

DEPARTAMENT D'EQUACIONS

FUNCIONALS

FACULTAT DE MATEMÀTIQUES

UNIVERSITAT DE BARCELONA

UN ESTUDI DE LA REGIÓ
EXTERIOR DEL PROBLEMA
RESTRINGIT DE 3 COSSOS.

Tesina presentada per
ANTONI BENSENY ARDIACA
per optar al grau de
Licenciat en Matemàtiques.

Barcelona, a 17 d'Octubre del 1980.



7 19.10.788

BIBLIOTECA DE LA UNIVERSITAT DE BARCELONA



0700472272

Agraeixo al Dr. Carles Simó la seva constant dedicació i ànim; que, en tot moment, s'ha combinat amb la seva excel·lent direcció, fent alhora possible i de bon grat cloure aquest treball.

L'Amadeu Delshams ha estat font de recolzament i suggeriments. La posta a punt l'ha feta la M^a Carme Berbel.

Un sincer agraïment a la meva dona, als meus pares i tieta per acompanyarme amb il·lusió.

I N D E X

	<u>Pàgina</u>
1. INTRODUCCIÓ	1
2. MEMÒRIA	5
1. Problema restringit de 3 cossos, pla i circular. Cas parti- cular: problema de 2 cossos.	6
2. Estudi topològic de les varietats invariants I_{EK}	12
3. Estudi topològic de les varietats invariants I_C	15
4. Importància de la corba de velocitat zero exterior.	22
5. Estudi del flux sobre les varietats invariants I_{EK}	25
6. Solucions semiexplícites del problema de 2 cossos.	28
7. El problema restringit de 3 cossos, pla i circular, com una perturbació del de 2 cossos.	32
8. Aplicació del teorema del twist de Moser a petites pertur- bacions del problema de 2 cossos.	36
9. Variables de McGehee.	38
10. Perturbació d'òrbites parabòliques.	42
11. Comportament asimptòtic dels coeficients A_k i B_k , $k > 1$	45
12. Comportament asimptòtic de A_0	52

13. Perturbació de la varietat d'òrbites parabòliques. . . .	54
14. Afitació de la zona d'estabilitat.	58
15. Comportament qualitatiu de la regió d'òrbites parabòliques.	62
3. BIBLIOGRAFIA	70

1. INTRODUCCIÓ

La present tesina està dedicada íntegrament al problema restringit de 3 cossos, pla i circular, quan es pot considerar com una petita perturbació del de 2 cossos, en el sentit que sigui vàlida una teoria de perturbacions de 1^{er} ordre.

Està dividida en 15 seccions que tracten diversos aspectes d'aquest problema.

La secció 1 presenta el problema, en els sistemes de referència sideri i sinòdic i en coordenades cartesianes i polars, com un sistema hamiltonià de 2 graus de llibertat. Això permet d'escriure fàcilment les equacions del moviment. Es trien les coordenades polars sinòdiques com les més adequades i es fa l'estudi, en aquestes coordenades, de les integrals primeres d'aquest sistema, així com de les del de 2 cossos.

Les seccions 2-6 es dediquen gairebé exclusivament al problema de 2 cossos, entenent que molts dels resultats es poden estendre a problemes restringits de 3 cossos, plans i circulars que siguin petites perturbacions d'aquest.

La secció 2 fa una anàlisi topològica de les varietats invariants d'energia i moment sideris constants, I_{EK} .

La secció 3 fa el mateix amb les de constant de Jacobi fixa, I_C .

En la secció 4 es realça la importància de la corba de velocitat zero exterior.

La secció 5 es dedica a analitzar alguns comportaments interessants del flux en les diferents varietats I_{EK} .

En la secció 6 s'expliciten les solucions del problema de 2 cossos en funció de l'anomalia excèntrica en les regions el·líptica i parabòlica de l'espai de fases, donant finalment un tractament uniforme d'aquestes solucions, usant un altre temps fictici i funcions d'Stumpff, que ens permet de conèixer les solucions en la regió hiperbòlica.

La secció 7 ens informa que un problema restringit de 3 cossos, pla i circular és una petita perturbació del de 2, quan la distància entre els primaris o la massa d'un d'ells és prou petita, o bé, quan la constant de Jacobi és molt gran. S'expliciten en aquesta secció els hamiltonians perturbats fins a 1^{er} ordre de la teoria de perturbacions en els 3 casos.

La secció 8 ens assegura, usant el teorema del twist de Moser, l'existència de corbes invariants prop de l'òrbita circular del problema de 2 cossos per a les perturbacions permeses en la secció anterior.

S'introdueixen les variables de McGehee en la secció 9 que s'usaran en les seccions posteriors, actualitzant els resultats més importants de les seccions anteriors a aquestes variables.

Les seccions 10-15 estan dedicades a la perturbació de la varietat d'òrbites parabòliques.

En la 10, s'introdueix el problema i es citen els resultats coneguts referents a la primera intersecció d'aquesta varietat amb el pla \mathbb{P} dels

punts de l'espai de fases amb velocitat radial nul·la, per a temps creixents i decreixents, $P_{\pm 1}$.

En la secció 11 es troben els termes dependents de l'angle del desenvolupament de Fourier asimptòtic, quan la massa d'un dels primaris tendeix a zero i la constant de Jacobi a infinit, de $P_{\pm 1}$.

La secció 12 dona l'expressió del terme independent, que requereix un tractament diferent.

La secció 13 agrupa els resultats de les 2 seccions anteriors i en extreu conseqüències.

La secció 14 explica un procediment, sense fer els càlculs, per obtenir una fita de fins on poden entrar les successives interseccions de la varietat d'òrbites parabòliques amb \mathbb{N} , $P_{\pm n}$, que permetria de determinar una fita inferior de la zona d'estabilitat.

En la 15, es fa un estudi qualitatiu dels $P_{\pm n}$.

Es clou la memòria amb uns quants problemes oberts a tractar més endavant.

2. MEMÒRIA

1. Problema restringit de 3 cossos, pla i circular. Cas particular:
problema de 2 cossos.

Es considera la següent configuració de masses: m_1 y m_2 són les masses de 2 cossos (anomenats *primaris*) amb la normalització $m_1+m_2=1$, escriurem $m_1=1-m$, $m_2=m$, $m \in [0,1)$; m_3 és la massa infinitesimal d'un tercer cos que es mou sota l'acció dels primaris, sense produir cap influència en llur moviment. El problema restringit de 3 cossos, pla i circular tracta del moviment d'aquest tercer cos, imposant que tots tres es moguin en un mateix pla de forma que els primaris recorrin òrbites circulars al voltant de llur centre de masses.

Escalant les variables de longitud i de temps, es pot aconseguir que la distància entre els primaris, d , així com llur moviment mig, n , siguin 1; això implicarà que la constant de la gravitació universal, G , també valgui 1, usant la llei de Kepler: $nd=G(m_1+m_2)$.

Fixant l'origen en el centre de masses dels primaris, s'usen 2 sistemes de referència: el sistema de referència *sideri*, inercial, i el sistema de referència *sindic*, que gira amb velocitat angular constant igual a 1 i que fixa els primaris en $(m,0)$ i $(m-1,0)$. Veieu les figures 1 i 2.

Òbviamment, les equacions del moviment són les obtingudes a partir de la llei de Newton. Es tindran singularitats quan el cos infinitesimal coincideixi amb algun primari, ja que l'acceleració no roman afitada.

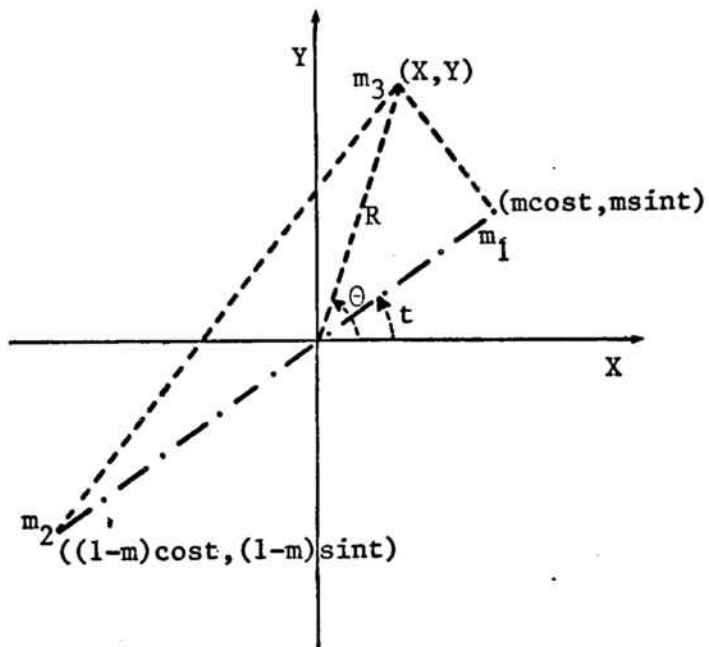


Fig. 1

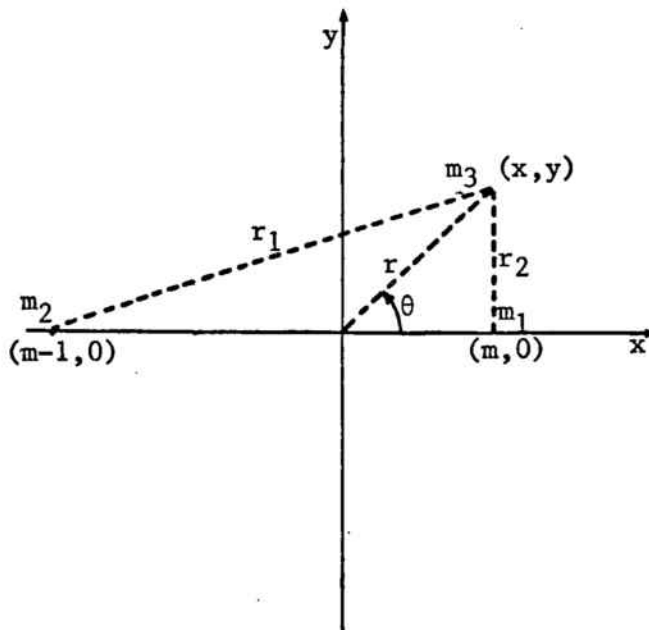


Fig. 2

En el sistema de referència sideri, l'espai de configuració, sense regularitzar les col.lisions, és:

$$\bar{M} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} (\mathbb{R}^2 - \{(m \cos t, m \sin t), ((m-1) \cos t, (m-1) \sin t)\}) \times \{t\} ;$$

l'espai de fases serà, per tant:

$$\bar{W} = T^*\bar{M} = \bar{M} \times \mathbb{R}^2 .$$

En coordenades cartesianes (X, Y, p_X, p_Y) , la funció hamiltoniana (definida en \bar{W}) que representa el problema restringit de 3 cossos en qüestió, ve donada per:

$$\bar{H}(X, Y, p_X, p_Y) = (p_X^2 + p_Y^2) / 2 - \bar{V}(X, Y, t) ,$$

essent $\bar{V}(X, Y, t) = (1-m)/R_1(X, Y, t) + m/R_2(X, Y, t)$,

on $R_1^2(X, Y, t) = (X - m \cos t)^2 + (Y - m \sin t)^2$ i

$R_2^2(X, Y, t) = (X - (1-m) \cos t)^2 + (Y - (1-m) \sin t)^2$.

Les equacions del moviment corresponents són:

$$\dot{X} = p_X, \quad \dot{Y} = p_Y ; \quad \dot{p}_X = \partial_X \bar{V}, \quad \dot{p}_Y = \partial_Y \bar{V} .$$

Usant coordenades polars $(R, \theta, p_R, p_\theta)$, tenim:

$$\bar{H}(R, \theta, p_R, p_\theta, t) = (p_R^2 + p_\theta^2 / R^2) / 2 - \bar{V}(R, \theta, t) ;$$

essent $\bar{V}(R, \theta, t) = (1-m)/R_1(R, \theta, t) + m/R_2(R, \theta, t)$,

on $R_1^2(R, \theta, t) = R^2 - 2mR \cos(\theta - t) + m^2$ i

$R_2^2(R, \theta, t) = R^2 - 2(1-m)R \cos(\theta - t) + (1-m)^2$;

el flux hamiltonià s'expressa com:

$$\dot{R} = p_R, \quad \dot{\theta} = p_\theta / R^2 ; \quad \dot{p}_R = p_\theta^2 / R^3 + \partial_R \bar{V}, \quad \dot{p}_\theta = \partial_\theta \bar{V} .$$

En el sistema de referència sinòdic, el problema és més simple.

L'espai de configuració, sense regularitzar col.lisions, resulta ésser:

$$M = \mathbb{R}^2 - \{(m, 0), (m-1, 0)\}$$

i l'espai de fases:

$$W = T^*M = M \times \mathbb{R}^2 .$$

Les coordenades cartesianes d'aquest sistema de referència

(x, y, p_x, p_y) es relacionen amb les de l'anterior per:

$$(x, y) = G_{-\alpha}(X, Y) \quad i \quad (p_x, p_y) = G_{-\alpha}(p_X, p_Y) ,$$

on G_{α} simbolitza un gir d'angle α a \mathbb{R}^2 .

El nou hamiltonià ja no depèn del temps:

$$H(x, y, p_x, p_y) = (p_x^2 + p_y^2)/2 + y p_x - x p_y - V(x, y) ,$$

essent $V(x, y) = (1-m)/r_1(x, y) + m/r_2(x, y)$,

on $r_1^2(x, y) = (x-m)^2 + y^2$ i $r_2^2(x, y) = (x-(m-1))^2 + y^2$.

Les equacions del moviment en W seran:

$$\dot{x} = p_x + y , \quad \dot{y} = p_y - x ; \quad \dot{p}_x = p_y + \frac{\partial V}{\partial x} , \quad \dot{p}_y = -p_x + \frac{\partial V}{\partial y} .$$

Aquestes equacions permeten d'expressar el hamiltonià en les variables

(x, y, \dot{x}, \dot{y}) :

$$H(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2 - (x^2 + y^2)/2 - V(x, y) .$$

Passant a coordenades polars $(r, \theta, p_r, p_{\theta})$:

$$H(r, \theta, p_r, p_{\theta}) = (p_r^2 + p_{\theta}^2/r^2)/2 - p_{\theta} - V(r, \theta) , \quad (1.1)$$

$V(r, \theta) = (1-m)/r_1(r, \theta) + m/r_2(r, \theta)$.

on $r_1^2(r, \theta) = r^2 - 2mr \cos \theta + m^2$ i $r_2^2(r, \theta) = r^2 - 2(1-m)r \cos \theta + (1-m)^2$.

$$\dot{r} = p_r , \quad \dot{\theta} = p_{\theta}/r^2 - 1 ; \quad \dot{p}_r = p_{\theta}^2/r^3 + \frac{\partial V}{\partial r} , \quad \dot{p}_{\theta} = \frac{\partial V}{\partial \theta} . \quad (1.2)$$

$$H(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)/2 - r^2/2 - V(r, \theta) . \quad (1.3)$$

Es comproven fàcilment les igualtats:

$$r = R , \quad \theta = \Theta - t ; \quad p_r = p_R = \dot{r} = \dot{R} , \quad p_{\theta} = p_{\Theta} = r^2 \dot{\theta} = r^2 (\dot{\Theta} - 1) .$$

Els moments p_r i p_{θ} representen físicament la velocitat radial en ambdós sistemes de referència i el moment angular sideri, respectivament.

El moment angular sinòdic ve donat per $p_{\theta} + r^2$.

En el cas $m=0$, el problema es redueix al problema (restringit) de 2 cossos que tractarem en coordenades polars sidèries i sinòdiques.

L'espai de configuració associat al problema és (en ambdós sistemes de referència):

$$M_0 = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\},$$

i l'espai de fases:

$$W_0 = T^*M_0 = M_0 \times \mathbb{R}^2.$$

Els hamiltonians sideri i sinòdic no depenen del temps i són, respectivament:

$$\begin{aligned} \bar{H}_0(R, \theta, p_R, p_\theta) &= (p_R^2 + p_\theta^2 / R^2) / 2 - 1/R \quad \text{i} \\ H_0(r, \theta, p_r, p_\theta) &= (p_r^2 + p_\theta^2 / r^2) / 2 - p_\theta - 1/r. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Els fluxos hamiltonians respectius són:

$$\dot{R} = p_R, \quad \dot{\theta} = p_\theta / R^2, \quad \dot{p}_R = p_\theta^2 / R^3 - 1/R^2, \quad \dot{p}_\theta = 0; \quad (1.5)$$

$$\dot{r} = p_r, \quad \dot{\theta} = p_\theta / r^2 - 1, \quad \dot{p}_r = p_\theta^2 / r^3 - 1/r^2, \quad \dot{p}_\theta = 0. \quad (1.6)$$

Aquest problema és integrable, té dues integrals primeres en involució:

$$E = (p_r^2 + p_\theta^2 / r^2) / 2 - 1/r \quad (\text{energia sideria}) \quad \text{i} \quad (1.7)$$

$$K = p_\theta \quad (\text{moment angular sideri}). \quad (1.8)$$

Si $m \neq 0$, ni E ni K són integrals primeres del moviment, però ho és:

$$C = 2p_\theta - p_r^2 - p_\theta^2 / r^2 + 2V(r, \theta) \quad (\text{constant de Jacobi}),$$

ja que representa el doble de l'energia sinòdica canviada de signe i el hamiltonià sinòdic no depèn del temps.

Tenim la relació $C=2(K-E)$, on E i K són les funcions energia sidèria i moment angular sideri, però E i K són integrals primeres només si $m=0$.

A (1), cap. 9) es troben tractaments en d'altres variables, així com resultats clàssics, del problema de 2 cossos.

2. Estudi topològic de les varietats invariants I_{EK} .

Es defineixen les varietats invariants I_{EK} del problema de 2 cossos:

$$I_{EK} = \{(r, \theta, p_r, p_\theta) \mid (p_r^2 + p_\theta^2 / r^2) / 2 - 1/r = E, p_\theta = K\} \approx \bar{I}_{EK} \times S^1, \\ \text{on } \bar{I}_{EK} = \{(r, p_r) \mid p_r^2 = 2E + 2/r - K^2/r^2\}. \quad (2.1)$$

És a dir, I_{EK} és el conjunt de punts de l'espai de fases W_0 en que l'energia (1.7) i el moment angular (1.8) sideris valen E i K , respectivament. Aquest conjunt és invariant pel flux hamiltonià.

Fixem, primerament, $K \neq 0$.

Si $E < (-2K^2)^{-1}$, el segon membre de l'equació que defineix \bar{I}_{EK} és sempre negatiu i, per tant, $I_{EK} = \emptyset$.

Quan $E = (-2K^2)^{-1}$, aquesta equació té solució única:

$$(r = r_C = K^2, p_r = 0) \quad (\text{orbita circular})$$

$$\text{i } \bar{I}_{EK} = \{(r = K^2, p_r = 0)\}.$$

En el cas $(-2K^2)^{-1} < E < 0$ (zona d'òrbites el·líptiques), la intersecció de \bar{I}_{EK} amb $\{p_r = 0\}$ té lloc en punts tals que:

$$r = r_{2,3}(E) = (1 \mp (1 + 2EK^2)^{1/2}) / (-2E);$$

$$\text{d'on: } \bar{I}_{EK} = \{(r, p_r) \mid p_r^2 = 2E + 2/r - K^2/r^2, r_2(E) \leq r \leq r_3(E)\} \approx S^1.$$

Si $E = 0$ (òrbites parabòliques), un dels punts de tall desapareix ($\because \lim_{E \rightarrow 0^-} r_3(E) = \infty$) i l'altre té lloc en $r = r_p = \lim_{E \rightarrow 0} r_2(E) = K^2/2$; per tant:

$$\bar{I}_{EK} = \{(r, p_r) \mid p_r^2 = 2/r - K^2/r^2, r \geq K^2/2\} \approx \mathbb{R}.$$

Si $E > 0$ (zona d'òrbites hiperbòliques), el tall té lloc en el punt:

$$r = r_1(E) = (-1 + (1 + 2EK^2)^{1/2}) / (2E);$$

$$\text{per tant, } \bar{I}_{EK} = \{(r, p_r) \mid p_r^2 = 2E + 2/r - K^2/r^2, r \geq r_1(E)\} \approx S^0 \times \mathbb{R}.$$

S'estudia, finalment, el cas $K=0$.

L'equació de \bar{I}_{E0} és: $p_r^2 = 2E + 2/r$. Quan $E < 0$, \bar{I}_{E0} talla $\{p_r = 0\}$ en el punt $r = r_4(E) = -1/E$ i, com que $\lim_{r \rightarrow 0} p_r^2(E, r) = \infty$,

$\bar{I}_{E0} = \{(r, p_r) \mid p_r^2 = 2E + 2/r, r < r_4(E)\} \simeq \mathbb{R}$. En cas contrari, no hi ha cap punt de tall, i ja que $\lim_{r \rightarrow 0} p_r^2(E, r) = \infty$ i $\lim_{r \rightarrow \infty} p_r^2(E, r) = 2E$:

$$\bar{I}_{E0} = \{(r, p_r) \mid p_r^2 = 2E + 2/r, r > 0\} \simeq S^0 \times \mathbb{R}.$$

La figura 3 dóna una idea dels I_{EK} en els diferents casos esmentats.

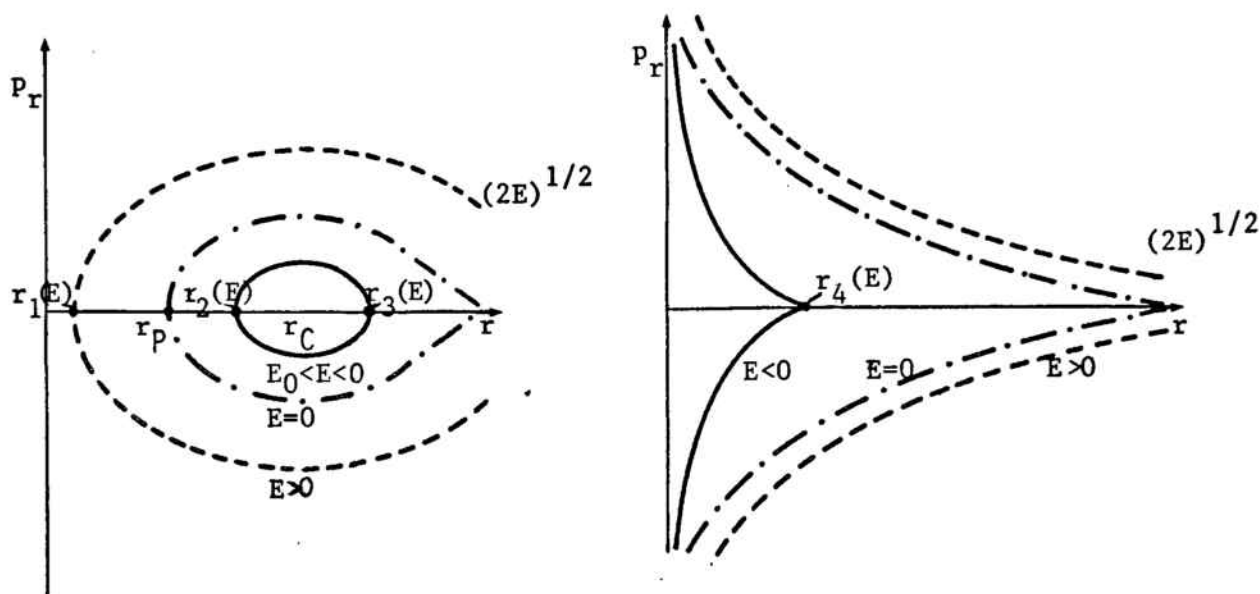


Fig. 3 a): \bar{I}_{EK} per a $K \neq 0$ i $E > (-2K^2)^{-1} = E_0$.

Fig. 3 b): \bar{I}_{E0} , per a $E \in \mathbb{R}$.

Aquest estudi completament analític ens porta al teorema d'Smale
(veieu {14}):

Teorema 2.1. Si $K \neq 0$:

$$I_{EK} = \emptyset, \text{ si } E < (-2K^2)^{-1};$$

$$I_{EK} \approx S^1, \text{ si } E = (-2K^2)^{-1}$$

$$I_{EK} \approx S^1 \times S^1 \approx T^2, \text{ si } (-2K^2)^{-1} < E < 0;$$

$$I_{EK} \approx S^1 \times \mathbb{R}, \text{ si } E > 0.$$

b) $I_{E0} \approx S^1 \times \mathbb{R}, \text{ si } E < 0;$

$$I_{E0} \approx S^0 \times S^1 \times \mathbb{R}, \text{ si } E > 0.$$

La figura 4 dóna qui és I_{EK} en funció de E i de K .

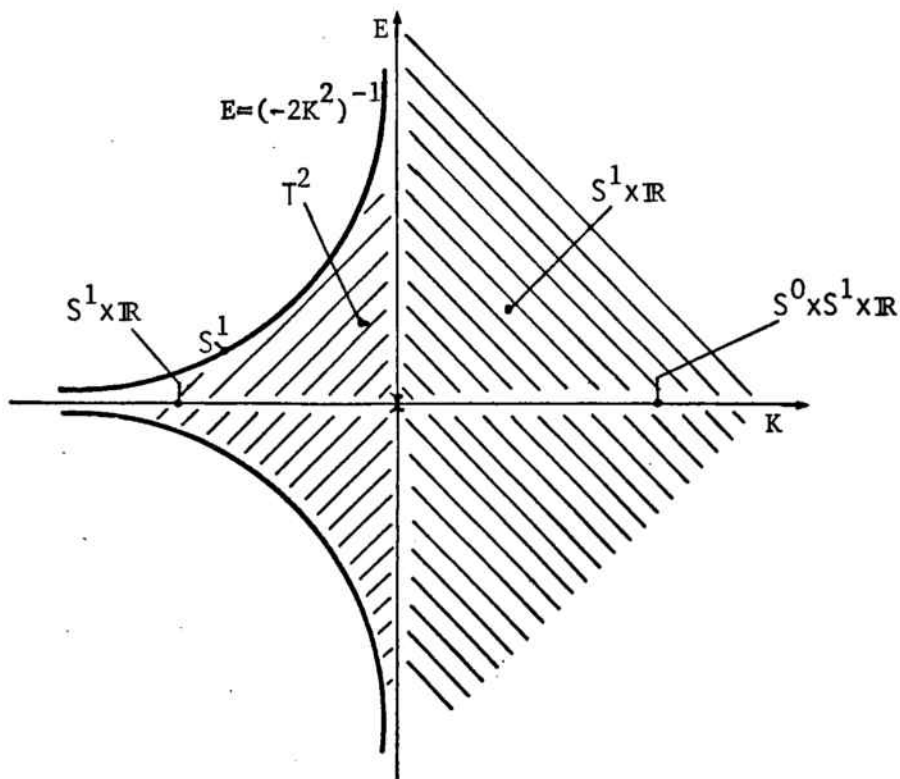


Fig. 4

3. Estudi topològic de les varietats invariants I_C .

La constant de Jacobi C és una integral primera del problema restringit de 3 cossos que estudiem; ho és també del problema de 2 cossos. El propòsit d'aquesta secció és l'estudi de les varietats invariants I_C del problema de 2 cossos (formades pels punts de l'espai de fases W_0 en què la constant de Jacobi val C) per als diferents valors d'aquesta constant del moviment. Es dona així una visió aproximada d'aquestes varietats en problemes de 3 cossos que són petites perturbacions del de 2.

Definim, per tant,

$$I_C = \{(r, p_r, \theta, p_\theta) \mid 2p_\theta^2 - p_r^2 - p_\theta^2/r^2 + 2/r = C\} = \bar{I}_C \times S^1, \quad (3.1)$$

on $\bar{I}_C = \{(r, p_r, p_\theta) \mid p_r^2 = 2p_\theta^2 - C + 2/r - p_\theta^2/r^2\}$.

Fixem C , definim $\Delta(p_\theta) = 1 + p_\theta^2(2p_\theta - C)$ i analitzem els talls de \bar{I}_C amb el pla $\mathbb{R}: \{p_r = 0\}$. Observem el següent:

a) No hi ha solució de l'equació que defineix \bar{I}_C per a aquells valors de p_θ que compleixin $\Delta(p_\theta) < 0$.

b) La solució és única $(r = p_\theta^2, p_r = 0, p_\theta)$ per a aquells valors de p_θ tals que $\Delta(p_\theta) = 0$ ($:: 2p_\theta + 1/p_\theta^2 = C$).

c) Quan $0 < \Delta(p_\theta) < 1$, $I_C \cap \mathbb{R}$ són conjunts que poden expressar-se per:

$$r = r_{2,3}(p_\theta) = (1 \mp (1 - p_\theta^2(C - 2p_\theta))^{1/2}) / (C - 2p_\theta);$$

a més, quan p_θ tendeix a $C/2$ (per al qual $\Delta(p_\theta) = 1$):

$$\lim_{p_\theta \rightarrow C/2^-} r_3(p_\theta) = \infty \quad \text{i} \quad \lim_{p_\theta \rightarrow C/2} r_2(p_\theta) = C^2/8.$$

d) En $\Delta(p_\theta) > 1$ només perduren els talls d'equació:

$$r = r_2(p_\theta) = (-1 + (1 + p_\theta^2(2p_\theta - C))^{1/2}) / (2p_\theta - C).$$

Sigui $p_r(r, p_\theta) = (2p_\theta - C + 2/r - p_\theta^2/r^2)^{1/2}$, $\partial_r p_r(r, p_\theta) = 0$ implica $r = p_\theta^2$.
 Ens adonem de l'existència d'una "carena" de la varietat \bar{I}_C segons l'alçada p_r i en la direcció de r sobre la corba $(p_r=0, r=p_\theta^2)$ i de la seva simètrica respecte el pla \mathbb{R} , en el sentit que en aquests punts tenim un màxim i un mínim, respecte a r , de les funcions $\pm p_r(r, p_\theta)$, respectivament.

Es donen les gràfiques de l'alçada d'aquesta "carena" respecte a p_θ per a valors de C més petits, més grans o iguals que 3 en la figura 5.

L'anàlisi de les interseccions d'aquestes corbes amb l'eix $\{p_r=0\}$ del pla p_r-p_θ ens informa sobre la topologia de les varietats \bar{I}_C :

$$p_r(p_\theta^2, p_\theta) = \pm(2p_\theta - C + 1/p_\theta^2)^{1/2} = 0 \text{ implica } 2p_\theta^3 - Cp_\theta^2 + 1 = 0.$$

Aquesta equació té només un zero negatiu $K_{-1}(C)$, quan $C < 3$; si $C > 3$, té, a més, 2 zeros positius $K_1(C)$ i $K_2(C)$ tals que:

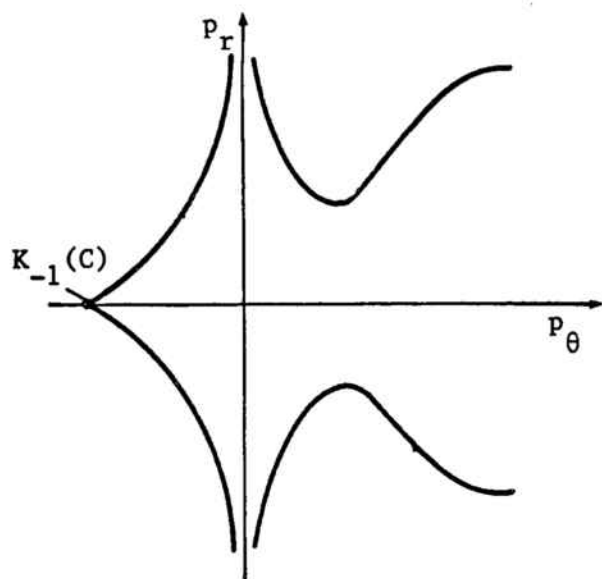
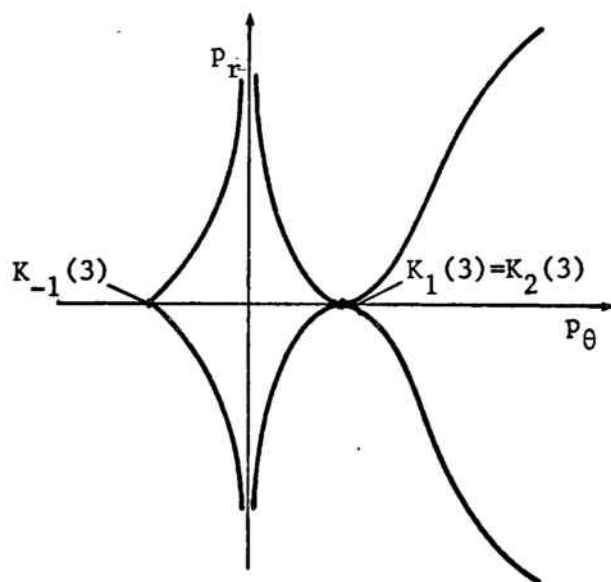
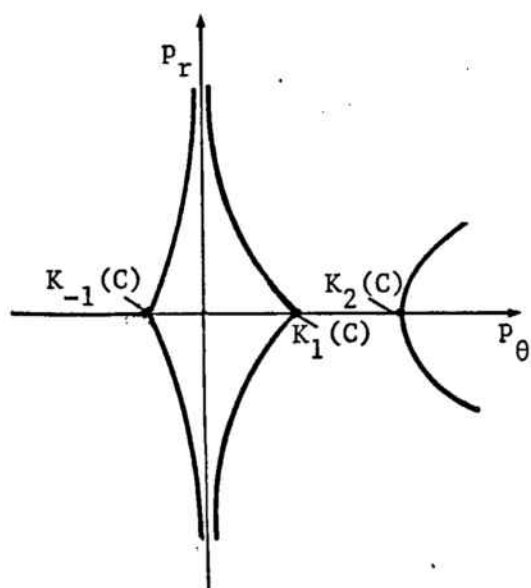
$$K_1(C) < 1 < K_2(C) < C/2$$

i que es confonen per a $C=3$: $K_{-1}(3) = -1/2$, $K_1(3) = K_2(3) = 1$.

Això ens assegura que I_C té dues components connexes per a $C > 3$ i una per a $C \leq 3$.

D'ara en endavant, considerarem $C > 3$ i ens fixarem només en la component exterior de I_C : $I_C^{\text{ext}} \simeq \bar{I}_C^{\text{ext}} \times S^1$.

Pot trobar-se més informació sobre això en {16}.

Fig. 5 a): $C < 3$.Fig. 5 b): $C = 3$.Fig 5 c): $C > 3$.

Els següents enunciats recullen aquests resultats i ens donen informació analítica i intuïtiva de I_C^{ext} .

Proposició 3.1. I_C és simètrica respecte el pla $\Pi: \{p_r=0\}$; la part superior a aquest pla es pot definir explícitament per la funció:

$$p_r(r, p_\theta) = (2p_\theta - C + 2/r - p_\theta^2/r^2)^{1/2},$$

definida en el conjunt de punts (r, p_θ) que fan positiu el radicand.

Aquesta funció presenta un màxim, segons r , sobre la paràbola $r = p_\theta^2$.

Proposició 3.2. I_C^{ext} està format per:

a) una òrbita circular: $C = \{(r=r_C=K_P, p_r=0, p_\theta=K_C)\} \times S^1 = \bar{C} \times S^1$.

b) òrbites el·líptiques:

$$E = \{(r, p_r, p_\theta) \mid p_r^2 = 2p_\theta - C + 2/r - p_\theta^2/r^2, p_\theta \in (K_C, K_P)\} \times S^1 = \bar{E} \times S^1.$$

c) òrbites parabòliques:

$$P = \{(r, p_r, p_\theta) \mid p_r^2 = 2/r - p_\theta^2/r^2, p_\theta = K_P\} \times S^1 = \bar{P} \times S^1.$$

d) òrbites hiperbòliques:

$$H = \{(r, p_r, p_\theta) \mid p_r^2 = 2p_\theta - C + 2/r - p_\theta^2/r^2, p_\theta > K_P\} \times S^1 = \bar{H} \times S^1.$$

(K_C és el zero més petit de $\phi(p_\theta) = 2p_\theta + 1/p_\theta^2 - C$ i $K_P = C/2$).

Proposició 3.3. \bar{E} talla el pla Π en 2 branques:

$$B_{2,3} = \{(r, p_\theta) \mid r = r_{2,3}(p_\theta) = (1 \mp (1 - p_\theta^2(C - 2p_\theta))^{1/2}) / (C - 2p_\theta), p_\theta \in (K_C, K_P)\};$$

\bar{P} talla en el punt $(r = K_P^2/2, p_\theta = K_P) = (r = C^2/8, p_\theta = C/2)$ i la intersecció de \bar{H} amb Π té lloc només en la branca

$$B'_2 = \{(r, p_\theta) \mid r = r_2(p_\theta), p_\theta > K_P\},$$

que és continuació de la B_2 , ja que la branca B_3 arriba a l'infinit en $p_\theta = C/2$.

Una visió intuïtiva de I_C^{ext} es dona en la figura 6.

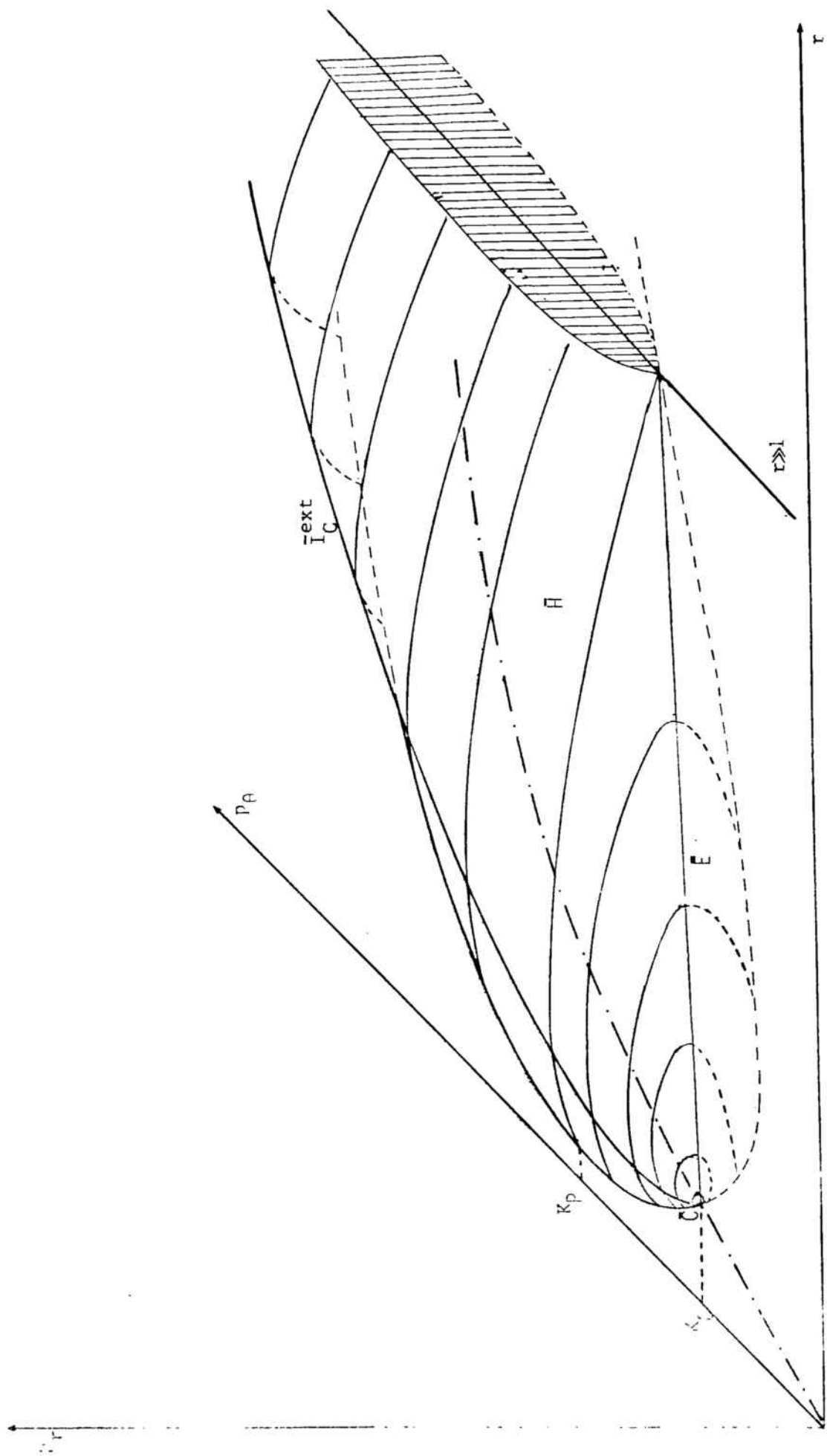


Fig. 6

Lema 3.1. En les coordenades $(s=r/p_\theta^2, p_r, p_\theta)$ s'observa que les projeccions de \bar{I}_C^{ext} sobre plans $p_\theta = \text{const.}$ són homeomorfismes amb la imatge; aquestes imatges són homeomorfes a un semidisc obert foliat com indica la figura 7, de forma que \bar{C} , \bar{E} , \bar{P} i \bar{H} es corresponen amb el punt central, la regió d'òrbites tancades, la primera corba no tancada i la resta de corbes no tancades, respectivament.

Demostració: Definim $\zeta(p_\theta) = (1 - p_\theta^2(C - 2p_\theta))^{1/2}$ en $1 - p_\theta^2(C - 2p_\theta) > 0$.

En les noves coordenades, la paràbola $(r = p_\theta^2, p_r = 0)$ passa a ésser la recta $(s = 1, p_r = 0)$ i les branques $B_2 \cup B_2'$ i B_3 a:

$$\tilde{B}_2 = \{(s, p_\theta) \mid s = s_2(p_\theta) = s(r_2(p_\theta), p_\theta) = (1 + \zeta(p_\theta))^{-1}, p_\theta : 1 - p_\theta^2(C - 2p_\theta) \geq 0\}$$

i

$$\tilde{B}_3 = \{(s, p_\theta) \mid s = s_3(p_\theta) = s(r_3(p_\theta), p_\theta) = (1 - \zeta(p_\theta))^{-1}, p_\theta : 1 - p_\theta^2(C - 2p_\theta) \geq 0, p_\theta < C/2\},$$

respectivament.

L'òrbita circular, que compleix $\zeta(K_C) = 0$, està en $s_C = s_2(K_C) = 1$ i $\bar{P} \cap \bar{H}$, que compleix $\zeta(K_P) = 1$, en $s_P = s_2(K_P) = 1/2$.

Per demostrar els homeomorfismes amb la imatge de l'enunciat, cal veure només que s_2 i s_3 són funcions estrictament decreixent i creixent, respectivament; o bé, equivalentment, que ζ és estrictament creixent. Això serà cert si la funció derivada de $f(p_\theta) = p_\theta^2(C - 2p_\theta)$ és estrictament negativa:

$$f'(p_\theta) = 2p_\theta(C - 3p_\theta) > 0 \text{ si } p_\theta > C/3.$$

Aquesta última relació és certa perquè $p_\theta > K_C$ i $K_C > C/3$, deguda a la continuïtat de ϕ i a les relacions:

$$\lim_{p_\theta \rightarrow \infty} \phi(p_\theta) = \infty \text{ i } \phi(C/3) = 2C/3 - 9/C^2 - C < 0 \quad \square$$

El lema 3.1 ens permet d'enunciar el següent teorema que ens dóna la topologia de I_C^{ext} :

Teorema 3.1. I_C^{ext} És homeomorfe a un torus solid obert foliat, primerament, per tors encaixonats els uns dins dels altres, essent l'òrbita circular l'eix d'aquests tors que formen la regió homeomorfa a la zona d'òrbites el·líptiques; continua la foliació amb cilindres en la mateixa disposició formant la regió homeomorfa a la zona d'òrbites parabòliques i hiperbòliques.

A [8] es troba un estudi topològic de I_C , àdhuc en el cas de considerar varietats amb col·lisions regularitzades pel mètode de Levi-Civita.

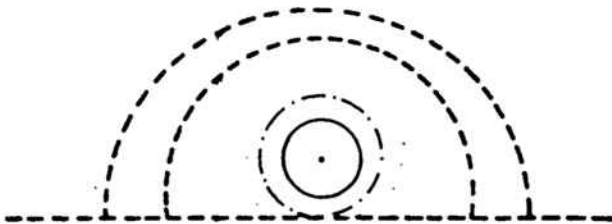


Fig. 7

4. Importància de la corba de velocitat zero exterior.

Recordem la fórmula (1.3):

$$H(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) / 2 - r^2 / 2 - V(r, \theta) \quad ;$$

d'on:

$$C = 2(r^2 / 2 + V(r) - (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) / 2) = 2(r^2 / 2 + V(r) - |\vec{v}|^2 / 2) \quad , \quad (4.1)$$

essent \vec{v} la velocitat sinòdica.

$\vec{v} = 0$ equival a $\dot{r} = 0, \dot{\theta} = 0$ i a $p_r = 0, p_\theta = r^2$, usant les equacions del moviment; llavors:

$$C = r^2 + 2V(r) \quad (\text{equació de les corbes de velocitat zero}). \quad (4.2)$$

Fent $m=0$, tenim:

$$C = r^2 + 2/r$$

o, equivalentment,

$$r^3 - Cr + 2 = 0 \quad . \quad (4.3)$$

Si $C < 3$, aquesta equació no té solucions reals més grans que 0; si $C > 3$, té dues solucions reals $r'(C)$ i $r''(C)$ tals que

$$0 < r'(C) < 1 < r''(C) < C^{1/2}$$

que es confonen per a $C=3$: $r'(3) = r''(3) = 1$.

El valor $r''(C)$ correspon a la corba de velocitat zero exterior.

Considerant $C > 3$ i fixant-nos només en la component exterior de I_C , ens adonem que la corba de velocitat zero exterior correspon al punt de la branca $B_2 \cup B_2'$ que té mínima r .

És a dir, fent $d/dp_\theta(r_2(p_\theta)) = 0$, això equival a

$$p_\theta^{3/2} - C p_\theta^{1/2} + 2 = 0 \quad ,$$

que resulta ésser (4.3), ja que aquesta corba està en $(p_r = 0, p_\theta = r^2)$.

Estudiant aquesta última equació per a diferents valors de C , en el sentit de veure quan la seva solució més gran és més petita, igual o més gran que $K_p = C/2$, sabrem en quina regió (circular, el·líptica, parabòlica o hiperbòlica) esta aquesta corba de velocitat zero exterior. El resultat obtingut és el següent:

Proposició 4.1. Si $C < 32^{1/3}$, la corba de velocitat zero exterior és en la regió el·líptica; si $C = 32^{1/3}$, en la parabòlica, i, en cas contrari, en la hiperbòlica.

Escrivint l'equació de \bar{I}_C en la forma

$$p_\theta^2 - 2r^2 p_\theta + p_r^2 r^2 + Cr^2 - 2r = 0,$$

veiem que, fixats C, r, p_r , tenim dues determinacions de p_θ en la regió: $r^2 + 2/r > p_r^2 + C$; això ens indica que fixades la constant de Jacobi, la distància a l'origen i la velocitat radial no es determina completament el moviment si compleixen la relació anterior, ja que llavors poden haver-hi moviments amb dos valors diferents del moment angular sideri:

$$p_\theta^{1,2}(C, r, p_r) = r(r \pm (r^2 + 2/r - p_r^2 - C)^{1/2}).$$

Podem donar una interpretació física d'aquest fet: fixades C i r , usant (4.1), queda determinat el mòdul de la velocitat sinòdica; si aquesta no té la direcció radial, donant $\dot{r} = p_r$, hi han dues determinacions d'aquesta velocitat sinòdica i, per tant, de la sideria i del moviment, que pot tenir lloc amb 2 valors diferents del moment angular sideri, p_θ .

La frontera de la regió anterior ve donada per l'equació:

$r^2 + 2/r = p_r^2 + C$ i esta formada pels mínims de la funció $r=r(p_\theta)$ en cada secció $p_r = \text{const.}$ de \bar{I}_C^{ext} . En particular, quan $p_r = 0$, aquest mínim correspon a la corba de velocitat zero exterior. En aquesta frontera, el valor de p_θ està ben determinat, es determina completament el moviment fixant només C , r i p_r , perquè, en aquests punts, la direcció de la massa infinitesimal és radial.

En una terminologia més matemàtica, podem recollir aquesta informació en el següent teorema:

Teorema 4.1. La corba de velocitat zero exterior té el valor crític de p_θ , p_θ^* , tal que, si $p_\theta' > p_\theta^*$, la projecció de $\bar{I}_C^{\text{ext}} \{p_\theta < p_\theta'\}$ sobre plans $p_\theta = \text{const.}$ deixa d'ésser injectiva.

5. Estudi del flux sobre les varietats invariants I_{EK} .

Fixem $K \neq 0$.

En l'òrbita circular I_{EK} , $E = (-2K^2)^{-1}$, les equacions del moviment són: $\dot{r} = \dot{p}_r = \dot{p}_\theta = 0$, $\dot{\theta} = K^{-3} - 1$. El moviment, vist des del sistema de referència sinòdic, és una rotació de velocitat angular constant $\dot{\theta} = K^{-3} - 1$. Aquest moviment serà directe quan $0 < K < 1$ i retrògrad per a $K < 0$ i $K > 1$; quan $K = 1$, tot punt de la circumferència ($r = K^2, p_r = 0$) invariant és d'equilibri.

L'anàlisi de la zona el·líptica ($(-2K^2)^{-1} < E < 0$) es facilita amb la introducció de les variables d'acció-angle que donarem a continuació, veieu ([3], pp.276-83).

Notarem aquestes variables per $(\phi_1, \phi_2, I_1, I_2)$. Prendrem $\phi_2 = \theta$ i $I_2 = p_\theta = K$ i restringirem l'estudi a les variables I_1 i ϕ_1 .

De la referència anterior:

$$\begin{aligned} I_1(E) &= \frac{1}{2\pi} \oint p_r(E, r) dr = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{r_2(E)}^{r_3(E)} + \int_{r_2(E)}^{r_3(E)} \right) (2E + 2/r - K^2/r^2)^{1/2} dr = \\ &= (-2E)^{-1/2} - K. \end{aligned}$$

La integració curvilínia es fa al voltant del cicle base corresponent sobre la varietat; en aquest cas això és molt simple.

La funció generatriu que dóna el canvi de coordenades és:

$$S(I_1, r) = \int p_r(E(I_1), r) dr = \int (-(I_1 + K)^{-2} + 2/r - K^2/r^2)^{1/2} dr,$$

on \int designa una primitiva qualsevol i $E(I_1)$, la inversa de $I_1(E)$.

La variable Φ_1 s'obté llavors fent:

$$\Phi_1 = \partial_{I_1} S = \arccos((1+2Er)(1+2EK^2)^{1/2}) - (-2E)^{1/2} (-2Er^2 - 2r + K^2)^{1/2},$$

en una certa determinació.

En les noves variables, el hamiltonià depèn només dels moments I_1 i I_2 :

$$H(I_1, I_2) = -(2(I_1 + I_2)^2)^{-1} - I_2$$

que implica un comportament molt simple del flux:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_1 &= \omega_1(I_1, I_2) = (I_1 + I_2)^{-3}, \quad \dot{I}_1 = 0; \\ \dot{\Phi}_2 &= \omega_2(I_1, I_2) = (I_1 + I_2)^{-3} - 1, \quad \dot{I}_2 = 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

D'on, usant ([5], p.113):

Teorema 5.1. Si $K \neq 0$, el flux hamiltonià, en la zona el·líptica i vist des del sistema de referència sinòdic, és quasiperiòdic de freqüències respectives $(-2E)^{+3/2}$ i $(-2E)^{+3/2} - 1$, usant variables d'acció-angle. Si $(-2E)^{1/2}$ és racional, aquest flux és periòdic; en cas contrari, ergòdic sobre el tor I_{EK} .

En la zona hiperbòlica ($E > 0$), la varietat I_{EK} no està afitada, és un cilindre; no podem usar, per tant, la tècnica de les variables d'acció-angle. Donarem només informació sobre el comportament prop de l'infinit. Es poden escriure les equacions del moviment prop de l'infinit en la forma: $\dot{r} = p_r$, $\dot{\theta} = K(1/r)^2 - 1$, $\dot{p}_r = -1/r^2(1 + O(1/r))$; d'on, la partícula arriba espiralant a l'infinit, fent tendir la velocitat angular a -1 i la velocitat radial a $(2E)^{1/2}$.

Donarem, finalment, unes idees del moviment en el cas $K=0$.

El flux hamiltonià és molt simple: $\dot{r}=p_r$, $\dot{\theta} = -1$, $\dot{p}_r = -1/r^2$. Per tant, el moviment de la partícula infinitesimal es produeix segons una recta en el sistema sideri; en el sistema sinòdic, té a més un moviment de precessió de velocitat angular igual a -1 . Si $E < 0$, aquest cos es mou fins a una distància $r_4(E) = -1/E$ i torna a l'origen de coordenades amb velocitat infinita. Quan $E > 0$, la partícula arriba a l'infinít amb velocitat radial $(2E)^{1/2}$ i si va en direcció contrària també arriba a l'origen amb velocitat infinita.

6. Solucions semiexplícites del problema de 2 cossos.

Treballant en el sistema de referència sideri i en coordenades polars i usant ([7], pp.146-8) tenim les relacions:

$$\int \frac{d\theta}{2K} + \int \frac{d(1/R)}{2p_R(R,E,K)} = \text{const.} \quad (6.1)$$

i

$$-t + \int \frac{dR}{p_R(R,E,K)} = \text{const.} , \quad (6.2)$$

essent $p_R(R,E,K) = (2E + 2/R - K^2/R^2)^{1/2}$.

De (6.1):

$$R_0(\theta) = \frac{K^2}{1 + (1 + 2EK^2)^{1/2} \cos(\theta_0 - \bar{\theta})} = \frac{\lambda}{1 + e \cos(\theta_0 - \bar{\theta})}$$

on hem fet $\lambda = K^2$ i $e = (1 + 2EK^2)^{1/2}$. O bé:

$$R_0(\theta) = \bar{\theta}_0 + \arccos((\lambda/R - 1)/e) .$$

Per tant, el moviment té lloc sobre una cònica de parametre $\lambda = K^2$ i excentricitat $e = (1 + 2EK^2)^{1/2}$.

De (6.2), s'extreu:

$$t = (-2E)^{-3/2} \arccos((1 + 2ER_0)(1 + 2EK^2)^{-1/2}) - (-2E)^{-1/2} (-2ER_0^2 - 2R_0 + K^2)^{1/2} , \quad (6.3)$$

en la regió el·líptica.

Usem la variable u tal que $\cos u = (1 + 2ER_0)(1 + 2EK^2)^{-1/2}$ i $a = (-2E)^{-1}$, que resulten ésser l'anomalia excèntrica i el semieix major de l'el·lipse, respectivament (veieu

La relació (6.3) es transforma en:

$$u - e \sin u = a^{-3/2} t \quad (\text{equació de Kepler}) \quad (6.4)$$

Canviant el temps t pel temps fictici u , la següent proposició ens dóna les solucions de les equacions del moviment del problema de 2 cossos en els sistemes sideri i sinòdic, (1.5) i (1.6).

Proposició 6.1. Les solucions del problema de 2 cossos en la regió el·líptica, en funció de l'anomalia excèntrica u , són:

$$R_0(u) = a(1 - e \cos u), \quad \theta_0(u) = \bar{\theta} + \arccos((\cos u - e)/(1 - e \cos u));$$

$$p_{R_0}(u) = e \sin u / (a^{1/2} (1 - e \cos u)),$$

en el sistema sideri; i

$$r_0(u) = a(1 - e \cos u), \quad \theta_0(u) = \bar{\theta} + \arccos((\cos u - e)/(1 - e \cos u)) - a^{3/2} (u - e \sin u),$$

$$p_{r_0}(u) = e \sin u / (a^{1/2} (1 - e \cos u)),$$

en el sistema sinòdic

En la zona parabòlica convé usar la variable z , tal que

$$\cos z = K / (2R_0)^{1/2} = C / (8R_0)^{1/2},$$

que és l'anomalia excèntrica en el cas parabòlic.

La relació entre z i el temps t és:

$$t = C^3 (\operatorname{tg} z + \operatorname{tg}^3 z / 3) / 16 \quad (\text{equació de Barker}). \quad (6.5)$$

D'on:

Proposició 6.2. Les solucions del problema de 2 cossos en la zona parabòlica, en funció de l'anomalia excèntrica z , són:

$$R_0(z) = C^2 \sec^2 z / 8, \quad \theta_0(z) = \bar{\theta} + 2z, \quad p_{R_0}(z) = 2 \sin 2z / C,$$

en el sistema sideri; i

$$r_0(z) = C^2 \sec^2 z / 8, \quad \theta_0(z) = \bar{\theta} + 2z - C^3 (\operatorname{tg} z + \operatorname{tg}^3 z / 3) / 16, \quad p_{r_0}(z) = 2 \sin 2z / C,$$

en el sistema sinòdic.

Es pot donar un tractament uniforme a les solucions del problema de 2 cossos en les tres regions el.líptica, parabòlica i hiperbolica que es troba detallat a ([15], pp.42-51) , donarem aquí els resultats que ens interessin.

Es treballa amb el temps fictici s tal que $d/ds=R_0 d/dt$ i es noten amb primes les derivades respecte a s .

La transformació de Levi-Civita:

$$X + iY = (U_1 + iU_2)^2$$

ens permet de regularitzar el problema i transformar-lo en:

$$U_1'' - EU_1/2 = 0 , \quad U_2'' - EU_2/2 = 0 \quad (6.6)$$

que resulta ésser un oscil.lador harmònic en la zona el.líptica.

(En el problema espacial això s'aconseguiria usant la transformació K-S).

Notem, però, que en l'obtenció de (6.6) s'ha fet ús explícit de la integral de l'energia. Això explica l'aparent paradoxa de que el problema de 2 cossos no sigui estable Liapunov i (6.6), sí; ja que en el problema de 2 cossos una variació de les condicions inicials pot originar canvi d'energia i, per tant, de freqüència i en (6.6) pressuposem que l'energia E és perfectament fixada i, llavors, la freqüència resta invariant; és a dir, en (6.6) només s'admeten variacions isoenergètiques.

Es poden reconstruir les proposicions d'aquesta secció escrivint les solucions d'aquest oscil.lador i refent els canvis de variables.

Per donar l'anàlisi uniforme dels tres cassos, s'han de discutir les solucions de l'equació:

$$U'' + \rho U = 0$$

per a $\rho < 0$, $\rho = 0$ i $\rho > 0$.

Definint les funcions d'Stumpff per: $c_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k / (2k)!$ $n > 0$,
la solució s'expressa fàcilment:

$$U(s) = U(0)c_0(\rho s^2) + U'(0)sc_1(\rho s^2) .$$

La solució de l'equació (6.6) sota les condicions inicials standard,
és:

$$U_1(s) = U_1(0)c_0(-Es^2/2) , \quad U_1(s) = U_2'(0)sc_1(-Es^2/2) ,$$

on $E = (2U_2'(0) - 1) / U_1(0)^2$ i $e = 2U_2'(0) + EU_1(0)^2$.

Refent el canvi de variables de Levi-Civita i passant a polars sinò-
diques, tenim:

$$R_0 = \bar{R}_0 + es^2c_2(-2Es^2) ,$$

$$p_{R_0} = \bar{R}_0(1+e) ,$$

on \bar{R}_0 és la distància al perigeu, que en el cas el·líptic val $\bar{R}_0 = a(1-e)$.

Les solucions donades en les proposicions d'aquesta secció surten
fàcilment usant les següents igualtats:

$$c_{2n}(w^2) = (-1)^n (\cos w - \cos w) |_{2n-1} / w^{2n} ,$$

$$c_{2n+1}(w^2) = (-1)^n (\sin w - \sin w) |_{2n-1} / w^{2n+1} ,$$

$$c_n(0) = 1/n! ;$$

i les relacions entre els temps ficticis s , u i z :

$$u = (-2E)^{1/2} s \quad \text{i} \quad s = C \operatorname{tg} z / 2 .$$

Les equacions (6.4) i (6.5) són uniformitzades per:

$$t = \bar{R}_0 s + es^2c_3(-2Es^2) .$$

S'usaran essencialment aquests resultats en la secció 15, en la uni-
formització d'una solució del sistema d'equacions variacionals homogenit-
zat corresponent a la perturbació de I_{EK} i que només es coneixia pel cas
parabòlic ($E=0$).

7. El problema restringit de 3 cossos, pla i circular, com una perturbació del de 2 cossos.

El hamiltonià del problema restringit de 3 cossos podem escriure'l com:

$$H(r, \theta, p_r, p_\theta) = H_0(r, \theta, p_r, p_\theta) + \Delta H(r, \theta) .$$

essent H i H_0 els donats en les fórmules (1.1) i (1.4) i

$$\Delta H = (1-m)/r_1(r, \theta) + m/r_2(r, \theta) - 1/r .$$

Aquesta secció es dedica a explicitar aquesta perturbació fins a primer ordre en els casos que sigui prou petita.

Es pot començar aquesta anàlisi considerant $m \neq 0$, perquè si $m=0$, tenim un problema de 2 cossos de masses $m_1=1$ (situat a l'origen) i m_3 , infinitesimal.

El comportament asimptòtic de ΔH , quan m tendeix a 0, és el següent:

$$\Delta H_{(m)} = m(1/r - \cos\theta/r^2 - (r^2 - 2r\cos\theta + 1)^{1/2}) + O(m^2) .$$

D'altra banda, ΔH té un desenvolupament asimptòtic en potències de C^{-1} que deduïm a continuació:

$$\begin{aligned} \Delta H &= \frac{1}{r} - \frac{1-m}{|(x,y)-(m,0)|} - \frac{m}{|(x,y)-(m-1,0)|} = \\ &= \frac{1}{r} - \sum_{k \geq 0} \left((1-m)^k + (-1)^k m(1-m)^k \right) \frac{P_k(\cos\theta)}{r^{k+1}} , \end{aligned}$$

on hem aplicat el ben conegut desenvolupament de $\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$ en polinomis

de Legendre en el cosinus de $\widehat{\vec{r}_1, \vec{r}_2} = \alpha$:

$$\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \sum_{k \geq 0} \frac{r_{<}^k}{r_{>}^k} P_k(\cos \alpha), \quad r_{<} = \min(|\vec{r}_1|, |\vec{r}_2|), \quad r_{>} = \max(|\vec{r}_1|, |\vec{r}_2|)$$

i la simetria $P_k(-x) = (-1)^k P_k(x)$, en els casos:

$$\vec{r}_1 = (x, y), \quad \vec{r}_2 = (m, 0) \quad \text{i} \quad \vec{r}_1 = (x, y), \quad \vec{r}_2 = (m-1, 0);$$

d'on, els angles emprats són: θ i $\pi - \theta$.

Explicitant els primers termes del desenvolupament anterior obtenim un desenvolupament asimptòtic de ΔH en potències de r^{-1} , quan r tendeix a infinit:

$$\Delta H_{(1/r)} = r^{-3} (m(1-m)(3\cos^2 \theta - 1)/2 + O(r^{-1})) \quad (7.1)$$

Intentarem escriure aquesta perturbació en termes de C^{-1} , quan C és gran; en realitat, només l'afitem. La corba de velocitat zero exterior (4.2) delimita el recinte de l'espai de configuració que estem estudiant i té l'equació:

$$C = r^2 + 2(m/r_1 + (1-m)/r_2);$$

si C és gran, r també ho serà i es poden relacionar afirmant que r està afitada inferiorment per la r corresponent a la corba de velocitat zero exterior i, com que $C = r^2 + 2/r + O(r^{-3})$ en la corba de velocitat zero exterior,

$$r < C^{1/2} (1 + O(C^{-1})); \quad (7.2)$$

d'on: $(C/r^2)^{3/2} < (1 + 2/r^3 + O(r^{-5}))^{3/2} = 1 + 3/r^3 + O(r^{-5}) < 1 + O(C^{-3/2})$,

que ens permet d'afitar l'expressió (7.):

$$\begin{aligned} \Delta H_{(1/C)} &< C^{-3/2} (1 + O(C^{-3/2})) (m(1-m)(3\cos^2 \theta - 1)/2 + O(C^{-1/2})) = \\ &= C^{-3/2} m(1-m)(3\cos^2 \theta - 1)/2 + O(C^{-2}). \end{aligned}$$

És a dir, quan la constant de Jacobi és molt gran, el problema es pot entendre també com una perturbació petita del problema de 2 cossos; això és degut, com hem vist, al fet que C gran força a moure el tercer cos a una distància molt gran dels primaris de manera que gairebé confonllur interacció; quan C es fa infinita, tenim un problema de 2 cossos.

Aquest raonament ens porta al següent: un problema restringit de 3 cossos, pla i circular amb la distància entre els primaris prou petita i una constant de Jacobi finita es pot reduir al cas anterior, un problema amb distància entre els primaris unitat i constant de Jacobi molt gran, i recíprocament.

En efecte, considerant aquest últim problema i que, per simplificar, el tercer cos esta formant triangle isòsceles amb els primaris i a la mateixa distancia de tots dos, aquell els veu sota un angle 2α tal que:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2r} = \frac{1}{2C^{1/2}} (1 + o(C^{-1})) ,$$

per tant, per conservar aquesta condició per a una distància entre els primaris més petita, d , i una constant de Jacobi C_d , aquestes han de complir la relació:

$$C_d = Cd^2$$

que ens permet d'afirmar que ΔH té un desenvolupament assímtòtic segons el petit paràmetre d , del tipus:

$$\Delta H_{(d)} = d^3 C_d^{-3/2} m(1-m)(3\cos^2\theta - 1)/2 + o(d^4) .$$

S'ens presenta el següent problema: al tractar un problema restringut de 3 cossos amb la distància entre els primaris petita tenim dificultats ja que, segons la 3^a llei de Kepler, es mouran a velocitats molt grans i quan $d=0$ (problema de 2 cossos) la velocitat d'aquests serà infinita. Per evitar-la, aprofitem el raonament anterior i convertim el problema en un que té distància entre els primaris unitat i constant de Jacobi gran, que també presenta inconvenients: si C és gran, la corba de velocitat zero exterior està prop de l'infinit de forma que, quan C sigui infinita, la corba es redueix al punt de l'infinit. Ara bé, evitar aquesta dificultat és fàcil, donat que la corba de velocitat zero compleix l'equació (4.2). Fent un escalat de les variables de posició:

$$(x,y) = C^{1/2}(\bar{x},\bar{y}) ,$$

tenim la corba de velocitat zero exterior en aquestes noves variables:

$$C^{1/2} = 2((1-m)/\bar{r}_1 + m/\bar{r}_2)/(1-\bar{r}^2) ,$$

essent $\bar{r}=C^{-1/2}r$, $\bar{r}_1=C^{-1/2}r_1$ i $\bar{r}_2=C^{-1/2}r_2$. En aquestes noves variables, quan C es fa infinita, la corba de velocitat zero exterior tendeix a la circumferència de radi $\bar{r}_0=1$ que permet l'estudi del comportament prop de l'infinit.

D'on:

Proposició 7.1. Podem considerar un problema restringit de 3 cossos, pla i circular com una petita perturbació del de 2 cossos, quan m , C^{-1} o d siguin prou petits.

8. Aplicació del teorema del twist de Moser a petites perturbacions del problema de 2 cossos.

Les variables d'acció-angle $(\phi_1, \phi_2, I_1, I_2)$ introduïdes en la secció 5 són les més adequades en la regió el·líptica del problema de 2 cossos perquè produeixen una gran simplificació del problema: el flux hamiltonià és quasi-periòdic en aquestes coordenades, com indiquen les equacions (5.1). De totes formes, en el sistema sideri, és periòdic.

Aprofitant aquest fet, podem estudiar les petites perturbacions del sistema de la següent forma:

Fixem C i suprimim una altra de les variables del sistema, usant l'aplicació de Poincaré sobre una secció transversal al tor sòlid obert que representa la regió el·líptica, tal que la imatge d'un punt de la secció és el nou tall de l'òrbita del flux que passa per aquest punt amb la mateixa secció.

Si tallem per plans $\phi_1 = \text{const.}$ obtenim la següent aplicació sobre la corona $(K_C, K_P) \times S^1$:

$$T(I_2, \theta) = (I_2, \theta + 2\pi(I_1(I_2, C) + I_2)^3),$$

on la funció $I_1(I_2, C)$ es troba aïllant I_1 en l'equació de I_C escrita en les variables d'acció-angle:

$$C = (I_1 + I_2)^{-2} + 2I_2.$$

Per tant:

$$T(I_2, \theta) = (I_2, \theta + \gamma(I_2)),$$

on $\gamma(I_2) = 2\pi(C - 2I_2)^{-3/2}$.

Aquesta aplicació és un twist ([13], p.227) , ja que $\gamma'(I_2) = 6\pi(C - 2I_2)^{-5/2} > 0$, en la zona el·líptica.

A més, com que $I_2 = p_\theta$ i θ són variables conjugades, aquesta aplicació conserva mesura; veieu ([4], p.237).

Estem, per tant en les condicions del teorema del twist de Moser ([13], pp.227-243) que apliquem d'immediat a les perturbacions dels tipus permesos en la secció 7 i que també permet aquest teorema: el teorema del twist ens assegura l'existència de corbes invariants en la corona $(K_C, K_P) \times S^1$ i, per tant, l'estabilitat de les òrbites amb moment angular sideri pròxim a K_C (òrbites periòdiques de primera espècie).

D'on:

Teorema 8.1. En els problemes restringits de 3 cossos, plans i circulars amb m , C^{-1} o d prou petits s'assegura l'estabilitat de les òrbites periòdiques de primera espècie.

9. Variables de McGehee.

Les variables de McGehee, en [11], es defineixen per la transformació:

$$r = 2/q^2, \quad q < 0; \quad p_r = p, \quad p_\theta = \omega.$$

En aquesta secció es dóna una breu exposició del que hem fet en les seccions anteriors, usant aquestes variables.

Les varietats invariants del problema de 2 cossos, (2.1) i (3.1), s'expressen així:

$$I_{EK} = \{(q, p) \mid (p^2 + K^2 q^4/4)/2 - q^2/2 = E\} \times S^1,$$

$$I_C = \{(q, p, \omega) \mid 2\omega - p^2 - \omega^2 q^4/4 + q^2 = C\} \times S^1.$$

El teorema 2.1 pren la forma:

Teorema 9.1. Si $K \neq 0$:

$$I_{EK} = \emptyset, \quad \text{quan } E < (-2K^2)^{-1}.$$

$$I_{EK} = \{(q = q_C = 2^{1/2}/K, p = 0)\} \times S^1 \simeq S^1, \quad \text{quan } E = (-2K^2)^{-1}.$$

$$I_{EK} = \{(q, p) \mid (p^2 + K^2 q^4/4)/2 - q^2/2 = E, \quad q_3(E) \leq q \leq q_2(E)\} \times S^1 \simeq T^2$$

quan $(-2K^2)^{-1} < E < 0$, on $q_{2,3}(E) = 2(1 \mp (1 + 2EK^2)^{1/2})/K^2$.

$$I_{EK} = \{(q, p) \mid (p^2 + K^2 q^4/4)/2 - q^2/2 = E, \quad 0 < q < q_2(E)\} \times S^1 \simeq \mathbb{R} \times S^1, \quad \text{quan } E \geq 0.$$

$$I_{E0} = \{(q, p) \mid (p^2 - q^2)/2 = E, \quad q < q_4(E)\} \times S^1 \simeq \mathbb{R} \times S^1, \quad \text{quan } E < 0; \quad q_4(E) = (-2E)^{1/2}$$

$$I_{E0} = \{(q, p) \mid (p^2 - q^2)/2 = E, \quad q > 0\} \times S^1 \simeq S^0 \times \mathbb{R} \times S^1, \quad \text{quan } E \geq 0.$$

Les proposicions (3.1) i (3.2) es transformen en:

Proposició 9.1. I_C^{ext} està format per:

a) una òrbita circular: $C = \{(q=q_C = 2^{1/2}/K_C, p=0, \omega=K_C)\} \times S^1 = \bar{C} \times S^1$,

b) òrbites el·líptiques:

$E = \{(q, p, \omega) \mid 2\omega - p^2 - \omega^2 q^4 / 4 + q^2 = C, \omega \in (K_C, K_P)\} \times S^1 = \bar{E} \times S^1$,

c) òrbites parabòliques:

$P = \{(q, p, \omega) \mid p^2 - q^2 + C^2 q^4 / 16 = 0, \omega = K_P\} \times S^1 = \bar{P} \times S^1$,

d) òrbites hiperbòliques:

$H = \{(q, p, \omega) \mid 2\omega - p^2 - \omega^2 q^4 / 4 + q^2 = C, \omega > K_P\} \times S^1 = \bar{H} \times S^1$;

on K_C és la solució més gran de $2\omega^3 - C\omega + 1 = 0$ i $K_P = C/2$.

Proposició 9.2. \bar{E} talla \mathbb{T} en dues branques:

$B_{2,3} = \{(q_{2,3}(\omega) = 2(1 \mp (1 + \omega^2(2\omega - C))^{1/2}) / \omega^2, \omega), \omega \in (K_C, K_P)\}$;

\bar{P} talla en el punt:

$(q_P = 2/K_P = 4/C, \omega = K_P)$;

i \bar{H} , en la branca:

$B'_2 = \{(q_2(\omega), \omega), \omega > K_P\}$.

Si apliquem la transformació de McGehee sobre \bar{I}_C^{ext} , podem dir el següent: S'observa que la paràbola sobre la qual hi ha la "carena" de \bar{I}_C^{ext} s'ha transformat en la hipèrbola $q = 2^{1/2}/\omega$ del mateix pla \mathbb{T} . Aquesta varietat talla el pla $\{q=0\}$ en la corba d'equació: $p^2 = 2\omega - C$; que dóna la velocitat radial amb que la partícula arriba a l'infinit, fixats la constant de Jacobi i el moment angular sideri.

Aquestes variables presenten el mateix problema que les polars sinòdiques quan a la no injectivitat del sistema (q,p) per descriure \bar{I}_C^{ext} (veieu la secció 4) . Si anem dibuixant sobre un pla $q-p$ les projeccions de $\bar{I}_C^{\text{ext}} \{ \omega = \text{const.} \}$ per a valors de ω creixents, s'observa que aquestes corbes es comencen a tallar a partir del valor ω_0 de la variable ω , corresponent a la corba de velocitat zero exterior. Per simplificar, considerarem C gran i, per tant, segons la proposició 4.1, aquesta corba es troba a la zona hiperbòlica. Una representació del que passa es troba a la figura 8. L'evolvent d'aquestes corbes resulta ésser, usant ([12], p.292):

$$4/q^4 - p^2 + q^2 = C .$$

En la regió de corbes interior a aquesta evolvent, qualsevol punt és punt d'intersecció de dos corbes amb valors diferents de ω : ω_1 i ω_2 . En la mateixa evolvent, el valor de ω està determinat unívocament.

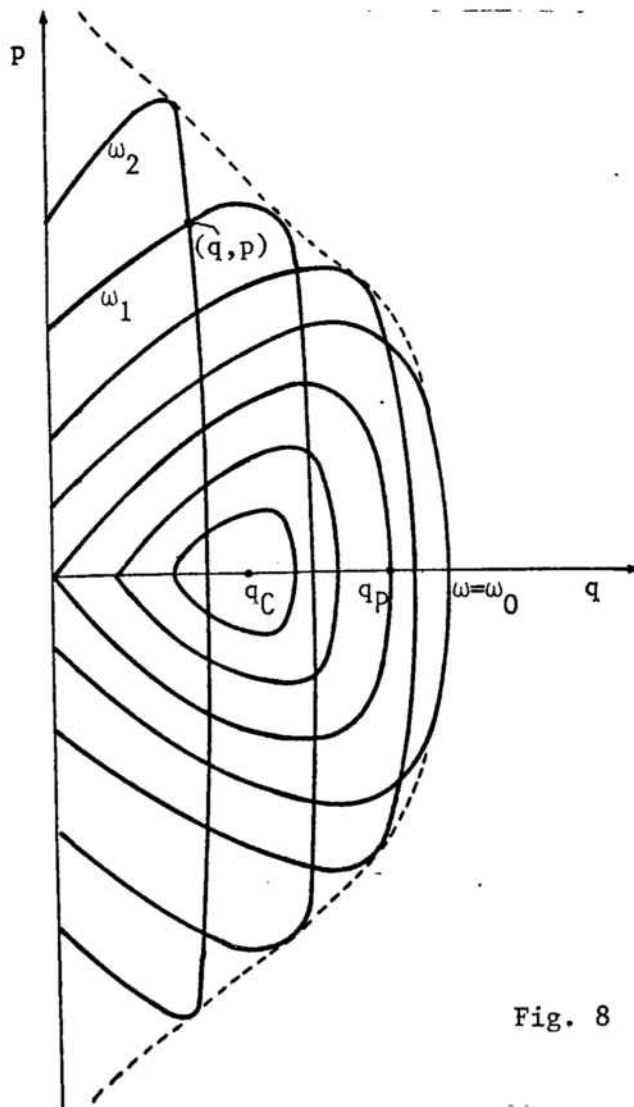


Fig. 8

Les equacions del flux del problema restringit de 3 cossos que tractem (1.2) es transformen en:

$$\dot{q} = -pq^3/4, \quad \dot{\theta} = -1 + q^4\omega/4;$$

$$\dot{p} = -q^4/4 + q^6 + \omega^2/8 - \operatorname{Re}(e^{-i\theta}g(2e^{i\theta}/q^2)),$$

$$\dot{\omega} = -2\operatorname{Im}(e^{-i\theta}g(2e^{i\theta}/q^2)/q^2);$$

on $g(z) = (1-m)(z-m)/|z-m|^3 + m(z-(1-m))/|z-(1-m)|^3 - z/|z|^3$, $z = x+iy$.

La deducció d'aquestes fórmules pot trobar-se a [10].

Les solució d'aquest sistema d'equacions, quan $m=0$, en funció de les anomalies excèntriques el·líptica i parabòlica en cada cas són, transformant les proposicions 6.1 i 6.2, les donades en la següent proposició.

Proposició 9.3. En la regió el·líptica:

$$q_0(u) = (2/(a(1-\operatorname{ecosu})))^{1/2},$$

$$\theta_0(u) = \bar{\theta} + \operatorname{arc} \cos((\operatorname{cosu}-e)/(1-\operatorname{ecosu})) - a^{3/2}(u - e \operatorname{sinu}),$$

$$p_0(u) = e \operatorname{sinu} / (a^{1/2}(1-\operatorname{ecosu}));$$

on $u - e \operatorname{sinu} = a^{3/2}t$ (equació de Kepler).

En la regió parabòlica:

$$q_0(z) = 4 \operatorname{cos} z / C, \quad \theta_0(z) = \bar{\theta} + 2z - C^3(\operatorname{tg} z + \operatorname{tg}^3 z / 3) / 16, \quad p_0(z) = 2 \operatorname{sin} 2z / C;$$

on $t = C^3(\operatorname{tg} z + \operatorname{tg}^3 z / 3) / 16$ (equació de Barker).

10. Perturbació de les òrbites parabòliques. Introducció.

Quan $m=0$, la varietat d'òrbites parabòliques P (varietat invariant del punt de l'origen, si usem variables de McGehee) té les dues components, estable i inestable, identificades i s'expressa analíticament per l'equació (proposició 9.1):

$$p^2 = q^2 - C^2 q^4 / 16 . \quad (10.1)$$

P talla el pla \mathbb{H} en la circumferència $q=q_p^0=4/C$.

Si m és petit i no nul, volem veure com es modifica aquesta varietat en el primer ordre de la teoria de perturbacions respecte al petit parametre m , particularitzant en les interseccions amb \mathbb{H} d'aquestes varietats estable i inestable, W^s i W^u , que ja no coincidiran.

Començarem aquesta anàlisi expressant el primer tall de W^u amb com una funció de l'angle $\bar{\theta}$ del tipus:

$$q_p(\bar{\theta}) = q_p^0 + m q_p^1(\bar{\theta}) + O(m^2) ,$$

on pretenem calcular $q_p^1(\bar{\theta})$. El tall de W^s és simètric d'aquest respecte $\bar{\theta} \rightarrow -\bar{\theta}$.

Per guanyar simplicitat i seguint [10] es treballa amb les variables $v = \frac{\partial q}{\partial \bar{\theta}}$ i $w = \frac{\partial p}{\partial \bar{\theta}}$ i s'obté el següent sistema d'equacions variacionals en v i w :

$$\dot{v} = b_{11}(t) \cdot v + b_{12}(t) \cdot w + \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} c_1(\bar{\theta}, t)$$

$$\dot{w} = b_{21}(t) \cdot v + b_{22}(t) \cdot w ;$$

on $b_{11} = C q_0^6 p_0 / (4(2 - q_0^4 C/4))$, $b_{12} = -q_0^3 + 3q_0^5 C^2 / 16 + q_0^6 C(-2q_0 + q_0^3 C^2/4) / (8(2 - q_0^4 C/4))$,
 $b_{21} = -q_0^3/4$, $b_{22} = -3q_0^2 p_0/4$,

$$c_1 = -q_0^6 C (1+q_0^2 (1+q_0^2 \cos^2 \theta_0 + q_0^4/4))^{-1/2} - q_0^2 + q_0^4 \cos^2 \theta_0 / 2 / (8(2-q_0^4 C/4)) - \\ - q_0^4 ((1-q_0^2 \cos^2 \theta_0)/4 - (2+q_0^2 \cos^2 \theta_0) (1+q_0^2 \cos^2 \theta_0 + q_0^4/4))^{-3/2} / 8 ;$$

on $(q_0(t), \theta_0(t), p_0(t))$ és la solució del problema de 2 cossos.

Per facilitar la integració es canvia el temps t per l'anomalia excèntrica parabòlica z introduïda en (6.5), les equacions variacionals homogenitzades en qüestió es transformen en:

$$v' = \frac{256 \sin z \cos^3 z}{C^3 2-64 \cos^4 z/C^3} \cdot v + \frac{8(-\sec z + 3 \cos z) - 256 \cos^5 z/C^3}{2-64 \cos^4 z/C^3} \cdot w$$

$$w' = -\sec z \cdot v - 3 \operatorname{tg} z \cdot w$$

Raonaments paral·lels als de la deducció de la proposició 5.1 de la referència que estem seguint ([10], p.166) ens porten a afirmar que, en $z=0$:

$$w(\bar{\theta}) = \partial_{\bar{\theta}} q_p^1(\bar{\theta}) = -(2-64/C^3).$$

$$\cdot \int_0^{\pi/2} \frac{16 \sin z \cos^3 z}{2C^3 - 64 \cos^4 z} \sin \theta (4+2\Delta^{-3/2} - 3\Delta^{-5/2} (2+16 \cos^2 z \cos^2 \theta / C^2)) +$$

(10.2)

$$+ \frac{4096 \sin z \cos^7 z}{(2C^3 - 64 \cos^4 z)^2} \sin \theta (1-\Delta^{-3/2}) dz ;$$

on $\theta = -C^3 (\operatorname{tg} z + \operatorname{tg}^3 z/3) + \bar{\theta} + \pi/2 + 2z$ i $\Delta = 1 + 16 \cos^2 z \cos^2 \theta / C^2 + 64 \cos^4 z / C^4$.

L'únic canvi que s'ha fet respecte a la referència és la no particularització del valor $\pi/2$ per a $\bar{\theta}$.

Coneixem, per tant, l'òrbita parabòlica per a $z=0$, que correspon al primer tall amb \mathbb{N} .

Considerem que $q_p^1(\bar{\theta})$ té un desenvolupament de Fourier del tipus:

$$q^1(\bar{\theta}) = A_0 + \sum_{k \geq 1} A_k \cos k\bar{\theta} + \sum_{k \geq 1} B_k \sin k\bar{\theta} .$$

Podem conèixer els coeficients A_k i B_k , $k \geq 1$, quan obtinguem el desenvolupament de Fourier de $w(\bar{\theta})$:

$$w(\bar{\theta}) = \sum_{k \geq 1} \bar{A}_k \cos k\bar{\theta} + \sum_{k \geq 1} \bar{B}_k \sin k\bar{\theta} ,$$

fent:

$$A_k = -\bar{B}_k/k \quad \text{i} \quad B_k = \bar{A}_k/k , \quad k \geq 1 . \quad (10.3)$$

En realitat, el que s'aconsegueix és la determinació dels termes dominants del desenvolupament asimptòtic de A_k i B_k , $k \geq 1$, quan C tendeix a infinit i m tendeix a 0, que detallem en la secció següent.

En la secció 12 es determina el desenvolupament asimptòtic de A_0 , que requereix un tractament diferent.

Els resultats obtinguts i llurs conseqüències es donaran en la secció 13.

11. Comportament asimptòtic dels coeficients A_k i B_k , $k \geq 1$.

Fent el canvi $\tau = \operatorname{tg} z$ i usant les següents notacions:

$$\hat{\theta} = C^3(\tau + \tau^3/3)/16 - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \tau, \quad \lambda = \delta(\tau + \tau^3/3), \quad \delta = C^3/16, \quad \kappa = 8/(C^2(1 + \tau^2));$$

(10.2) es transforma en:

$$w(\bar{\theta}) = -(1 - 2/\delta) \cdot \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\tau}{\delta(1 - \frac{2/\delta}{(1+\tau^2)^2})} \cdot Q_1 + \frac{\tau}{\delta^2(1 - \frac{2/\delta}{(1+\tau^2)^2})^2} \cdot Q_2 \right\} \sin \theta \, d\tau, \quad (11.1)$$

essent $Q_1 = 4 + 2\Delta^{-3/2} - 6\Delta^{-5/2}(1 + \kappa \cos \theta)$, $Q_2 = 1 - \Delta^{-3/2}$, $\theta = \bar{\theta} - \hat{\theta} + \pi/2$ i $\Delta = 1 - 2\cos(\theta + \pi)\kappa + \kappa^2$.

Comencem els càlculs fent el desenvolupament de $\Delta^{-\nu}$ en polinomis de Gegenbauer, $C_n^{(\nu)}$ ([1], pp. 776 i 783):

$$\Delta^{-\nu} = (1 - 2\cos(\theta + \pi)\kappa + \kappa^2)^{-\nu} = \sum_{n \geq 0} C_n^{(\nu)}(\cos(\theta + \pi));$$

$$\text{on } C_n^{(\nu)}(\cos \phi) = \sum_{m=0}^n \frac{\Gamma(\nu + m)\Gamma(\nu + n - m)}{n!(n-m)!(\Gamma(\nu))^2} \cos((n-2m)\phi).$$

Tractarem de veure quins coeficients dels desenvolupaments de $Q_1 \sin \theta$ i $Q_2 \sin \theta$ en termes de $\sin \bar{\theta}$ i $\cos \bar{\theta}$ donen una contribució asimptòtica (per a C gran) més elevada en el càlcul de $w(\bar{\theta})$; així com, quins són els termes dominants dels desenvolupaments asimptòtics dels coeficients A_k i B_k , $k \geq 1$.

Necessitarem més endavant els termes dominants dels desenvolupaments asimptòtics, quan δ és gran, de les següents integrals:

$$I_k(\delta) = \int_0^{\infty} \cos(\delta(\tau+\tau^3/3))(1+\tau^2)^{-k} d\tau,$$

$$J_k(\delta) = \int_0^{\infty} \sin(\delta(\tau+\tau^3/3))(1+\tau^2)^{-k} d\tau,$$

$$M_k(\delta) = \int_0^{\infty} \tau \sin(\delta(\tau+\tau^3/3))(1+\tau^2)^{-k} d\tau$$

$$N_k(\delta) = \int_0^{\infty} \tau \cos(\delta(\tau+\tau^3/3))(1+\tau^2)^{-k} d\tau.$$

Integrant per parts, s'obtenen les següents fórmules de reducció:

$$M_k(\delta) = \frac{\delta}{2(k-1)} I_{k-2}(\delta), \quad N_k(\delta) = \frac{1}{2(k-1)} (1 - \delta J_{k-2}(\delta)), \quad k > 2.$$

Del lema 5.2 c) de [10], I_k es comporta com $\exp(-2\delta/3)\delta^{[(k-1)/2]}$.

Estudiem el comportament dels J_k :

Considerem les corbes $\Gamma(R, \epsilon): 0-A(R)-B(R, \epsilon)-C(\epsilon)-D(\epsilon)-0$ de la figura 9. Els punts $C(\epsilon)$ i $D(\epsilon)$ pertanyen al cercle $\tau=i+\epsilon e^{i\phi}$, ϵ petit. L'arc $C(\epsilon)-B(R, \epsilon)$ està definit per $\operatorname{Re}(\tau+\tau^3/3)=0$; o sigui, escrivint $\tau=\rho+i\sigma$, és un arc de la hipèrbola: $3+\rho^2-3\sigma^2=0$.

Integrem $h(\tau)=\exp(i\delta(\tau+\tau^3/3))(1+\tau^2)^{-k}$ al llarg de $\Gamma(R, \epsilon)$, fent tendir després R a infinit i ϵ a 0.

Si posem $\tau=R e^{i\phi}$ en $A(R)-B(R, \epsilon)$, $|h| < \exp(-\delta(R \sin\phi + R^3 \sin 3\phi))/R^{2k}$, que tendeix a 0, quan $R \rightarrow \infty$ i, per tant:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{A(R)}^{B(R, \epsilon)} h = 0.$$

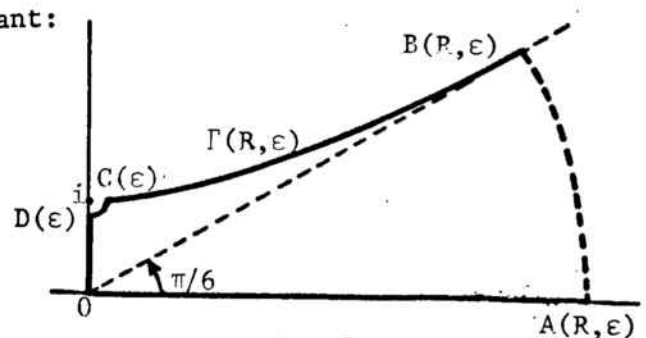


Fig. 9

Com que h és holomorfa en les regions interiors a les corbes $\Gamma(R, \epsilon)$:

$$I_k + iJ_k = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{D(\epsilon)} h + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{D(\epsilon)}^{C(\epsilon)} h + \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \int_{C(\epsilon)}^{B(R, \epsilon)} h = h_1(\epsilon) + h_2(\epsilon) + h_3(R, \epsilon) .$$

Les integrals que apareixen en els diferents arcs tenen termes en ϵ^n , $n < 0$, $n = 0$, $n > 0$ i $\ln \epsilon$. Si $n > 0$, fent el límit quan $\epsilon \rightarrow 0$, se'n van; els termes en ϵ^n , $n < 0$ i en $\ln \epsilon$, s'hauran de compensar forçosament perquè els I_k i els J_k , $k > 1$, són finits; quedaran només els termes amb $n = 0$, que calcularem.

En la demostració del lema 5.1 de [10] es veu que el terme en ϵ^0 del desenvolupament de $h_2(\epsilon)$ és:

$$a_0 = (\pi/2)i \cdot \text{Res}[\exp(i\delta(\tau + \tau^3/3))(1 + \tau^2)^{-k}; \tau = i] ;$$

$\text{Re } a_0$ i $\text{Im } a_0$ tenen comportaments del tipus $P_{\mu(k)}(\delta) \cdot e^{-2\delta/3}$, essent $P_{\mu(k)}(\delta)$ un polinomi de grau $\mu(k)$ en δ , on μ a la seva vegada és una funció polinomial. Es veu també, en la mateixa demostració, que el desenvolupament de $h_3(\infty, \epsilon)$ no té termes en ϵ^n , amb n parell i, per tant no en té en $n = 0$. No es fa en aquella demostració el càlcul de $h_1(\epsilon)$ perquè és imaginari pur i no dóna contribució en el càlcul dels I_k . Si estem interessats en el valor de J_k , necessitem fer-lo (en realitat, volem només el terme en $n = 0$ del seu desenvolupament en ϵ^n):

$$\begin{aligned} h_1(\epsilon) &= \int_0^{i(1-\epsilon)} \exp(i\delta(\tau + \tau^3/3))(1 + \tau^2)^{-k} d\tau = \\ &= \int_0^{1-\epsilon} \exp(-\delta(\xi - \xi^3/3))(1 - \xi^2)^{-k} d\xi = \\ &= \int_{\epsilon}^1 \exp(\delta(-2/3 + \eta^2 - \eta^3/3))(2 - \eta)^{-k} \eta^{-k} d\eta . \end{aligned}$$

Siguin $\phi(\eta) = -2/3 + \eta^2 - \eta^3/3$, $\psi(\eta) = (2-\eta)^{-k} \eta^{-k}$; usant els mètodes de Laplace i dels descendiments ràpids ([6], pp.36-40): per fer els desenvolupament asimptòtic de la integral en qüestió, cal calcular-la només en els entorns dels punts en que ϕ pren un valor mínim i d'aquells en els quals ψ és singular; en el nostre cas, prop de $\eta=1,0$.

Per tant, siguin γ i $\mu \gg \epsilon$ prou petits; usant la secció 2.7 de [6], tenim:

$$\int_{1-\gamma}^1 \exp(\delta\phi(\eta))\psi(\eta)d\eta = \int_{1-\gamma}^1 \exp(\delta(\eta-1) - (\eta-1)^3/3) (2-\eta)^{-k} \eta^{-k} d\eta =$$

$$= \int_0^\gamma \exp(-\delta(\zeta-\zeta^3/3)) (1-\zeta^2)^{-k} d\zeta = \delta^{-1} + 2(1+k)\delta^{-3} + O(\delta^{-5});$$

$$\int_\epsilon^\mu \exp(\delta\phi(\eta))\psi(\eta)d\eta = \frac{e^{-2\delta/3}}{2^k} \cdot \left(\sum_{\substack{j \geq 0 \\ j \neq k-1}} b_j \left(\frac{\mu^{j-k+1} - \epsilon^{j-k+1}}{j-k+1} \right) + b_{k-1} \ln(\mu/\epsilon) \right) \dots$$

Es veu que el terme en ϵ^0 d'aquesta segona integral té un comportament del tipus exponencial negativa en δ .

D'on els termes dominants del coeficient de ϵ^0 del desenvolupament de $h_1(\epsilon)$ seran:

$$\delta^{-1} + 2(1+k)\delta^{-3}.$$

Resumint:

Lema 11.1.

$$I_k(\delta) = O(\delta^{(k-1)/2} e^{-2\delta/3}), \quad J_k(\delta) = \delta^{-1} + O(\delta^{-3}),$$

$$M_k(\delta) = O(\delta^{(k-2)/2} e^{-2\delta/3}), \quad N_k(\delta) = \frac{k+1}{2(k-1)} \delta^{-2} + O(\delta^{-4}).$$

Introduïnt els valors dels polinomis de Gegenbauer:

$$C_0^{(\nu)} = 1, \quad C_1^{(\nu)}(\cos(\theta+\pi)) = -2\nu \cos\theta, \quad C_2^{(\nu)}(\cos(\theta+\pi)) = (\nu+1)\cos 2\theta + \nu^2$$

en $Q_1 \sin\theta$ i $Q_2 \sin\theta$, tenim:

$$\begin{aligned} Q_1 \sin\theta &= (4+2(1-3\kappa\cos\theta+\frac{3}{4}\kappa^2(5\cos 2\theta+3) + R_1') - \\ &\quad -6(1+\kappa\sin\theta)(1-5\kappa\sin\theta+\frac{5}{4}\kappa^2(7\cos 2\theta+5) + R_1'')\sin\theta = \\ &= -3\kappa^2 \sin\theta + 9\kappa \sin 2\theta + R_1 \end{aligned}$$

(11.2)

i

$$\begin{aligned} Q_2 \sin\theta &= (1-(1-3\kappa\cos\theta+\frac{3}{4}\kappa^2(5\cos 2\theta+3) + R_2'))\sin\theta = \\ &= -\frac{9}{4}\kappa^2 \sin\theta + \frac{3}{2}\kappa \sin\theta + R_2 \end{aligned}$$

de forma que els coeficients dels termes en $\sin k\theta$ de R_1 són combinacions lineals de potències de κ , essent k la potència de grau més baix del terme en $\sin k\theta$; això es deu a les relacions:

$$\cos j\theta \cdot \cos\theta = (\sin(j+1)\theta - \sin(j-1)\theta)/2$$

$$\cos j\theta \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta = (\sin(j+2)\theta - \sin(j-2)\theta)/4$$

i al fet que els coeficients dels termes en $\cos k\theta$ de R_1' i R_1'' tenen el terme κ^k com a potència de κ més baixa. R_2 té un comportament del mateix tipus que R_1 .

Es té:

$$\begin{aligned} Q_1 \sin\theta &= 9\kappa \cos 2\hat{\theta} \cdot \sin 2\bar{\theta} - 9\kappa \sin 2\hat{\theta} \cdot \cos 2\bar{\theta} - 3\kappa^2 \sin \hat{\theta} \cdot \cos \bar{\theta} + \\ &\quad + 3\kappa^2 \cos \hat{\theta} \cdot \sin \bar{\theta} + R_1, \end{aligned}$$

i, per tant, el següent comportament de \bar{B}_2 :

$$\bar{B}_2 = \frac{9}{\delta} \int_0^\infty \frac{\tau}{(1+\tau^2)^3} \sum_{j \geq 0} \left(\frac{2}{\delta}\right)^j (1+\tau^2)^{-2j} \kappa \cos 2\hat{\theta} \cdot d\tau (1+o(1))$$

perquè l'altre sumand de (11.1) és del mateix tipus, però porta un factor δ^{-2} en compte de δ^{-1} .

Tenim:

$$\tau \cos 2\theta = \tau \cos 2\lambda \cdot \cos(4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \tau) - \tau \sin 2\theta \cdot \sin(4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \tau) . \quad (11.3)$$

S'obté fàcilment el següent lema:

Lema 11.2. a) $\cos(n \operatorname{arc} \operatorname{tg} \tau) = T_n((1+\tau^2)^{-1/2})$, on T_n és el polinomi de Chebyshev de 1^a espècie de grau n .

b) La suma dels coeficients del desenvolupament de $\sin(n \operatorname{arc} \operatorname{tg} \tau)$ en potències de $(1+\tau^2)^{-1}$ és zero.

L'apartat a) d'aquest lema ens diu que:

$$\cos(4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \tau) = T_4((1+\tau^2)^{-1/2}) = 8(1+\tau^2)^{-2} - 8(1+\tau^2)^{-1} + 1 ;$$

l'apartat b) ens assegura la no contribució del segon sumand de (11.3) en el càlcul de \bar{B}_2 , degut a que produeix una combinació lineal de J_k , els coeficients de la qual són del tipus donat en aquest apartat del lema i a que els termes dominants dels desenvolupaments asimptòtics de J_k no depenen de k , segons el lema 11.1.

Per tant,

$$\begin{aligned} \bar{B}_2 &= \frac{9 \cdot 8}{\delta C^2} \sum_{j>0} \left(\frac{2}{\delta}\right)^j (8N_{6+2j} - 8N_{5+2j} + N_{4+2j}) (1+o(1)) = \\ &= \frac{9 \cdot 2^7}{C^5} \left(\frac{8 \cdot 7}{5} - \frac{8 \cdot 6}{4} + \frac{1 \cdot 5}{3}\right) \frac{2^8}{C^6} (1+o(1)) = \frac{2^{15} \cdot 39}{5} C^{-11} (1+o(1)) . \end{aligned}$$

Els coeficients A_k , $k \neq 1, 2$ provenen dels termes en $\sin k\theta$ de les expressions (11.2) i aquests porten un factor κ^k ; el terme en $\sin \theta$ porta, però, un factor κ^2 . Per tant, fent càlculs paral·lels als fets per a \bar{B}_2 i tenint en compte que κ porta el factor C^{-2} i les relacions (10.3), es veu que el terme dominant de A_k , $k \neq 1, 2$ té un comportament del tipus $A_2 C^{-2(k-2)}$ i que A_1 el té com $A_2 C^{-2}$.

D'on:

Proposició 11.1.

$$A_1 = O(C^{-13}), \quad A_2 = -\frac{3 \cdot 2^{14}}{5} C^{-11} (1+o(1)), \quad A_k = O(C^{-7-2k}), \quad k \geq 3.$$

En [10] es demostra el comportament dels B_k , que resumim:

Proposició 11.2.

$$B_1 = \frac{\pi}{8} C^{-1} e^{-C^3/24} (1+o(1)), \quad B_k = O(e^{-kC^3/24}), \quad k \geq 2.$$

12. Comportament asimptòtic de A_0 .

Sigui F el camp creat pels primaris en el punt en que es troba la massa infinitesimal. Volem calcular l'efecte promitjat del camp F quan els primaris donen una volta completa al voltant de llur centre de masses, considerant m i C^{-1} prou petits, i comparar-lo amb el camp F_0 del problema de 2 cossos.

Donada una funció f , periòdica de període 2π , notem per \bar{f} la mitjana de f en un període:

$$\bar{f} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f.$$

Lema 12.1.

$$\frac{1}{r^2 + \mu^2 - 2\mu r \cos \beta} = \frac{1}{r^2} \left(1 + \frac{\mu^2}{r^2} (1 + o(1)) \right).$$

Demostració:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2 + \mu^2 - 2\mu r \cos \beta} &= \frac{1}{r^2 + \mu^2} \left(1 - \frac{2\mu r \cos \beta}{r^2 + \mu^2} \right)^{-1} = \\ &= \frac{1}{r^2 + \mu^2} \left(1 + \frac{2\mu r}{r^2 + \mu^2} \overline{\cos \beta} + \frac{4\mu^2 r^2}{(r^2 + \mu^2)^2} \overline{\cos^2 \beta} (1 + o(1)) \right) = \\ &= \frac{1}{r^2 + \mu^2} \left(1 + \frac{2\mu^2 r^2}{(r^2 + \mu^2)^2} (1 + o(1)) \right) = \\ &= \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{\mu^2}{r^2} (1 + o(1)) \left(1 + \frac{2\mu^2}{r^2} (1 + o(1)) \right) \right) = \\ &= \frac{1}{r^2} \left(1 + \frac{\mu^2}{r^2} (1 + o(1)) \right) \quad \square \end{aligned}$$

D'on, aplicant el lema anterior per a $\mu=m, 1-m$:

$$\begin{aligned}\bar{F} &= \frac{1-m}{r^2+m^2-2rm\cos\beta} + \frac{m}{r^2+(1-m)^2+2r(1-m)\cos\beta} = \\ &= \frac{1-m}{r^2} \left(1 + \frac{m^2}{r^2}(1+o(1))\right) + \frac{m}{r^2} \left(1 + \frac{(1-m)^2}{r^2}(1+o(1))\right) = \\ &= \frac{1}{r^2} \left(1 + \frac{m}{r^2} + O(m^2) + o(r^{-2})\right) .\end{aligned}$$

És a dir, l'efecte promitjat del camp, quan m i C^{-1} són petits, és el mateix que el d'un problema de 2 cossos en el que la massa que crea el camp no és 1, sinó:

$$M = 1 + mC^{-1} + O(m^2) + o(C^{-1}) ,$$

usant (7.2). En aquest problema, la varietat d'òrbites parabòliques talla el pla \mathbb{N} en la circumferència de radi $q_p^0 + mA_0$, ja que mA_0 és la perturbació promitjada de q_p^0 . Aquest raonament ens permet de trobar A_0 :

La varietat d'òrbites parabòliques d'un problema de 2 cossos, en el que la massa del cos que crea el camp és M , té l'equació (modificant (10.1)):

$$p^2 + C^2 q^4 / 16 - Mq^2 = 0$$

i talla \mathbb{N} en la circumferència:

$$q = \bar{q}_p = \frac{4}{C} M^{1/2} = \frac{4}{C} \left(1 + \frac{m}{2C} + O(m^2) + o(C^{-1})\right) .$$

D'on:

Proposició 12.1.

$$A_0 = 2C^{-2} + O(m) + o(C^{-2}) .$$

13. Perturbació de la varietat d'òrbites parabòliques. Resultats.

Recollint la informació donada en les seccions 10, 11 i 12, enunciem el següent teorema que dóna els desenvolupaments de Fourier asimptòtics, quan m i C^{-1} són prou petits, de les primeres corbes de tall de les varietats invariants de l'origen, W^u i W^s , amb \mathbb{T} i que notem per $P_{\pm 1}$.

Teorema 13.1.

$$\begin{aligned}
 q^{u,s}(\bar{\theta}) = & 4C^{-1} + m [2C^{-2}(1+o(1)) - \frac{3 \cdot 2^{14}}{5} C^{-11}(1+o(1)) \cos 2\bar{\theta} \pm \\
 & \pm \frac{\pi}{8} C^{-1} e^{-C^3/24} \sin \bar{\theta} + o(C^{-13}) \cos \bar{\theta} + \\
 & + \sum_{j>2} o(C^{-7-2j}) \cos j\bar{\theta} + \sum_{j>1} o(e^{-jC^3/24}) \sin j\bar{\theta}] + \\
 & + o(m^2) .
 \end{aligned}$$

Corol.lari 13.1. W^u i W^s es tallen en els punts amb $\bar{\theta}=0, \pi$ de \mathbb{T} amb un angle:

$$m \frac{\pi}{4} C^{-1} e^{-C^3/24} (1+o(1)) + o(m^2) .$$

Corol.lari 13.2. El problema restringit de 3 cossos, pla i circular no és integrable.

Corol.lari 13.3.

$$\begin{aligned}
 \min q^{u,s}(\bar{\theta}) = & 4C^{-1} + m(A_0 + A_2(1+o(1))) + o(m^2) = \\
 = & q^{u,s}(0)(1+o(1)) = q^{u,s}(\pi)(1+o(1)) .
 \end{aligned}$$

Els dos primers corol.laris es troben a {10}, veieu les consideracions fetes en les seccions 5 i 6 d'aquest article. El corol.lari 13.3 es deu a que A_2 és el terme dominant i és negatiu; el mínim, per tant, té lloc tant a prop dels punts que fan màxim $\cos 2\bar{\theta}$, tant a prop de $\bar{\theta}=0, \pi$ com vulguem.

Malgrat el corol.lari 13.2, podem parlar d'una quasi-integrabilitat en el sentit següent:

Si el sistema fos integrable, $W^S=W^U$ i, per tant, $P_{+1}=P_{-1}$; pero, l'angle de tall és extremadament petit quan C és gran i W^U i W^S gairebé coincideixen en el primer tall amb \mathbb{N} , la separació maxima entre les corbes P_{+1} i P_{-1} té lloc tant a prop de $\bar{\theta}=\pi/2$ com vulguem (fent m i C^{-1} prou petits) i val:

$$m \frac{\pi}{4} C^{-1} e^{-C^3/24} (1+o(1)) + O(m^2) .$$

És a dir, W^U i W^S encara que matemàticament no coincideixen, des d'un punt de vista físic es confonen, quan m i C^{-1} són prou petits. Per tant, en aquestes condicions, semblarà integrable. Àdhuc, fixat un valor ϵ tal que físicament siguem incapaços de detectar diferències entre P_{+1} i P_{-1} més petites que ϵ , i donats m i C^{-1} petits podem dir si es veurà o no com a integrable. Per exemple, si $\epsilon=10^{-12}$ i $m=0.1$, és suficient $C>8.2$.

Analitzant els resultats, veiem que:

A_0 , efecte de la perturbació promitjada, és positiu i, per tant, fa créixer els valors de $q_p^{u,s}$; l'efecte màxim de les ondulacions de les corbes (separacions respecte a la circumferència $q = \bar{q}_p^{u,s} = q_p^0 + mA_0$) tenen lloc en la forma $A_2 \cos 2\bar{\theta}$ i fan mínim el valor de $q_p^{u,s}$ en punts tant a prop de 0 i π com vulguem. L'efecte màxim de separació entre les dues corbes, així com l'angle format en els punts d'intersecció de P_{+1} i P_{-1} ($\bar{\theta} = 0, \pi$) els dóna el terme $B_1 \sin \bar{\theta}$, essent la separació màxima tant a prop de $\bar{\theta} = \pi/2$ com vulguem i val, com l'angle d'intersecció, $2B_1$.

Per acabar aquesta secció, fem una petita comprovació dels resultats d'aquesta secció, obtinguts analíticament. Els compararem amb els resultats experimentals donats en la gràfica 12 c) de {10}, que calcula el coeficient del terme de 1^{er} ordre en m del primer tall de la varietat parabòlica perturbada amb \mathbb{F} .

Considerem només els termes analíticament més importants del desenvolupament de Fourier, quan C és gran, d'aquesta magnitud:

$$f(\bar{\theta}) = A_0 + A_1 \cos \bar{\theta} + A_2 \cos 2\bar{\theta} + A_3 \cos 3\bar{\theta} + B_1 \sin \bar{\theta}.$$

Podem plantejar un sistema d'equacions en A_0 , A_1 , A_2 , A_3 i B_1 , mesurant els valors de $f(0)$, $f(\pi/2)$, $f(\pi)$ i $f(3\pi/2)$ sobre la gràfica en qüestió:

$$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 \approx f(0) \approx 22 \text{ mm.}$$

$$A_0 - A_2 + B_1 \approx f(\pi/2) \approx 27 \text{ mm.}$$

$$A_0 - A_1 + A_2 - A_3 \approx f(\pi) \approx 13 \text{ mm.}$$

$$A_0 - A_2 - B_1 \approx f(3\pi/2) \approx 33 \text{ mm.}$$

Prenent cura dels escalats de la gràfica:

$$A_2 \approx \frac{f(0)+f(\pi)-f(\pi/2)-f(3\pi/2)}{4} \approx \frac{22+13-27-13}{4} \cdot \frac{0.1}{16} \cdot \frac{1}{64} \approx -6.15 \cdot 10^{-4} ,$$

$$B_1 \approx \frac{f(\pi/2)-f(3\pi/2)}{4} \approx \frac{27-33}{2} \cdot \frac{0.1}{16} \cdot \frac{1}{64} \approx -2.93 \cdot 10^{-4} .$$

Teòricament:

$$A_2 = -\frac{2^{14} \cdot 39}{5 \cdot 5 \cdot 5^{11}} \approx -9.17 \cdot 10^{-4} ,$$

$$B_1 = \frac{\pi}{8 \cdot 5.5} e^{-5.5^3/24} \approx 2.1 \cdot 10^{-3} .$$

Donat que les mesures són molt imprecises i que $C=5.5$ no és massa gran, veiem que els ordres de magnitud de A_2 i B_1 són aproximadament correctes.

14. Afitació de la zona d'estabilitat.

En la secció 13 hem vist que la distàncies a l'origen dels primers talls de W^u i W^s amb \mathbb{F} , $P_{\pm 1}$, estan afitades inferiorment per:

$$q_p^{(1)} = q_p^{(0)} + m(A_0 + A_2(1+o(1))) + O(m^2), \quad q_p^{(0)} = q_p^0.$$

En aquesta secció es dóna un procediment de càlcul d'aquestes cotes inferiors per als talls successius, $P_{\pm n}$, que notem per $q_p^{(n)}$.

Definim $\bar{\Delta}_n$ i $\tilde{\Delta}_n$ com les fites calculades, segons aquest mètode, de la part promitjada i ondulada, respectivament, de la perturbació de la circumferència γ_0 : \mathbb{F} de radi q_p^0 al cap de n talls amb \mathbb{F} .

D'on:

$$q_p^{(n)} = q_p^0 + \bar{\Delta}_n + \tilde{\Delta}_n.$$

Coneixem ja, $\bar{\Delta}_1 = mA_0 + O(m^2)$ i $\tilde{\Delta}_1 = mA_2(1+o(1)) + O(m^2)$.

Veiem com es calculen els següents:

Considerem la circumferència $\hat{\gamma}_1: (q = \hat{q}_p^{(1)} = q_p^{(1)} - \bar{\Delta}_1)$ que està molt a prop de γ_0 , pero en $E \mathbb{F}$. $\hat{\gamma}_1$ es correspon, pel flux no perturbat, amb una circumferència $\hat{\gamma}_{1,2}$ molt a prop de l'origen. $\hat{\gamma}_{1,2}$ es calcula a partir de $\hat{\gamma}_1$ imposant que pertanyen al mateix I_{EK} . Ara bé, com indicarem més endavant, podem conèixer la corba γ_2 tal que va a parar, pel flux perturbat a $\hat{\gamma}_{1,2}$, de la mateixa manera que podíem conèixer la corba γ_1 que, pel flux perturbat, anava a parar a l'origen i que explicí-
tarem en el teorema 13.1. Llavors,

$$q_p^{(2)} = \min_{\bar{\theta}} \gamma_2$$

$\bar{\Delta}_2$ és el terme independent del desenvolupament de Fourier de la perturbació de γ_0 que dóna γ_2 i $\tilde{\Delta}_2$ és una fita dels termes dependents de $\bar{\theta}$ d'aquell desenvolupament, de forma que:

$$q_p^{(2)} = q_p^{(0)} + \bar{\Delta}_2 + \tilde{\Delta}_2 .$$

Iterant aquest procediment, obtenim tots els $\bar{\Delta}_n$ i $\tilde{\Delta}_n$ que ens permeten de calcular:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_p^{(n)} = q_p^{(0)} + \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\Delta}_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\Delta}_n ;$$

que és una fita inferior de la zona d'estabilitat del problema.

El punt més difícil d'aquest mètode és el càlcul de γ_2 a partir de $\hat{\gamma}_{1,2}$ i que detallem a continuació:

En el temps fictici u , els punts de $\hat{\gamma}_{1,2}$ corresponen a $u=\pi$ i els de γ_2 , a $u=0$. Volem conèixer, imitant el que feiem en la secció 10, $w(\bar{\theta})$ en $u=0$, sabent que $v(\bar{\theta})=w(\bar{\theta})=0$ en $u=\pi$; perquè $\hat{\gamma}_{1,2}$ és una circumferència.

$v = \partial_{\theta} p$ i $w = \partial_{\theta} q$ són les solucions a les equacions variacionals en el I_{EK} al qual pertanyen $\hat{\gamma}_1$ i $\hat{\gamma}_{1,2}$ i que escrivim a continuació:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= Kq_0^6 p_0 / (4 - Kq_0^4) \cdot v + (-q_0^3 + 3K^2 q_0^5 / 4 + Kq_0^6 (K^2 q_0^3 - 2q_0 / (2(4 - q_0^4)))) \cdot w + \partial_{\bar{\theta}} c_1 \\ \dot{w} &= -(q_0^3 / 4) \cdot v - (3q_0^2 p_0 / 4) \cdot w \end{aligned} \quad (14.1)$$

$$\text{essent } c_1 = -Kq_0^6 (1 + q_0^2 (1 + q_0^2 \cos \theta_0 + q_0^4 / 4))^{-1/2} - q_0^2 + q_0^4 \cos \theta_0 / 2 / (2(4 - Kq_0^4)) - q_0^4 ((1 - q_0^2 \cos \theta_0) / 4 - (2 + q_0^2 \cos \theta_0) (1 + q_0^2 \cos \theta_0 + q_0^4)^{-3/2} / 8)$$

i $(q_0(t), p_0(t), \theta_0(t))$, la solució del problema de 2 cossos en I_{EK} .

Sigui (v_1, w_1) la solució fonamental de les equacions variacionals homogenitzades en el cas parabòlic, donada en {10}; es pot estendre aquesta solució als casos el·líptic i hiperbòlic, usant el tractament uniforme, mitjançant funcions d'Stumpff, descrit en la secció 5.

El resultat obtingut és:

Proposició 14.1.

$$v_1 = \frac{\bar{R}_0^2 q_0^4}{4e} \left(\frac{K^2}{2} q_0^2 - 1 \right), \quad w_1 = - \frac{\bar{R}_0^2 p_0 q_0^3}{4e}, \quad \text{en } I_{EK} \left((-2K^2)^{-1} < E < 0 \right).$$

Veiem que, coneixent aquesta informació, hem resolt el nostre problema de la determinació de $w(\bar{\theta})$.

Si $(v_1(u), w_1(u)), (v_2(u), w_2(u))$ és un sistema de solucions fonamentals de les equacions variacionals homogenitzades en qüestió tal que

$$(v_1, w_1)(0) = (1, 0) \quad \text{i} \quad (v_2, w_2)(0) = (0, 1);$$

com que

$$\det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix}_{u=0} = 1 \neq 0.$$

llavors

$$\det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix}_u \neq 0,$$

per tot u , segons ({3}, p.191).

Sigui

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} v_2 \\ w_2 \end{pmatrix},$$

la solució de les equacions (14.1).

Fer $v(u=0)=w(u=0)=0$ implica, per tant, $\alpha(u=\pi)=\beta(u=\pi)=0$.

D'on:

$$w(u=0) = \alpha(u=0)w_1(u=0) + \beta(u=0)w_2(u=0) = \beta(u=0) = - \int_0^\pi \beta' du .$$

Usant el mètode de variació de les constants ([3], p.206):

$$\beta' = \frac{d\beta}{du} = \frac{\begin{vmatrix} v_1 & 1 \\ w_1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\partial c_1}{\partial \bar{\theta}} \cdot \frac{dt}{du} = - \frac{w_1 \cdot \frac{\partial c_1}{\partial \bar{\theta}} \cdot \frac{dt}{du}}{1 \cdot \exp(\int_0^u \text{Tr}(M(v)) dv)} ;$$

on hem usat també el teorema de Liouville ([3], p.193) i M és la matriu dels coeficients del sistema (14.1) escrit usant el temps fictici u .

Tenim, finalment:

$$w(u=0) = \beta(u=0) = \int_0^\pi w_1 \cdot \frac{\partial c_1}{\partial \bar{\theta}} \cdot \exp(- \int_0^u \text{Tr}(M(v)) dv) du ,$$

que permet de trobar els coeficients dels termes dependents de l'angle $\bar{\theta}$ del desenvolupament de Fourier de la corba γ_2 .

El terme promitjat es troba de la mateixa manera que el A_0 de $P_{\pm 1}$, però treballant en el I_{EK} corresponent.

15. Comportament qualitatiu de la regió d'òrbites parabòliques.

Definim en \mathbb{F} l'aplicació de Poincaré T tal que a cada punt de \mathbb{F} li correspon el proper punt de tall amb ell mateix de l'òrbita que passa per aquest punt.

Un punt (q, θ) de \mathbb{F} dóna lloc a una òrbita parabòlica per $T^{\pm n}$ (direm que pertany a $P_{\pm n}$ si arriba a l'origen $(q=0, p=0)$ després de travessar el pla \mathbb{F} $n-1$ vegades, quan $t \rightarrow \pm\infty$). Idem a una hiperbòlica per $T^{\pm n}$ (direm que pertany a $H_{\pm n}$) si arriba a un punt del tipus $(q=0, p \neq 0)$ després de travessar $n-1$ vegades \mathbb{F} , quan $t \rightarrow \pm\infty$. És a dir, els punts de $P_{\pm n}$ són els punts d'intersecció de $W^{u,s}$ amb \mathbb{F} , quan aquestes varietats han travessat $n-1$ vegades \mathbb{F} , quan $t \rightarrow \pm\infty$.

Notem per $D_{\pm 1}$ els recintes tancants per $P_{\pm 1}$, que són els conjunts de punts de \mathbb{F} que no s'escapen per $T^{\pm n}$. Anem a trobar els conjunts que s'escapen per $T^{\pm n}$ i no ho fan per $T^{\pm(n-1)}$ i que notem per $E_{\pm n}$:

Òbviament, $E_{\pm 1} = \partial D_{\pm 1}$.

Com que $T D_{-1} = D_1$, $E_2 = T^{-1}(D_{-1} - D_1) = S T(D_{-1} - D_1) = T^{-1}(D_{-1} \cap E_1) D_1$; essent S la simetria $\bar{\theta} \rightarrow -\bar{\theta}$.

Veiem com és aquest conjunt: Considerem un raig qualsevol Γ que surti de l'origen i vagi a parar a $\partial D_1 = P_1$. $T\Gamma$ és una corba que surt de l'origen i va a parar, espiralant, a $\partial D_{-1} = P_{-1}$. Per tant, $T\Gamma$ talla infinites vegades $D_{-1} - D_1$. Els punts de Γ , la imatge per T dels quals talla $\partial(D_1 - D_{-1})$ pertanyen a ∂E_2 . Per continuïtat, E_2 serà una cinta que espirala tendint a ∂D_1 .

Anàlogament, $E_n = T^{-1}(D_{-1} E_{n-1})$.

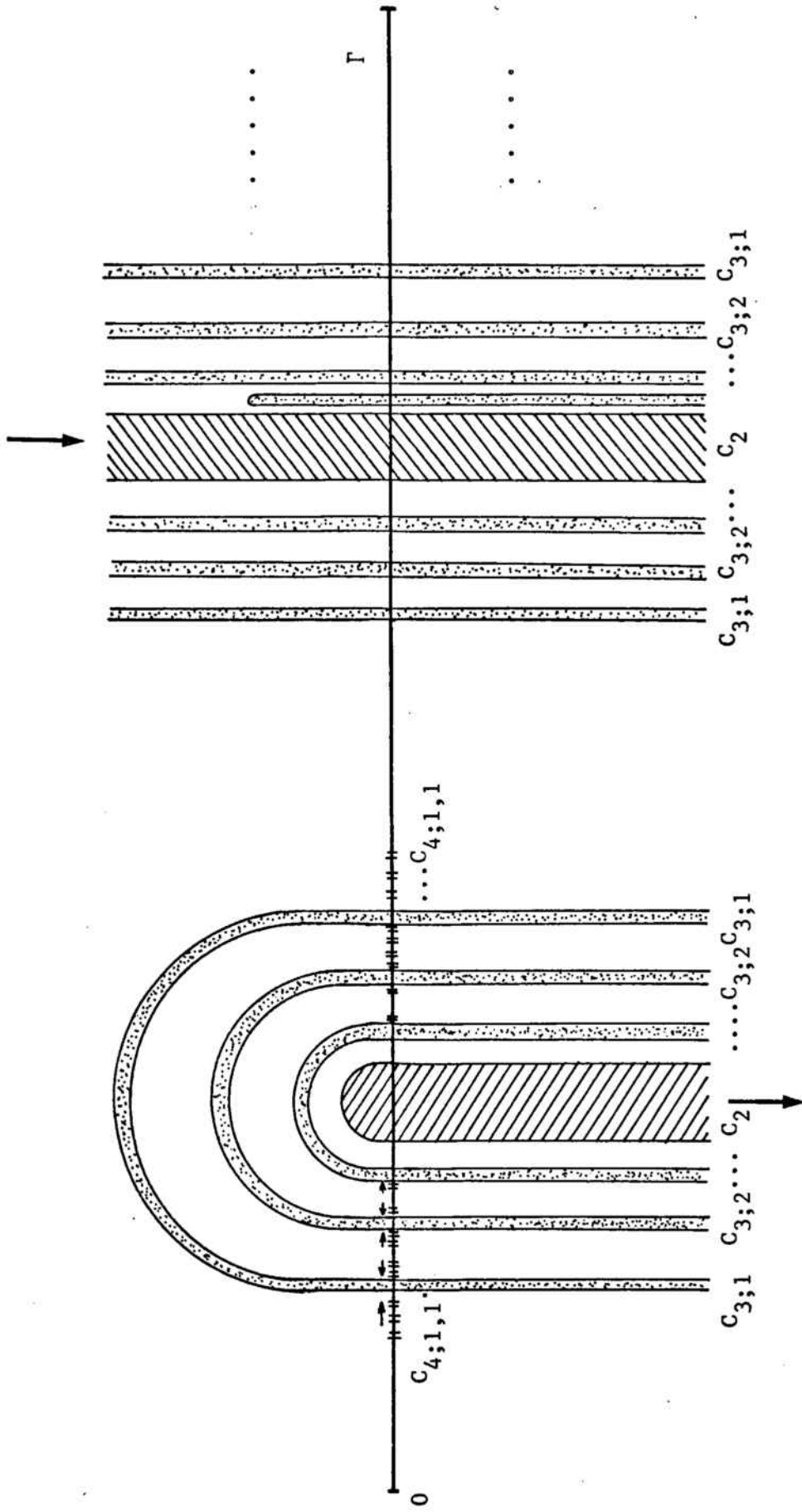
Per veure la forma d'aquests conjunts, estudiem, primerament, E_3 . Observem que, els talls de $T\Gamma$ amb $\partial E_2 = P_2$ tenen lloc infinites vegades per a cada volta de $T\Gamma$ al voltant de l'origen. Això ens diu que E_3 serà un conjunt d'infinites cintes: $C_{3;m}$ que espiralen dins de $D_1 - E_2$, de forma que tendeixen a una banda i altra de la cinta $C_2 = E_2$, quan $m \rightarrow \infty$. Aquest comportament es repeteix en una escala cada vegada més elevada en E_n , $n > 3$, en el sentit que E_n estarà format per Z^{n-2} cintes $C_{n;m_1, \dots, m_{n-2}}$, $m_i \in \mathbb{Z}$ que van tendint a una banda i altra de les cintes $C_{n-1;m_1, \dots, m_{n-2}}$ de E_{n-1} , quan $m_{n-2} \rightarrow \infty$, donant un veritable caos tant a prop de P_1 com vulguem.

Els índexs $m_i < 0$ corresponen a les cintes per l'esquerra, en el sentit que veiem el seu tall a l'esquerra de la cinta C_2 .

S'ha de notar que, eventualment, poden perdre's troços de la primera de les noves cintes a cada etapa; això implicarà que, a l'etapa següent, els índexs corresponents seran tots positius.

La figura 10 aclareix els diferents talls de les cintes sobre el raig Γ .

Degut a la simetria S , es té un comportament similar en $D_{-1} - D_1$, corresponent als conjunts d'escapament per T^{-n} , $E_{\pm n}$.



En la figura 15 de {10} es veu que per a certs valors de C^{-1} i m més grans es tenen, a més dels anomenats punts homoclínic primaris ($\bar{\theta}=0, \pi$) (ja tractats), 2 punts homoclínic secundaris $\bar{\theta}_{\text{sec}}$ i $-\bar{\theta}_{\text{sec}}$.

És a dir, per a uns certs valors de m i C^{-1} , no massa petits, P_1 i P_{-1} es tallen en 4 punts i no en 2.

El problema que surgeix és el següent: com estan distribuïdes les cintes en aquest cas? i, què passa en la transició d'un comportament a l'altre?

Podem donar la següent resposta:

Com que, en el cas de 4 punts homoclínic, $D_{-1}-D_1$ té dues components connexes, la seva antiimatge per T també les tindrà. Per tant, E_2 està format per 2 cintes no connectades: $C_2^{(1)}$ i $C_2^{(2)}$. E_3 estarà format per una doble infinitat de cintes, tendint unes a $C_2^{(1)}$ i les altres a $C_2^{(2)}$, etc. com indica la figura 11.

Al augmentar C o disminuir m , les 2 components connexes van disminuint en amplada; a més, una augmenta en longitud i l'altra, disminueix. Aquest comportament continua fins quan desapareix l'homoclínic secundari ($\bar{\theta}_{\text{sec}}=0$). Per tant, en la transició, les cintes secundàries es fan cada vegada més curtes fins que desapareixen, al mateix temps que els dos tipus de cintes disminueixen en amplada.

Per exemple, si fixem $m=1/2$, les experiències numèriques (veieu fig. 15 de {10}) diuen que si C creix, les cintes secundàries acaben desapareixent sempre; però, si fixem C i fem disminuir m , aquestes desapareixeran si C és més gran que $C \approx 4.95$.

Veieu la fig. 11 per a una interpretació més o menys artística del fenomen.

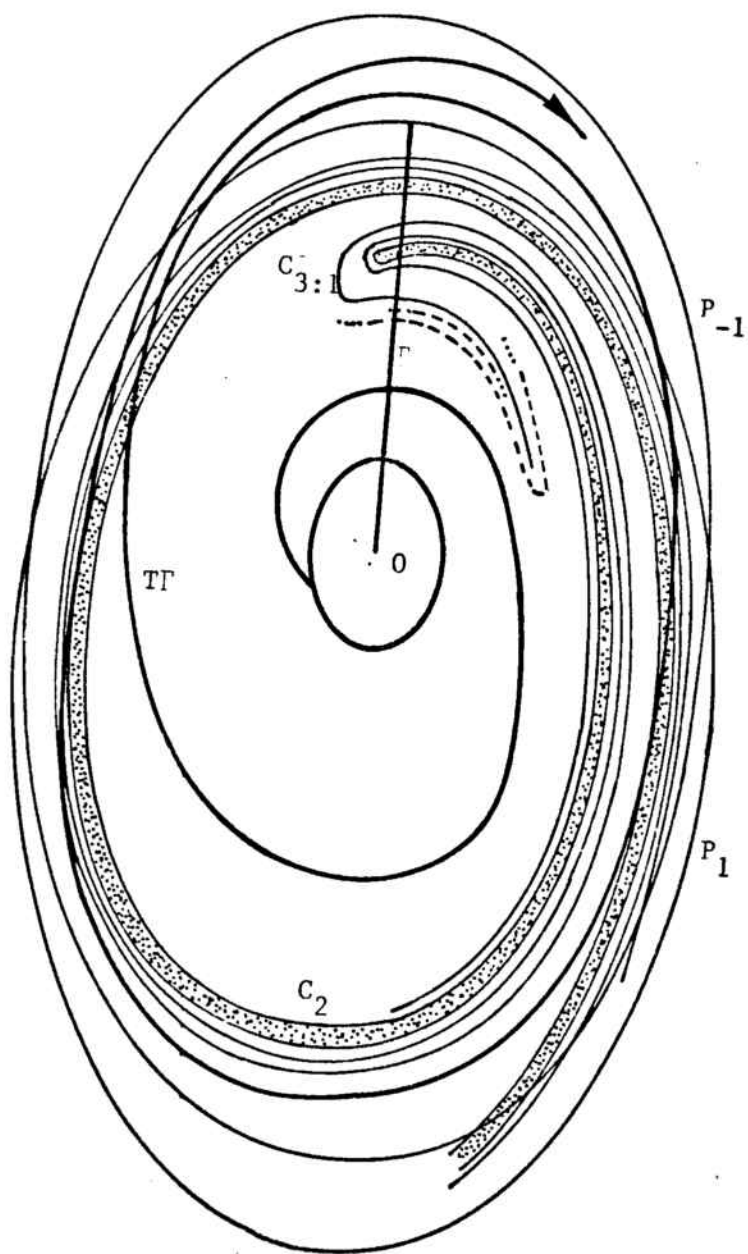


Fig. 11 a)

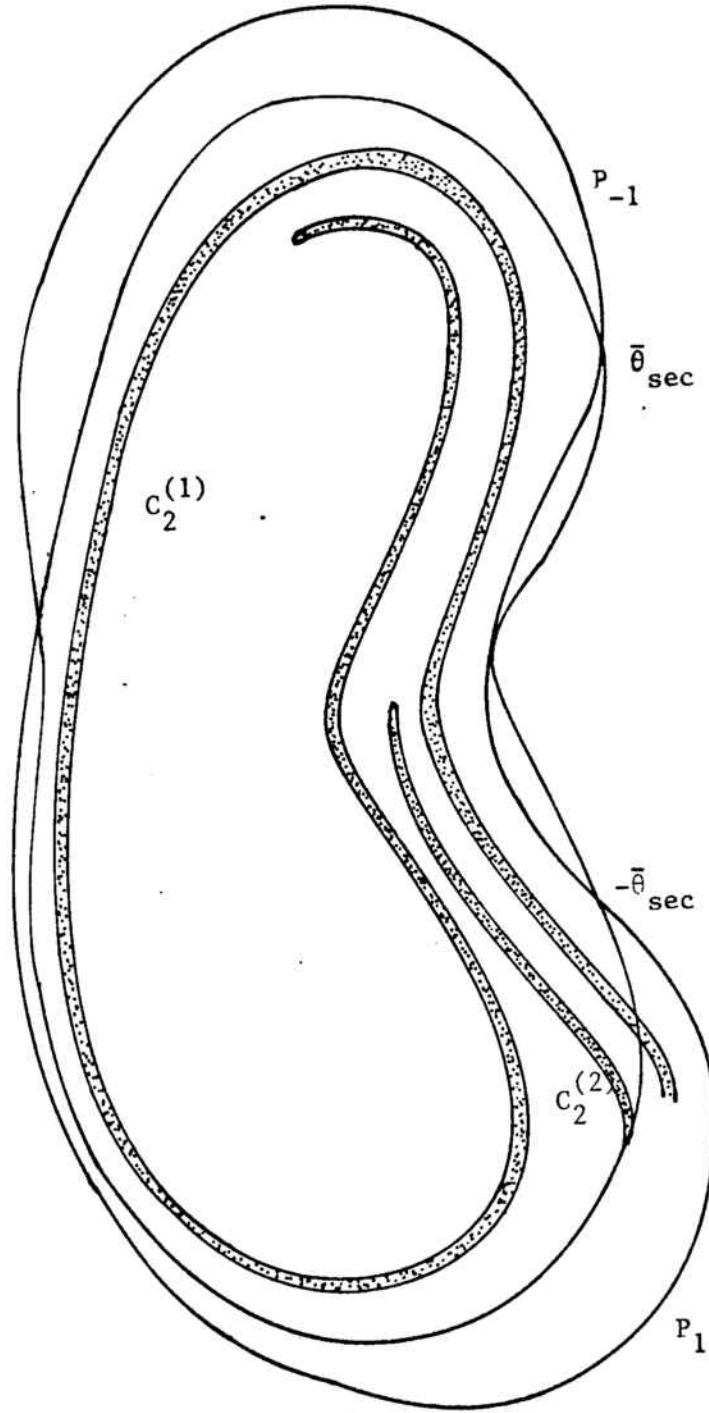


Fig. 11 b)

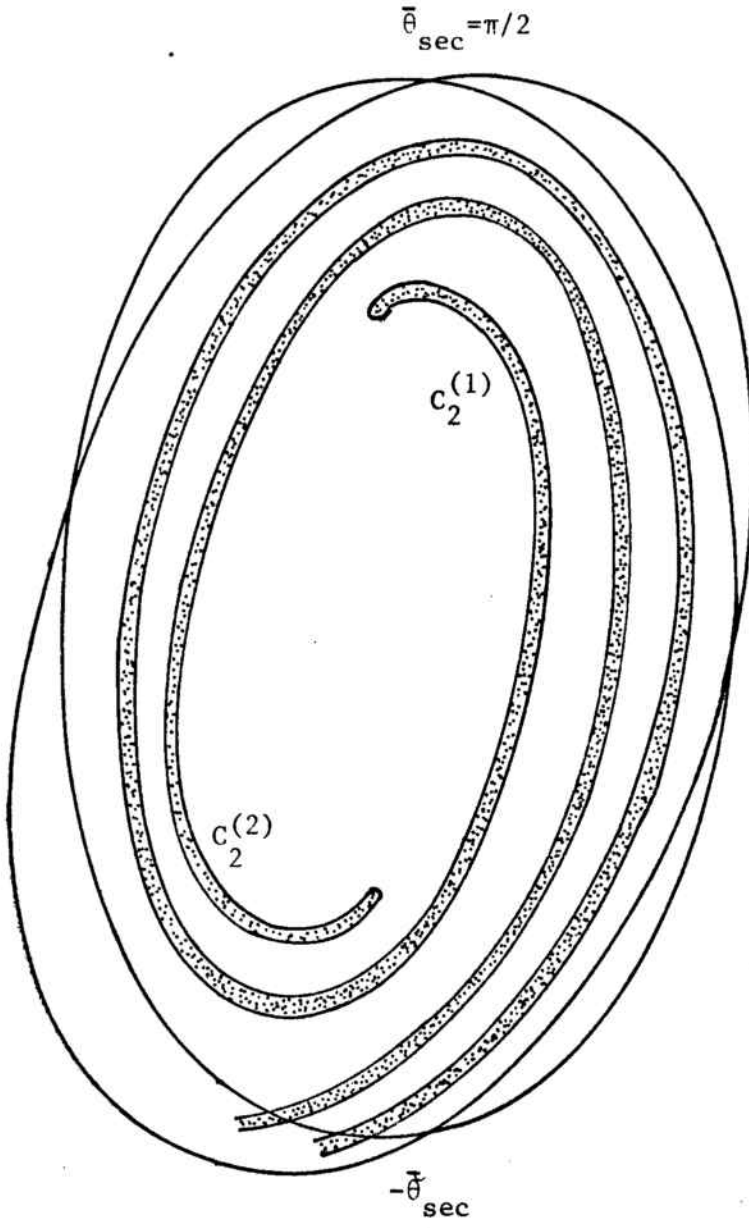


Fig. 11 c)

Problemes oberts.

- Demostrar que les cintes de la secció 15 s'acumulen en algun lloc per tal d'obtenir una fita de la regió d'estabilitat.
- Veure quin és el límit d'existència de corbes invariants al voltant de l'òrbita circular del problema de 2 cossos. En el cas que no coincideixi amb l'anterior, fer l'estudi de la regió que resta al mig.
- Fer una anàlisi dels problemes tractats, quan C sigui més petita, particularitzant en el cas que $C < 3$ i, per tant, I_C sigui connexa.
- Quan $C < 3$, buscar òrbites que vinguin de l'infinit parabòlicament i empalmin amb col·lisió; en cas de trobar-ne extreure'n conseqüències referents a aplicacions astronòmiques a l'origen de cometes, a la manca de significat dels períodes dels cometes, si aquest és gran, etc.

3. BIBLIOGRAFIA

- {1} Abraham, R. i Marsden, J.E.: *Foundations of Mechanics*, 2^a edició. Benjamin (1978).
- {2} Abramowitz, M. i Stegun, I.A.: *Handbook of Mathematical Functions*. Dover (1970).
- {3} Arnold, V.I.: *Équations différentielles ordinaires*. Mir (1974).
- {4} Arnold, V.I.: *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*. Mir (1976).
- {5} Arnold, V.I. i Avez, A.: *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*. Gauthier-Villars (1967).
- {6} Erdélyi, A.: *Asymptotic expansions*. Dover (1956).
- {7} Gantmacher, F.: *Lectures in Analytical Mechanics*. Mir (1975).
- {8} Lacombe, E.A.: Topology of regularized submanifolds in restricted 3-body problem. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, 5 (1975).
- {9} Llibre, J. i Simó, C.: A global study of the Sitnikov problem (per aperèixer).

- {10} Llibre, J. i Simó, C.: Oscillatory solutions in the planar restricted three-body problem. *Math. Ann.* 248, 153-184 (1980).
- {11} McGehee, R.: A Stable Manifold Theorem for Degenerate Fixed Points with Applications to Celestial Mechanics. *J. Differential Equations* 14, 70-88 (1973).
- {12} Puig Adam, P.: *Cálculo integral*. Biblioteca Matemática (1973).
- {13} Siegel, C.L. i Moser, J.K.: *Lectures on celestial mechanics*. Springer (1971)
- {14} Smale, S.: Topology and Mechanics (I,II). *Inv. Math.* 10:305-331, 11:45-64 (1970).
- {15} Stiefel, E.L. i Scheifele, G.: *Linear and Regular Celestial Mechanics*. Springer (1971).
- {16} Szebehely, V.: *Theory of Orbits*. Academic Press (1967).

