Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

LES PARADOXES DE ZENÓ: AQUIL·LES I LA TORTUGA

Autor: Jesús Sánchez Rodríguez

Director: Dr. Carlos Dorce Polo

Realitzat a: Departament de matemàtiques i informàtica

Barcelona, 24 de gener de 2021

Abstract

The main goal of this work is to investigate the mathematical tools that have been used throughout history in the study of the paradox of Achilles and the tortoise and review some resolution attempts proposed by some of the greatest minds of mankind as well as to give my own point of view in this matter.

Resum

L'objectiu principal d'aquest treball és investigar les eines matemàtiques que han sigut utilitzades al llarg de la història en l'estudi de la paradoxa d'Aquil·les i la tortuga i analitzar els intents de resolució proposats per algunes de les millors ments de la humanitat així com donar el meu punt de vista en aquest tema.

2010 Mathematics Subject Classification. 01A05, 03E10

Agraïments

Vull agrair al doctor Carlos Dorce l'oportunitat que m'ha sigut brindada de poder estudiar en profunditat aquesta paradoxa que tants anys portava repetint-se dins el meu cap.

Índex

1 El concepte de paradoxa

1.1 Origen

"En un llunyà poblat d'un antic emirat hi havia un barber anomenat As-Samet, destre a afaitar caps i barbes, mestre a esporgar peus i a posar sangoneres. Un dia, l'emir es va adonar de la falta de barbers a l'emirat, i va ordenar que els barbers només afaitessin aquelles persones del poble que no poguessin fer-ho per si mateixes. Un dia, l'emir va cridar As-Samet perquè l'afaités i ell li va explicar les seves angoixes: - Al meu poble sóc l'únic barber. No puc afaitar el barber del meu poble -que sóc jo-, ja que llavors puc afaitar-me per mi mateix i està prohibit! Però, si en canvi no m'afaito, llavors algun barber m'ha d'afaitar, però ja he dit que sóc l'únic barber del meu poble! L'emir va pensar que els seus pensaments eren tan profunds que el va premiar amb la mà de la més virtuosa de les seves filles. Així, el barber As-Samet va viure per sempre feliç."

Aquesta és la famosa paradoxa del barber, una curta història que encapsula la paradoxa de Russell, ideada per ell mateix en l'any 1901, que fou suficient per demostrar que la teoria de conjunts formulada per Georg Cantor (San Petersburg, 1845 – Halle, 1918) i Gottlob Frege (Wismar, 1848 – Bad Kleinen, 1925) era contradictòria.

Tothom ha escoltat i, probablement, pronunciat la paraula paradoxa, però què és, realment, una paradoxa? La paraula paradoxa prové del llatí "*paradoxus*", que alhora prové del grec "$\pi\alpha\rho\alpha\delta o\xi\alpha$", unió de *para*: contrari i *doxo*: opinió. Per tant, podríem dir que etimològicament una paradoxa és una opinió o idea contraria a la opinió comuna. Aquesta definició es prou bona pel llenguatge natural, però manca precisió i detall necessaris per estudiar el concepte de paradoxa.

1.2 Definició i tipus

El filòsof nord-americà Williard Van Orman Quine (Akron, 1908 - Boston, 2000) proposà una definició de paradoxa[1] i en va distingir tres tipus.

Definició 1.1. *Una paradoxa és un argument, aparentment reeixit, que té com a conclusió una proposició que sembla absurda o falsa.*

Observació 1.2. Un pot adonar-se de que aquesta definició de paradoxa no ens dóna una caracterització ni universal ni atemporal, és completament dependent de l'entorn on es formula i és possible que un enunciat deixi de ser considerat una paradoxa un cop s'hagi analitzat amb més cura o eines més avançades.[1]

Definició 1.3. *Una paradoxa es diu que és verídica si la seva conclusió és, contràriament al que pensàvem, certa.*

[1]Es pot trobar una variació d'aquesta definició a [2], encara que tampoc és ni atemporal ni universal.

Exemple 1.4. La paradoxa de Monty Hall és un exemple de paradoxa verídica:

Suposa que ara estàs a un programa de televisió i et deixen triar tres portes: darrere d'una hi ha un cotxe; rere les altres, cabres. Tries una porta, per exemple, la primera, i el presentador, que sap què hi ha darrere les portes, n'obre una altra, per exemple, la tercera, que té una cabra. Després et pregunta: "Vols canviar a la porta 2?". Hi surts guanyant canviant el que havies triat?

Com Marilyn vos Savant respongué en la seva columna "*Ask Marilyn*" del diari *Parade* l'any 1990, si un vol maximitzar les seves probabilitats de guanyar el cotxe el que hauria de fer és canviar de porta. Aquest problema consisteix en un exercici de probabilitat condicionada bàsic, tanmateix, resulta molt contraintuïtiu i la resposta, encara que correcta, fou criticada per diversos doctors en matemàtiques.

Exemple 1.5. Un altre exemple de paradoxa verídica és la paradoxa de Simpson.

Definició 1.6. *Una paradoxa es diu que és falsídica si la seva conclusió és efectivament falsa, però conté una fal·làcia que és responsable de portar-nos a la conclusió.*

Exemple 1.7. Una paradoxa falsídica àmpliament coneguda, encara que n'hi ha moltes versions, és la que prova que $2 = 1$: siguin $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{gathered} a = b \\ a^2 = a \times b \\ a^2 - b^2 = ab - b^2 \\ (a-b)(a+b) = b(a-b) \\ a + b = b \\ b + b = b \\ 2b = b \\ 2 = 1 \end{gathered}$$

□

L'error, o la fal·làcia, es troba en el pas entre la quarta i la cinquena línia, ja que es divideix entre $(a - b)$ en ambdues bandes, però això no és possible degut al fet que $a - b = 0$ i que no és pot dividir per 0.

Definició 1.8. *Una paradoxa es diu que és antinòmica si hi ha una incompatibilitat en l'enunciat de la mateixa que provoca una contradicció a l'hora d'acceptar les premisses i la conclusió.*

Exemple 1.9. Un exemple molt aclaridor de paradoxa antinòmica és: *aquest enunciat és fals.* Si acceptem que l'enunciat és fals, aleshores el que diu es mentida, però si el que diu és mentida aleshores no pot ser un enunciat fals, ja que és el que diu.

Com el mateix Quine digué, les paradoxes antinòmiques provoquen una crisi de pensament i és completament possible que el que una persona consideri una paradoxa antinòmica sigui considerada per algú altre com una paradoxa falsídica o verídica. La diferència en la caracterització de la paradoxa provindria d'una diferència de coneixements entre els individus.

Així doncs, per enfrontar una paradoxa, de la mateixa manera que per qualsevol problema matemàtic obert, és possible que calgui inventar eines que ens permetin tractar l'enunciat amb suficient rigor.

2 Les paradoxes de Zenó

2.1 Context

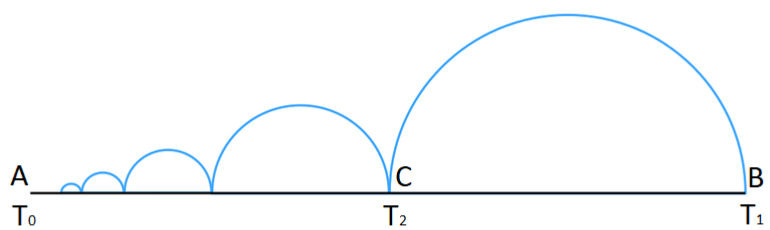
Durant el segle IV a.C. es va engendrar un dels debats filosòfics més importants de la filosofia presocràtica. D'una banda Heràclit (Efes, c. 540 a.C. – Efes, c. 480 a.C.) afirmava que la totalitat de les coses estaven en constant moviment; el seu pensament es pot resumir en *Panta rei*, tot flueix. Ell afirmà que "*en els mateixos rius entrem i no entrem, doncs som y no som els mateixos*"significant que tant nosaltres com el riu canviem en tot moment. En contraposició, Parmènides d'Elea (Elea, c. 515 a.C. - s.V a.C.) defensà la unitat del *Ser* i la impossibilitat del canvi: "*No hi ha res, ni hi haurà, fora del Ser, ja que el destí ho encadenà en una totalitat immòbil*". En el context d'aquest debat, Zenó d'Elea (Elea, c. 490 a.C. - Elea, 430 a.C.), deixeble de Parmènides formulà una sèrie d'apories a fi de defensar les teories del seu mestre. Aquests arguments en contra del moviment i la pluralitat són el que va passar a conèixer-se com les paradoxes de Zenó.

Segons Procle (Constantinoble, 412 - Atenes, 485), Zenó va plantejar un total de quaranta paradoxes, de les quals moltes han acabat esvaint-se en no res. Tot i això es conserven els enunciats d'unes quantes gràcies a texts com *Física* d'Aristòtil (Estagira, 384 a.C. - Calcis, 322 a.C.) o el comentari de Simplici de Cilícia (Cilícia, 490 - Atenes, 560) d'aquesta mateixa obra.

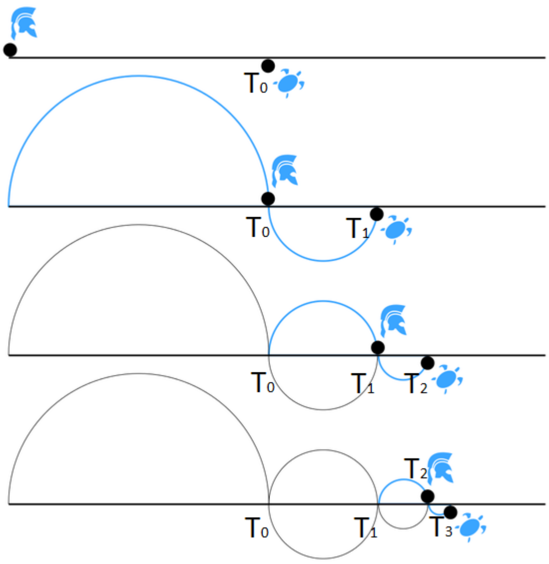
2.2 Enunciats

Enunciem, doncs, quatre de les paradoxes de Zenó contra el moviment en les quals troba contradiccions en la naturalesa de la divisibilitat de l'espai i el temps:

1. **Paradoxa de la dicotomia**: Si hom parteix del punt A en un instant T_0 i vol arribar a B en un instant T_1, primer haurà d'arribar al punt C en un instant, diguem-li, T_2, però abans d'arribar a C s'haurà arribat al lloc intermedi entre A i C i abans al lloc intermedi entre A i aquest lloc; i aquest procés d'arribar al punt intermedi es pot repetir infinitament. O sigui que per tal d'arribar a B s'haurà de fer una quantitat infinita de moviments en un temps finit, cosa que no és possible.



2. **Paradoxa d'Aquil·les i la tortuga**: Es tracta d'una cursa entre el llegendari heroi Aquil·les, el més ràpid del clàssics, i una tortuga, un dels animals més lents. Com que no sembla que la tortuga pugui competir contra ell, Aquil·les li ofereix començar en una posició avançada a la seva, diguem-li T_0. Així doncs, abans d'arribar al final de la cursa Aquil·les ha d'arribar a aquest punt T_0, però en el temps que Aquil·les trigui a fer-ho la tortuga haurà avançat a la posició T_1, així que, altre cop, abans d'arribar al final de la cursa, o d'avançar a la tortuga, Aquil·les ha d'arribar al punt T_1; i quant hi arribi la tortuga es trobarà, ara, a T_2 i Aquil·les tindrà que córrer durant un cert temps per tal d'arribar a T_2. Com que aquest procés es repeteix infinitament, Aquil·les no pot pas guanyar a la tortuga.



3. **Paradoxa de la fletxa**: "Si sempre tot el que està en un lloc igual a si mateix està en repòs, i si el que es desplaça està sempre en un "ara", aleshores la fletxa que vola està immòbil."[3]

   Pot resultar aclaridor saber que s'està suposant que el temps està compost per instants indivisibles i formalitzar aquest enunciat:

   (a) **Premisa 1**: Tot el que ocupi un lloc igual a si mateix es troba en repòs.

   (b) **Premisa 2**: En el present, el que es mou ocupa un lloc igual a si mateix.

   (c) **Conclusió 1**: En el present, el que es mou es troba en repòs.

   (d) **Premisa 3**: Tot el que es mou es mou en el present.

   (e) **Conclusió 2**: Tot el que es mou es troba, durant el seu moviment, en repòs.

   Una versió simplificada de la paradoxa seria dir que la fletxa disparada per un arquer en cada instant del seu vol ocupa una posició ben determinada, i en aquest instant es troba immòbil. Però si a cada instant la fletxa es troba immòbil, aquesta ha de romandre immòbil.

4. **Paradoxa de l'estadi**: Imagini tres files formades per quatre atletes que ocupen la quantitat mínima d'espai possible, o sigui que són punts, unitats indivisibles d'espai, i estan junts sense deixar cap espai entre ells, anomenem-les files A, B i C. Els atletes de la fila A estan quiets mentre que la fila B es mou cap a la dreta i la fila C cap a l'esquerra a la mateixa velocitat. Suposem que en un instant, o unitat indivisible de temps, l'atleta A2 es troba sobre B1 i els atletes A3 i C1 es troben en una situació anàloga:

		A1	A2	A3	A4		
B4	B3	B2	B1	→			
			←	C1	C2	C3	C4

En el següent instant, quan les files B i C s'hagin mogut, tindrem que B1 es troba sobre C2 i que C1 es troba sota B2, o sigui que B1 i C1 s'han creuat:

		A1	A2	A3	A4		
	B4	B3	B2	B1	→		
		←	C1	C2	C3	C4	

Però què passa si ens preguntem quant havia avançat la fila B quan B1 es creua amb C1? En altres paraules, quants atletes de A ha avançat B1 per creuar-se completament, o sigui passar d'estar B1 i C1 enfrontats a estar una sobre l'altre? No pot ser $A_1/2$, ja que hem dit que cada atleta era un punt indivisible de l'espai. D'aquí Zenó conclou que el temps que B1 triga a avançar una quantitat indivisible d'espai (passa d'estar sota A2 a estar sota A3) és el mateix que triga en avançar dos quantitats indivisibles d'espai: C1 i C2.

Per tant, la fila B o bé ha avançat una i dues vegades la quantitat mínima d'espai i per tant l'espai és el doble de si mateix o bé el temps és el doble de si mateix si hom argumenta que és necessari un instant per moure's un punt, ja que B hauria necessitat un instant degut a l'avanç d'un punt d'A i dos instants degut a l'avanç de dos punts de C.

Es pot crear un escenari equivalent en el qual s'estudia la interacció entre A, B i C quan la posició és la següent:

		A1	A2	A3	A4		
		B4	B3	B2	B1	→	
	←	C1	C2	C3	C4		

Com és possible que en el mateix lapse de temps la fila B hagi avançat dos unitats indivisibles de punts d'A i quatre de C?

3 Aristòtil

3.1 Influència

Aristòtil fou el pensador antic per excel·lència, aquest polímata escriví prop de duescentes obres sobre gran varietat de temes, des de lògica i filosofia fins a física, biologia i retòrica. Ell transformà per si sol, si no totes, moltes àrees del coneixement humà que abordà. Encara que moltes de les seves tesis, com la teoria de la generació espontània, han quedat obsoletes, és considerat el pare fundador de la lògica i del pensament científic.

3.2 La física

En la seva obra *Física*, Aristòtil desenvolupa les seves idees respecte el moviment, l'infinit, l'espai, el buit, el temps i la divisibilitat de l'espai i del temps, entre altres temes.

És precisament al llibre VI on es poden trobar els enunciats de les paradoxes abans escrites i els contraarguments pertinents d'Aristòtil. Com que no ens centrarem en el valor filosòfic del text, vegem un breu resum[2] d'alguns dels capítols anteriors a la refutació de les paradoxes per tal de tenir més clar el seu punt de vista:

Capítol 1

És impossible que un continu (línia, temps, moviment) estigui format per indivisibles. Tampoc un punt (o ara, vist com a instant temporal, o moviment puntual) pot seguir a un altre en successió. Demostració per reducció a l'absurd de la impossibilitat dels indivisibles en el moviment.

Capítol 2

Argument contra els indivisibles pels graus de rapidesa i lentitud. Prova de la continuïtat del temps pel mateix argument. Paral·lelisme entre la continuïtat del temps i la magnitud; paral·lelisme entre la infinitud d'ambdós. Crítiques d'un argument de Zenó contra el moviment (una variació de la paradoxa de la dicotomia): la noció de la divisibilitat infinita. Dues proves de que no es requereix un temps infinit per recórrer una distància finita. Cap continu és indivisible.

[2]Es tracta de petites modificacions dels que es troben a [3].

Capítol 3

L'"ara"divisor del temps és indivisible; prova de que els extrems del temps són un únic i idèntic "ara". No hi ha moviment ni repòs en un "ara", doncs ambdós ocupen temps.

Capítol 4

Tot el que canvia és divisible. Divisibilitat del moviment: i) segons els moviments de les parts del que sigui mogut; ii) pel que fa al temps. Moviment, temps ocupat, estar en moviment i allò en el qual (distància, quantitat, qualitat) hi ha moviment són tan divisibles com la cosa moguda (la qualitat només accidentalment[3]).

Capítol 5

Dues proves de que la compleció del canvi succeeix en un límit. Caràcter indivisible del "quan"previ a la compleció del canvi. Hi ha un moment primer de compleció, però la divisibilitat impedeix parlar d'un primer "quanïnicial del canvi. Tampoc es pot parlar d'una primera part del canvi; restricció sobre els canvis qualitatius.

Capítol 6

Quelcom que canvia ha de canviar en alguna part, per petita que sigui, del "temps propi". Conseqüències: el que ha complert un canvi ha d'haver estat canviant abans, i el que està canviant ha d'haver complert algun canvi. L'anàleg en el cas d'arribar a ser i perir. Conclusió: no és possible parlar de res anterior i irreductible en un canvi.

Capítol 7

No pot haver-hi un moviment finit, uniforme o no, en un temps infinit, ni un moviment infinit en un temps finit. Raons: i) perquè el temps total que ocupa serà finit, i el mateix passa si no és uniforme; ii) perquè en cada part del temps només recorrerà una magnitud parcial. Tampoc en un temps finit una magnitud finita pot recórrer una magnitud infinita, ni una magnitud infinita pot recórrer una magnitud finita o infinita.

[3] Aquí accidentalment té el significat metafísic de la paraula. Segons Aristòtil ho defineix a *Metafísica*: accident es diu del que es troba en un ésser i pot afirmar-se amb veritat, però que no és ni necessari ni ordinari.

Capítol 8

Tot el que s'està detenint es mou. El que s'està detenint ha de detenir-se en alguna part del temps abans de la detenció, però és impossible establir aquest moment. L'equivalent pel repòs.

3.3 Les seves refutacions

Com que no em vull estendre en el contingut filosòfic de les seves anàlisis, assumiré que el lector coneix conceptes metafísics aristotèlics com la diferència entre ser en acció i ser en potència. Cal destacar que mentre en la paradoxa de la Zenó considera que el temps i l'espai són infinitament divisibles, en la paradoxa de la fletxa considera que només el temps és infinitament divisible i li atorga a l'espai la propietat de ser, estrictament, finitament divisible. En canvi, en la paradoxa de l'estadi trobem la situació contraria a la d'Aquil·les la tortuga: tant l'espai com el temps són finitament divisibles i no pas infinitament divisibles.

Vegem ara com Aristòtil s'enfronta a les paradoxes en el capítol 9:

Per Aristòtil, el concepte d'"ara", no com a lapse de temps, sinó com a instant de temps, és necessàriament indivisible i "*és el límit extrem entre el passat, i en ell no hi ha res del futur, i és també el límit extrem del futur, i en ell no hi ha res del passat; justament per això diem que és el límit d'ambdós*".[4] Però no accepta la idea de que el temps estigui format per una successió d'"ares"si no que formen un continu i, com veu al capítol 3, no hi ha moviment ni repòs en un "ara". Així doncs la paradoxa de la fletxa la rebutja establint definicions rigoroses de què i com són el temps, l'espai i el moviment.

La paradoxa de l'estadi la desestima argüint que "*pensar que un cos ocupa un temps igual a passar a un cos que està en moviment, amb igual velocitat, i un altre d'igual magnitud que està en repòs*"[5] és un error. En efecte, si la fila B es mou amb velocitat V m/s cap a la dreta respecte a la fila A i si la fila C es mou amb velocitat V m/s cap a l'esquerra respecte de la fila A, llavors la fila C es mou amb velocitat $V + V = 2V$ cap a l'esquerra respecte de la fila B. I per tant, mentre que els B viatgen el doble de distància respecte de la fila C que de la fila A (ja que si poséssim una càmera en C1 veuríem com la fila B recorre la distància $AB + AC$ i la fila A només es mouria AC), ho fan al doble de la velocitat relativa i, per tant, els temps són els mateixos en qualsevol sentit.

Finalment, la paradoxa de la dicotomia i la d'Aquil·les i la tortuga les considera equivalents i diferencia la qualitat d'una magnitud de ser infinita segons ser infinit per divisió, o sigui, poder ser dividit en infinites parts o ser infinitament divisible, i ser infinit pels seus extrems, o sigui, ser infinit en extensió, que la magnitud tingui els extrems infinitament separats. Tanmateix, reconeix que una magnitud finita, com podria ser una distància finita, és infinita, en el sentit de divisió, només en potència i no en acció. D'aquesta forma argumenta que Aquil·les no ha de fer una

[4] Extret de [3], pàgina 210.
[5] Extret de [3], pàgina 235.

quantitat infinita d'accions per guanyar la cursa. I sobre aquesta paradoxa afegeix a la pàgina 234 de [3]: "*és fals pensar que el que va davant (la tortuga) no pot ser atrapat; certament, no serà atrapat mentre vagi davant, però serà atrapat si s'admet que la distància a recórrer és finita*".

3.4 Eines insuficients

Com a matemàtic modern, hom hauria de reconèixer certs conceptes analítics en el text d'Aristòtil. A l'hora de tractar la paradoxa de la fletxa, quan defineix el concepte d'"ara"podem observar que l'està definint com la cota superior del passat i la cota inferior del futur; quan nega que el temps o una línia, com a continus, no són una seqüència d'instants o punts, d'alguna forma està afirmant que no és possible posar en bijecció un conjunt numerable, que seria la successió d'instants o punts consecutius, amb un interval del continu, o sigui, un interval de $\mathbb{R}$; o sigui que $\mathbb{R}$ no és numerable.

I és precisament en la paradoxa d'Aquil·les on es troba més dificultats, ja que no disposa d'eines matemàtiques suficients d'anàlisi de sèries per tractar amb més profunditat el que diu en el darrerament citat. Ens calen doncs, artilugis matemàtics avançats per tal de concloure la seva anàlisi i respondre preguntes com: serà, realment, atrapat? Quan ho serà? On ho serà?

A partir d'ara, com que les paradoxes de la dicotomia i Aquil·les i la tortuga són les que presenten un interès matemàtic més profund i com que aquestes són equivalents, em centraré en l'estudi de la paradoxa d'Aquil·les i la tortuga.

4 Anàlisi matemàtica

4.1 Breu resum històric

Matemàtics de la Grècia clàssica com Èudox de Cnidos (Cnidos, c. 400 a.C. - ibidem, c. 347 a.C.) i Arquimedes (Siracusa, c. 287 a.C. - ibidem, c. 212 a.C.) ja feren ús de conceptes matemàtics com límit i convergència, encara que fos sense haver-los desenvolupat, quan el primer desenvolupà i el darrer emprà el mètode d'exhaustió per calcular una aproximació de la raó entre la longitud d'una circumferència i el seu diàmetre (π) durant el quart i el tercer segle abans de Crist. Tot i això, pel que fa a eines analítiques van caldre uns dos mil anys per tal de fer un salt generacional notable.

Va ser a finals del segle XVII i principi del XVIII que s'establiren els fonaments moderns de l'anàlisi matemàtica; això fou quan Newton (Woolsthrope, 1643 - Londres, 1727) i Leibniz (Leipzig, 1646 - Hannover, 1716) publicaren les seves obres sobre el càlcul diferencial i integral i altres treballs relacionats amb les funcions i sèries com el mètode numèric de Newton, també conegut com mètode de Newon-Raphson, introduït a "*De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*"o el criteri de Leibniz.

Durant el segle XVIII es van desenvolupar diversos temes com el càlcul de variacions, on destacaren Lagrange (Torí, 1736 - París, 1813) i Euler (Basilea, 1707 - San Petersburg, 1783) amb el seu "*Elementa Calculi Variationum*"publicat l'any 1756, i l'anàlisi harmònica fruit de l'obra de Joseph Fourier (Auxerre, 1768 - París, 1830). Durant aquest segle el concepte de funció no havia sigut definit en termes actuals i algunes demostracions mancaven el rigor que avui dia s'exigeix.

En el segle XIX Augustin Louis Cauchy (París, 1789 - Sceaux, 1857) fou el primer en establir fonaments matemàtics ferms i qui imposà un tractament estricament rigorós a l'hora de demostrar enunciats matemàtics. Pocs anys més tard, Karl Weierstrass (Osetenfelde, 1815 - Berlín, 1897) formalitzaria el concepte de límit d'una funció en unes conferències que feu durant l'estiu de 1861 al Königlichen Gewerbeinstitut de Berlín, que passaria a conèixer-se com la definició epsilon-delta de límit.[6] A mitjans d'aquest segle Bernhard Riemann (Breselenz, 1826 - Verbania, 1866) introduí la seva teoria de la integració a "*Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*".

Va ser aleshores quan la comunitat matemàtica s'assabentà de que estaven assumint l'existència d'un continu de nombres reals; afortunadament Richard Dedekind (Brunsvic, 1831 - ibidem, 1916) construí els nombres reals emprant el seu mètode del tall de Dedekind i, finalment, com ja veurem més endavant, Georg Cantor aprofundí en aquest conjunt de nombres.

[6]Per més informació consultar [5] o [6].

4.2 Successions i sèries

Per tal de respondre les preguntes formulades al final de la secció anterior, primer definirem conceptes com successió i sèrie geomètrica i veurem unes poques propietats de les quals farem ús.

Definició 4.1. *Una successió és una aplicació* $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, *normalment representada com* $\{a_n\}_{n\geq 0}$.

Definició 4.2. *Es diu que una successió* $\{a_n\}_{n\geq 0}$ *convergeix a* l *(simbòlicament* $\lim_{n\to\infty} a_n = l$*) si per tot* $\epsilon > 0$ *existeix un nombre natural* N *tal que, per tot nombre natural* n*, si* $n \geq N$*, aleshores* $|a_n - l| < \epsilon$

Utilitzaré la noció de que $\{a_n\}_{n\geq 0}$ *tendeix cap a* l *o que té com a límit* l *de forma equivalent a que* $\{a_n\}_{n\geq 0}$ *convergeix cap a* l.

Teorema 4.3. *Sigui* $\{a_n\}_{n\geq 0}$ *una successió, si té límit aquest és únic.*

Demostració. Suposem que té dos límits: l_1 i l_2. Aleshores

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_1,\, n_2 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq n_1 \ |a_n - l| < \epsilon \text{ i } \forall n \geq n_2 \ |a_n - l| < \epsilon$$

Si definim $n_0 = max(n_1, n_2)$ tenim que $\forall \epsilon > 0$, $\forall n \geq n_0$

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - a_n + a_n - l_2| \leq |l_1 - a_n| + |a_n - l_2| < 2\epsilon$$

I per hipòtesi $|l_1 - l_2| = d$, que és contradictori:

$$\exists \epsilon \text{ tal que } 2\epsilon < d \Rightarrow d = |l_1 - l_2| < 2\epsilon < d!!!$$

Per tant, el límit, si existeix, és únic. □

Teorema 4.4. *(Teorema del sandvitx) Siguin* $\{a_n\}_{n\geq 0}$*,* $\{b_n\}_{n\geq 0}$ *i* $\{c_n\}_{n\geq 0}$ *tres successions que compleixen* $a_n \leq b_n \leq c_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$*, si la primera i la tercera convergeixen a* l*, aleshores*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = l$$

Demostració. Donat $\epsilon > 0$, per la convergència de $\{a_n\}_{n\geq 0}$ i $\{c_n\}_{n\geq 0}$, existeix un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, aleshores

$$-\epsilon < a_n - l \leq b_n - l \leq c_n - l < \epsilon$$

Ja que $|a_n - l| < \epsilon$ i $|c_n - l| < \epsilon$ i $a_n - l \leq b_n - l \leq c_n - l$.

Per tant, $|b_n - l| < \epsilon$, com requereix la definició de límit. □

Definició 4.5. *Es diu que una successió* $\{a_n\}_{n\geq 0}$ *és monòtona no decreixent si* $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq a_{n+1}$.

Definició 4.6. *Es diu que una successió* $\{a_n\}_{n\geq 0}$ *està acotada superiorment si* $\exists M \in \mathbb{R}$ *tal que* $\forall n \in \mathbb{N}$ $|a_n| \leq M$.

Teorema 4.7. *Sigui una successió $\{a_n\}_{n\geq 0}$ monòtona no decreixent i acotada superiorment, aleshores $\{a_n\}_{n\geq 0}$ convergeix.*

Demostració. Definim $A := \{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_n = x\}$. Com que $\{a_n\}_{n\geq 0}$ està acotada superiorment, A té una cota superior mínima $\alpha := \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Cal veure que $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$. En efecte, donat $\epsilon > 0$ $\exists a_N$ que satisfà $\alpha - a_N < \epsilon$, ja que α és la cota superior mínima de A. Aleshores, per la monotonia de $\{a_n\}_{n\geq 0}$, tenim que si $n > N$

$$a_n > a_N \text{ i, per tant, } \alpha - a_n \leq \alpha - a_N \leq \epsilon.$$

Això demostra que $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ per la definició de límit. □

Proposició 4.8. *Siguin $\{a_n\}_{n\geq 0}$ i $\{b_n\}_{n\geq 0}$ dues successions convergents. Aleshores la successió $\{a_n b_n\}_{n\geq 0}$ és convergent i*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n$$

Demostració. Anomenem $l = \lim_{n\to\infty} a_n$, $l' = \lim_{n\to\infty} b_n$. Observem que

$$|a_n b_n - ll'| = |a_n b_n - a_n l' + a_n l' - ll'| \leq |a_n||b_n - l'| + |a_n - l||l'|$$

Per tant, com que les successions convergents estan acotades superiorment per un $C \in \mathbb{R}$, tenim que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq C$ i $|b_n| \leq C$ $\epsilon > 0$. Podem suposar que $|l'| \leq C$. Per tant, donat $\epsilon > 0$ agafem m tal que si $n \geq m$ es compleixi $|a_n - l| < \epsilon/2C$ i $|b_n - l'| < \epsilon/2C$, aleshores $\forall n \geq m$

$$|a_n b_n - ll'| < C\frac{\epsilon}{2C} + \frac{\epsilon}{2C}C = \epsilon$$

Per tant, per la definició de límit tenim que

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ll' = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n$$

□

Definició 4.9. *La successió $\{a_n\}_{n\geq 0}$ és sumable si la successió de sumes parcials $\{S_n\}_{n\geq 0}$ convergeix, on*

$$S_n := a_1 + ... + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

En cas de ser convergent, es designa $\lim_{n\to\infty} S_n$ per

$$S := \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

S s'anomena la suma de la successió $\{a_n\}_{n\geq 0}$.

Definició 4.10. *Una sèrie és un parell de successions* $(\{a_n\}_{n\geq 0}, \{S_n\}_{n\geq 0})$*, on* $\{a_n\}_{n\geq 0}$ *és una successió qualsevol i* $\{S_n\}_{n\geq 0}$ *és la successió de sumes parcials.*

Definició 4.11. *Una sèrie* $(\{a_n\}_{n\geq 0}, \{S_n\}_{n\geq 0})$ *és convergent si la successió* $\{a_n\}_{n\geq 0}$ *és sumable.*

Definició 4.12. *Es diu que una sèrie és una sèrie geomètrica de raó* r *si per algun* $r \in \mathbb{R}$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k$$

O, equivalentment, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$a_n = r^n$$

Teorema 4.13. *Sigui* $(\{a_n\}_{n\geq 0}, \{S_n\}_{n\geq 0})$ *una sèrie geomètrica on* $|r| < 1$*, aleshores aquesta és convergent i*

$$S := \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

Demostració. Tenim que

$$S_n = 1 + r + \cdots + r^n$$

$$rS_n = \qquad r + \cdots + r^n + r^{n+1}$$

Per tant,

$$S_n(1-r) = 1 - r^{n+1}$$

O, equivalentment

$$S_n = \frac{1-r^{n+1}}{(1-r)}$$

La divisió per $1-r$ és vàlida perquè $|r| < 1$ i com que $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ tenim que

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r} \tag{4.1}$$

□

Corol·lari 4.14. *Una petita generalització d'aquest teorema és* $\sum_{n=0}^{\infty}(cr^n)$*,* $c \in \mathbb{R}$*. En aquest cas podem seguir la mateixa demostració i arribar a la següent variació de l'equació (4.1)*

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} cr^n = \lim_{n\to\infty} \frac{c - cr^{n+1}}{1-r} = \lim_{n\to\infty} c\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

I per tant, aplicant el teorema 4.13 obtenim

$$S = c \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{c}{1-r}$$

Com que el tractament pel cas $c = 1$ és exactament igual que pel cas $c \neq 1$ anomenarem també sèrie geomètrica a aquest darrer tipus d'expressions.

Totes aquestes propietats de les sèries i successions ens seran útils a l'hora d'analitzar la paradoxa d'Aquil·les i la tortuga perquè l'enunciat d'aquesta és tal que indueix un moviment d'estil successiu tant a Aquil·les com a la tortuga. En efecte, com que en l'enunciat es menciona que Aquil·les arriba a la posició anterior de la tortuga i ella es desplaça una mica, podem associar una successió al seu moviment, on cada terme a_n de la successió representarà la posició del corredor corresponent en un cert moment n.

A més a més, veurem que també es crea una successió temporal durant aquesta cursa i que aquesta, de la mateixa manera que les de les posicions d'Aquil·les i la tortuga, també és convergent.

5 Resposta analítica

5.1 Concloent el treball d'Aristòtil

Anem, ara, a contestar les preguntes formulades al final de la tercera secció.

Problema 5.1. Si Aquil·les i una tortuga participen en una cursa on ells corren a velocitat constant i en línia recta en la mateixa direcció i sentit. Si la sortida és la línia O (vegeu Figura 1), la tortuga comença amb una certa distància d_0 d'avantatge i Aquil·les es mou més ràpid que la tortuga, serà Aquil·les capaç d'atrapar a la tortuga? En cas afirmatiu, quan? I, on?

Considerem els moments successius $1, 2, ..., n, ...$, en els que Aquil·les arriba a la posició on es trobava la tortuga en el moment anterior. La posició inicial d'Aquil·les és A_0, i podem considerar $A_0 = 0$ ja que A_0 està sobre la línia O, la posició inicial de la tortuga és T_0 i ambdues corresponen al moment 0. Anomenem A_n i T_n a la posició d'Aquil·les i la tortuga al moment n, respectivament, aleshores com que la posició ocupada per la tortuga en el moment n és la posició que ocuparà Aquil·les en el moment $n + 1$, tenim que $\forall n \in \mathbb{N}\ T_n = A_{n+1}$.

Per tot moment $n \geq 0$, $d_n := T_n - A_n$ és la distància que separa a Aquil·les de la tortuga. També podem definir $\forall n \geq 1$ la distància recorreguda entre els moments $n - 1$ i n per Aquil·les com $a_n := A_n - A_{n-1}$ i per la tortuga com $t_n := T_n - T_{n-1}$.

El següent gràfic hauria de resultar aclaridor, la fila superior és la trajectòria d'Aquil·les i la inferior la de la tortuga:

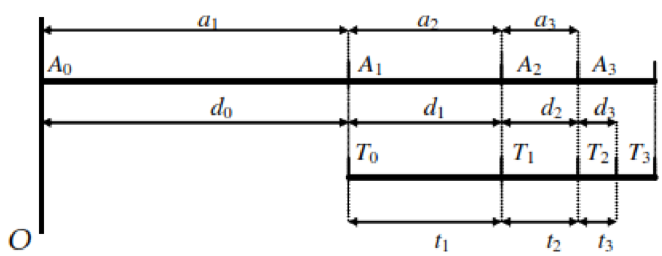


Figura 1: Representació dels tres primers moments

Així doncs, el nostre objectiu és demostrar que existeix un lloc, anomenem-lo a tal que $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = a$ i que $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = a$, és a dir, que fent tendir a infinit les successions de les posicions d'Aquil·les i de la tortuga obtenim el mateix nombre, o sigui que es creuen, i que ho fan en un temps finit.

Per fer-ho, primerament hem de veure que es compleixen unes relacions entre a_n, d_n i t_n. Mirant el dibuix es pot comprovar que

$$a_1 = d_0,\ \ a_2 = d_1,\ \ a_3 = d_2$$

i que

$$d_1 = t_1,\ \ d_2 = t_2,\ \ d_3 = t_3$$

Anem a demostrar aquest fenomen:

Proposició 5.2. $\forall n \geq 1$ $a_n = d_{n-1}$ *i* $t_n = d_n$.

Demostració. Com que $\forall n \geq 1$ $A_n = T_{n-1}$

$$\forall n \geq 1 \;\; a_n = A_n - A_{n-1} = T_{n-1} - A_{n-1} = d_{n-1}$$

$$\forall n \geq 1 \;\; t_n = T_n - T_{n-1} = T_{n-1} - A_n = d_n$$

□

També podem definir la successió $\{\tau_n\}_{n\geq 0}$ que representa el temps entre cada parella de moments. Si anomenem V_A a la velocitat d'Aquil·les i V_T a la velocitat de la tortuga, com que Aquil·les és més ràpid que la tortuga tenim que $0 < r = V_T/V_A < 1$. Això ens dóna una propietat molt important de la successió $\{d_n\}_{n\geq 0}$:

Lema 5.3. *Per a tot* $n \geq 1$ *tenim que*

$$a_n = V_A * \tau_n$$

$$t_n = V_T * \tau_n$$

Proposició 5.4. *Per a tot* $n \geq 0$ *tenim que*

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = r < 1$$

Demostració. Pel vist anteriorment i el lema 5.3 $\forall n \geq 0$ tenim

$$\left.\begin{aligned} d_{n+1} = t_{n+1} = V_T * \tau_{n+1} \\ d_n = a_{n+1} = V_A * \tau_{n+1} \end{aligned}\right\} \frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{V_T * \tau_{n+1}}{V_A * \tau_{n+1}} = \frac{V_T}{V_A} = r < 1 \tag{5.1}$$

□

Per tant, la sèrie $(\{d_n\}_{n\geq 0}, \{S_n\}_{n\geq 0})$, on $S_n = \sum_{k=0}^{n} d_k$ és convergent. En efecte, per la proposició 5.4 tenim que $d_n = d_0 r^n$ i, per tant, pel corolari 4.14

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} d_n = \sum_{n=0}^{\infty} d_0 r^n = d_0 \sum_{n=0}^{\infty} r^n = d_0 \frac{1}{1-r} = \frac{d_0}{1-r}$$

Com que $d_0, r \in \mathbb{R}$ tenim que $S \in \mathbb{R}$. Ara bé, per la proposició 5.2 $\forall n \geq 0$ tenim que $a_{n+1} = d_n$ i $t_{n+1} = d_{n+1}$, per tant

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n = S$$

I

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n = \sum_{n=0}^{\infty} (d_n) - d_0 = S - d_0$$

Vegem un teorema que ens ajudarà a calcular el límit de les posicions d'Aquil·les i de la tortuga.

Teorema 5.5. *Les successions* $\{A_n\}_{n\geq 0}$ *i* $\{T_n - d_0\}_{n\geq 0}$ *són les sumes parcials de les successions* $\{a_n\}_{n\geq 0}$ *i* $\{t_n\}_{n\geq 0}$ *respectivament.*

Demostració. Pel vist al principi de la secció sabem que $\forall n \geq 1$ $a_n := A_n - A_{n-1}$ i $t_n := T_n - T_{n-1}$. Per tant

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) = A_n - A_0 = A_n$$

$$\sum_{k=1}^{n} t_k = \sum_{k=1}^{n} (T_k - T_{k-1}) = T_n - T_0 = T_n - d_0$$

□

En l'última igualtat, si consideréssim que $T_0 = 0$ tindríem que, efectivament, és l'expressió de les sumes parcials presentada anteriorment, però hem considerat que la tortuga comença la cursa amb un avantatge d_0 respecte d'Aquil·les, per tant, l'expressió és la correcta.

Aleshores, combinant els dos últims parells d'equacions tenim que, per una banda

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} A_n$$

I per l'altra

$$S - d_0 = \sum_{n=1}^{\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} t_k = \lim_{n\to\infty} (T_n - d_0) = \lim_{n\to\infty} (T_n) - d_0$$

O sigui que

$$\begin{aligned} S&=\lim_{n\to\infty} A_n \\ S&= \lim_{n\to\infty} T_n \end{aligned} \tag{5.2}$$

En altres paraules, el que aquesta equació (5.2) ens diu és que seguint el moviment imposat per l'enunciat de la paradoxa el límit de la successió de la posició d'Aquil·les i el límit de la successió de la posició de la tortuga és el mateix. Només ens queda veure que ho fan en un temps finit per poder afirmar que es creuen. Vegem-ho.

Teorema 5.6. *En les condicions en que s'ha discutit el problema*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n = \tau \in \mathbb{R}$$

Demostració. Com que, pel lema 5.3, $\tau_n = t_n/V_T$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n = \sum_{n=1}^{\infty} (t_n/V_T)$$

I aplicant el corol·lari 4.14 i el vist sobre la suma dels t_n obtenim

$$\sum_{n=1}^{\infty}(t_n/V_T) = \frac{1}{V_T}\sum_{n=1}^{\infty} t_n = \frac{S-d_0}{V_T} \in \mathbb{R}$$

Per tant, definint $\tau := (S-d_0)/V_T$ hem demostrat el teorema. □

Observació 5.7. Fent un procediment similar, però fixant-nos en Aquil·les en comptes de la tortuga obtenim

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n = \frac{S}{V_A}$$

I és fàcil comprovar que els resultats no són contradictoris dividint aquestes dues expressions de τ i veient que el resultat és 1.

Observació 5.8. Fixem-nos en que la successió $\{d_n\}_{n\geq 0}$, que medeix la distància entre la tortuga i Aquil·les tendeix cap a zero. Efectivament:

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty}(d_0 r^n)$$

I aplicant la proposició 4.8 amb $a_n = d_0$ i $b_n = d_n$ obtenim i que $r < 1$

$$\lim_{n\to\infty} d_n = d_0 \lim_{n\to\infty} r^n = d_0 * 0 = 0$$

Observació 5.9. Observem també que $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = 0$, o sigui que encara que hi hagi infinits moments en els que observem la cursa i la tortuga es troba davant d'Aquil·les, això ocorre mentre el temps tendeix cap a zero, és a dir, per tal de poder veure els infinits moments en els que la tortuga va per davant hem d'anar congelant el temps per tal de no passar-nos de τ. És com si miressis fotografies de la cursa quan la tortuga va per davant, n'hi ha infinites si suposes que hi ha una fotografia per cada temps $0 \leq t \leq \tau$, però només estàs mirant aquelles on la variable temps t és més petita que τ.

Així doncs, donem per conclòs l'anàlisi analítica de la perspectiva d'Aristòtil. Hem vist que si Aquil·les és més ràpid que la tortuga ell la atraparà en un temps finit τ i distància finita S, encara que, com Aristòtil digué, la tortuga vagi per davant d'ell en tot moment $n \geq 1$. Cal destacar el fet que si la tortuga es mogués més ràpid que Aquil·les, aleshores la r definida a l'equació (5.1) seria més gran que 1 i res del que s'ha escrit s'aplicaria, ja que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n = \infty$ i els d_n serien monòtonament creixents, cosa que significaria que s'allunyen indefinidament.

També és interesant veure que no s'equivocà al dir que la paradoxa de la dicotomia era equivalent, ja que aquesta només correspon al cas $r = 1/2$ i assumint que et mous a una velocitat finita i positiva constant és senzill aplicar un procediment anàleg al vist anteriorment per veure que es requereix un temps finit per arribar al punt final encara que la successió tingui infinits elements.

Vegem ara un comentari del mateix argument analític en contra de la paradoxa que ens servirà per concloure l'anàlisi d'aquest punt de vista de la paradoxa.

5.2 Richard P. Feynman

Richard Feynman (Queens, 1918 – Los Ángeles, 1988) fou un físic teòric nord-americà conegut pels seus treballs en mecànica quàntica i electrodinàmica quàntica. En 1965 fou premiat amb un Premi Nobel per la creació dels *diagrames de Feynman*. Ell fou un dels científics més notoris del segle passat i destacà per l'entusiasme amb el que comunicava les seves idees científiques. Amb 15 anys aprengué per ell mateix trigonometria, àlgebra avançada i càlcul diferencial i integral. Sense cap mena de dubte es pot afirmar que fou un geni que destacà per la seva capacitat d'entendre el món a través de les matemàtiques, per això considero interesant el seu comentari.

En el seu recopilatori de "*lectures*" *The Feynman lectures on physics*, 1963, on explica gran quantitat de branques de la física, des de dinàmica newtoniana fins a conceptes avançats de física quàntica, podem trobar un comentari de la paradoxa d'Aquil·les i la tortuga al capítol 8, on discuteix el moviment, però de d'una perspectiva física i no filosòfica, com feia Aristòtil. Més concretament ho fa en la secció 2, on tracta el concepte de la velocitat, vegem que diu:

> "Achilles runs 10 times as fast as a tortoise, nevertheless he can never catch the tortoise. For, suppose that they start in a race where the tortoise is 100 meters ahead of Achilles; then when Achilles has run the 100 meters to the place where the tortoise was, the tortoise has proceeded 10 meters, having run one-tenth as fast. Now, Achilles has to run another 10 meters to catch up with the tortoise, but on arriving at the end of that run, he finds that the tortoise is still 1 meter ahead of him; running another meter, he finds the tortoise 10 centimeters ahead, and so on, *ad infinitum*. Therefore, at any moment the tortoise is always ahead of Achilles and Achilles can never catch up with the tortoise. What is wrong with that? It is that a finite amount of time can be divided into an infinite number of pieces, just as a length of line can be divided into an infinite number of pieces by dividing repeatedly by two. And so, although there are an infinite number of steps (in the argument) to the point at which Achilles reaches the tortoise, it doesn't mean that there is an infinite amount of *time*. We can see from this example that there are indeed some subtleties in reasoning about speed."[9]

Com es pot comprovar, el seu punt de vista és molt semblant al que indueix la observació 5.9, ell acceptà que tant una magnitud finita d'espai com de temps es poden dividir infinitament, trobant així una successió de moments on la tortuga va per davant, però com que aquesta infinitud de passos no implica infinitud de temps; no podem concloure que Aquil·les mai la atrapi.

Però no podem donar per tancat el debat sobre la paradoxa; d'aquí sorgeix un altre inconvenient: és possible, o té sentit parlar de, fer un nombre infinit d'accions en un temps finit? Es podria tenir una acció posterior al seu creuament? Com és possible que atrapi la tortuga si hi ha un nombre infinit d'instants en els que la distància entre ells és diferent de zero? Ens cal estudiar propietats de l'infinit per respondre aquesta pregunta.

6 Cantor i el continu

6.1 Influència

"Del paradís que Cantor ens va crear, ningú podrà expulsar-nos."
David Hilbert, 1926

Fins ara hem entès l'infinit com un concepte no assolible, com per exemple $\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|}$"="$\frac{1}{0}$"="$\infty$, diem que la funció tendeix a infinit entenentho com a un procés no realitzable, ja que $1/0$ no està definit, però tal que quan més pròxim és x a 0 més gran es fa $1/x$ sense cap mena de cota superior. De la mateixa manera que podem trobar a un diccionari l'entenem, simplement, com una seqüència on sempre podem trobar un terme següent.

Però Georg Cantor descobrí que és possible tractar l'infinit d'una manera diferent a aquesta visió clàssica, ell inventà un marc teòric des del qual els infinits tenen una entitat per si mateixos i poden ser diferents (uns són més grans que d'altres) entre ells. Aquesta és la matemàtica dels nombres transfinits. Amb aquests nombres podem caracteritzar diferents conjunts i fer operacions dels nombres finits com sumar, restar, multiplicar, etcètera, encara que els resultats no són congruents amb aquells dels nombres finits.

Del anteriorment dit podem inferir que els nombres transfinits ens ofereixen una visió de l'infinit diferent al límit d'una seqüencia. Els nombres transfinits són éssers actius, potser no en el món real, però sí en el matemàtic que ens permeten tractar un concepte tan intractable pel cervell humà com és l'infinit d'una forma no aristotèl-lica, és a dir, l'infinit ja no serà tractat com una entitat no assolible. Georg Cantor fou un matemàtic alemany d'ascendència danesa-alemanya que, com s'ha mencionat abans, inventà, o descobrí, els nombres transfinits i la seva aritmètica i és considerat un dels pares fundadors de la teoria de conjunts. Entre moltes demostracions podem destacar la de que existeix una relació 1 a 1 entre $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^n$ $\forall n \geq 1$, o sigui que tenen el mateix nombre de punts[7], una forma de construir els nombres reals, mitjançant sèries de Cauchy de nombres racionals, diferent a la donada per Dedekind per mitjà de seccions dels racional i l'argument de la diagonal. Estudià enginyeria a la universitat de Zürich, però poc més tard canvià, per estudiar matemàtiques, a la de Berlín on tingué de professors a grans matemàtics com Karl Weierstrass, Ernst Kummer (Sorau, 1810 - Berlín, 1893) i Leopold Kronecker (Legnica, 1823 - Berlín 1891), qui dirigí la seva tesi. Lamentablement, el seu treball trobà molta oposició, especialment pel propi Kronecker que el definí com ün xarlatà, un renegat i un corruptor de la joventut"; història que recorda a la de Sòcrates. Per això, no és massa estrany que passes fortes depressions al llarg de la seva vida que alentiren la seva obra, ni que fos internat en un hospital psiquiàtric.

Vegem, doncs, la raó per la que el seu nom ha quedat ressaltat en la història, els nombres transfinits.

[7] Veurem més endavant com es fa per comptar aquests conjunts infinits i dir que tenen el mateix nombre de punts.

6.2 Nombres transfinits

Els nombres transfinits es divideixen en dos tipus: cardinals i ordinals. Els primers fan referència al tamany d'un conjunt i els darrers mesuren l'ordre o ordenació d'un conjunt. Vegem les definicions i alguns conceptes bàsics que utilitzarem més endavant sobre aquests nombres.

6.2.1 Cardinals

Definició 6.1. *Dos conjunts A, B són equivalents ($A \sim B$) si existeix una funció bijectiva amb domini un conjunt i imatge l'altre.*

Proposició 6.2. *La condició de ser equivalent té les propietats d'una relació d'equivalència.*

Podem definir els nombres cardinals com $0 \equiv \emptyset$, $1 \equiv \{0\}$, $2 \equiv \{0, 1\}$, i així $\forall n \in \mathbb{N}$ i obtenim que, per conjunts finits, si $A = \{a, b, c\}$ és un conjunt amb tres elements, aleshores tenim que $A \sim 3$, en efecte, podem crear una funció bijectiva f tal que $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$. Es diu que el cardinal d'A és 3 en virtud de la següent definició:

Definició 6.3. *Es diu que dos conjunts tenen el mateix cardinal si aquests conjunts són equivalents.*[8]

Notació 1. *El cardinal d'un conjunt A és simbolitza com $|A|$.*

Proposició 6.4. *Donats dos conjunts A i B tals que existeix una funció $f : A \to B$ injectiva, aleshores $|A| \leq |B|$.*

Teorema 6.5. *(Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder) Donats dos conjunts A i B, si existeixen dues funcions injectives $f : A \to B$ i $g : B \to A$, aleshores existeix una funció $h : A \to B$ bijectiva.*

Aquest teorema ens dona una propietat que farà la definició de cardinal d'un conjunt consistent en quant a mesura del conjunt, ja que el cardinal d'un subconjunt serà menor que el del propi. Endemés, si demostrem que $|A| \leq |B|$ i $|B| \leq |A|$ tindrem que $|A| = |B|$.

La noció de cardinal d'un conjunt generalitza els nombres naturals, ja que si ens preguntem quin és el cardinal del conjunt dels nombres naturals, aquest no pot ser un nombre natural n ja que aquest mateix n pertany a $\mathbb{N}$ i té un successor $n + 1$ tal que $n + 1 \in \mathbb{N}$ i aleshores el conjunt $A = \{1, 2, ..., n + 1\} \subset \mathbb{N}$ és tal que $|A| = n + 1$.

Pel conjunt dels naturals, de la mateixa manera que assumim l'axioma del infinit, definim, axiomàticament, $|\mathbb{N}| := \aleph_0$, el primer cardinal transfinit.

Notem que aquest nou nombre $\aleph_0$ no compleix la propietat d'inductivitat, o sigui, si un conjunt qualsevol té cardinal $\aleph_0$, aleshores el cardinal de la unió d'aquest

[8] A l'hora de definir que és el cardinal d'un conjunt, Cantor l'identificà com un altre conjunt semblant al que seria un representant d'una classe d'equivalència. Com que el procediment és similar al dels ordinals, només el descriure en aquest segon cas més endavant.

mateix conjunt i un altre conjunt d'un sol element també és $\aleph_0$. Una forma de convèncer-nos d'aquest fet és considerar els conjunts $\mathbb{N}$ i $A = \{x\} \cup \mathbb{N}$, podem trobar una funció bijectiva $f : A \to \mathbb{N}$ tal que $f(x) = 0$, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$ i, en general, $f(n) = n + 1$ $\forall n \geq 2$ i per tant $|A| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

Proposició 6.6. *El cardinals dels conjunts $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, el conjunt dels nombres parells $\{0, 2, 4, 6, ...\}$, el conjunt dels quadrats perfectes $\{0, 1, 4, 9, 16, ...\}$ i $\mathbb{Q}$ és el mateix.*

Això és fàcil de demostrar, encara que no ho faré completament:

1. Pels nombres enters podem considerar la funció

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{, si n és parell} \\ \frac{-n+1}{2} & \text{, si n és senar} \end{cases}$$

Que és una bijecció entre $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$.

2. Pels nombres parells podem considerar f tal que $\forall n \in \mathbb{N}$ $f(n) = 2n$, que és una funció bijectiva entre els naturals i els parells.

3. Pels quadrats perfectes podem considerar una funció similar: f tal que $\forall n \in \mathbb{N}$ $f(n) = n^2$, que també és una funció bijectiva.

4. Pels nombres racionals podem trobar una forma d'enumerar-los una mica més complicada, però no difícil d'entendre. Consisteix en fer la següent assignació:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
0	1	-1	1/2	-1/2	2	-2	1/3	-1/3	3	-3	1/4	-1/4	2/3	...

Que consisteix en considerar les fraccions $\frac{m}{n}$ com parelles (m, n), on $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$ i s'ordenen col·locant primer les que tinguin $|m| + n$ més petit, amb prioritat pels positius i si es tenen dues fraccions amb igual suma la que tingui $|m|$ més petit, amb prioritat pels m positius també.[9] Aquesta assignació defineix una bijecció entre $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Q}$.

Com que hem trobat bijeccions entre el conjunt del nombres naturals i aquests conjunts, podem afirmar que són equivalents i, per la definició 6.3, tenen el mateix cardinal.

Definició 6.7. *Un conjunt A es diu que és numerable si $|A| = \aleph_0$.*

Lema 6.8. *L'interval obert $(0, 1)$ i $\mathbb{R}$ tenen el mateix cadinal.*

Demostració. Com que cal trobar una funció bijectiva entre $(0, 1)$ i $\mathbb{R}$ vegem la següent:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - 2 & \text{, si } x \in (0, \frac{1}{2}] \\ 2 - \frac{1}{1-x} & \text{, si } x \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

Injectivitat: si tenim que $\exists x, y$ tals que $0 < x < y < 1$ i $f(x) = f(y)$, tenim diferents casos depenent de si són més grans que $1/2$ o no:

[9] Aquesta és l'assignació que es dóna a [11], es poden trobar d'altres.

1. Cas $y \leq 1/2$. Per la definició de f
$$\frac{1}{x} - 2 = \frac{1}{y} - 2$$
I sumant 2 a cada banda i elevant a -1, cosa que es pot fer perquè $0 < x < y$, obtenim que $x = y$. Per tant, en aquest cas obtenim la injectivitat.

2. Cas $x \leq 1/2 < y$. Per la definició de f tenim que
$$f(x) = \frac{1}{x} - 2 \geq 0 \ \ i \ \ f(y) = 2 - \frac{1}{1-y} < 0$$
Per tant, és impossible que $f(x) = f(y)$.

3. Cas $1/2 < x$. Per la definició de f
$$2 - \frac{1}{1-x} = 2 - \frac{1}{1-y}$$
I si restem 2 a cada banda i multipliquem per $-(1-x)(1-y)$ obtenim
$$1 - y = 1 - x$$
Que implica que $x = y$. Per tant, en aquest cas també és injectiva.

Com que aquests són tots els casos possibles, encara que en el segon no sigui possible que $f(x) = f(y)$, i en tots els casos f és injectiva, podem afirmar que $\forall x \in \mathbb{R}$ f és injectiva.

Exhaustivitat: fixem un $x \in \mathbb{R}$ i vegem que $\exists y \in (0,1)$ tal que $f(y) = x$. Considerarem dos casos:

1. Cas $x \geq 0$. Aleshores si fem $y := \frac{1}{x+2}$ tenim que
$$\frac{1}{y} - 2 = \frac{1}{\frac{1}{x+2}} - 2 = x + 2 - 2 = x$$
I com que $x \geq 0$ tenim que $0 < y \leq \frac{1}{2}$, o sigui que l'expressió anterior coincideix amb $f(y)$. Per tant podem trobar una y que compleix $f(y) = x$.

2. Cas $x < 0$. Si fem $y := 1 - \frac{1}{2-x}$ tenim que y està ben definit perquè $\frac{1}{2} > \frac{1}{2-x} > 0$ i
$$2 - \frac{1}{1 - (1 - \frac{1}{2-x})} = 2 - \frac{1}{\frac{1}{2-x}} = 2 - 2 + x = x$$
I com que $y = 1 - \frac{1}{2-x}$ i les desigualtats anteriors, tenim que $1/2 < y < 1$, o sigui que el primer terme de les igualtats és $f(y) = x$, com es volia veure.

Com que $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists y \in \mathbb{R}$ tal que $f(y) = x$, tenim que f és exhaustiva. O sigui que aquesta f és una bijecció entre $(0,1)$ i $\mathbb{R}$. Per tant, tenen el mateix cardinal. $\square$

I hom es pot preguntar, quin és aquest cardinal? Es pot demostrar, mitjançant el famós argument de la diagonal de Cantor, que no és possible enumerar tots els nombres reals entre 0 i 1, és a dir, que $\mathbb{N}$ i $(0, 1)$ tenen cardinals diferents i pel que acabem de veure i utilitzant que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ obtenim que, utilitzant que la funció inclusió és injectiva, $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$. Anem a veure quin és exactament aquest cardinal.

Definició 6.9. *El conjunt potència d'un conjunt qualsevol A, que es denota per $\wp(A)$, és el conjunt format per tots el subconjunts d'A, incloent $\emptyset$ i A.*

Si tenim un conjunt A amb cardinal finit $|A| = n$, no és difícil demostrar que $|A| = n < 2^n = |\wp(A)|$. Anem a veure que aquesta desigualtat és certa per qualsevol conjunt A, finit o infinit.

Teorema 6.10. *(Teorema de Cantor) Donat un conjunt qualsevol A, tenim que $|A| < |\wp(A)|$.*

Demostració. Per demostrar aquest enunciat veurem que donada qualsevol funció $f : A \to \wp(A)$, f no pot ser exhaustiva i, per tant, $|A| \neq |\wp(A)|$ i com que la inclusió d'A en $\wp(A)$ donada per la funció $g(a) = \{a\}$ és injectiva amb imatge un subconjunt de $\wp(A)$ haurem demostrat el teorema. Sigui $f : A \to \wp(A)$, considerem el conjunt $B := \{x \in A : x \notin f(x)\} \in \wp(A)$. Suposem que $\exists a \in A : B = f(a)$, aleshores:

1. Si $a \in B$, aleshores, per la definició de B tenim que $a \notin B$, fet que es contradictori.
2. Si $a \notin B$, aleshores, per la definició de B tenim que $a \in B$, fet que es contradictori.

En ambdós casos s'arriba a una contradicció, per tant aquesta a no pot existir i f, que és una funció qualsevol, no és exhaustiva. $\square$

Teorema 6.11. $|\wp(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$.

Com que és un fet curiós, però no fonamental, només donaré indicació de la demostració. Consisteix en trobar dues funcions injectives, una que vagi de $\wp(\mathbb{N})$ a $\mathbb{R}$ i una altra que tingui el domini i el condomini oposats, aleshores el teorema 6.5 ens permet concloure la igualtat.

Les funcions que s'han de tenir en compte són:

1. $f : \wp(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ tal que $\forall S \in \wp(\mathbb{N})$ es té
$$f(S) = \sum_{n \in S} 10^{-n}$$
2. $g : \mathbb{R} \to \wp(\mathbb{N})$ tal que $g(x) = \{n : q_n < x\}$ on $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$, ja que s'ha vist que $\mathbb{Q}$ és numerable. En aquest cas, per veure que és injectiva s'ha d'aprofitar el fet que $\mathbb{Q}$ és dens en els reals.

Per mantenir la relació $2^n = |A|$ abans mencionada es diu que $|\wp(\mathbb{N})| := 2^{\aleph_0}$. Al cardinal dels reals se'l denota per $c := |\mathbb{R}|$, degut a que el conjunt dels nombres reals és anomenat continu.

6.2.2 Ordinals

Si en comptes d'ocupar-nos de la noció de mida ens preocupem per la d'ordre obtenim el que s'anomena ordinal. Cantor els introduí a partir de la noció de conjunt simplement ordenat; un conjunt M és simplement ordenat quan entre els seus elements $m \in M$ es regeix un determinat ordre jeràrquic segons el qual $\forall m_1$, $m_2 \in M$ un és considerat inferior i l'altre superior i si es tenen tres elements m_1, m_2 i m_3 i m_1 és inferior en rang a m_2 i aquest ho és a m_3, aleshores m_1 és també inferior en rang a m_3. Aquesta noció és equivalent a dir que M està dotat d'una relació binària "$\leq$"reflexiva, antisimètrica, transitiva i connexa, que alhora és equivalent a que M estigui dotat d'una relació binaria "$<$ " transitiva, que compleix la llei de la tricotomia segons la qual $\forall m, n \in M$ es té $m < n$ o $m > n$ o $m = n$ i ben fonamentada en M, és a dir, si cada subconjunt propi de M té un element minimal respecte de "$<$". És a dir, és equivalent a dir que la parella (M, $<$) forma un conjunt ben ordenat.

Notació 2. *Donats dos elements m_1 i m_2 d'un conjunt simplement ordenat (M, $\prec$), denotem per $m_1 \prec m_2$ el fet que m_1 sigui inferior en rang, segons l'ordre jeràrquic $\prec$, a m_2.*

Degut a que podem tractar amb conjunts numèrics que no tinguin un element minimal segons l'ordre jeràrquic més comú "$\leq$" com pot ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{Z}$, però no $\mathbb{N}$, hem d'acceptar l'axioma d'elecció, ja que ens permet demostrar que tot conjunt pot ser ben ordenat i, per tant, podrem assignar un ordinal a qualsevol conjunt. S'ha de tenir en compte que amb aquest axioma es pot demostrar l'existència, però no la unicitat. De fet, no és cert que hi hagi una única relació binària (ordre jeràrquic) que faci que un conjunt sigui ben ordenat. Vegem un exemple:

Exemple 6.12. Considerem el conjunt $R := \mathbb{Q} \cap (0, 1] = \{0 < \frac{p}{q} \leq 1 : p, q \in \mathbb{N}$ i $mcd(p, q) = 1\}$, podem donar la jerarquia donada per $\preccurlyeq$ que fa que $\frac{p_1}{q_1} \preccurlyeq \frac{p_2}{q_2}$ si $p_1 < p_2$ i en el cas $p_1 = p_2$ tenim que $\frac{p_1}{q_1} \preccurlyeq \frac{p_2}{q_2}$ si $q_1 < q_2$; el fet que qualsevol (N,<) sigui un conjunt ben ordenat fa que (R, $\preccurlyeq$) ho sigui i podem explicitar R segons aquest ordre així:

$$R = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, ..., 2/3, 2/5, ...\}$$

Però també podem trobar un ordre "$\prec$" més complicat: direm que donats $m = \frac{p_1}{q_1}$, $n = \frac{p_2}{q_2} \in R$, es té que $m \prec n$ si, en el cas $p_1 + q_1 \neq p_2 + q_2$, es compleix que $p_1 + q_1 < p_2 + q_2$ o, en el cas $p_1 + q_1 = p_2 + q_2$, es compleix $\frac{p_1}{q_1} = m < n = \frac{p_2}{q_2}$. En aquest cas tenim la següent ordenació:

$$R = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, 2/3, 1/5, 1/6, 2/5, 3/4, ...\}$$

Per qüestions d'eficiència del llenguatge empraré el terme *conjunt ordenat* per referir-me a una parella conjunt-relació amb les condicions abans esmentades. També eliminaré l'explicitació de la relació binària si és possible descriure el conjunt d'una forma que la faci òbvia com per exemple $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3,...\}$, en aquest cas la relació jeràrquica seria la que els ordena segons la seva magnitud.

Definició 6.13. *Donat un conjunt ordenat M, fent abstracció de les propietats dels seus elements i mantenint la jerarquia entre ells, podem assignar-li un altre conjunt ordenat que rep el nom de tipus d'ordre o tipus, $\overline{M}$, que té per elements unitats que conserven la jerarquia del conjunt ordenat M.*

Definició 6.14. *Diem que dos conjunts ordenats M i N són similars ($M \simeq N$) si aquests es poden posar en correspondència recíproca i unívoca de manera que si m_1 i m_2 són dos elements qualsevols de M i n_1 i n_2 són els elements corresponents en N, aleshores la relació de jerarquia entre m_1 i m_2 dins de M és la mateixa que la de n_1 i n_2 dins de N. Aquesta correspondència s'anomena isomorfisme d'ordre.*

Proposició 6.15. *Donats dos conjunts ordenats M i N, tenim que*

$$\overline{M} = \overline{N} \text{ sii } M \simeq N$$

És fàcil demostrar que tot conjunt és similar a si mateix i que la similitud és una propietat transitiva. Evidentment, $M \simeq N$ implica $N \simeq M$. En termes actuals diriem que un tipus ordinal és un representant d'una classe d'equivalència.

Si abstraiem en $\overline{M}$ la jerarquia dels elements s'obté el nombre cardinal $|\overline{M}| = |M|$, així doncs, $\overline{M} = \overline{N}$ implica $|M| = |N|$. O sigui que dos conjunts ordenats amb el mateix tipus d'orde tenen la mateixa cardinalitat, això és immediat del fet que entre ells existeix una aplicació isomòrfica d'ordre que és una bijecció.

Els tipus d'ordre dels conjunts ordenats finits no presenten cap mena de complicació, tots els conjunts ordenats que tinguin cardinal finit ν són similars a la resta. De fet es pot establir una relació un a un entre els cardinals finits i els tipus d'ordre finits i, per tant, podem utilitzar els mateixos signes "1", "2", "3", etcètera per designar els ordinals finits encara que siguin conceptualment diferents.

El cas dels tipus d'ordre transfinit és molt diferent, per un mateix cardinal transfinit és possible trobar infinits conjunts ordenats amb diferent tipus d'ordre. Mirem els que tenen cardinal $\aleph_0$.

Anomenem ω al tipus d'ordre d'un conjunt ordenat $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$, en el qual $e_n \prec e_{n+1}$ i on n és un representant de tots els nombres cardinals finits. Anomenem nombre ordinal transifinit, o ordinal, als tipus d'ordre dels conjunts amb infinits elements. Per tant, ω és el primer ordinal transfinit.

Si considerem el conjunt ordenat $\mathbb{N}$ segons la magnitud dels elements i $A = \{2, 3, ..., 1\}$, aleshores tenim que $\overline{\mathbb{N}} = \omega$ i que $\overline{A} = \omega + 1$. Això és degut al fet que podem establir una isometria d'orde entre $\mathbb{N}$ i $\{2, 3, ...\}$, però no amb A, ja que aquest té un element que és superior en rang a qualsevol altre, 1, per això es considera que el seu tipus és $\omega + 1$, ja que només té un element després de la resta d'elements numerats pels naturals.

És possible, i útil, considerar gràficament els conjunts i la posició dels seus elements per desenvolupar un sentit intuïtiu per aquest concepte, vegem-ho amb taules, les files superiors estaran ocupades pels elements de conjunts ordenats, precisament en aquest ordre, i la inferior contindrà el tipus d'ordre corresponent als subconjunts que tenen tots els elements des del primer fins al situat a sobre d'ell.

2	3	4	...	n	...	1
1	2	3	...	n	...	ω+1

I vist així és fàcil adonar-se de que un reordenació d'un conjunt ordenat pot tenir un tipus d'ordre diferent. Aquest procés de reordenació pot reordenar infinits elements, com mostra la següent taula:

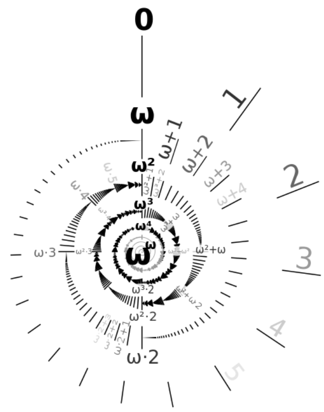
1	3	5	...	2k+1	...	2	4	6	...	2k	...
1	2	3	...	n	...	ω+1	ω+2	ω+3	...	ω+n	...

En aquest cas, el conjunt $B = \{1, 3, 5, ..., 2, 4, 6, ...\}$ té ordinal $\omega + \omega = \omega \cdot 2$ i és convenient adonar-se de que l'aritmètica d'aquests nombres ordinals transfinits té propietats diferents a les que tenen els nombres normals, cosa que també passa pels cardinals transfinits. En el cas dels ordinals podem observar que la propietat commutativa no és certa, ja que $1 + \omega = \omega \neq \omega + 1$, vegem-ho amb una taula:

0	1	2	...	n	...	
1	2	3	...	n	...	
2	3	4	...	n+1	...	1
1	2	3	...	n	...	ω+1

Tampoc és cert que $2 \cdot \omega = \omega \cdot 2$, en efecte, si tenim els conjunts ordenats $A = \{e_1, f_1, e_2, f_2, ...\}$ i $B = \{e_1, e_2, ..., f_1, f_2, ...\}$ tenim que $\overline{A} = \omega$ i $\overline{B} = \omega + \omega = \omega \cdot 2$. Això és degut al fet que existeix un isomorfisme d'ordre entre A i els nombres naturals amb l'ordre donat per la magnitud dels seus elements i un altre entre B i el conjunt ordenat $\{1, 3, 5,...,2, 4, 6,...\}$, que com hem dit abans té ordinal $\omega \cdot 2$.

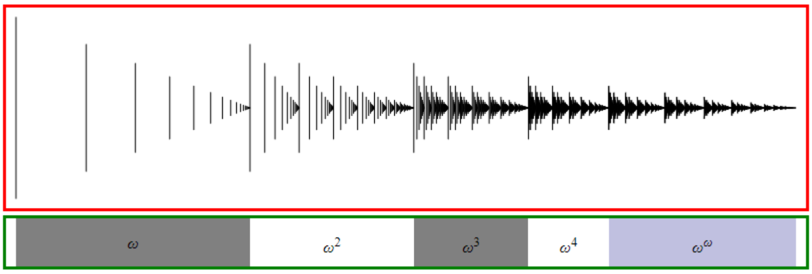
És possible crear els ordinals ω^2, $\omega^3, ..., \omega^\omega$ mitjançant reordenacions d'aquest tipus com mostra la següent imatge:[10]

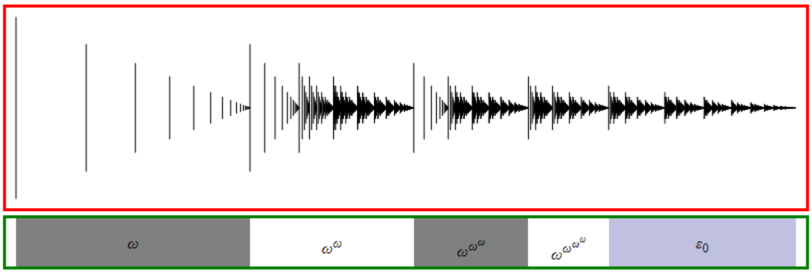


I es pot dur encara més enllà, podem obtenir ω^{ω^ω}, $\omega^{\omega^{\omega^\omega}}$, ... ϵ_0, ... on tots aquest conjunts són numerables. Pot ser més eficaç imaginar-se conjunts de semirrectes posicionades una rere l'altra per representar elements d'un conjunt i d'aquesta forma obtenim les següents representacions:[11]

[10] Aquesta imatge és extreta de la pàgina de Wikipedia dels nombres ordinals

[11] Aquestes imatges són extretes de la pàgina web interactiva trobada a [10].





Tot i això, podem considerar el conjunt format per tots els ordinals numerables (els abans mencionats), que són el tipus d'ordre d'un conjunt amb cardinal $\aleph_0$, i el podem anomenar ω_1. I es pot demostrar que el cardinal d'aquest conjunt és estrictament més gran que $\aleph_0$, de fet $|\omega_1| = \aleph_1$, aquests són el segon ordinal transfinit i el segon cardinal transfinit. D'aquesta manera es podem iterar aquest procés de creació de cardinals i ordinals transfinits següents.

Observació 6.16. Gràcies al teorema 6.10, el teorema de Cantor, sabem que podem obtenir una sèrie de conjunts amb cardinal transfinit necessàriament més gran que l'anterior iterant el conjunt potència dels nombres naturals. Però no podem garantir que siguin l'immediatament següent.

Observació 6.17. En aquests termes s'enuncia la hipòtesi del continu, segons la qual el cardinal dels nombres reals $c := 2^{\aleph_0} = \aleph_1$, o sigui, que no existeix cap conjunt amb cardinal més gran que el dels nombres naturals i més petit que el dels nombres reals. Lamentablement, o no, encara que Cantor creia que aquest enunciat era cert, en l'any 1940 Kurt Gödel (Brno, 1906 - Princeton, 1978) demostrà que és consistent, és a dir, que no es pot refutar, i l'any 1963 Paul Cohen (Long Branch, 1934 - Standford, 2007) demostrà la seva independència, és a dir, que no és pot demostrar. Tot això tenint com a base els axiomes de Zermelo-Fraenkel amb l'axioma d'elecció.

Definició 6.18. *Un continu lineal és un conjunt ordenat S amb més d'un element que compleix:*

1. *Tot subconjunt no buit de S amb fita superior té un element suprem, contingut o no en aquest subconjunt, però sí en S.*
2. $\forall x \in S$ *i* $y \in S$ *tal que* $x < y$ *existeix un* $z \in S$ *tal que* $x < z < y$.

Amb això, si assumim l'axioma de Cantor-Dedekind segons el qual els nombres reals són ordre-isomòrfics al continu lineal de la geometria, la recta infinita que tots coneixem, es pot tractar la paradoxa d'Aquil·les. Vegem com ho feu Russell.

7 Bertrand Russell

7.1 El seu tractament

Bertrand Arthur William Russell (Monmouthshire, 1872 – Gwynedd, 1970) fou un filòsof, lògic, matemàtic i escriptor britànic que arribà a guanyar un Premi Nobel de Literatura l'any 1950 en "reconeixement dels seus variats i significatius escrits en els que defensa els ideals humanitaris i la llibertat de pesnament". El seu treball ha tingut influència sobre tot en el camp de la filosofia analítica, de la qual, junt amb altres filòsofs com George Edward Moore (Londres, 1873 – Cambridge, 1958) i Gottlob Frege, n'és fundador i en lògica matemàtica, teoria de conjunts i filosofia matemàtica, on amb llibres com *Principia Mathematica*, 1910, del qual A. N. Whitehead (Ramsgate, 1861 – Cambridge, 1947) n'és coautor, *Introduction to Mathematical Philosophy*, 1919, o *Our Knowledge of the External World*, 1926, deixà impresa la signatura de la seva genialitat.

I és precisament en aquests dos últims llibres on Russell exposà el seu punt de vista vers els nombres transfinits i el seu tractament proposats per Cantor i les paradoxes de Zenó, entre gran varietat de temàtiques que abastà. En ells em basaré per exposar la seva disquisició.

Segons ell escriví, hi ha dificultats a l'hora d'entendre l'infinit, hàbits mentals que conservem dels nombres finits que no poden ser extrapolats als transfinits. Com a exemple donà els nombres naturals, que normalment anomena inductius, tots aquests nombres, excepte pel 0, tenen un antecessor, és a dir, un nombre del qual en són el successor. En canvi, el primer nombre cardinal transfinit[12], que també és un nombre, $\aleph_0$ no en té; aquest nombre té una successió infinita abans que ell que no té cap màxim o últim nombre tal que $\aleph_0$ hi vingui després. Aquí és, en la seva opinió, on resideix el principi en què es basen la paradoxa de la dicotomia i la paradoxa d'Aquil·les i la tortuga[13]. Bertrand considerà la paradoxa de la dicotomia, ja que és més simple: tenim que el corredor ha de recórrer tota la distància de la cursa, després hi ha un moment en el que li falta la meitat, després un quart, després un vuitè i així successivament en una sèrie estrictament inacabable, però més enllà de tota aquesta successió es troba el moment en el que arriba a la meta. Per tant, sí que hi pot haver alguna cosa més enllà del total d'una successió infinita, tot i que encara cal mostrar-ho.

Russell escriví que la dificultat, al igual que la majoria de les dificultats més vagues que envolten l'infinit matemàtic, prové de la més o menys conscient noció de comptar que adquirim durant la infància. És evident que si en la cursa de la paradoxa de la dicotomia o en la d'Aquil·les els corredors tinguessin que esperar una quantitat fixa de temps, com si algú els hi tingués que donar l'ordre de seguir corrent, aleshores mai arribarien a la meta, però això no és el que diu l'enunciat original. Com Russell observà, no és essencial per l'existència d'una col·lecció, ni pel

[12] Aquesta propietat és igualment certa pels ordinals transfinits.

[13] Curiosament, al igual que la resta d'autors mencionats anteriorment, considera les paradoxes equivalents.

coneixement ni raonament vers ella, que hàgim de ser capaços de contemplar tots els seus termes un per un.[14] Per defensar aquesta tesi considerà la col·lecció, finita, d'éssers humans, encara que no coneguem a tots els membres d'aquesta col·lecció podem parlar d'humanitat, això és degut a que coneixem diverses característiques que tot individu de la col·lecció té i d'altres que no si no hi pertany. Ell extrapolà aquesta situació pels conjunts infinits, podem conèixer els elements per una certa característica encara que no puguem enumerar-los tots, en aquest sentit, una sèrie interminable pot formar un total i hi pot haver més termes més enllà d'aquest total.

És, per tant, necessari tenir una bona idea del que significa comptar. Russell explicà que la gran majoria de la gent quan pensa en els nombres en realitat pensa en el resultat de comptar i que aquest error, comès no només per la gent corrent sinó per multitud de grans matemàtics i científics com Galileu o Leibniz, és el que provoca la confusió. Ell afegí que encara que comptar ens resulti una tasca familiar, en realitat és un procés complex que no té sentit a no ser que els nombres als que s'arriba comptant tinguin un significat independent del procés pel qual s'hi arriba. I, segons Russell, és precisament el treball de Cantor, presentat en la secció anterior, el que permet un estudi rigorós d'aquestes qüestions.

Així doncs, ell donà dues propietats dels nombres transfinits que no tenen els infinits, la primera és la *reflexivitat*.

Definició 7.1. *Un nombre és reflexiu si aquest no augmenta al afegir-li* 1.

La segona propietat és la *no-inductivitat*, per definir-la cal fer unes definicions anteriors. Vegem primer la de propietat hereditària, que és el principi de la inducció matemàtica:

Definició 7.2. *Una propietat és hereditària si el fet que la compleixi un nombre implica que el següent també la compleixi.*

Definició 7.3. *Una propietat inductiva és una propietat hereditària que compleix el nombre 0.*

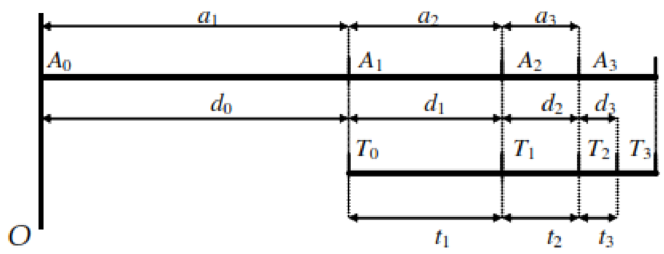
I basant-se en aquesta definició dóna la dels anteriorment mencionats nombres inductius, els defineix com aquells que posseeixen totes les propietats inductives, Russell digué que aquests eren els nombres naturals, els nombres sencers positius finits als que estem acostumats. En altres paraules aquests són els nombres als que s'hi pot arribar comptant. Però no tots els nombres donats per Cantor compleixen totes les propietats inductives, aquests són els nombres no-inductius.

Russell senyalà que algunes de les propietats més familiars que sí que compleixen els nombres inductius i que considerem com lògicament necessàries són, de fet, demostrables únicament pel mètode inductiu i no són certes pels nombres transfinits. Però que això no significa que els nombres transfinits siguin contradictoris, com s'havia fet en els segles anteriors, sinó que aquest mètode de demostració és limitat i la causa dels nostres prejudicis i hàbits mentals. També afegí que els nombres transfinits coneguts, els presentats en la secció anterior, són tant reflexius com

[14]Aquestes són les paraules de Bertrand Russell, encara que per un matemàtic amb un punt de vista finitista aquesta declaració seria, com a mínim, controvertida.

no-inductius, encara que només es disposes de demostracions equívoques de que aquestes propietats eren equivalents i que és possible que el total no sigui major que una part seva si per major entenem tenir un nombre major de termes, propietat que havia sigut utilitzada per Leibniz per considerar aquests nombres, més precisament el nombre de nombres naturals i el nombre de nombres parells, com contradictoris.

Incorporo un cop més l'esquema de la cursa d'Aquil·les i la tortuga per tal de facilitar l'enteniment de l'explicació de Russell.



Segons Russell digué, l'error de Zenó fou que acceptà que el total té més termes que qualsevol part seva, ja que si aquesta premissa era considerada certa s'arribava a contradiccions, com la pròpia paradoxa, i si es negava la premissa, aleshores només apareixien resultats estranys, però no pas contradictoris. Així doncs, en qualsevol moment tant Aquil·les com la tortuga ocupen un lloc determinat i aquest lloc mai és repeteix, ja que avancen en línia recta, d'aquesta manera trobem que la tortuga i Aquil·les passen pel mateix nombre de punts. Fent una projecció en vertical podríem situar la trajectòria de la tortuga en la mateixa línia que la d'Aquil·les i així es pot veure clarament com el fet de que la premissa abans mencionada causa la paradoxa, ja que si l'acceptem i acceptem que Aquil·les atrapa la tortuga, aleshores ell hauria estat en més llocs que la tortuga, ja que el seu recorregut és més llarg i el de la tortuga n'és una part, però això es contradictori amb l'establert abans de que en cada moment cada individu ocupa un únic lloc, per tant, descartaríem que Aquil·les atrapa la tortuga.

Si en canvi no acceptem la premissa, que és la situació correcta pel que s'ha dit abans, un cop transcorregut el temps suficient no queda cap part restant per recórrer, Aquil·les atraparà a la tortuga en el punt que vam anomenar a en la discussió pel mètode analític, que coincidia amb el límit dels A_n. I al fer-ho ambdós individus hauran recorregut el mateix nombre de punts, ja que podem posar en bijecció els dos intervals, que coincideix amb el cardinal de $\mathbb{R}$, pel vist al lema 6.8.

I aquesta és la resposta que donà Russell, al introduir els resultats sobre l'infinit de Cantor ell pogué analitzar les trajectòries d'Aquil·les i de la tortuga i establir que tenen el mateix nombre de punts i que, si utilitzem l'ordre que indueix la successió de les posicions, en el moment ω Aquil·les atraparà a la tortuga havent recorregut, tots dos, un total de $c = 2^{\aleph_0}$, acabant amb la "interminable" successió de distàncies que Aquil·les tenia que recórrer per tal d'atrapar-la, cosa que no era possible tractar pensant en l'infinit com una entitat no assolible com es fa a l'hora de calcular límits.

7.2 Recepció

La solució proposada per Russell no va passar inadvertida ni molt menys, s'ha de tenir en compte que juntament amb Kurt Gödel es considerat un dels lògics matemàtics més importants del segle passat i molts autors van valorar la seva argumentació.

Jorge Francisco Isidoro Luis Borges (Buenos Aires, 1899 – Ginebra, 1986), un dels escriptors en castellà més importants del segle passat i altament interessat en l'infinit, no en va escriví un llibre anomenat *El Aleph*, 1949, qualificà la resolució donada per Russell com "la única refutació que conec, l'única d'inspiració condigne de l'original"[15] i digué que tant *Introduction to Mathematical Philosophy* com *Our Knowledge of the External World* són llibres d'un lucidesa inhumana, insatisfactoris i intensos. Tot i això, ell considerà que cap refutació de les que coneixia era capaç de resoldre la paradoxa proposada per Zenó: "Zenó és incontestable"[15].

William James (Nova York, 1842 – Nou Hampshire, 1910), filòsof i psicòleg que arribà a ser professor a Harvard no va resultar gaire convençut per l'argumentació de Russell, encara que en reconegué una superioritat tècnica. Com es pot trobar a *Some Problems of Philosophy*, 1911, James digué la seva explicació "eludia la dificultat real, la que tracta la categoria creixent de l'infinit i no pas l'estable" [16]. Ell es preocupà pel fet de que per tal d'arribar a la meta hi ha un interval que ha de ser travessat que no para de reproduir-se, en comptes de considerar la cursa un cop Aquil·les ja ha atrapat a la tortuga.

8 El meu punt de vista

Jo estic d'acord amb en Bertrand Russell en que tenim una concepció mistificada de l'infinit que en comptes de donar-nos punts de vista vàlids per entendre'l i manipular-lo ens omple de prejudicis. El que potser és el més influent és la concepció aristotèlica de que l'infinit com a tal és inabastable i que es troba fora del rang d'un humà o que ens resulta incomprensible. Això és fals, com Cantor demostrà i potser els matemàtics som els que més en sabem de tractar amb l'infinit, un exemple del domini que tenim sobre ell és que l'utilitzem en diverses àrees com la geometria, on normalment ens preocupem per espais d'infinits punts, a l'àlgebra trobem grups d'infinits elements o espais vectorials de dimensió infinita i el càlcul diferencial i integral té com a fonaments els nombres reals, o sigui el continu, i gràcies a ell podem descobrir fets altament sorprenents sobre la naturalesa de les formes i l'infinit.

Un exemple molt aclaridor és la Banya de Gabriel, un cos de revolució generat per la funció $f(x) = 1/x$ amb rang $x \geq 1$ on l'eix de rotació seria l'eix $y = 0$ i, evidentment, obtindríem un cos tridimensional semblant a un con escanyolit. És senzill obtenir la següent expressió de l'àrea i del volum d'aquest cos:

$$A = 2\pi \int_1^\infty \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}{x}\,dx > 2\pi \int_1^\infty \frac{\sqrt{1}}{x}\,dx = \infty$$

$$V = \pi \int_1^\infty \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi$$

O sigui que podem calcular àrees i volums de figures que es prolonguen infinitament i sabem de l'existència d'objectes amb propietats tan estranyes com la que s'acaba de veure, un cos amb volum finit, però àrea infinita.

Però tot i que conec i entenc eines rigoroses com les donades en les seccions 4 i 6 que permeten entendre l'infinit, encara hi trobo un problema a l'hora d'entendre completament l'enunciat i, per tant, de vèncer a la paradoxa d'Aquil·les. El problema, o l'error, que hi trobo és pensar que el fet que Aquil·les estigui rere la tortuga en un nombre infinit d'instants implica que aquesta situació sigui inalterable, o tan sols que sigui rellevant. Per aprofundir en la meva discussió d'aquest fenomen he d'introduir conceptes de la teoria de la mesura.

Definició 8.1. *Donat un conjunt Ω i una classe de subconjunts d'aquest conjunt $\mathcal{F} \subseteq \wp(\Omega)$, diem que aquesta classe $\mathcal{F}$ és una σ-àlgebra si compleix:*

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
3. *Donada una família de subconjunts $\{A_i\}_{i\geq 1}$ amb $A_i \in \mathcal{F}$ $\forall i \geq 1$ es té*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

Definició 8.2. *Donat un conjunt Ω i una classe de subconjunts $\mathcal{C}$ on $\emptyset \in \mathcal{C}$ es defineix mesura positiva, o simplement mesura, com una aplicació:*

$$\mu : C \in \mathcal{C} \longmapsto x \in [0, \infty] \quad \textit{tal que} \quad \mu(\emptyset) = 0$$

Definició 8.3. *Una mesura és σ-additiva si donada una família $\{A_i\}_{i\geq 1}$ d'elements de $\mathcal{C}$ disjunts 2 a 2 tal que $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{C}$ es té:*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Aquestes definicions són necessàries per la consistència de la meva resposta, ja que permeten estudiar magnituds formades per una infinitud comptable d'elements, com és la unió infinita de les distàncies recorregudes per Aquil·les i la tortuga; també són suficients per demostrar que donats dos conjunts A i B, aleshores si tenim $A \subseteq B$ també tenim que $\mu(A) \leq \mu(B)$, això es degut a que $\mu(B) = \mu(B - A) + \mu(A)$ per la propietat de σ-additivitat i el fet que la mesura d'un conjunt és més gran o igual a zero. A més, es sol anomenar mesura a les mesures σ-additives i així ho faré en la resta del treball.

A una terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ on $\mathcal{F}$ és una σ-àlgebra sobre Ω i μ una mesura σ-additiva definida sobre $\mathcal{F}$ se l'anomena espai de mesura. Aquesta estructura és en la qual es basa la teoria de la probabilitat, però abarca nocions més generals, com és la de mesura. Ens interessa el cas $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, la σ-àlgebra de Borel sobre $\mathbb{R}$,[15] i introduiré dues mesures μ.

La primera és la *mesura de Lebesgue*, ℓ, que a cada interval de $\mathbb{R}$ de la forma $(a, b]$, amb $-\infty < a \leq b < \infty$ li assigna la seva longitud $b - a =: \ell(a, b]$, amb la condició que $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\ell(-\infty, b] = \infty$, $\ell(a, \infty) = \infty$, $\ell(\emptyset) = 0$ i $\ell(\mathbb{R}) = \infty$.

La segona és la *mesura comptadora*, c, que a cada conjunt $A \subseteq \mathbb{R}$ li assigna el seu cardinal $|A| =: c(A)$ si A és finit i, en el cas contrari, $c(A) = \infty$, si A és infinit.

Aquestes dues mesures són les que normalment usem quan mesurem quelcom. Si volem parlar sobre quants cops ens ha passat un cert esdeveniment utilitzem la mesura comptadora per dir que en un ocasió, o les pertinents, va passar una certa cosa i el conjunt que mesurem és el que està format pels esdeveniments, que hauran de ser definits d'una forma no ambigua si volem que el que estem dient tingui un significat clar: si estem comptant les vegades que hem tingut un accident de tràfic i en una ocasió es va punxar una roda i trencar un retrovisor i un llum, encara que cada una per separat pogués considerar-se un accident, en aquest cas s'haurà de comptar el total d'aquests danys com un sol accident. Però malgrat les complicacions que poden sorgir de les limitacions del llenguatge natural i les imprecisions que cometem, aquesta és la mesura que emprem; un cas molt clar de l'ús d'aquesta mesura per mesurar el temps és quan diem que falten tres dies pel

[15] Per definició sol donar-se que la σ-àlgebra de Borel és la σ-àlgebra generada pels subconjunts oberts de $\mathbb{R}$ i es pot demostrar que aquesta és la mateixa que la generada per la classe d'intervals oberts (a,b) i la mateixa que la generada per la classe de les semirectes $(-\infty, q]$, on $q \in \mathbb{Q}$.

cap de setmana o qualsevol dia, com que el concepte de dia està suficientment ben incorporat en un calendari podem comptar els dies entre avui i el dia en qüestió i conclouríem que falten tres dies.

La mesura de Lebesgue, en canvi, la utilitzem quan tractem amb lapses de temps continus, com per exemple quan mesurem el temps que hem estat esperant a la cua d'un supermercat. Es podria argumentar que en aquest cas també s'utilitza la mesura comptadora per comptar la quantitat de minuts que s'ha estat esperant, però degut a la naturalesa continua del temps, segons la qual podem trobar moments entre qualssevol instants diferents, és més convincent dir que per mesurar el temps entre el moment a i el moment b hem fet $b - a$, o sigui que li hem assignat la seva mesura de Lebesgue.

Vegem el moviment des de la perspectiva que ens donen aquestes mesures. Si tenim un mòbil que es desplaça sobre els nombres reals, o un espai al que li podem associar aquests, entre el 0 i l'1 a una velocitat constant d'una unitat per segon i el deixem moure's durant un segon, aleshores el conjunt de l'espai recorregut és $[0, 1]$, que té mesura de Lebesgue $\ell([0, 1]) = \ell(\{0\}) + \ell(0, 1] = 0 + 1 = 1$ i el conjunt del temps transcorregut, que també l'associem als nombres reals, és també $[0, 1]$ i li associem la mateixa mesura. Per tant, concloem que el mòbil s'ha mogut un metre en un segon, cosa que no resulta contradictòria de cap manera. El que podria ser contradictori seria desplaçar-se una magnitud de mesura infinita en una magnitud de temps de mesura finita, ja que suposem que res pot superar la velocitat de la llum.

Si utilitzem la mesura comptadora obtenim un resultat igual de vàlid, tenim que aquest conjunt $[0, 1]$ té infinits elements i li associem el valor ∞, però podem establir una relació bijectiva entre cada instant de temps i cada posició en la qual es trobava el mòbil; tampoc resulta contradictori observar que el continu és infinitament divisible per trobar aquests instants o punts de l'espai. Una situació estranya utilitzant aquesta mesura seria moure's una quantitat infinita de punts en un temps finit, ja que no podries dir en quina posició es trobava el mòbil en un cert instant.

En aquests termes tenim que quan considerem la successió de posicions, distàncies o instants de temps de la cursa, tenim en ment la mesura comptadora i utilitzant-la podem dir que el conjunt de posicions o distàncies en els quals la tortuga va guanyant $I = \{A_n\}_{n\geq 1}$,[16] on A_n és la posició d'Aquil·les com es va definir a la secció 5, és tal que $c(I) = \infty$, el qual és completament cert i no contradictori, però l'error que cometem és valorar el temps, o els instants de temps, transcorregut amb la mesura comptadora, observar que aquests són també infinits i donar-li el valor que li donaríem a aquest fet si la mesura utilitzada fos la de Lebesgue. És a dir, observem que hi ha un conjunt de mesura infinita, segons la mesura comptadora, i concloem, com si es tractes de la mesura de Lebesgue, que aquesta situació no es veurà alterada, que és el que conclouríem si tinguéssim que esperar un conjunt de mesura de Lebesgue infinita de temps.

O sigui que l'error que cometem és una confusió en la utilització de les mesures,

[16] Es podria definir un conjunt per cada successió, però com que el tractament seria el mateix no em molestaré a fer-ho.

no estem acostumats a explicitar quina mesura emprem quan mesurem qualsevol conjunt i això causa que quan se'ns menciona la paradoxa d'Aquil·les i la tortuga i pensem sobre aquesta successió d'infinits termes ens resulta contradictori que succeeixi i es conclogui aquesta successió. Però no és gens contradictori, si s'examina la situació segons la mateixa mesura tenim que en un temps finit s'ha recorregut una distància finita i que al fer-ho podem trobar infinits instants, associats a infinites posicions i distàncies, en els que la tortuga es troba per davant, però això no és res més que una propietat del continu, la segona de la definició 6.18 per ser més precís, i l'única raó per la qual ens sembla estrany o contradictori és perquè mai explicitem quina mesura utilitzem per mesurar i fem ús d'un prejudici que tenim interioritzat, pensant que una magnitud de temps de mesura infinita és, independentment de la mesura emprada, no assolible, quan només es tracta d'una propietat de la continuïtat.

9 Conclusions

En aquest treball he recopilat diverses refutacions de la paradoxa d'Aquil·les i la tortuga que van des de la proposada per Aristòtil al segle quart abans de Crist fins a la donada per Russell al segle passat, o, si se'm permet l'honor d'incloure la meva a aquesta il·lustre llista, fins a aquest mateix segle. Venen acompanyades d'una petita mostra de l'abast que és capaç d'aconseguir les matemàtiques, per una banda està l'anàlisi matemàtica que proporciona les eines suficients per tractar les successions d'Aquil·les i de la tortuga i veure la seva convergència, al mateix temps que la del temps, i d'un extracte del treball de Cantor sobre els nombres transfinits i la teoria de conjunts en general, que permet estudiar la composició de l'espai en el que succeeix la cursa.

Amb aquestes eines s'analitza la discussió proporcionada pels autors i s'intenta exposar de la forma més fidedigna possible com van intentar acabar amb aquesta paradoxa sense perdre el caràcter objectiu que ha de tenir un treball com aquest. Finalment dono el meu punt de vista sobre aquesta qüestió que, juntament amb les dues grans refutacions donades, la analítica i la de Bertrand Russell, és suficient per convèncer-me a mi mateix de que les successions de les posicions i temps convergeixen, que la quantitat de posicions per les que passen els dos corredors és igual i es pot posar en bijecció i que la raó per la qual ens estranya aquesta història és pel prejudici que tenim en contra dels conjunts infinits i que per tant, aquesta paradoxa es pot considerar resolta i, per tant, una paradoxa falsídica.

No disposo, però, de cap pensament menyspreador vers a les diferents discussions plantejades per diversos filòsofs o matemàtics que s'atreveixen a abordar aquest problema d'una forma rigorosa i ben intencionada. Tanmateix, no he trobat ni en l'obra dels autors que he pogut llegir ni en la paradoxa en sí cap qüestió no resolta o que no pugui ser resolta per mitjà de les explicacions exposades i un tractament rigorós del tema.

Això em sembla suficient per concloure el treball sense oblidar mencionar que del nombrós grup de pensadors que s'han aventurat en contra d'aquesta paradoxa, cadascú ha aconseguit trobar un punt de vista diferent i enginyós i que el desenvolupament de noves matemàtiques ha sigut capaç de mostrar nous aspectes d'aquesta paradoxa, així que la meva actitud vers la paradoxa no és pas la de saber-me guanyador, sinó que guardo un cert grau d'escepticisme; potser la història de la cursa d'Aquil·les i la tortuga ja no em resulta contradictòria, però espero, amb anhel, que algú sigui capaç d'obrir una finestra que mostri un nou punt de vista i que revisqui la paradoxa.

Referències

[1] Van Orman Quine, Willard. *The Ways of paradox and other essays.* Cambridge, Mas. : Harvard University Press, 1976. ISBN 0674948351.

[2] G. Lycan, William. *What, exactly, is a paradox?* Analysis. 2010;70(4):615-622.

[3] Aristòtil. *Física.* Editorial Gredos, 1998. ISBN 9788424916763.

[4] The University of Sheffield. (4 d' octubre de 2020). Zeno: An introduction. www.youtube.com/watch?v=4Ge7-ZFPfuI.

[5] Grabiner, J. (1983). Who Gave You the Epsilon? Cauchy and the Origins of Rigorous Calculus. *The American Mathematical Monthly*, 90(3), 185-194. doi:10.2307/2975545.

[6] Sinkiewicz G.I. On History of Epsilontics. *Antiquitates Mathematicae.* 2016. Vol 10. P. 183-204. doi: 10.14708/am.v10i0.805. Print ISSN: 1898-5203, Online ISSN: 2353-8813.

[7] Spivak, Michael. *Calculus.* Barcelona, España : Reverté, 2012, 2014. ISBN 978-84-291-5182-4.

[8] Ivorra Castillo, Carlos. *ANÁLISIS MATEMÁTICO.* Universitat de València, p. 13-19. (27 d'octubre de 2020, www.uv.es/ivorra/Libros/AA.pdf).

[9] Phillips Feynman, Richard. *The Feynman Lectures on Physics, Volume I.* Los Ángeles: Caltech's Division of Physics, Mathematics and Astronomy, 2011, Capítol 8. (9 de novembre de 2020, www.feynmanlectures.caltech.edu/I_08.html).

[10] David Madore [en línia]. Consulta: 15 de novembre de 2020. Disponible a: http://www.madore.org/~david/math/drawordinals.html#?v=e&i=0&l=

[11] Russell, Bertrand: *Introduction to Mathematical Philosophy.* Mineola, N.Y. : Dover Publications. Inc., 1993. ISBN 0-486-27724-0, EAN 9780486277240.

[12] Cantor, Georg. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. Math. Annalen. 1895, vol. 46, p. 481-512.

[13] Russell, Bertrand. *Our Knowledge of the External World.* Chicago, Illinois : The Open Court Publishing Company, 1915, p. 112-147 (4 de setembre de 2020, https://onemorelibrary.com/index.php/en/?option=com_djclassifieds&format=raw&view=download&task=download&fid=24114).

[14] Sullivan, Arthur. *Logicism and the Philosophy of Language: Selections from Frege and Russell.* Broadview Press, 2003, p. 228-230. ISBN 10 1770483292, ISBN 13 9781770483293. https://books.google.es/books?id=EY67AAAAQBAJ.

[15] Luis Borges, Jorge. *Obras completas*. Buenos Aires, Argentina : Emecé Editores, 1984, p. 244-248. ISBN 950-04-0217-3.

[16] James, William. *Some Problems of Philosophy*. London, United Kingdom : Longmans, Green & Co, 1911, p. 179-183. (10 de desembre de 2020, `https://www.bookyards.com/en/book/details/14388/Some-Problems-Of-Philosophy`)

[17] Alabert, Aureli. *Mesura i probabilitat*. Bellaterra Barcelona : Universitat Autònoma de Barcelona, Servei de Publicacions, 1996, p. 7-31. ISBN 8449006945.