(S_T)$, podem expressar el valor de l'opció V_t com una funció respecte t i S_t. Aleshores,

$$\begin{aligned} V_t &= \mathbb{E}_Q\left[e^{-r(T-t)}f(S_T)|\mathcal{F}_t\right] \\ &= \mathbb{E}_Q\left[e^{-r(T-t)}f\left(S_te^{r(T-t)}e^{\sigma(W_T-W_t)-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}\right)|\mathcal{F}_t\right]. \end{aligned}$$

La variable aleatòria S_t és $\mathcal{F}_t$-mesurable i, sota la probabilitat $\mathbb{Q}$, $W_T - W_t$ és independent de $\mathcal{F}_t$. Aleshores definim

$$V_t = F(t, S_t),$$

on

$$F(t,x) = \mathbb{E}_Q\left[e^{-r(T-t)}f\left(xe^{r(T-t)}e^{\sigma(W_T-W_t)-(\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}\right)\right].$$

Tenint en compte que sota $\mathbb{Q}$, $W_T - W_t$ és una variable normal amb mitjana 0 i variança $T-t$,

$$F(t,x) = e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(xe^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}}\right)\frac{e^{\frac{-y^2}{2}}dy}{\sqrt{2\pi}}.$$

Podem calcular la funció F per calls i per puts. Si prenem el cas del call on $f(x) = (x-K)^+$, obtenim

$$\begin{aligned} F(t,x) &= \mathbb{E}_Q\left[e^{-r(T-t)}\left(xe^{r(T-t)}e^{\sigma(W_T-W_t)-(\frac{\sigma^2}{2})(T-t)} - K\right)^+\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(xe^{\sigma\sqrt{\theta}g-\frac{\sigma^2\theta}{2}} - Ke^{-r\theta}\right)^+\right], \end{aligned}$$

on g és una variable estàndard Gaussiana i $\theta = T - t$.

Definim

$$d_1 = \frac{log(x/K) + (r + \sigma^2/2)\theta}{\sigma\sqrt{\theta}}$$

i

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\theta}.$$

Utilitzant aquesta notació tenim,

$$\begin{aligned} F(t,x) &= \mathbb{E}\left[xe^{\sigma\sqrt{\theta}g - \frac{\sigma^2\theta}{2}} - Ke^{-r\theta}\right]\mathbb{1}_{\{g+d_2\geq 0\}} \\ &= \int_{-d_2}^{+\infty}\left(xe^{\sigma\sqrt{\theta}y - \frac{\sigma^2\theta}{2}} - Ke^{-r\theta}\right)\frac{e^{y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dy \\ &= \int_{-\infty}^{d_2}\left(xe^{\sigma\sqrt{\theta}y - \frac{\sigma^2\theta}{2}} - Ke^{-r\theta}\right)\frac{e^{y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dy. \end{aligned}$$

Si escribim l'expressió anterior com la diferència de les dues integrals i en la primera utilitzem el canvi de variable $z = y + \sigma\sqrt{\theta}$, obtenim

$$F(t,x) = xN(d_1) - Ke^{-r\theta}N(d_2),$$

on

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d} e^{-x^2/2}dx.$$

Si realitzem un procés similar utilitzant les mateixes notacions, podem obtenir el valor del preu del put

$$F(t,x) = Ke^{-r\theta}N(-d_2) - xN(-d_1).$$

Els preus d'un call i un put europeus sobre la mateixa situació estan lligats per la paritat call-put:

Proposició 4.15. *Considerem un procés de preus S_t en un mercat viable. Sigui C el preu d'un call europeu sobre S_t amb preu d'exercici K i data de venciment T. Sigui P el preu d'un put europeu sobre S_t amb el mateix preu d'exercici K i la mateixa data de venciment T. Sigui r el tipus d'interès que suposem fix. Aleshores,*

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}.$$

Demostració. Observem que

$$S_T - K = (S_T - K)^+ - (K - S_T)^+.$$

Descomptant les quantitats, és a dir, dividint per e^{rT}, tenim

$$e^{-rT}S_T - e^{-rT}K = e^{-rT}(S_T - K)^+ - e^{-rT}(K - S_T)^+$$

i prenent esperances condicionades a $\mathcal{F}_t$ respecte una probabilitat neutral al risc tenim

$$\mathbb{E}_Q(\tilde{S}_T|\mathcal{F}_t) - e^{-rT}K = \tilde{C}_t - \tilde{P}_t.$$

Com que $\tilde{S}$ és una martingala respecte $\mathbb{Q}$ tenim

$$\tilde{S}_t - e^{-rT}K = \tilde{C}_t - \tilde{P}_t.$$

Finalment, multipliquem per e^{rt} i obtenim

$$S_t - e^{-r(T-t)}K = C_t - P_t.$$

□

4.5 Gregues per opcions Europees en el model de Black-Scholes

Les Gregues més utilitzades són delta, gamma, vega, theta i rho. Cadascuna d'elles mesura un risc associat als paràmetres dels models financers. Una Grega és la derivada de la funció de beneficis d'una opció respecte els paràmetres associats al problema.

4.5.1 Delta

La Grega Delta d'una opció és la taxa de canvi del preu de l'opció respecte el preu de l'actiu subjacent.

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S},$$

on V és el preu de l'opció i S és el preu de l'actiu.

En el cas d'un call o un put europeu en el model de Black-Scholes, prenem les fórmules dels preus de l'apartat anterior, i obtenim

$$\Delta(call) = N(d_1)$$
$$\Delta(put) = N(d_1) - 1$$

on N és la funció de distribució de la distribució normal estàndard i d_1 està definit com hem vist en l'apartat anterior. En el cas del call el valor de delta pertany a l'interval $[0, 1]$. En el cas del put pertany a l'interval $[-1, 0]$.

4.5.2 Gamma

La Grega Gamma és una grega de segon ordre. Representa la taxa de canvi de la delta de l'opció respecte el preu de l'actiu subjacent. És la segona derivada del preu de l'opció respecte el preu de l'actiu:

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}.$$

Si la gamma és un valor petit, ens indica que la delta canvia lentament. En canvi, si el valor absolut de gamma és gran, delta és molt sensible al preu de l'actiu subjacent.

En el cas d'un call o un put europeu en el model de Black-Scholes, el valor de gamma es defineix igual en el cas d'un call i en el cas d'un put, i és:

$$\Gamma(call) = \Gamma(put) = \frac{N'(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}},$$

on recordem que

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

és la funció de densitat de la distribució normal estàndard.

4.5.3 Vega

La Grega Vega d'una opció és la derivada del preu de l'opció respecte la volatilitat. Representa la taxa de canvis del valor de l'opció respecte la volatilitat de l'actiu subjacent. Si el valor absolut de vega és molt gran, ens indica que el valor de l'opció és molt sensible a petits canvis en la volatilitat. En canvi, si el seu valor és proper a zero, els canvis en la volatilitat no tenen gaire impacte en el valor de l'opció.

$$\vartheta = \frac{\partial V}{\partial \sigma}.$$

En el cas d'un call o un put europeu en el model de Black-Scholes, el valor de vega és el mateix pel cas del call i del put, i és:

$$\vartheta(call) = \vartheta(put) = S_0 \sqrt{T} N'(d_1).$$

4.5.4 Rho

La Grega Rho d'una opció és la taxa de canvi del valor de l'opció respecte el tipus d'interès:

$$\rho = \frac{\partial V}{\partial r}.$$

Rho mesura la sensitivitat del valor de l'opció als canvis del tipus d'interès.

En el cas d'un call o un put europeu en el model de Black-Scholes, el valor de rho es defineix com

$$\rho(call) = KTe^{-rT} N(d_2),$$
$$\rho(put) = -KTe^{-rT} N(-d_2).$$

4.5.5 Theta

La Grega Theta d'una opció és la taxa de canvi del valor de l'opció respecte el pas del temps.

$$\theta = \frac{\partial V}{\partial t}.$$

En el cas d'un call o un put europeu en el model de Black-Scholes, el valor de theta es defineix com

$$\theta(call) = -\frac{S_0 N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}N(d_2),$$
$$\theta(put) = -\frac{S_0 N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT}N(-d_2).$$

Observem que el valor de theta sempre és positiu.

4.6 Valoració de l'opció digital

En aquest apartat, veurem l'expressió del valor del call de l'opció digital del model de Black-Scholes. La funció de beneficis d'aquesta opció binària consisteix en

$$\Phi(S_T) = \mathbb{1}_{\{x>K\}} = \begin{cases} 0 & si \quad S_T \leq K \\ \\ 1 & si \quad S_T > K. \end{cases}$$

És a dir, si el preu d'exercici en la data de venciment és més gran o igual que el preu de l'actiu en aquest moment, aleshores el benefici és una unitat d'efectiu. Si no ho és, el benefici serà zero.

Partim de la funció

$$F(t,x) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(xe^{r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}}\right) \frac{e^{\frac{-y^2}{2}}dy}{\sqrt{2\pi}}.$$

Aquesta funció l'hem obtingut en l'apartat 4.4, on l'hem utilitzat per calcular el valor del call i el put de l'opció Europea. Ara l'utilitzem per calcular el valor de l'opció digital per calls, és a dir, calculem la funció F prenent $f(x) = \mathbb{1}_{\{x>K\}}$,

$$\begin{aligned} F(t,x) &= e^{-r\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(xe^{((r-\frac{\sigma^2}{2})\theta-\sigma\sqrt{\theta}y)}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= e^{-r\theta} \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= e^{-r\theta} N(d_2). \end{aligned}$$

Per tant, el valor del call de l'opció digital pel model de Black-Scholes serà

$$F(0, S_0) = e^{-rT}N(d_2).$$

4.7 Gregues per l'opció digital en el model de Black-Scholes

Ara calculem l'expressió de les Gregues Delta i Gamma sota aquesta opció.

4.7.1 Delta

Per calcular la delta, ens cal calcular la derivada del preu de l'opció respecte el preu de l'actiu.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = e^{-r\theta} N'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial x} = \frac{e^{-r\theta}}{x\sigma\sqrt{\theta}} N'(d_2).$$

Per tant,

$$\Delta = \frac{\partial F}{\partial x}(0, S_0) = \frac{e^{-rT}}{S_0 \sigma \sqrt{T}} N'(d_2).$$

4.7.2 Gamma

Per calcular la gamma, ens cal calcular la segona derivada del preu de l'opció respecte el preu de l'actiu.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x) &= -\frac{e^{-r\theta}}{x^2\sigma\sqrt{\theta}} N'(d_2) + \frac{e^{-r\theta}}{x\sigma\sqrt{\theta}} N''(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial x} \\
&= -\frac{e^{-r\theta}}{x^2\sigma\sqrt{\theta}} N'(d_2) - \frac{e^{-r\theta}}{x^2\sigma^2\theta} d_2 N'(d_2) \\
&= -\frac{e^{-r\theta}}{x^2\sigma\sqrt{\theta}} \left(1 + \frac{d_2}{\sigma\sqrt{\theta}}\right) N'(d_2) \\
&= -\frac{e^{-r\theta}}{x^2\sigma^2\theta} d_1 N'(d_2).
\end{aligned}$$

Hem utilitzat les igualtats $N''(x) = -xN'(x)$ i $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\theta}$.

Aleshores,

$$\Gamma = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, S_0) = -\frac{e^{-rT}}{S_0^2 \sigma^2 T} d_1 N'(d_2).$$

La resta de Gregues per l'opció digital es calculen anàlogament.

5 Càlcul de les gregues del model de Black-Scholes utilitzant càlcul de Malliavin

En aquest apartat, obtenim la fórmula de les Gregues pel model de Black-Scholes utilitzant el càlcul de Malliavin. Ens basem en el mètode utilitzat per Nualart en [6].

En el Teorema 4.14, suposem que $t = 0$. Aleshores, el preu de l'opció en el moment $t = 0$ esdevé

$$V_0 = \mathbb{E}_Q[e^{-rT}G].$$

Volem calcular la derivada de l'esperança anterior respecte un paràmetre α, que és un dels paràmetres de la funció de beneficis,

$$G = \Phi(S_T) = \Phi(S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma W_T}),$$

és a dir, S_0, r, σ o T. La derivada de G respecte α és de la forma:

$$\frac{\partial V_0}{\partial \alpha} = \mathbb{E}_Q\left[e^{-rT}\Phi'(S_T)\frac{\partial S_T}{\partial \alpha}\right].$$

Utilitzant la fórmula d'integració per parts que hem vist a la proposició 3.24 obtenim,

$$\frac{\partial V_0}{\partial \alpha} = \mathbb{E}_Q\left[e^{-rT}\Phi(S_T)H\left(S_T, \frac{\partial S_T}{\partial \alpha}\right)\right]$$

on

$$H\left(S_T, \frac{\partial S_T}{\partial \alpha}\right) = \delta\left(\frac{\partial S_T}{\partial \alpha}u(D^uF)^{-1}\right)$$

i prenent $u = 1$,

$$D^uF = \langle DF, u\rangle_H = \int_T D_t S_T dt = \int_0^T \sigma S_T dt = \sigma T S_T.$$

A continuació, utilitzem els resultats anteriors per calcular cadascuna de les Gregues.

5.0.1 Delta

Delta(Δ) és la Grega més important. Es tracta de la derivada de l'opció respecte el preu inicial de l'actiu S_0. Suposem que Φ és una funció derivable. Aleshores,

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \frac{\partial V_0}{\partial S_0} \\
&= \mathbb{E}_Q\left[e^{-rT}\Phi'(S_T)\frac{\partial S_T}{\partial S_0}\right] \\
&= \mathbb{E}_Q\left[e^{-rT}\Phi'(S_T)\frac{S_T}{S_0}\right] \\
&= \frac{e^{-rT}}{S_0}\mathbb{E}_Q[\Phi'(S_T)S_T].
\end{aligned}
$$

A continuació, apliquem la proposició 3.24, prenent $F = S_T$, $G = S_T$ i $u = 1$. Aleshores tenim

$$
\mathbb{E}_Q[\Phi'(S_T)S_T] = \mathbb{E}_Q[\Phi(S_T)H(S_T, S_T)],
$$

on

$$
\begin{aligned}
H(S_T, S_T) &= \delta(S_T 1(D^1 S_T)^{-1}) = \delta(S_T(\sigma T S_T)^{-1}) \\
&= \delta\left(\frac{S_T}{\sigma T S_T}\right) = \delta\left(\frac{1}{\sigma T}\right) \\
&= \frac{1}{\sigma T}\int_0^T dW_t = \frac{W_T}{\sigma T}.
\end{aligned}
$$

Per tant,

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \frac{e^{-rT}}{S_0}\mathbb{E}_Q\left[\Phi(S_T)\frac{W_T}{\sigma T}\right] \\
&= \frac{e^{-rT}}{S_0\sigma T}\mathbb{E}_Q[\Phi(S_T)W_T].
\end{aligned}
$$

5.0.2 Gamma

Gamma(Γ) és la segona derivada del valor de l'opció respecte S_0, i s'utilitza per mesurar els canvis en el valor de Delta respecte les variacions de S_0.

$$
\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{\partial^2 V_0}{\partial S_0^2} \\
&= \mathbb{E}_Q\left[e^{-rT}\Phi''(S_T)\left(\frac{\partial S_T}{\partial S_0}\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}_Q\left[e^{-rT}\Phi''(S_T)\frac{S_T^2}{S_0^2}\right] \\
&= \frac{e^{-rT}}{S_0^2}\mathbb{E}_Q[\Phi''(S_T)S_T^2].
\end{aligned}
$$

Suposem que Φ' és una funció derivable, i apliquem la proposició 3.24 prenent $F = S_T$, $G = S_T^2$ i u=1. Aleshores,

$$\mathbb{E}_Q[\Phi''(S_T)S_T^2] = \mathbb{E}_Q[\Phi'(S_T)H(S_T, S_T^2)],$$

on

$$\begin{aligned}
H(S_T, S_T^2) &= \delta(S_T^2 1(D^1 S_T)^{-1}) = \delta(S_T^2(\sigma T S_T)^{-1}) \\
&= \delta\left(\frac{S_T^2}{\sigma T S_T}\right) = \delta\left(\frac{S_T}{\sigma T}\right) \\
&= \frac{1}{\sigma T}\left(S_T \int_0^T dW_t - \int_0^T D_t S_T dt\right) \\
&= \frac{1}{\sigma T}(S_T W_T - \sigma T S_T) \\
&= \frac{S_T W_T}{\sigma T} - S_T.
\end{aligned}$$

Per tant,

$$\Gamma = \frac{e^{-rT}}{S_0^2}\mathbb{E}_Q\left[\Phi'(S_T)S_T\left(\frac{W_T}{\sigma T} - 1\right)\right].$$

A continuació apliquem un altre cop la proposició 3.24, aquest cop prenent Φ com a funció, $F = S_T$, $G = S_T\left(\frac{W_T}{\sigma T} - 1\right)$ i $u = 1$.

$$\mathbb{E}_Q\left[\Phi'(S_T)S_T\left(\frac{W_T}{\sigma T} - 1\right)\right] = \mathbb{E}_Q\left[\Phi(S_T)H\left(S_T, S_T\left(\frac{W_T}{\sigma T} - 1\right)\right)\right],$$

on

$$\begin{aligned}
H\left(S_T, S_T\left(\frac{W_T}{\sigma T} - 1\right)\right) &= \delta\left(S_T\left(\frac{W_T}{\sigma T} - 1\right)(D^1 S_T)^{-1}\right) \\
&= \delta\left(S_T\left(\frac{W_T}{\sigma T} - 1\right)(\sigma T S_T)^{-1}\right) \\
&= \delta\left(S_T\left(\frac{W_T}{\sigma T} - 1\right)\frac{1}{\sigma T S_T}\right) \\
&= \delta\left(\left(\frac{W_T}{\sigma T} - 1\right)\frac{1}{\sigma T}\right) \\
&= \delta\left(\frac{W_T}{\sigma^2 T^2} - \frac{1}{\sigma T}\right) \\
&= \frac{1}{\sigma^2 T^2}\left(W_T \int_0^T dW_t - \int_0^T D_t W_T dt\right) - \frac{1}{\sigma T}\int_0^T dW_T \\
&= \frac{1}{\sigma^2 T^2}(W_T^2 - T) - \frac{W_T}{\sigma T} \\
&= \frac{W_T^2}{\sigma^2 T^2} - \frac{1}{\sigma^2 T} - \frac{W_T}{\sigma T}.
\end{aligned}$$

Substituïnt en la fórmula d'integració per parts obtenim

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{e^{-rT}}{S_0^2}\mathbb{E}_Q\left[\Phi(S_T)\left(\frac{W_T^2}{\sigma^2T^2}-\frac{1}{\sigma^2T}-\frac{W_T}{\sigma T}\right)\right] \\
&= \frac{e^{-rT}}{S_0^2\sigma T}\mathbb{E}_Q\left[\Phi(S_T)\left(\frac{W_T^2}{\sigma T}-\frac{1}{\sigma}-W_T\right)\right].
\end{aligned}$$

5.0.3 Vega

Vega(ϑ) és la Grega que representa els canvis en el valor de l'opció financera en funció de les variacions de la volatilitat. És la derivada de l'opció respecte σ.

$$\begin{aligned}
\vartheta &= \frac{\partial V_0}{\partial \sigma} \\
&= \mathbb{E}_Q\left[e^{-rT}\Phi'(S_T)\left(\frac{\partial S_T}{\partial \sigma}\right)\right] \\
&= e^{-rT}\mathbb{E}_Q[\Phi(S_T)S_T(W_T-\sigma T)].
\end{aligned}$$

Apliquem la proposició 3.24 amb $F = S_T$, $G = S_T(W_T - \sigma T)$ i $u = 1$. Aleshores obtenim

$$\mathbb{E}_Q[\Phi(S_T)S_T(W_T-\sigma T)] = \mathbb{E}_Q[\Phi(S_T)H(S_T, S_T(W_T-\sigma T))],$$

on

$$\begin{aligned}
H(S_T, S_T(W_T-\sigma T)) &= \delta(S_T(W_T-\sigma T)(\sigma T S_T)^{-1}) \\
&= \delta\left(S_T(W_T-\sigma T)\left(\frac{1}{\sigma T S_T}\right)\right) \\
&= \delta\left(\frac{W_T}{\sigma T}-1\right) \\
&= \frac{1}{\sigma T}\left(W_T\int_0^T dW_t - \int_0^T D_tW_T dt\right) - \int_0^T dW_t \\
&= \frac{W_T^2}{\sigma T}-\frac{1}{\sigma}-W_T.
\end{aligned}$$

Finalment, substituïm en la fórmula d'integració per parts i obtenim

$$\vartheta = e^{-rT}\mathbb{E}_Q\left[\Phi(S_T)\left(\frac{W_T^2}{\sigma T}-\frac{1}{\sigma}-W_T\right)\right].$$

5.0.4 Rho

Rho(ρ) és la derivada del valor de l'opció respecte la taxa d'interès r.

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{\partial V_0}{\partial r} \\
&= \mathbb{E}_Q\left[-Te^{-rT}\Phi(S_T) + e^{-rT}\Phi'(S_T)\frac{\partial S_T}{\partial r}\right] \\
&= -Te^{-rT}\mathbb{E}_Q[S_T] + e^{-rT}\mathbb{E}_Q[\Phi'(S_T)TS_T].
\end{aligned}$$

Apliquem la proposició 3.24 per obtenir la segona part de la fórmula, prenent $F = S_T$, $G = TS_T$ i $u = 1$. Aleshores,

$$\mathbb{E}_Q[\Phi'(S_T)TS_T] = \mathbb{E}_Q[\Phi(S_T)H(S_T, TS_T)],$$

on

$$\begin{aligned}
H(S_T, TS_T) &= \delta(TS_T(D^1S_T)^{-1}) = \delta(TS_T(\sigma TS_T)^{-1}) \\
&= \delta\left(TS_T\frac{1}{\sigma TS_T}\right) = \delta\left(\frac{1}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}\int_0^T dW_t = \frac{W_T}{\sigma}.
\end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned}
\rho &= -Te^{-rT}\mathbb{E}_Q[\Phi(S_T)] + e^{-rT}\mathbb{E}_Q\left[\Phi(S_T)\frac{W_T}{\sigma}\right] \\
&= e^{-rT}\mathbb{E}_Q\left[\Phi(S_T)\left(\frac{W_T}{\sigma} - T\right)\right].
\end{aligned}$$

5.0.5 Theta

La Grega Theta(θ) és la derivada parcial del valor de l'opció respecte el temps. Mesura els canvis del valor de l'opció respecte els canvis en la data de venciment d'aquesta.

$$\begin{aligned}
\theta &= -\frac{\partial V}{\partial T} \\
&= -\mathbb{E}_Q\left[-re^{-rT}\Phi(S_T) + e^{-rT}\Phi'(S_T)\frac{\partial S_T}{\partial T}\right] \\
&= re^{-rT}\mathbb{E}_Q[\Phi(S_T)] - e^{-rT}\mathbb{E}_Q\left[\Phi'(S_T)S_T\left(r - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma W_T}{2T}\right)\right].
\end{aligned}$$

Aplicant la proposició 3.24 a la segona part de la fórmula prenent $F = S_T$, $G = S_T(r - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma W_T}{2T})$ i $u = 1$, obtenim

$$\mathbb{E}_Q\left[\Phi'(S_T)S_T\left(r-\frac{\sigma^2}{2}+\frac{\sigma W_T}{2T}\right)\right]=\mathbb{E}_Q\left[\Phi(S_T)H\left(S_T,S_T\left(r-\frac{\sigma^2}{2}+\frac{\sigma W_T}{2T}\right)\right)\right],$$

on

$$\begin{aligned}
H\left(S_T,S_T\left(r-\frac{\sigma^2}{2}+\frac{\sigma W_T}{2T}\right)\right) &= \delta\left(S_T\left(r-\frac{\sigma^2}{2}+\frac{\sigma W_T}{2T}\right)(D^1S_T)^{-1}\right)\\
&= \delta\left(S_T\left(r-\frac{\sigma^2}{2}+\frac{\sigma W_T}{2T}\right)(\sigma TS_T)^{-1}\right)\\
&= \delta\left(S_T\left(r-\frac{\sigma^2}{2}+\frac{\sigma W_T}{2T}\right)\frac{1}{\sigma TS_T}\right)\\
&= \delta\left(\frac{1}{\sigma T}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}+\frac{\sigma W_T}{2T}\right)\right)\\
&= \delta\left(\frac{r}{\sigma T}-\frac{\sigma}{2T}+\frac{W_T}{2T^2}\right)\\
&= \frac{r}{\sigma T}\int_0^T dW_t-\frac{\sigma}{2T}\int_0^T dW_t+\frac{1}{2T^2}\left(W_T\int_0^T dW_t-\int_0^T D_tW_Tdt\right)\\
&= \frac{rW_T}{\sigma T}-\frac{\sigma W_T}{2T}+\frac{1}{2T^2}(W_T^2-T)\\
&= \frac{rW_T}{\sigma T}-\frac{\sigma W_T}{2T}+\frac{W_T^2}{2T^2}-\frac{1}{2T}\\
&= \frac{1}{2T}\left(W_T\left(\frac{2r}{\sigma}-\sigma+\frac{W_T}{T}\right)-1\right).
\end{aligned}$$

Aleshores, Theta serà

$$\begin{aligned}
\theta &= re^{-rT}\mathbb{E}_Q[\Phi(S_T)]-e^{-rT}\mathbb{E}_Q\left[\Phi(S_T)\frac{1}{2T}\left(W_T\left(\frac{2r}{\sigma}-\sigma+\frac{W_T}{T}\right)-1\right)\right]\\
&= e^{-rT}\mathbb{E}_Q\left[\Phi(S_T)\left(r-\frac{1}{2T}\left(W_T\left(\frac{2r}{\sigma}-\sigma+\frac{W_T}{T}\right)-1\right)\right)\right].
\end{aligned}$$

5.1 Càlcul de les Gregues per opcions vanilla

Considerem el call d'una opció Europea on els beneficis depenen del preu de l'actiu subjacent en la data de venciment, és a dir, $\Phi(S_T)=(S_T-K)^+$. Veurem que si introduïm la funció de beneficis en les fórmules obtingudes utilitzant càlcul de Malliavin, podem obtenir les fórmules analítiques de les Gregues que hem vist en l'apartat 4.5.

Cal puntualitzar que tot i que en la fórmula d'integració per parts s'especifica que cal que la funció de beneficis sigui derivable, en tindrem prou amb utilitzar funcions que es puguin aproximar per funcions derivables, com per exemple les funcions Lipschitz. En aquest cas, la funció Φ no és derivable en el punt $x=K$, però com que es pot aproximar per funcions derivables, podem aplicar-la en les fórmules calculades anteriorment.

5.1.1 Delta

Volem arribar a veure que

$$\Delta = N(d_1).$$

Per a que els càlculs siguin més simples, substituïm W_T per $-W_T$. Aleshores,

$$\Delta = \frac{e^{-rT}}{S_0 \sigma T} \mathbb{E}_Q[\Phi(S_T)(-W_T)].$$

Per començar, observem que quan

$$S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t - \sigma W_t} \leq e^{-rT} K,$$

tenim

$$e^{-rT} \Phi(S_T) = 0$$

i per tant tenim

$$W_T \geq \frac{log \frac{S_0}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma},$$

denotem la segona part de l'equació anterior com d_2^*.

Aleshores,

$$\begin{aligned} e^{-rT} \mathbb{E}_Q[\Phi(S_T) W_T] &= \mathbb{E}_Q \left[\left(S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T - \sigma W_t} - e^{-rT} K \right)^+ W_T \right] \\ &= \int_{-\infty}^{d_2^*} \left[S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T - \sigma y} - e^{-rT} K \right] \frac{y}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{y^2}{2T}} dy \\ &= S_0 \int_{-\infty}^{d_2^*} \frac{y}{\sqrt{2\pi T}} e^{-(\frac{y^2}{2T} + \sigma y + \frac{\sigma^2 T}{2})} dy - e^{-rT} K \int_{-\infty}^{d_2^*} \frac{y}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{y^2}{2T}} dy. \end{aligned}$$

Calculant les integrals, obtenim

$$\Delta = N(d_1) + \frac{1}{S_0 \sigma \sqrt{T}} [S_0 N'(d_1) - e^{-rT} K N'(d_2)] = N(d_1).$$

En la darrera igualtat, hem pogut ometre el segon terme perque és zero ja que

$$K e^{-r(T-t)} N'(d_2) = x N'(d_1).$$

Veiem que si tenim en compte que $d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{(T-t)}$, aleshores

$$
\begin{aligned}
Ke^{-r(T-t)}N'(d_2) &= Ke^{-r(T-t)}N'(d_1-\sigma\sqrt{T-t}) \\
&= Ke^{-r(T-t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_1^2-2d_1\sigma\sqrt{T-t}+\sigma^2(T-t)}{2}} \\
&= KN'(d_1)e^{-r(T-t)+log\frac{x}{K}+(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)} \\
&= xN'(d_1).
\end{aligned}
$$

5.1.2 Gamma

Volem arribar a veure que

$$
\Gamma = \frac{N'(d_1)}{S_0\sigma\sqrt{T}}.
$$

Utilitzant el que hem vist en el cas de la Delta, tenim

$$
\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{e^{-rT}}{S_0^2\sigma T}\mathbb{E}_Q\left[\Phi(S_T)\left(\frac{W_T^2}{\sigma T}-\frac{1}{\sigma}+W_T\right)\right] \\
&= \frac{e^{-rT}}{S_0^2\sigma^2T^2}\int_{-\infty}^{d_2^*}\left[S_0e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T-\sigma y}-e^{-rT}K\right]\frac{y^2}{\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{y^2}{2T}}dy \\
&\quad -\frac{e^{-rT}}{S_0^2\sigma^2T}\int_{-\infty}^{d_2^*}\left[S_0e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T-\sigma y}-e^{-rT}K\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{y^2}{2T}}dy \\
&\quad +\frac{e^{-rT}}{S_0^2\sigma T}\int_{-\infty}^{d_2^*}\left[S_0e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T-\sigma y}-e^{-rT}K\right]\frac{y}{\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{y^2}{2T}}dy.
\end{aligned}
$$

Calculant les integrals i sumant els resultats, obtenim

$$
\Gamma = \frac{1}{S_0\sigma^2T}N''(d_1)+\frac{2}{S_0\sigma\sqrt{T}}N'(d_1)-\frac{Ke^{-rT}}{S_0^2\sigma^2T}N''(d_2) = \frac{1}{S_0\sigma\sqrt{T}}N'(d_1).
$$

5.1.3 Vega

Volem arribar a veure que

$$
\vartheta = S_0\sqrt{T}N'(d_1).
$$

Podem observar que

$$
\vartheta = S_0^2\sigma T\Gamma,
$$

Aleshores,

$$\vartheta = e^{-rT}\mathbb{E}_Q\left[\Phi(S_T)\left(\frac{W_T^2}{\sigma T} - \frac{1}{\sigma} + W_T\right)\right] = \sqrt{T}S_0N'(d_1).$$

5.1.4 Rho

Volem arribar a veure que

$$\rho = KTe^{-rT}N(d_2).$$

Utilitzant el que hem vist en el cas de la Delta, tenim

$$\begin{aligned}
\rho &= e^{-rT}\mathbb{E}_Q\left[\Phi(S_T)\left(\frac{W_T}{\sigma} - T\right)\right] \\
&= \frac{e^{-rT}}{\sigma}\int_{-\infty}^{d_2^*}\left[S_0e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T-\sigma y} - e^{-rT}K\right]\frac{y}{\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{y^2}{2T}}dy \\
&\quad -e^{-rT}T\int_{-\infty}^{d_2^*}\left[S_0e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T-\sigma y} - e^{-rT}K\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{y^2}{2T}}dy.
\end{aligned}$$

Calculant les integrals i sumant els resultats, obtenim

$$\rho = KTe^{-rT}N(d_2).$$

5.1.5 Theta

Volem arribar a veure que

$$\theta = -\frac{S_0N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}N(d_2).$$

Podem observar que

$$\theta = -\frac{S_0^2\sigma^2}{2}\Gamma - \frac{r}{T}\rho.$$

Aleshores,

$$\begin{aligned}
\theta &= e^{-rT}\mathbb{E}_Q\left[\Phi(S_T)\left(r - \frac{rW_T}{T\sigma} + \frac{\sigma W_T}{2T} - \frac{W_T^2}{2T^2} + \frac{1}{2T}\right)\right] \\
&= -\frac{re^{-rT}}{T}\mathbb{E}_Q\left[\Phi(S_T)\left(\frac{W_T}{\sigma} - T\right)\right] - \frac{\sigma e^{-rT}}{2T}\mathbb{E}_Q\left[\Phi(S_T)\left(\frac{W_T^2}{\sigma T} - \frac{1}{\sigma} + W_T\right)\right] \\
&= -\frac{S_0N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}N(d_2).
\end{aligned}$$

5.2 Càlcul de les Gregues per l'opció digital

Ara considerem el call d'una opció digital on els beneficis depenen del preu de l'actiu subjacent en la data de venciment i $\Phi(S_T) = \mathbb{1}_{\{x>K\}}$. Igual que en el subapartat anterior, veurem que si introduïm la funció de beneficis en les fórmules obtingudes utilitzant càlcul de Malliavin, podem obtenir les fórmules analítiques de les Gregues que hem vist en l'apartat 4.7.

En aquest cas, la funció Φ és una funció discontínua, però veurem que el mètode desenvolupat és igualment vàlid per aquest tipus de funcions. La funció de beneficis no és derivable en el punt $x = K$, ja que no és contínua en aquest punt, però com que es pot aproximar per funcions derivables, podem aplicar-la en les fórmules calculades anteriorment.

5.2.1 Delta

Volem arribar a veure que

$$\Delta = \frac{e^{-rT}}{S_0\sigma\sqrt{T}} N'(d_2).$$

Seguim els mateixos passos que hem dut a terme en el cas de l'opció Europea, però utilitzant la funció de beneficis corresponent.

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{e^{-rT}}{S_0\sigma T}\mathbb{E}_Q[\Phi(S_T)W_T] \\
&= \frac{e^{-rT}}{S_0\sigma T}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{S_T>K}(y)\frac{y}{\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy \\
&= \frac{e^{-rT}}{S_0\sigma T}\int_{-\infty}^{d_2^*} \frac{y}{\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{y^2}{2T}}\,dy \\
&= \frac{e^{-rT}}{S_0\sigma\sqrt{T}}N'(d_2).
\end{aligned}$$

5.2.2 Gamma

Volem arribar a veure que

$$\Gamma = -\frac{e^{-rT}}{S_0^2\sigma^2 T} d_1 N'(d_2).$$

Per arribar-hi, duem a terme els mateixos passos que en el cas de la Delta.

$$
\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{e^{-rT}}{S_0^2\sigma T}\mathbb{E}_Q\left[\Phi(S_T)\left(\frac{W_T^2}{\sigma T}-\frac{1}{\sigma}+W_T\right)\right] \\
&= \frac{e^{-rT}}{S_0^2\sigma^2T^2}\int_{-\infty}^{d_2^*}\frac{y^2}{\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{y^2}{2T}}dy-\frac{e^{-rT}}{S_0^2\sigma^2T}\int_{-\infty}^{d_2^*}\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{y^2}{2T}}dy+\frac{e^{-rT}}{S_0^2\sigma T}\int_{-\infty}^{d_2^*}\frac{y}{\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{y^2}{2T}}dy \\
&= \frac{e^{-rT}}{S_0^2\sigma\sqrt{T}}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}N''(d_2)-N'(d_2)\right) \\
&= -\frac{e^{-rT}}{S_0^2\sigma^2T}d_1N'(d_2).
\end{aligned}
$$

El procediment és anàleg per la resta de Gregues per l'opció digital.

6 Simulació numèrica

Després de calcular les fórmules de les Gregues per opcions vanilla i digitals del tipus $\Phi(S_T)$ pel model de Black-Scholes utilitzant el càlcul de Malliavin, procedim a realitzar simulacions numèriques d'aquests valors i comparar-los gràficament amb els valors de les gregues obtinguts utilitzant les fórmules establertes mitjançant el mètode analític. Per simular els valors del model utilitzem el mètode de Monte Carlo (veure [9]). Podem veure els codis a l'annex, els hem realitzat utilitzant MATLAB.

En la taula següent, podem veure els resultats del preu de l'opció europea i de les diferents Gregues, tant utilitzant el mètode de Monte Carlo i les fórmules obtingudes mitjançant el càlcul de Malliavin, com utilitzant les fórmules analítiques.

	Fórmula Call BS	Simulació MC Call	Fórmula Put BS	Simulació MC Put
Preu	8.5917	8.6359	3.7146	3.7259
Delta	0.6585	0.6599	-0.3415	-0.3453
Gamma	0.0245	0.0236	0.0245	0.0252
Vega	36.7032	35.3491	36.7032	37.7890
Rho	57.2569	57.3591	-37.8660	-38.2561
Theta	-5.6156	-5.5191	-0.8594	-0.9214

Taula 1: Valors de l'opció Europea i les seves gregues, utilitzant els paràmetres $S_0 = 100$, $K = 100$, $r = 0,1$, $T = 1$ i $\sigma = 0,15$.

A continuació veiem la representació gràfica dels valors obtinguts en cada iteració del mètode de Monte Carlo, així com el resultat amb un interval de confiança del 99% i el valor obtingut amb la fórmula. Podem veure una representació gràfica per cadascuna de les Gregues, i pel preu de l'opció, tant en el cas d'un call com en el cas d'un put.

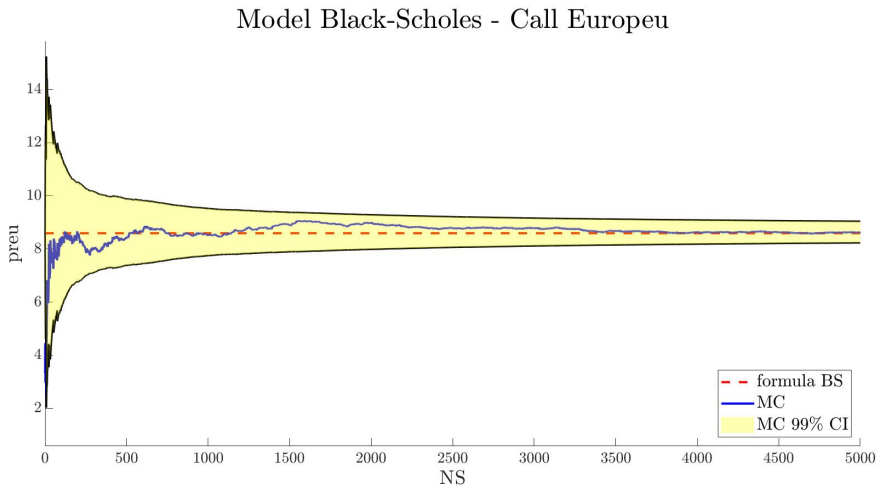

Figura 1: Valor del call de l'opció Europea, utilitzant els paràmetres $S_0 = 100$, $K = 100$, $r = 0,1$, $T = 1$ i $\sigma = 0,15$.

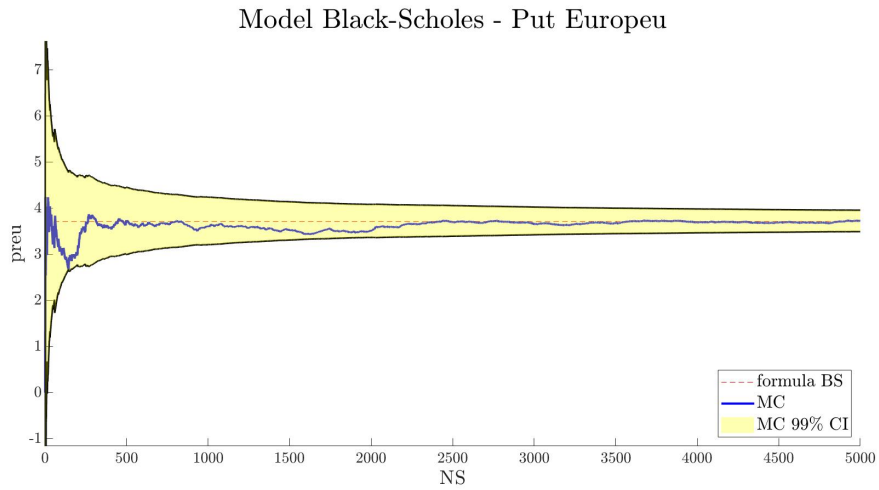

Figura 2: Valor del put de l'opció Europea, utilitzant els paràmetres $S_0 = 100$, $K = 100$, $r = 0,1$, $T = 1$ i $\sigma = 0,15$.

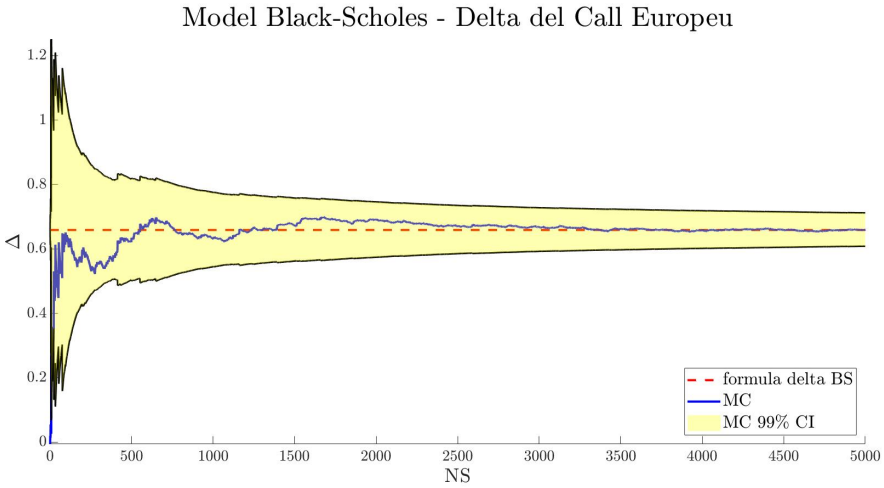

Figura 3: Call Delta per opció Europea, utilitzant els paràmetres $S_0 = 100$, $K = 100$, $r = 0,1$, $T = 1$ i $\sigma = 0,15$.

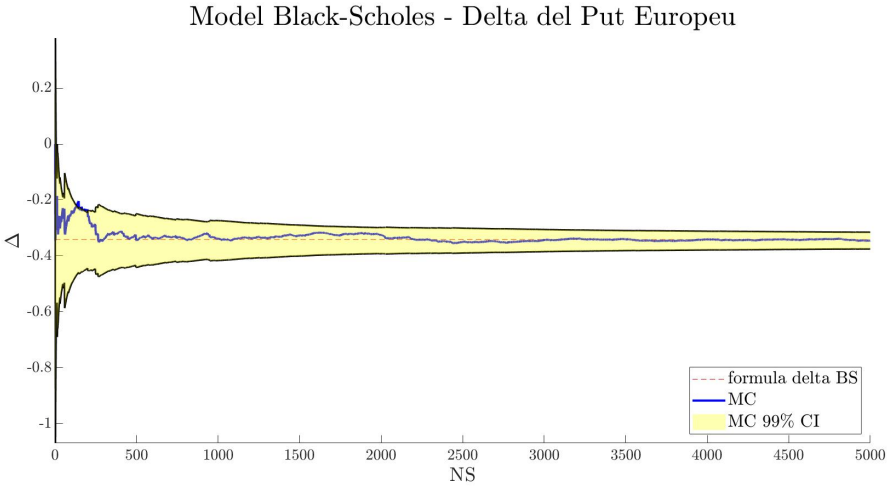

Figura 4: Put Delta per opció Europea, utilitzant els paràmetres $S_0 = 100$, $K = 100$, $r = 0,1$, $T = 1$ i $\sigma = 0,15$.

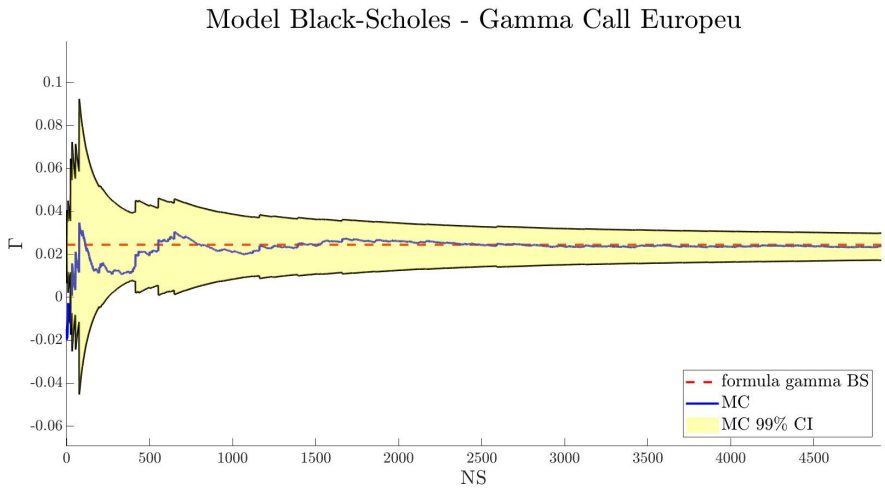

Figura 5: Call Gamma per opció Europea, utilitzant els paràmetres $S_0 = 100$, $K = 100$, $r = 0,1$, $T = 1$ i $\sigma = 0,15$.

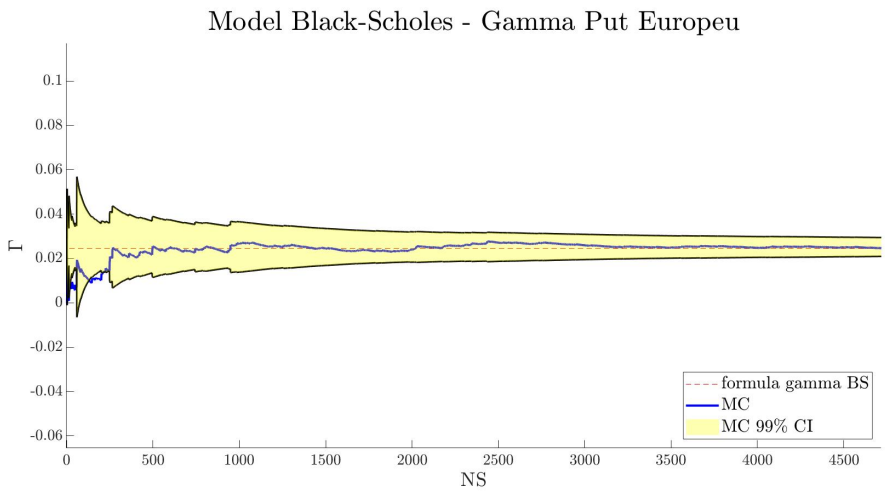

Figura 6: Put Gamma per opció Europea, utilitzant els paràmetres $S_0 = 100$, $K = 100$, $r = 0,1$, $T = 1$ i $\sigma = 0,15$.

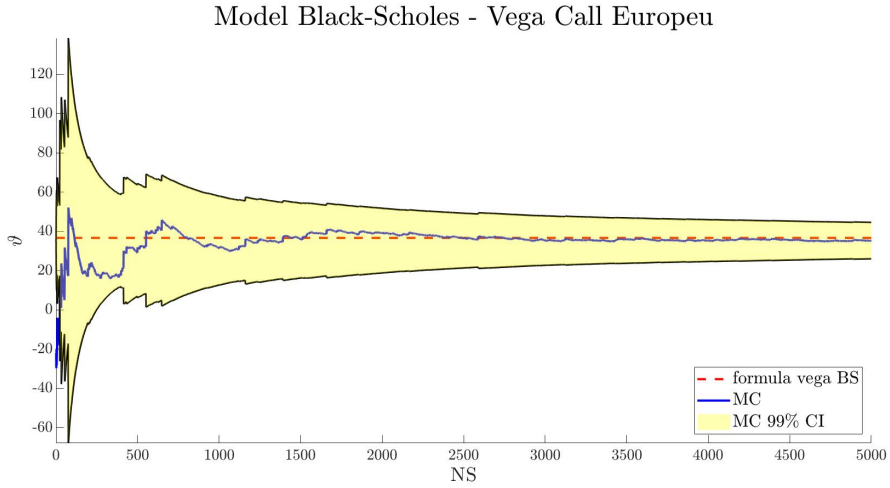

Figura 7: Call Vega per opció Europea, utilitzant els paràmetres $S_0 = 100$, $K = 100$, $r = 0,1$, $T = 1$ i $\sigma = 0,15$.

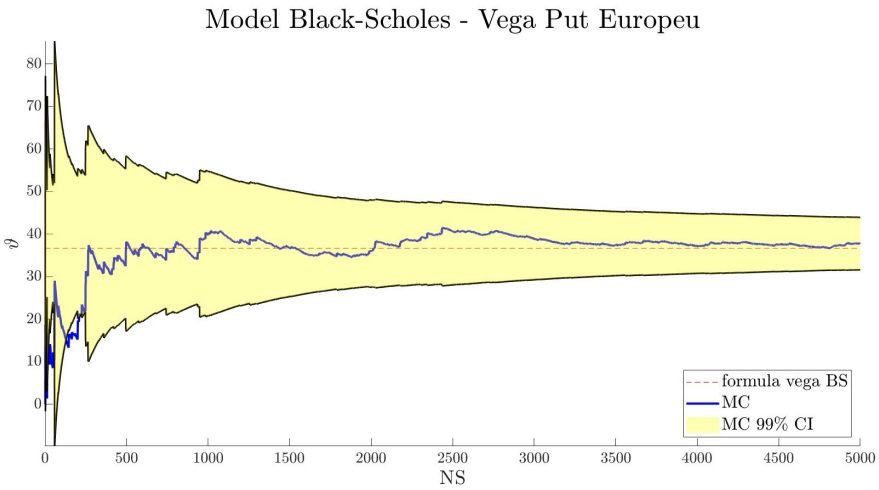

Figura 8: Put Vega per opció Europea, utilitzant els paràmetres $S_0 = 100$, $K = 100$, $r = 0,1$, $T = 1$ i $\sigma = 0,15$.

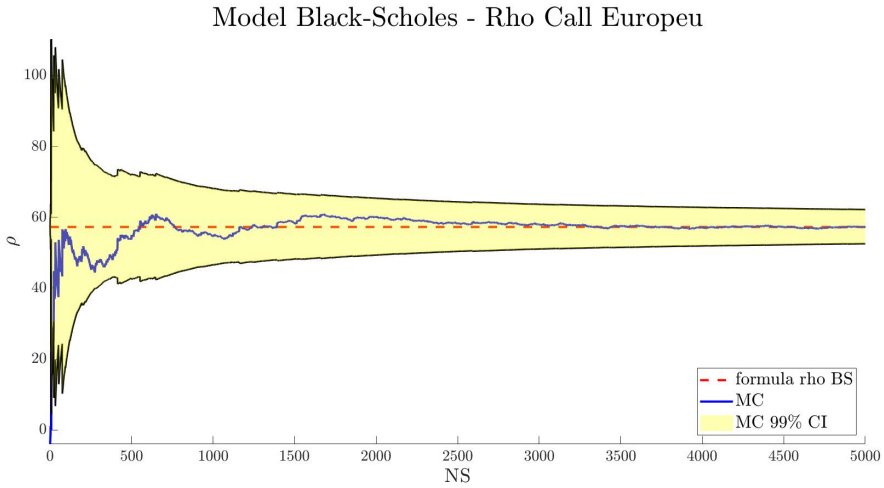

Figura 9: Call Rho per opció Europea, utilitzant els paràmetres $S_0 = 100$, $K = 100$, $r = 0,1$, $T = 1$ i $\sigma = 0,15$.

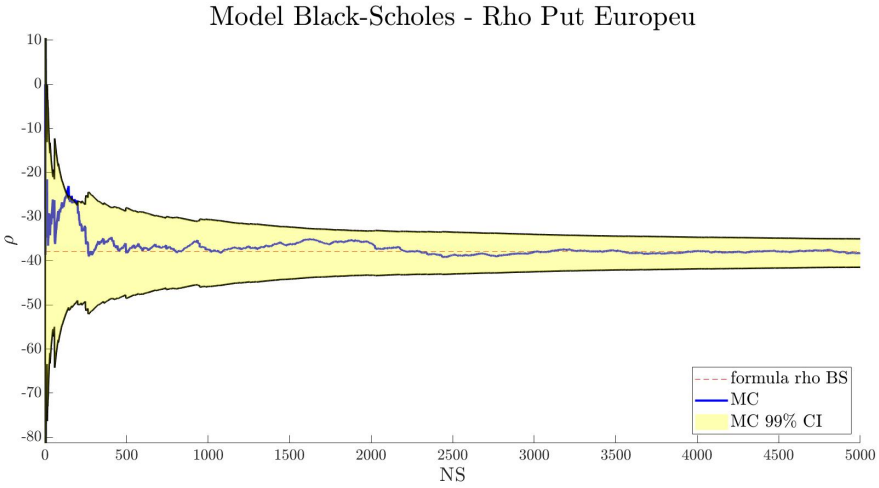

Figura 10: Put Rho per opció Europea, utilitzant els paràmetres $S_0 = 100$, $K = 100$, $r = 0,1$, $T = 1$ i $\sigma = 0,15$.

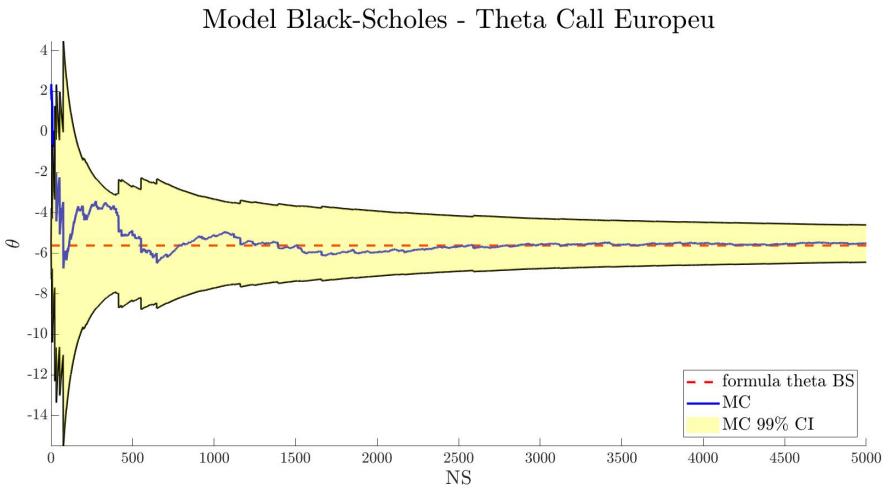

Figura 11: Call Theta per opció Europea, utilitzant els paràmetres $S_0 = 100$, $K = 100$, $r = 0,1$, $T = 1$ i $\sigma = 0,15$.

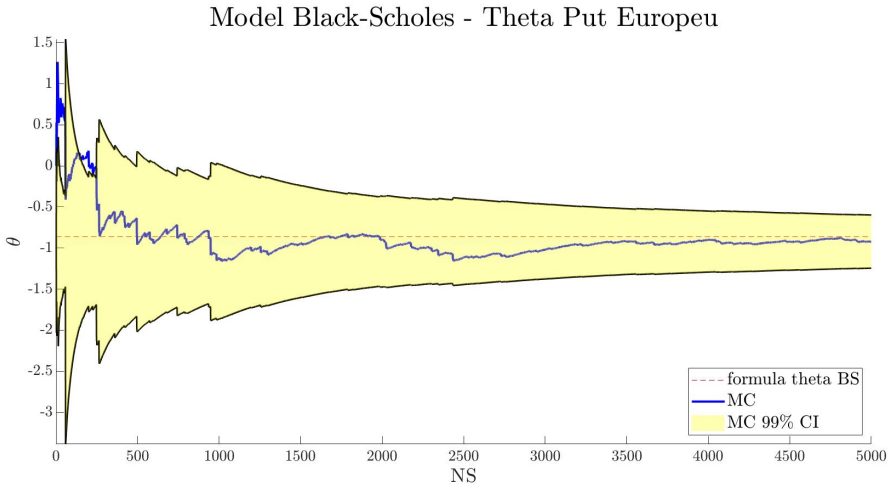

Figura 12: Put Theta per opció Europea, utilitzant els paràmetres $S_0 = 100$, $K = 100$, $r = 0,1$, $T = 1$ i $\sigma = 0,15$.

En la taula següent, podem veure els resultats del preu de l'opció Digital i de les Gregues Delta i Gamma, tant utilitzant el mètode de Monte Carlo i les fórmules obtingudes mitjançant el càlcul de Malliavin, com utilitzant les fórmules analítiques.

	Fórmula Call BS	Simulació MC Call
Preu	0.65416	0.65818
Delta	0.02020	0.02060
Gamma	-0.00099	-0.00100

Taula 2: Valors de l'opció digital i les seves gregues, utilitzant els paràmetres $S_0 = 100$, $K = 100$, $r = 0,1$, $T = 1$ i $\sigma = 0,15$.

Finalment, trobem la representació gràfica dels valors obtinguts en cada iteració del mètode de Monte Carlo, així com el resultat amb un interval de confiança del 99% i el valor obtingut amb la fórmula. Podem veure una representació gràfica per la Delta, la Gamma i pel preu de l'opció, totes elles en el cas d'un call.

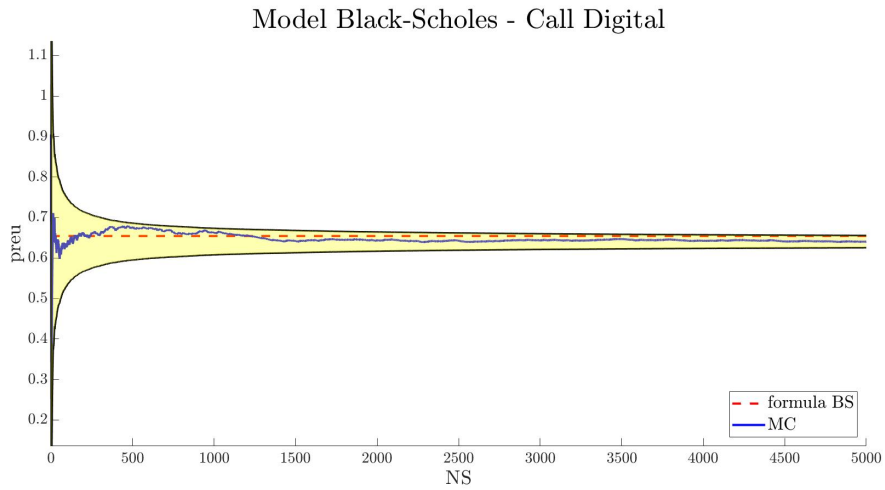

Figura 13: Valor del call de l'opció Digital, utilitzant els paràmetres $S_0 = 100$, $K = 100$, $r = 0,1$, $T = 1$ i $\sigma = 0,15$.

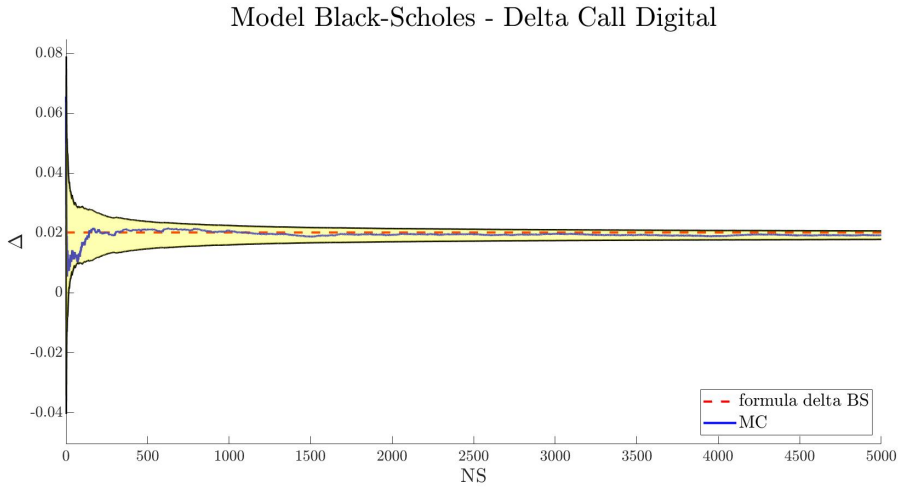

Figura 14: Call Delta per opció Digital, utilitzant els paràmetres $S_0 = 100$, $K = 100$, $r = 0,1$, $T = 1$ i $\sigma = 0,15$.

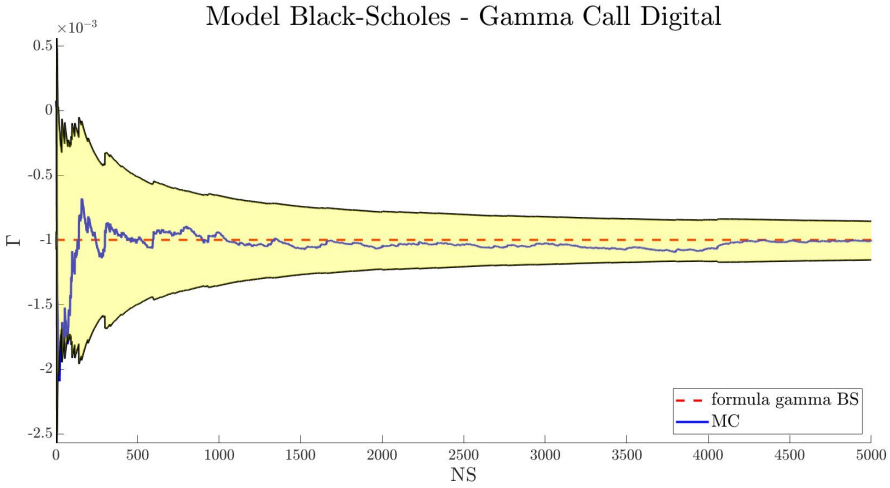

Figura 15: Call Gamma per opció Digital, utilitzant els paràmetres $S_0 = 100$, $K = 100$, $r = 0,1$, $T = 1$ i $\sigma = 0,15$.

7 Consideracions

En les seccions anteriors hem vist com podem aplicar el càlcul de Malliavin, i més concretament la fórmula d'integració per parts, per calcular el valor de les Gregues. Ara volem veure com ens resultarà d'útil aquest mètode.

Per calcular les Gregues d'una opció financera necessitem calcular el valor de les derivades de la funció respecte els diferents paràmetres que la formen.

Hi ha diversos mètodes pel càlcul de Gregues, descrits a [5]. Un dels mètodes més utilitzats per calcular les derivades que constitueixen les Gregues és el mètode de diferències finites. Aquest mètode es basa en la definició de la derivada. Si considerem el valor d'una opció, V_0, aleshores, la seva derivada respecte un paràmetre α serà:

$$\frac{\partial V_0(\alpha)}{\partial \alpha} \simeq \frac{V_0(\alpha+h) - V_0(\alpha)}{h}.$$

Aquest mètode requereix que realitzem la simulació utilitzant més d'un valor del paràmetre.

Anem a veure com seria en el cas de la Delta, és a dir, la derivada respecte el preu inicial de l'actiu. Inicialment, calculem el valor aproximat de $V_0(S_0)$ i el de $V_0(S_0+h)$ mitjançant el mètode de Monte Carlo, on h és un valor proper a zero. Aleshores Delta serà

$$\mathbb{E}\left[\frac{\Delta V_0(S_0)}{\Delta S_0}\right] = \frac{V_0(S_0+h) - V_0(S_0)}{h}.$$

El problema és que aquest mètode té un error força gran. Anem a veure-ho amb la sèrie de Taylor:

$$V_0(S_0+h) = V_0(S_0) + \frac{\partial V_0(S_0)}{\partial S_0}h + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_0(S_0)}{S_0^2}h^2 + O(h^3).$$

$$\frac{V_0(S_0+h) - V_0(S_0)}{h} = \frac{\partial V_0(S_0)}{\partial S_0} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_0(S_0)}{S_0^2}h + O(h^2) = \frac{\partial V_0(S_0)}{\partial S_0} + O(h).$$

Per tant, l'error és d'ordre h.

Per reduir l'error, s'utilitza la següent definició alternativa de la derivada

$$\frac{\partial V_0(\alpha)}{\partial \alpha} = \lim_{h\to\infty} \frac{V_0(\alpha+h) - V_0(\alpha-h)}{2h}.$$

En aquest cas,

$$\frac{V_0(S_0+h) - V_0(S_0-h)}{2h} = \frac{\partial V_0(S_0)}{\partial S_0} + O(h^2),$$

aleshores l'error serà d'ordre 2 i tenint en compte que h és un valor proper a zero el valor obtingut serà més acurat, però tot i així és força gran.

En el cas de totes les Gregues de primer ordre l'error és el mateix que en el cas de Delta. D'altra banda, les Gregues de segon ordre com Gamma, són de la forma

$$\frac{\partial^2 V_0(\alpha)}{\partial \alpha^2} \simeq \frac{V_0(\alpha+h) + 2V_0(\alpha) - V_0(\alpha-h)}{h^2}.$$

En aquest cas l'error serà encara més elevat.

A més a més, aquest mètode no és eficient quan la funció de beneficis no és prou regular, com ens passa en el cas de la Gamma d'un call Europeu.

El mètode que hem desenvolupat ens permet expressar les derivades de l'opció financera com

$$\frac{\partial V_0}{\partial \alpha} = \mathbb{E}_Q[\pi \Phi(S_T)],$$

on π és una variable aleatòria que no depèn en absolut de la funció de beneficis. Podem veure que aquest mètode utilitza la funció de beneficis i un pes, que serà diferent per a cada Grega. En aquest cas, resulta fàcil calcular numèricament els valors de les Gregues utilitzant el mètode de Monte Carlo i els valors que s'obtenen al realitzar-ho són molt propers als valors d'aquestes. La raó de l'eficiència d'aquest mètode és que utilitzant les fórmules obtingudes en les seccions anteriors, podem calcular analíticament el valor de les Gregues sense haver de calcular la derivada de la funció de beneficis. Això ens permet calcular fàcilment el valor de les Gregues, sense necessitat de què la funció de beneficis utilitzada compleixi cap condició de derivabilitat.

És per això que el mètode desenvolupat en aquest treball és força més eficient que el mètode de les diferències finites, així com que altres mètodes que s'utilitzen habitualment. D'altra banda, l'error dels resultats que n'obtenim és menor.

A més a més, si utilitzem funcions de beneficis discontínues, com per exemple l'opció digital, la diferència entre l'efectivitat del càlcul de Gregues utilitzant el càlcul de Malliavin i utilitzant el mètode de diferències finites encara és més notòria, ja que aquest tipus de funcions generen bastants problemes en el càlcul numèric de les derivades.

Cal emfatitzar també, que aquest mètode ens permetrà construir un algorisme general per realitzar simulacions numèriques utilitzant el mètode de Monte Carlo. D'aquesta manera no ens caldrà generar un algorisme diferent per a cada opció, sinó que en tindrem prou amb canviar la funció de beneficis utilitzada per obtenir els resultats respectius de les diferents opcions.

Tot i la seva eficiència, quan utilitzem el mètode de Monte Carlo per simular les Gregues calculades utilitzant el càlcul de Malliavin, podem tenir problemes en els casos en què el pes és elevat, ja que en aquests casos el valor de l'esperança augmenta i la variança serà molt alta. Per reduir la variança utilitzarem la tècnica de localització que es desenvolupa en [1].

La idea d'aquesta tècnica és localitzar la integració per parts al voltant de les singularitats de la funció de beneficis.

Anem a veure un exemple del funcionament d'aquesta tècnica utilitzant-la per calcular la Delta del call d'una opció Europea amb el model de Black-Scholes,

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial S_T} \mathbb{E}_Q[e^{-rT}(S_T - K)^+] = \frac{e^{-rT}}{S_0 \sigma T} \mathbb{E}_Q[(S_T - K)^+ W_T].$$

Veiem que si el valor de W_T és gran, $(S_T - K)^+ W_T$ serà molt gran. La funció $(S_T - K)^+$ té una singularitat en $S_T = K$, per tant definim

$$H_\delta(S_T) = \begin{cases} 0 & si \quad S_T - K \leq -\delta \\ \frac{(S_T-K)+\delta}{2\delta} & si \quad -\delta \leq S_T - K \leq \delta \\ 1 & si \quad S_T - K \geq -\delta \end{cases}$$

on $\delta > 0$. Definim també les funcions

$$G_\delta(S_T) = \int_{-\infty}^{S_T} H_\delta(s)ds$$

i

$$F_\delta(S_T) = (S_T - K)^+ - G_\delta(S_T).$$

Finalment obtenim

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial}{\partial S_T}\mathbb{E}_Q[e^{-rT}(S_T - K)^+] \\ &= \frac{\partial}{\partial S_0}\mathbb{E}_Q[e^{-rT}G_\delta(S_T)] + \frac{\partial}{\partial S_0}\mathbb{E}_Q[e^{-rT}F_\delta(S_T)] \\ &= \mathbb{E}_Q\left[e^{-rT}H_\delta(S_T)\frac{S_T}{S_0}\right] + \mathbb{E}_Q\left[e^{-rT}F_\delta(S_T)\frac{W_T}{S_0\sigma T}\right] \\ &= \frac{e^{-rT}}{S_0}\mathbb{E}_Q\left[H_\delta(S_T)S_T + F_\delta(S_T)\frac{W_T}{\delta T}\right]. \end{aligned}$$

Podem observar que després d'aplicar la tècnica de localització, el valor de la Grega que podem calcular utilitzant el mètode de Monte Carlo és més acurat.

8 Conclusions

És molt important entendre el comportament del valor de les diferents opcions en funció dels canvis en els paràmetres del model de mercat. En alguns casos les Gregues es poden calcular analíticament, però en els casos en què això no és possible, és necessari disposar de mètodes que ens permetin preveure com evolucionarà el valor d'una opció al produir-se canvis en els paràmetres del model. La importància de les Gregues es deu a que proporcionen informació necessària per gestionar els riscs de les opcions i de les carteres.

En aquesta memòria, hem vist que el càlcul de Malliavin i més concretament, la fórmula d'integració per parts, ens serveixen per calcular les Gregues fins i tot d'opcions amb funcions de beneficis discontínues. Hem demostrat que les fórmules obtingudes utilitzant aquest mètode són equivalents a les fórmules analítiques i hem determinat, mitjançant simulacions numèriques, que els valors obtinguts convergeixen força ràpidament als valors esperats.

El model i les opcions financeres que hem utilitzat són força senzills. És per aquest motiu que tenim fórmules que ens permeten obtenir els valors de les Gregues directament. Ara bé, si volguessim obtenir-los en el cas de models més complexos o utilitzant opcions més complicades, no podríem fer-ho utilitzant fórmules analítiques, perquè no es coneixen. En aquests casos, el mètode desenvolupat en aquest treball resulta de gran utilitat, ja que a més a més, com hem vist, és considerablement més eficient que la resta de mètodes coneguts.

D'altra banda, hem pogut observar que aquest mètode també comporta certs problemes, ja que la variança en alguns casos és molt elevada. Però, és força simple millorar aquest aspecte utilitzant la tècnica de localització que hem introduït.

Hi ha moltes possibilitats per continuar aquest estudi. Es podria aprofundir en la tècnica de localització o realitzar un estudi més detallat del funcionament i l'eficència d'altres mètodes. També podríem ampliar l'estudi utilitzant funcions de beneficis discontínues més complicades. Finalment, resultaria força interessant estudiar el funcionament d'aquest mètode utilitzant models més complexos, com per exemple models de volatilitat estocàstica(veure Yilmaz [8]) i desenvolupar algoritmes que ens permetin simular-ne l'evolució.

Referències

[1] Fournié, E.; Lasry, J.M.; Lebochoux, J.; Lions, P.L. i Touzi, N. *Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance.* Finance and Stochastics, 3, 391-412, 1999.

[2] Fournié, E.; Lasry, J.M.; Lebochoux, J. i Lions, P.L. *Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance II.* Finance and Stochastics, 5, 201-236, 2001.

[3] Hull, John C. *Options, futures, and other derivatives.* Pearson Prentice Hall, 2009.

[4] Lamberton, D.; Lapeyre, B. *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series, 2008.

[5] Mhlanga, F. J. *Computation of Greeks using Malliavin calculus.* Ph.D. thesis, University of Cape Town, 2011.

[6] Nualart, D. *The Malliavin Calculus and Related Topics.* Springer-Verlarg, 2006.

[7] Shreve, S. E. *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models.* Springer, 2004

[8] Yilmaz, B. *Computation of the greeks in Black-Scholes-Merton and stochastic volatility models using Malliavin calculus.* Master's thesis, Middle East Technical University, 2014.

[9] Zhong, H. *Malliavin calculus applied to Monte Carlo methods in mathematical finance.* Master's thesis, Imperial College London, 2017.

ANNEX

A. Codi per opcions vanilla

Codi de MATLAB per a simular el valor de l'opció i de les Gregues de les opcions vanilla utilitzat per obtenir les gràfiques de la secció 6.

```
% Model Black-Scholes - calcul de gregues del call i el put d'opcions
    europees utilitzant calcul de Malliavin

fclose all; close all; clear all; clc

set(groot,'defaultTextInterpreter','latex');
set(groot,'defaultAxesTickLabelInterpreter','latex');
set(groot,'defaultLegendInterpreter','latex');
FS = 48;
set(groot,'DefaultAxesFontSize',FS);
figsize = [1200 900];
figprint = 0;

% Model Black-Scholes

% MC simulacio del preu d'un contracte que paga
% f(x) = max(x-K,0) (call de l'opcio) o
% f(x) = max(K-x,0) (put de l'opcio)
% basat en el preu al temps T, x = S_T, on S_T esta generat per
% un moviment Brownia geometric amb els parametres seguents:
S0 = 100;     % preu inicial de l'actiu
mu = 0.05;
sigma = 0.15;

% parametres de l'opcio:
K = 100;
T = 1;

% Simulem M camins i calculem f(x)=f(S_T) per cada cami

% parametres MC
N = ceil(T*4*252);
NS = 5e3;
dt = T/N;

% proces de Wiener
dw = sqrt(dt).*randn(NS,N);
W = [zeros(NS,1) cumsum(dw,2)];
t = 0:dt:T;


delta = W(:,end)./(sigma*T);
gamma = (W(:,end).^2./(sigma*T)-1/sigma-W(:,end))./(sigma*T);
vega = (W(:,end).^2./(sigma*T)-1/sigma-W(:,end));
rho = W(:,end)./sigma-T;
theta = mu-(W(:,end).^2./T+2.*W(:,end)./sigma.*(mu-sigma^2/2)-1)./2*T;


% moviment Brownia geometric
S = S0*exp((mu-0.5*sigma^2).*repmat(t,NS,1)+sigma.*W);
S_T = S(:,end);

% f(x) pel call i pel put
```

```
f_call = max(S_T-K,0);
f_put = max(K-S_T,0);

% El preu de l'opcio es la mitjana de les NS simulacions utilitzant la funcio de beneficis f

% preu de l'opcio MC
X_call = exp(-mu*T)*f_call; % interior de l'esperanca per calcular el call del preu de l'opcio
MC_call = MC_characteristics(X_call);

X_put = exp(-mu*T)*f_put; % interior de l'esperanca per calcular el put del preu de l'opcio
MC_put = MC_characteristics(X_put);

% delta MC
X_call_delta = exp(-mu*T)*f_call.*delta./S0; % interior de l'esperanca per calcular el call de la delta
MC_call_delta = MC_characteristics(X_call_delta);

X_put_delta = exp(-mu*T)*f_put.*delta./S0; % interior de l'esperanca per calcular el put de la delta
MC_put_delta = MC_characteristics(X_put_delta);

% gamma MC
X_call_gamma=exp(-mu*T)*f_call.*gamma./S0.^2; % interior de l'esperanca per calcular el call de la gamma
MC_call_gamma=MC_characteristics(X_call_gamma);

X_put_gamma=exp(-mu*T)*f_put.*gamma./S0.^2; % interior de l'esperanca per calcular el put de la gamma
MC_put_gamma=MC_characteristics(X_put_gamma);

% vega MC
X_call_vega=exp(-mu*T)*f_call.*vega; % interior de l'esperanca per calcular el call de la vega
MC_call_vega=MC_characteristics(X_call_vega);

X_put_vega=exp(-mu*T)*f_put.*vega; % interior de l'esperanca per calcular el put de la vega
MC_put_vega=MC_characteristics(X_put_vega);


% rho MC
X_call_rho=exp(-mu*T)*f_call.*rho; % interior de l'esperanca per calcular el call de la rho
MC_call_rho=MC_characteristics(X_call_rho);

X_put_rho=exp(-mu*T)*f_put.*rho; % interior de l'esperanca per calcular el put de la rho
MC_put_rho=MC_characteristics(X_put_rho);


% theta MC
X_call_theta=exp(-mu*T)*f_call.*theta; % interior de l'esperanca per calcular el call de la theta
MC_call_theta=MC_characteristics(X_call_theta);

X_put_theta=exp(-mu*T)*f_put.*theta; % interior de l'esperanca per calcular el put de la theta
MC_put_theta=MC_characteristics(X_put_theta);
```

```
% valor del preu i les gregues utilitzant la formula de BS
[BS_call, BS_put] = blsprice(S0, K, mu, T, sigma, 0);
[BS_call_delta, BS_put_delta] = blsdelta(S0, K, mu, T, sigma, 0);
BS_gamma = blsgamma(S0, K, mu, T, sigma, 0);
BS_vega = blsvega(S0, K, mu, T, sigma, 0);
[BS_call_rho, BS_put_rho] = blsrho(S0, K, mu, T, sigma, 0);
[BS_call_theta, BS_put_theta] = blstheta(S0, K, mu, T, sigma, 0);


% grafiques:
fig = figure(1);
fig.OuterPosition = [0 100 figsize];
hold on
p1 = plot([0 NS],[BS_call BS_call],'r--','LineWidth',2);
p2 = plot(1:NS,MC_call.X_cummean,'b-','LineWidth',2);
s1 = shade(1:NS,MC_call.X_cumci99_lower,'k-',1:NS,MC_call.X_cumci99_upper,'k-','LineWidth',1.5,'FillType',[1 2; 2 1],'FillColor',[1 1 0]);
ax = gca;
ax.YLim = [0 ceil(1.5*BS_call)];
set(findall(fig,'-property','FontSize'),'FontSize',14)
if figprint, print(fig,'bs-call','-depsc'); end
l = legend([p1,p2,s1(3)],{'formula BS','MC','MC 99\% CI'},'Location','SouthEast', 'FontSize', 16);
title('Model Black-Scholes - Call Europeu', 'FontSize', 25)
xlabel('NS', 'FontSize', 18)
ylabel('preu', 'FontSize', 18)


fig = figure(2);
fig.OuterPosition = [100 100 figsize];
hold on
p1 = plot([0 NS],[BS_put BS_put],'r--');
p2 = plot(1:NS,MC_put.X_cummean,'b-','LineWidth',2);
s1 = shade(1:NS,MC_put.X_cumci99_lower,'k-',1:NS,MC_put.X_cumci99_upper,'k-','LineWidth',1.5,'FillType',[1 2; 2 1],'FillColor',[1 1 0]);
ax = gca;
ax.YLim =[0 ceil(1.5*BS_put)];

set(findall(fig,'-property','FontSize'),'FontSize',14)
if figprint, print(fig,'bs-put','-depsc'); end
l = legend([p1,p2,s1(3)],{'formula BS','MC','MC 99\% CI'},'Location','SouthEast', 'FontSize', 16);
title('Model Black-Scholes - Put Europeu', 'FontSize', 25)
xlabel('NS', 'FontSize', 18)
ylabel('preu', 'FontSize', 18)


fig = figure(3);
fig.OuterPosition = [200 100 figsize];
hold on
p1 = plot([0 NS],[BS_call_delta BS_call_delta],'r--','LineWidth',2);
p2 = plot(1:NS,MC_call_delta.X_cummean,'b-','LineWidth',2);
s1 = shade(1:NS,MC_call_delta.X_cumci99_lower,'k-',1:NS,MC_call_delta.X_cumci99_upper,'k-','LineWidth',1.5,'FillType',[1 2; 2 1],'FillColor',[1 1 0]);
ax = gca;
ax.YLim = [0 ceil(1.5*BS_call_delta)];
set(findall(fig,'-property','FontSize'),'FontSize',14)
if figprint, print(fig,'bs-call-delta','-depsc'); end
```

```
l = legend([p1,p2,s1(3)],{'formula delta BS','MC','MC 99\% CI'},'Location','SouthEast', 'FontSize', 16);
title('Model Black-Scholes - Delta del Call Europeu', 'FontSize', 25)
xlabel('NS', 'FontSize', 18)
ylabel('$\Delta$', 'FontSize', 18)


fig = figure(4);
fig.OuterPosition = [300 100 figsize];
hold on
p1 = plot([0 NS],[BS_put_delta BS_put_delta],'r--');
p2 = plot(1:NS,MC_put_delta.X_cummean,'b-','LineWidth',2);
s1 = shade(1:NS,MC_put_delta.X_cumci99_lower,'k-',1:NS,MC_put_delta.X_cumci99_upper,'k-','LineWidth',1.5,'FillType',[1 2; 2 1],'FillColor',[1 1 0]);
ax = gca;
ax.YLim =[floor(1.5*BS_put_delta) 0];
set(findall(fig,'-property','FontSize'),'FontSize',14)
if figprint, print(fig,'bs-put-delta','-depsc'); end
l = legend([p1,p2,s1(3)],{'formula delta BS','MC','MC 99\% CI'},'Location','SouthEast', 'FontSize', 16);
title('Model Black-Scholes - Delta del Put Europeu', 'FontSize', 25)
xlabel('NS', 'FontSize', 18)
ylabel('$\Delta$', 'FontSize', 18)


fig = figure(5);
fig.OuterPosition = [200 100 figsize];
hold on
p1 = plot([0 NS],[BS_gamma BS_gamma],'r--','LineWidth',2);
p2 = plot(1:NS,MC_call_gamma.X_cummean,'b-','LineWidth',2);
s1 = shade(1:NS,MC_call_gamma.X_cumci99_lower,'k-',1:NS,MC_call_gamma.X_cumci99_upper,'k-','LineWidth',1.5,'FillType',[1 2; 2 1],'FillColor',[1 1 0]);
ax = gca;
ax.YLim = [0 ceil(1.5*BS_gamma)];
set(findall(fig,'-property','FontSize'),'FontSize',14)
if figprint, print(fig,'bs-call-gamma','-depsc'); end
l = legend([p1,p2,s1(3)],{'formula gamma BS','MC','MC 99\% CI'},'Location','SouthEast', 'FontSize', 16);
title('Model Black-Scholes - Gamma Call Europeu', 'FontSize', 25)
xlabel('NS', 'FontSize', 18)
ylabel('$\Gamma$', 'FontSize', 18)


fig = figure(6);
fig.OuterPosition = [300 100 figsize];
hold on
p1 = plot([0 NS],[BS_gamma BS_gamma],'r--');
p2 = plot(1:NS,MC_put_gamma.X_cummean,'b-','LineWidth',2);
s1 = shade(1:NS,MC_put_gamma.X_cumci99_lower,'k-',1:NS,MC_put_gamma.X_cumci99_upper,'k-','LineWidth',1.5,'FillType',[1 2; 2 1],'FillColor',[1 1 0]);
ax = gca;
ax.YLim =[0 ceil(1.5*BS_gamma)];
set(findall(fig,'-property','FontSize'),'FontSize',14)
if figprint, print(fig,'bs-put-gamma','-depsc'); end
l = legend([p1,p2,s1(3)],{'formula gamma BS','MC','MC 99\% CI'},'Location','SouthEast', 'FontSize', 16);
title('Model Black-Scholes - Gamma Put Europeu', 'FontSize', 25)
xlabel('NS', 'FontSize', 18)
```

```
ylabel('$\Gamma$', 'FontSize', 18)


fig = figure(7);
fig.OuterPosition = [200 100 figsize];
hold on
p1 = plot([0 NS],[BS_vega BS_vega],'r--','LineWidth',2);
p2 = plot(1:NS,MC_call_vega.X_cummean,'b-','LineWidth',2);
s1 = shade(1:NS,MC_call_vega.X_cumci99_lower,'k-',1:NS,MC_call_vega.X_cumci99_upper,'k-','LineWidth',1.5,'FillType',[1 2; 2 1],'FillColor',[1 1 0]);
ax = gca;
ax.YLim = [0 ceil(1.5*BS_vega)];
set(findall(fig,'-property','FontSize'),'FontSize',14)
if figprint, print(fig,'bs-call-vega','-depsc'); end
l = legend([p1,p2,s1(3)],{'formula vega BS','MC','MC 99\% CI'},'Location','SouthEast', 'FontSize', 16);
title('Model Black-Scholes - Vega Call Europeu', 'FontSize', 25)
xlabel('NS', 'FontSize', 18)
ylabel('$\vartheta$', 'FontSize', 18)


fig = figure(8);
fig.OuterPosition = [300 100 figsize];
hold on
p1 = plot([0 NS],[BS_vega BS_vega],'r--');
p2 = plot(1:NS,MC_put_vega.X_cummean,'b-','LineWidth',2);
s1 = shade(1:NS,MC_put_vega.X_cumci99_lower,'k-',1:NS,MC_put_vega.X_cumci99_upper,'k-','LineWidth',1.5,'FillType',[1 2; 2 1],'FillColor',[1 1 0]);
ax = gca;
ax.YLim =[0 ceil(1.5*BS_vega)];
set(findall(fig,'-property','FontSize'),'FontSize',14)
if figprint, print(fig,'bs-put-vega','-depsc'); end
l = legend([p1,p2,s1(3)],{'formula vega BS','MC','MC 99\% CI'},'Location','SouthEast', 'FontSize', 16);
title('Model Black-Scholes - Vega Put Europeu', 'FontSize', 25)
xlabel('NS', 'FontSize', 18)
ylabel('$\vartheta$', 'FontSize', 18)


fig = figure(9);
fig.OuterPosition = [200 100 figsize];
hold on
p1 = plot([0 NS],[BS_call_rho BS_call_rho],'r--','LineWidth',2);
p2 = plot(1:NS,MC_call_rho.X_cummean,'b-','LineWidth',2);
s1 = shade(1:NS,MC_call_rho.X_cumci99_lower,'k-',1:NS,MC_call_rho.X_cumci99_upper,'k-','LineWidth',1.5,'FillType',[1 2; 2 1],'FillColor',[1 1 0]);
ax = gca;
ax.YLim = [0 ceil(1.5*BS_call_rho)];
set(findall(fig,'-property','FontSize'),'FontSize',14)
if figprint, print(fig,'bs-call-rho','-depsc'); end
l = legend([p1,p2,s1(3)],{'formula rho BS','MC','MC 99\% CI'},'Location','SouthEast', 'FontSize', 16);
title('Model Black-Scholes - Rho Call Europeu', 'FontSize', 25)
xlabel('NS', 'FontSize', 18)
ylabel('$\rho$', 'FontSize', 18)


fig = figure(10);
```

```
fig.OuterPosition = [300 100 figsize];
hold on
p1 = plot([0 NS],[BS_put_rho BS_put_rho],'r--');
p2 = plot(1:NS,MC_put_rho.X_cummean,'b-','LineWidth',2);
s1 = shade(1:NS,MC_put_rho.X_cumci99_lower,'k-',1:NS,MC_put_rho.X_cumci99_upper,'k-','LineWidth',1.5,'FillType',[1 2; 2 1],'FillColor',[1 1 0]);
ax = gca;
ax.YLim =[floor(1.5*BS_put_rho) 0];
set(findall(fig,'-property','FontSize'),'FontSize',14)
if figprint, print(fig,'bs-put-rho','-depsc'); end
l = legend([p1,p2,s1(3)],{'formula rho BS','MC','MC 99\% CI'},'Location','SouthEast', 'FontSize', 16);
title('Model Black-Scholes - Rho Put Europeu', 'FontSize', 25)
xlabel('NS', 'FontSize', 18)
ylabel('$\rho$', 'FontSize', 18)


fig = figure(11);
fig.OuterPosition = [200 100 figsize];
hold on
p1 = plot([0 NS],[BS_call_theta BS_call_theta],'r--','LineWidth',2);
p2 = plot(1:NS,MC_call_theta.X_cummean,'b-','LineWidth',2);
s1 = shade(1:NS,MC_call_theta.X_cumci99_lower,'k-',1:NS,MC_call_theta.X_cumci99_upper,'k-','LineWidth',1.5,'FillType',[1 2; 2 1],'FillColor',[1 1 0]);
ax = gca;
ax.YLim = [floor(1.5*BS_call_theta) 0];
set(findall(fig,'-property','FontSize'),'FontSize',14)
if figprint, print(fig,'bs-call-theta','-depsc'); end
l = legend([p1,p2,s1(3)],{'formula theta BS','MC','MC 99\% CI'},'Location','SouthEast', 'FontSize', 16);
title('Model Black-Scholes - Theta Call Europeu', 'FontSize', 25)
xlabel('NS', 'FontSize', 18)
ylabel('$\theta$', 'FontSize', 18)


fig = figure(12);
fig.OuterPosition = [300 100 figsize];
hold on
p1 = plot([0 NS],[BS_put_theta BS_put_theta],'r--');
p2 = plot(1:NS,MC_put_theta.X_cummean,'b-','LineWidth',2);
s1 = shade(1:NS,MC_put_theta.X_cumci99_lower,'k-',1:NS,MC_put_theta.X_cumci99_upper,'k-','LineWidth',1.5,'FillType',[1 2; 2 1],'FillColor',[1 1 0]);
ax = gca;
ax.YLim =[floor(1.5*BS_put_theta) 0];
set(findall(fig,'-property','FontSize'),'FontSize',14)
if figprint, print(fig,'bs-put-theta','-depsc'); end
l = legend([p1,p2,s1(3)],{'formula theta BS','MC','MC 99\% CI'},'Location','SouthEast', 'FontSize', 16);
title('Model Black-Scholes - Theta Put Europeu', 'FontSize', 25)
xlabel('NS', 'FontSize', 18)
ylabel('$\theta$', 'FontSize', 18)

end
```

B. Codi per opcions digitals

Codi de MATLAB per a simular el valor de l'opció i de les Gregues delta i gamma de les opcions digitals utilitzat per obtenir les gràfiques de la secció 6.

```
% Model Black-Scholes - calcul de gregues de l'opcio digital utilitzant calcul de Malliavin
fclose all; close all; clear all; clc

set(groot,'defaultTextInterpreter','latex');
set(groot,'defaultAxesTickLabelInterpreter','latex');
set(groot,'defaultLegendInterpreter','latex');
FS = 48;
set(groot,'DefaultAxesFontSize',FS);
figsize = [1200 900];
figprint = 1;


% Model Black-Scholes

% MC simulacio del preu d'un contracte que paga
% f(x) = 1_{x>K}
% basat en el preu al temps T, x = S_T, on S_T esta generat per
% un moviment Brownia geometric amb els parametres seguents:

S0 = 100;     % preu inicial de l'actiu
mu = 0.1;
sigma = 0.15;

% parametres de l'opcio:
K = 100;
T = 1;

% Simulem M camins i calculem f(x)=f(S_T) per cada cami

% parametres MC
N = ceil(T*4*252);
NS = 5e3;
dt = T/N;

% proces de Wiener
dw = sqrt(dt).*randn(NS,N);
W = [zeros(NS,1) cumsum(dw,2)];
t = 0:dt:T;


delta = W(:,end)./(sigma*T);
gamma = (W(:,end).^2./(sigma*T)-1/sigma-W(:,end))./(sigma*T);


% moviment Brownia geometric
S = S0*exp((mu-0.5*sigma^2).*repmat(t,NS,1)+sigma.*W);
S_T = S(:,end);

% f(x)
for i=1:NS
if S_T(i)>=K
    f_call(i,1) = 1;
else
    f_call(i,1)=0;
end
```

```
end

% El preu de l'opcio es la mitjana de les NS simulacions utilitzant la funcio de beneficis f

% preu de l'opcio MC
X_call = exp(-mu*T)*f_call; % interior de l'esperanca per calcular el preu de l'opcio
MC_call = MC_characteristics(X_call);

% delta MC
X_call_delta = exp(-mu*T)*f_call.*delta./S0; % interior de l'esperanca per calcular la delta
MC_call_delta = MC_characteristics(X_call_delta);

% gamma MC
X_call_gamma=exp(-mu*T)*f_call.*gamma./S0.^2; % interior de l'esperanca per calcular la gamma
MC_call_gamma=MC_characteristics(X_call_gamma);


% valor del preu i les gregues utilitzant la formula de BS
sqrtT = sqrt(T);
d1 = (log(S0./K)+(mu*T))./(sigma*sqrtT) + 0.5*sigma.*sqrtT;
d2 = d1-sigma*sqrtT;

BS_call=exp(-mu*T)*normcdf(d2);
BS_call_delta=exp(-mu*T)/(S0*sigma*sqrtT)*normpdf(d2);
BS_gamma=-exp(-mu*T)/(S0^2*sigma^2*T)*d1*normpdf(d2);


% grafiques
fig = figure(1);
fig.OuterPosition = [0 100 figsize];
hold on
p1 = plot([0 NS],[BS_call BS_call],'r--','LineWidth',2);
p2 = plot(1:NS,MC_call.X_cummean,'b-','LineWidth',2);
s1 = shade(1:NS,MC_call.X_cumci99_lower,'k-',1:NS,MC_call.X_cumci99_upper,'k-','LineWidth',1.5,'FillType',[1 2; 2 1],'FillColor',[1 1 0]);
ax = gca;
ax.YLim = [0 ceil(1.5*BS_call)];
set(findall(fig,'-property','FontSize'),'FontSize',14)
if figprint, print(fig,'bs-call','-depsc'); end
l = legend([p1,p2],{'formula BS','MC'},'Location','SouthEast', 'FontSize', 16);
title('Model Black-Scholes - Call Digital', 'FontSize', 25)
xlabel('NS', 'FontSize', 18)
ylabel('preu', 'FontSize', 18)


fig = figure(2);
fig.OuterPosition = [200 100 figsize];
hold on
p1 = plot([0 NS],[BS_call_delta BS_call_delta],'r--','LineWidth',2);
p2 = plot(1:NS,MC_call_delta.X_cummean,'b-','LineWidth',2);
s1 = shade(1:NS,MC_call_delta.X_cumci99_lower,'k-',1:NS,MC_call_delta.X_cumci99_upper,'k-','LineWidth',1.5,'FillType',[1 2; 2 1],'FillColor',[1 1 0]);
ax = gca;
ax.YLim = [0 ceil(1.5*BS_call_delta)];
set(findall(fig,'-property','FontSize'),'FontSize',14)
```

```
if figprint, print(fig,'bs-call-delta','-depsc'); end
l = legend([p1,p2],{'formula delta BS','MC'},'Location','SouthEast', 'FontSize', 16);
title('Model Black-Scholes - Delta Call Digital', 'FontSize', 25)
xlabel('NS', 'FontSize', 18)
ylabel('$\Delta$', 'FontSize', 18)

fig = figure(3);
fig.OuterPosition = [200 100 figsize];
hold on
p1 = plot([0 NS],[BS_gamma BS_gamma],'r--','LineWidth',2);
p2 = plot(1:NS,MC_call_gamma.X_cummean,'b-','LineWidth',2);
s1 = shade(1:NS,MC_call_gamma.X_cumci99_lower,'k-',1:NS,MC_call_gamma.X_cumci99_upper,'k-','LineWidth',1.5,'FillType',[1 2; 2 1],'FillColor',[1 1 0]);
ax = gca;
ax.YLim = [ceil(1.5*BS_gamma) Inf];
set(findall(fig,'-property','FontSize'),'FontSize',14)
if figprint, print(fig,'bs-call-gamma','-depsc'); end
l = legend([p1,p2],{'formula gamma BS','MC'},'Location','SouthEast', 'FontSize', 16);
title('Model Black-Scholes - Gamma Call Digital', 'FontSize', 25)
xlabel('NS', 'FontSize', 18)
ylabel('$\Gamma$', 'FontSize', 18)

end
```

C. Funcions utilitzades

Codi de MATLAB de la funció 'MC_characteristics' utilitzada en els codis anteriors. Aquesta funció la va escriure Jan Pospíšil.

```
function [out] = MC_characteristics(X)
%MC_CHARACTERISTICS Calculate basic Monte Carlo characteristics
%   X is a 2D matrix, each row is one simulation/scenario
%   out is a structure

% (c) 2020 Jan Pospisil <honik@kma.zcu.cz>

% References:
% [MC] Art B. Owen: Monte Carlo theory, methods and examples, 2013, URL: https://statweb.stanford.edu/~owen/mc/

% TODO: check if X is valid
% TODO: use more robust functions cummean, cumvar, cumstd, cumci
% FIXME: especially the cumvar formula is not numerically good, see [MC] (2.17) on page 21

normvcrit = @(alpha) norminv(1-alpha/2); % critical value in standard normal distribution,
% it is the same as sqrt(2)*erfinv(1-alpha)
% if alpha = 0.05, we are looking for 100(1-alpha) = 95% confidence intervals
normvcrit95 = normvcrit(0.05); % approximately 1.96
normvcrit99 = normvcrit(0.01); % approximately 2.58

out = struct;
out.NS = size(X,1); % number of simulations/scenarios

```

```
% tmp variables
cumcount = [1:out.NS]';
sqrtcumcount = sqrt(cumcount);

out.X_cummean = cumsum(X)./cumcount; % cumulative mean
out.X_mean = out.X_cummean(end); % mean (at the end value)
out.X_cumvar = cumsum(X.^2)./cumcount - (out.X_cummean.^2); % cumulative var
out.X_cumstd = sqrt(out.X_cumvar); % cumulative std

% 95% confidence intervals
cumci95_diff = normvcrit95*out.X_cumstd ./sqrtcumcount; % aux variable
out.X_cumci95_lower = out.X_mean - cumci95_diff;
out.X_cumci95_upper = out.X_mean + cumci95_diff;
out.X_ci95_lower = out.X_cumci95_lower(end);
out.X_ci95_upper = out.X_cumci95_upper(end);

% 99% confidence intervals
cumci99_diff = normvcrit99*out.X_cumstd ./sqrtcumcount; % aux variable
out.X_cumci99_lower = out.X_mean - cumci99_diff;
out.X_cumci99_upper = out.X_mean + cumci99_diff;
out.X_ci99_lower = out.X_cumci99_lower(end);
out.X_ci99_upper = out.X_cumci99_upper(end);

end
```

Codi de MATLAB de la funció 'shade' utilitzada en els codis anteriors. Aquesta funció està escrita per Javier Montalt Tordera, que en té el Copyright.

```
function h = shade(varargin)
% SHADE  Filled area linear plot.
%
%   SHADE should be called using the same syntax as the built-in PLOT.
%
%   SHADE(X,Y) plots vector Y versus vector X, filling the area under the
%   curve. If either is a matrix, this function behaves like PLOT.
%
%   SHADE(Y) plots the columns of Y versus their index.
%
%   SHADE(X,Y,S) plots Y versus X using the line type, marker symbols and
%   colors as specified by S. For more information on the line specifier S,
%   see PLOT.
%
%   SHADE(X1,Y1,X2,Y2,X3,Y3,...) combines the plots defined by
%   the (X,Y) pairs.
%
%   SHADE(X1,Y1,S1,X2,Y2,S2,X3,Y3,S3,...) combines the plots defined by
%   the (X,Y,S) triples.
%
%   SHADE(AX,...) plots into the axes with handle AX.
%
%   H = SHADE(...) returns a column vector of handles to graphics objects.
%
%   SHADE(...,Name,Value) specifies additional properties of the lines (see
%   help for PLOT) or the filled areas (see below).
%
%   Three additional properties are provided to control the filling:
%
%     - 'FillType' specifies the filling behaviour. The input should be a
```

```
%         matrix of size [N,2], such as [A1,B1;A2,B2;...;An,Bn], where Ai and
%         Bi indicate the upper and lower limits, respectively, of each of
%         the N areas to be filled. Each Ai and Bi is an index pointing to
%         one of the lines drawn by PLOT. If, for a particular combination of
%         inputs, PLOT draws M lines, then each Ai and Bi should be a number
%         between 1 and M. In addition, the special cases 0, -1 and -2 are
%         allowed, each representing the x-axis, the bottom of the active
%         axes and the top of the active axes, respectively. 'FillType' may
%         also be specified using a cell array of size [N,2], in which case
%         one may also use the keywords 'axis', 'bottom' and 'top' instead
%         of 0, -1 and -2. By default, the areas between each of the curves
%         and the x-axis are filled, which corresponds to the input matrix
%         [1,0;0,1;2,0;0,2;...;M,0;0,M].
%
%       - 'FillColor' specifies the color of the fillings. This should be a
%         matrix of size [N,3], where each row is the RGB triplet for the
%         corresponding area as specified above. 'FillColor' may also be
%         specified as a cell array of length N, in which case each entry may
%         be either an RGB triplet or any of the color names commonly used in
%         MATLAB. If only one RGB value or color name is provided, all areas
%         are treated equally. If this parameter is not specified, colors are
%         determined by the corresponding lines.
%
%       - 'FillAlpha' specifies the transparency of the fillings. This should
%         be a vector of length N, where each entry specifies the alpha value
%         for each area. If only one alpha value is provided, all areas are
%         treated equally. If this parameter is not specified, an alpha value
%         of 0.3 is used for all areas.
%
%   See also PLOT.

% Copyright (c) 2018 Javier Montalt Tordera.
% https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/69652-filled-area-plot

% accepted params
names = {'FillType','FillColor','FillAlpha'};

% init fill params
fp = cell(1,3);

% extract filling parameters, if present
for n = 1:length(names)
    for i = 1:length(varargin)
        % if found
        if strcmpi(names{n},varargin{i})
            if i+1 > nargin
                error(["Expected an input value after the name '" names{i} "'."]);
            end
            % save filling info
            fp{n} = varargin{i+1};
            % delete from varargin array - otherwise plot will fail as it won't
            % understand the input
            varargin(i:i+1) = [];
            break;
        end
    end
end

```

```
% check if an axes object was specified
if isscalar(varargin{1}) && ishandle(varargin{1}(1))
    ax = varargin{1};
else
    ax = gca;
end

% initial hold state
tf = ishold(ax);

% plot lines
ls = plot(varargin{:});
hold(ax,'on');

% provide default filling params
fd = fp{1};
fc = fp{2};
fa = fp{3};

% validate fill type
fd = validatetype(fd,ls);

% number of fillings
nf = size(fd,1);

% validate fill color
fc = validatecolor(fc,fd,ls,nf);

% validate fill alpha
fa = validatealpha(fa,nf);

% array to hold patch objects
ps = gobjects(nf,1);

% for each filling
for i = 1:nf

    x = cell(1,2);
    y = cell(1,2);

    % get data
    for j = 1:2
        switch fd(i,j)
            case {-2,-1}
                y{j} = ylim;
                y{j} = y{j}(abs(fd(i,j)));
            case 0
                y{j} = 0;
            otherwise
                x{j} = ls(fd(i,j)).XData;
                y{j} = ls(fd(i,j)).YData;
        end
    end

    if isequal(x{1},x{2})
        x = x{1};
    elseif isempty(x{1})
        x = x{2};
        y{1} = y{1} * ones(size(x));
    elseif isempty(x{2})
        x = x{1};
```

```
        y{2} = y{2} * ones(size(x));
    else
        x = sort([x{1} x{2}]);
        y{1} = interp1(x{1},y{1},x,'linear','extrap');
        y{2} = interp1(x{2},y{2},x,'linear','extrap');
    end

    % crossings
    x0 = [x(1) zcross(x,y{1} - y{2}) x(end)];
    y0 = interp1(x,y{1},x0);

    % for each zero-crossing
    for j = 0:length(x0)-2

        % index
        idx = x >= x0(j+1) & x <= x0(j+2) & y{1} >= y{2};
        if all(~idx), continue; end

        % polygon corners
        xv = [x0(j+1) x(idx) x0(j+2) fliplr(x(idx))];
        yv = [y0(j+1) y{1}(idx) y0(j+2) fliplr(y{2}(idx))];

        % fill polygon
        ps(i) = fill(ax,xv,yv,fc(i,:),'LineStyle','none','FaceAlpha',fa(i));
    end
end

% release if the hold state was off when called
if tf == 0
    hold(ax,'off');
end

% set output argument if requested
if nargout == 1
    h = [ls;ps];
end

end


function z = zcross(x,y)
% find zero crossings of line Y versus X

% logical index
c = y > 0;

% find point pairs where there is a sign change
d = abs(diff(c));
p1 = find(d == 1);  % before change
p2 = p1 + 1;        % after change

% zero-crossing positions
z = x(p1) + abs(y(p1)) ./ (abs(y(p1)) + abs(y(p2))) .* (x(p2) - x(p1));
end


function fd = validatetype(fd,ls)

% if no filling specified, fill to x-axis
if isempty(fd)
    fd = [(1:length(ls))' zeros(size(ls))];
```

```
    fd = [fd;fliplr(fd)];
    fd = fd([1:2:length(fd) 2:2:length(fd)],:);
end

% if the filling was specified in cell form, convert to matrix
if iscell(fd)
    tmp = zeros(size(fd));
    for i = 1:numel(fd)
        if ischar(fd{i})
            tmp(i) = str2ind(validatestring(fd{i},{'axis','bottom','top'},'shade','FillType'));
        else
            validateattributes(fd{i},{'numeric'},{'scalar'},'shade','FillType');
            tmp(i) = fd{i};
        end
    end
    fd = tmp;
end

validateattributes(fd,{'numeric'},{'integer','size',[nan 2],'>=',-2,'<=',length(ls)},'shade','FillType');
end


function fc = validatecolor(fc,fd,ls,nf)

% if no color specified, get it from plot lines
if isempty(fc)
    fc = zeros(nf,3);
    for i = 1:nf
        if fd(i,1) <= 0
            fc(i,:) = ls(fd(i,2)).Color;
        elseif fd(i,2) <= 0
            fc(i,:) = ls(fd(i,1)).Color;
        else
            fc(i,:) = mean([ls(fd(i,1)).Color;ls(fd(i,2)).Color],1);
        end
    end
end

% if length 1, repeat
if ischar(fc)
    fc = {fc};
    fc = repmat(fc,nf,1);
elseif (iscell(fc) && numel(fc) == 1) || (~iscell(fc) && size(fc,1) == 1)
    fc = repmat(fc,nf,1);
end

% if color is specified in cell form, convert to matrix
if iscell(fc)
    validateattributes(fc,{'cell'},{'vector','numel',nf},'shade','FillColor');
    tmp = zeros(numel(fc),3);
    for i = 1:numel(fc)
        if ischar(fc{i})
            tmp(i,:) = str2rgb(validatestring(fc{i},{'y','m','c','r','g','b','w','k','yellow','magenta','cyan','red','green','blue','white','black'},'shade','FillColor'));
        else
            validateattributes(fc{i},{'numeric'},{'vector','numel',3},'shade
```

```
                ','FillColor');
            if iscolumn(fc{i})
                fc{i} = fc{i}';
            end
            tmp(i,:) = fc{i};
        end
    end
    fc = tmp;
end

validateattributes(fc,{'numeric'},{'real','size',[nf 3],'>=',0,'<=',1},'shade','FillColor');
end


function fa = validatealpha(fa,nf)

% if no alpha specified, choose a value of 0.2
if isempty(fa)
    fa = 0.3 * ones(nf,1);
end

% if length 1, repeat
if length(fa) == 1
    fa = repmat(fa,nf,1);
end

if isrow(fa)
    fa = fa';
end

validateattributes(fa,{'numeric'},{'real','vector','numel',nf,'>=',0,'<=',1},'shade','FillAlpha');
end


function n = str2ind(s)

% convert string to index
switch s
    case 'axis'
        n = 0;
    case 'bottom'
        n = -1;
    case 'top'
        n = -2;
end

end


function n = str2rgb(s)

% convert string to RBG triplet
switch s
    case {'y','yellow'}
        n = [1 1 0];
    case {'m','magenta'}
        n = [1 0 1];
    case {'c','cyan'}
        n = [0 1 1];
```

```
    case {'r','red'}
        n = [1 0 0];
    case {'g','green'}
        n = [0 1 0];
    case {'b','blue'}
        n = [0 0 1];
    case {'w','white'}
        n = [1 1 1];
    case {'k','black'}
        n = [0 0 0];
end

end
```