



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Valoració i cobertura d'opcions financeres utilitzant EDPs i diferències finites

Autora: Sandra Agraz Baena

Directors: Dr. Miquel Bosch Gual

Dr. Josep Vives Santa Eulàlia

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 21 de juny de 2021

”La bellesa de les matemàtiques només es revela als seus seguidors més pacients.”

Maryam Mirzakhani

Abstract

Introducing ourselves in the world of finance, we propose final boundary value problems that arise when pricing and hedging certain financial derivatives, specifically *plain vanilla* european options and some exotics such as *Asian*, *lookback* and *barrier*. Due to its important influence on the current way of pricing and hedging financial options, we will assume the Black-Scholes model.

There are closed formulas for the simplest financial options but, unfortunately, not for the vast majority of them. Even when there exist explicit solutions, these are very complex and they are lacking of utility in practice. These factors often make us resort to numerical methods. Using the finite difference method, we will obtain approximate solutions to the posed problems and we will verify the efficiency of the numerical solutions that it offers us.

Resum

Introduint-nos en el món de les finances, plantegem els problemes de valor final i de frontera que es presenten a l'hora de realitzar valoracions i cobertures de determinats derivats financers, concretament, d'opcions europees *plain vanilla* i algunes d'exòtiques tals com les *asiàtiques*, les *lookback* i les *barrera*. Degut a la seva important influència en l'actual forma de valorar i cobrir opcions financeres, el model de mercat que assumirem és el model de Black-Scholes.

Existeixen fórmules tancades per a les opcions financeres més senzilles, però, malauradament, no per a la gran majoria. Tanmateix, moltes vegades les solucions explícites existeixen, però són molt complexes i manquen d'utilitat a la pràctica. Aquests factors ens fan recórrer en nombroses ocasions als mètodes numèrics. Mitjançant el mètode de diferències finites, obtindrem solucions aproximades dels problemes plantejats i comprovarem l'eficiència de les solucions numèriques que ens ofereix.

Agraïments

Voldria agrair especialment als tutors d'aquest treball, el Dr. Miquel Bosch i el Dr. Josep Vives, el recolzament i l'ajuda que m'han facilitat en el desenvolupament del treball. També voldria agrair a la meva família i als meus amics el seu suport i la seva confiança durant la meva etapa en el Grau de Matemàtiques, ja que han sigut imprescindibles per a superar aquest repte i poder arribar fins aquí.

Índex

1	Introducció	1
2	Valoració i cobertura d'opcions europees i el model de Black-Scholes	4
2.1	Opcions financeres europees	4
2.1.1	Opcions <i>plain vanilla</i>	6
2.1.2	Opcions exòtiques	6
2.2	El model de Black-Scholes	7
3	Equacions diferencials en derivades parcials de segon ordre	10
3.1	Operadors i equacions diferencials lineals	10
3.2	EDPs de segon ordre i equacions diferencials estocàstiques	11
3.3	Classificació: EDPs lineals parabòliques de segon ordre	13
3.4	Problemes de valors final i de frontera de tipus parabòlic	15
3.5	L'equació diferencial de Black-Scholes i l'equació de la calor	17
3.6	Teoria de Fourier	21
4	Mètode de diferències finites	23
4.1	Diferències dividides	23
4.2	Mètodes explícit, implícit i de Crank-Nicolson	24
4.3	Resolució de sistemes lineals tridiagonals usant la descomposició LU	28
5	Problemes de valoració i cobertura d'opcions	30
5.1	Opcions <i>barrera down-and-out call</i>	30
5.2	Opcions <i>lookback strike call</i>	31
5.3	Opcions <i>asiàtiques arithmetic-average strike call</i>	34
6	Solució als problemes de valoració i cobertura d'opcions	37
6.1	Opcions <i>plain vanilla</i>	37
6.1.1	Solució analítica al problema de valoració	37
6.1.2	Solució analítica al problema de cobertura	42
6.1.3	Solució numèrica	43
6.2	Opcions <i>barrera down-and-out call</i>	45
6.2.1	Solució numèrica	45
6.3	Opcions <i>lookback strike call</i>	45
6.3.1	Solució numèrica	46
6.4	Opcions <i>asiàtiques arithmetic-average strike call</i>	47

6.5 Solució numèrica als problemes de cobertura	48
7 Comparació entre les solucions analítiques i numèriques	49
8 Conclusions	51
Annexos	52
A Glossari	52
B Resolució dels problemes de valoració i cobertura d'opcions en C	62

1 Introducció

El projecte

En els darrers anys, l'activitat dels mercats financers ha crescut extraordinàriament ràpid. La presència d'una gran varietat d'instruments financers en el mercat i la complexitat de molts d'ells han donat lloc a models i tècniques matemàtiques que pretenen analitzar-los.

Un instrument financer és un contracte entre dues parts que atorga un actiu financer al comprador i un passiu financer al venedor. D'una banda, el venedor de l'instrument té l'objectiu de finançar-se i, d'altra banda, la finalitat del comprador és o bé obtenir una font de rendibilitat per a una inversió o bé cobrir riscos d'una inversió, és a dir, utilitzar l'instrument com un contracte d'assegurança.

Els instruments financers complexos són els anomenats derivats financers, que són actius els valors dels quals es deriven dels canvis d'altres actius, anomenats actius subjacents. Un dels derivats financers més destacats és l'opció financera europea. Aquesta consisteix en un contracte que proporciona el dret, però no l'obligació, al comprador de l'opció de comprar o vendre una quantitat de l'actiu subjacent a un preu i a una data acordats prèviament.

Davant la gran varietat de derivats financers, en particular, d'opcions europees, ens podríem preguntar quin valor present tenen les opcions en cada cas particular, és a dir, tenint en compte la volatilitat de l'actiu subjacent, el preu d'exercici, la data de venciment, etc. A més, en cas de ser el venedor d'una opció, caldria pensar quina seria l'estratègia de cobertura adequada que hauríem de seguir per tal de poder assumir els costos en cas que el comprador exerceixi l'opció. Aquestes dues qüestions són un objecte d'estudi molt destacat en el sector financer i es coneix pel nom de valoració i cobertura d'opcions financeres.

El matemàtic francès Louis Bachelier (1870-1946), en la seva tesi doctoral "*Théorie de la Spéculation*", publicada l'any 1900, va ser el primer en utilitzar el moviment brownià com a model matemàtic per intentar explicar la variació dels preus de les accions en borsa i el primer en desenvolupar la teoria de la valoració d'opcions i futurs financers. Com a curiositat, Henri Poincaré va ser membre del seu tribunal i va escriure un informe molt favorable². Tot i que va ser un bon començament per a la valoració d'opcions, la fórmula obtinguda es basava en suposicions no gaire realistes, per exemple assumia que no existien taxes d'interès, i el moviment brownià no explicava amb suficient rigor la variació dels preus de les accions borsàries. Segurament aquest va ser el motiu pel qual el model va ser oblidat durant molts de temps. No va ser fins 60 anys més tard, quan l'economista Paul A. Samuelson (1915-2009) va involucrar-se en els inconvenients del model de Bachelier, que la modelització matemàtica va començar a agafar força en el món financer. L'any 1973, els economistes Fischer S. Black (1938-1995) i Myron S. Scholes (1942-) van publicar l'article "*The Pricing of Options and Corporate Liabilities*"[2], on van utilitzar la versió modificada del model de Bachelier que va proporcionar Paul Samuelson i van obtenir l'anomenada fórmula de Black-Scholes, que calcula el valor present d'una opció de compra europea, i va adquirir ràpidament molta influència en el món financer.

²Ho explica el Dr. D. Walter Schachermayer en el discurs amb motiu de la seva investidura com a Doctor Honoris Causa per la Universidad de Murcia [19]

Cal destacar la contribució del matemàtic japonès Kiyosi Itô (1915-2008) en la teoria dels processos estocàstics durant els anys 40. Utilitzant el càlcul estocàstic d'Itô s'obté que, en el model de Black-Scholes, el comportament dels preus de les accions borsàries segueix un moviment brownià geomètric. L'any 1973, l'economista Robert C. Merton (1944-) va publicar l'article "*Theory of Rational Option Pricing*"[13], on va estendre i generalitzar el model de Black-Scholes i va proporcionar la solució al problema d'optimització d'una cartera de valors. Cal esmentar que Merton va introduir el càlcul estocàstic en l'economia financera i que el director de la seva tesi doctoral va ser Paul A. Samuelson.

Els estudis de Black, Scholes i Merton van revolucionar els mètodes utilitzats per a la valoració i cobertura d'opcions i la resta de derivats financers i van introduir els mètodes estocàstics a l'àmbit financer. Aquest va ser el motiu pel qual Myron Scholes i Robert Merton (Fischer Black va morir dos anys abans) van compartir el Premi Nobel d'Economia l'any 1997.

L'equació diferencial en derivades parcials del model de Black-Scholes, com la majoria d'equacions diferencials, té moltes solucions que depenen de les condicions inicial (o final) i de frontera, corresponents a una multitud de possibles derivats financers. Malauradament, en la gran majoria de problemes de valor inicial i de frontera que se'ns presenten no és possible trobar una solució analítica o, tot i ser possible, obtenim una solució massa complexa i, per tant, poc útil a la pràctica. Aquestes realitats fan necessari l'ús de mètodes numèrics, que ens ofereixen aproximacions numèriques precises. Degut a la seva fàcil implementació en programació i la rigorositat de les solucions aproximades que ofereix, el mètode més utilitzat per a solucionar aquesta problemàtica és el mètode de diferències finites.

En aquest projecte ens plantegem els objectius següents:

1. Aprendre la teoria bàsica de les opcions financeres i estudiar el model de Black-Scholes.
2. Estudiar la teoria bàsica de les equacions en derivades parcials, aprofundint en aquella que sigui necessària per a la valoració i cobertura de les opcions que tractarem.
3. Estudiar el mètode de diferències finites i la seva aplicació en la valoració i cobertura d'opcions europees.
4. Desenvolupar analíticament l'equació diferencial en derivades parcials de Black-Scholes, transformar-la en l'equació de la calor i resoldre analíticament el problema del valor inicial amb aquesta equació, obtenint així la solució al problema de valoració d'una opció de compra estàndard europea. També desenvolupar una estratègia de cobertura per aquest tipus d'opcions.
5. Plantejar els problemes de valors final i de frontera associats a la valoració de certs tipus d'opcions de compra europees exòtiques *barrera*, *lookback* i *asiàtiques*.
6. Aplicar el mètode de diferències finites per tal de resoldre numèricament els problemes plantejats, així com també oferir una estratègia de cobertura per a cadascuna d'aquestes opcions.
7. Implementar els algoritmes en C i comparar els resultats analítics i numèrics per comprovar l'eficiència del mètode utilitzat.

Estructura de la Memòria

En la primera secció, definim el concepte d'opció financera europea i els diferents tipus d'opcions europees que tractarem en aquest treball. També presentem el problema de valoració i cobertura d'opcions europees i expliquem el model de Black-Scholes, que és el model de mercat que assumirem en el projecte.

En la segona secció, introduïm i classifiquem les equacions en derivades parcials, aprofundint en aquelles que utilitzarem en el treball i fent una especial menció a l'equació de la calor. Seguidament, presentem els problemes de valors final i de frontera (PVFFs) i plantejem aquell que es correspon amb el problema de valoració d'una opció de compra europea *plain vanilla*. Finalment, transformem aquest PVFF, format per l'equació en derivades parcials de Black-Scholes, en un problema del valor inicial (PVI) format per l'equació de la calor.

En la tercera secció, presentem i estudiem el mètode de diferències finites i la seva aplicació a l'hora d'aproximar les solucions exactes dels PVFFs que haurem de resoldre. També expliquem breument la resolució de sistemes lineals tridiagonals usant la descomposició LU.

En la quarta secció, plantejem els PVFFs associats a un tipus particular de cadascuna de les opcions exòtiques *barrera*, *lookback* i *asiàtiques*.

En la cinquena secció, resollem analíticament el PVI amb l'equació de la calor corresponent al problema de valoració d'una opció de compra europea *plain vanilla*, trobant així la fórmula de Black-Scholes. Seguidament utilitzem el principi de paritat *call-put* per tal d'obtenir la solució al problema de valoració de la respectiva opció de venda i també resollem els problemes de cobertura d'ambdues opcions. Finalment, donem les solucions analítiques de les opcions *barrera* i *lookback* i, mitjançant el mètode de diferències finites de *Crank-Nicolson*, es resolen numèricament tots els problemes de valoració i cobertura plantejats.

En la sisena secció, es comparen els resultats obtinguts en el cas de les opcions *plain vanilla*, *barrera* i *lookback* estudiades amb la finalitat de comprovar l'eficiència del mètode utilitzat.

En la setena secció, exposem les conclusions extretes del treball.

Finalment, el treball consta de dos annexos: el glossari amb conceptes financers per tal de facilitar la comprensió del projecte i el codi en llenguatge C amb el qual hem obtingut els resultats numèrics de la sisena secció.

2 Valoració i cobertura d'opcions europees i el model de Black-Scholes

En aquesta secció definirem els conceptes d'opció financera europea, d'opció *plain vanilla* i de les opcions exòtiques *barrera*, *lookback* i *asiàtica*. També explicarem el significat de la valoració i cobertura d'opcions, donarem resultats financers que utilitzarem en les seccions posteriors i definirem el model de Black-Scholes, que serà el model que assumirem durant tot el treball degut a la seva rellevància en l'actual valoració i cobertura d'opcions europees.

2.1 Opcions financeres europees

En aquest projecte treballarem exclusivament amb un tipus de derivat financer: l'opció financera europea, la definició de la qual expliquem detalladament a continuació.

Definició 2.1. Una *opció* o *opció financera* és un derivat financer que consisteix en un contracte que proporciona el dret, però no la obligació, al comprador de l'opció de comprar o vendre una quantitat d'un actiu a un preu i en una data acordats prèviament. L'actiu sobre el qual actua l'opció s'anomena **actiu subjacent**. Si l'opció proporciona el dret de compra, s'anomena opció de compra o **opció call** i, si l'opció proporciona el dret de venda, s'anomena opció de venda o **opció put**.

Definició 2.2. Una opció (financera) es diu que és **europea** si només pot ser exercida en la data de venciment acordada en el contracte.

Comentari. Una opció financera pot ser europea o americana. Les opcions americanes són més complexes, ja que es poden exercir en qualsevol moment de la vida de l'opció, no només en la data de venciment.

Ara, coneixent el significat d'opció europea, ens podríem preguntar quin és el valor o preu actual d'una opció financera en particular. A l'estudi que determina aquest valor se'n diu **valoració d'opcions**. El valor o preu de l'opció és la **prima** que haurà de pagar tot inversor que vulgui comprar-la a temps present i que, simultàniament, rebrà el venedor de l'opció.

En general, el preu d'una opció de compra o venda europea és una funció

$$V = V(S, K, T, r, \sigma)$$

on S és el preu de l'actiu subjacent, K és l'strike o preu d'exercici, T és la data de venciment o d'exercici, r és la taxa d'interès lliure de risc i σ és la constant de volatilitat.

Notació 1. Denotarem per V el valor d'una opció de compra o venda europea. En cas de necessitar fer distinció entre una opció de compra i una opció de venda, denotarem per C el valor d'una opció call i per P el valor d'una opció put.

Seguidament presentem una important relació entre els preus de les opcions de compra i venda europees, la demostració de la qual es pot trobar a la referència [22].

Proposició 2.3. Paritat Call-Put. Siguin una opció call i una opció put europees sobre el mateix actiu subjacent amb la mateixa data de venciment T i el mateix preu d'exercici

K . Sigui C el preu de l'opció call a temps t i P el preu de l'opció put a temps t . Aleshores, es compleix la següent igualtat:

$$P = C - S + Ke^{-r(T-t)} \quad (2.1)$$

Per tant, donades una opció de compra i una opció de venda europees sobre el mateix actiu subjacent, amb la mateixa data de venciment i amb el mateix preu d'exercici, si coneixem el valor d'una de les dues opcions, podem calcular el valor de l'altra de forma directa.

Les opcions financeres es poden utilitzar amb l'objectiu d'obtenir beneficis econòmics degut a prediccions encertades de les tendències futures del mercat, tot tenint sota control les pèrdues que ens pot comportar una predicció errònia. En aquest cas, diem que s'utilitza l'opció financera com un **instrument d'inversió o d'especulació**. Per exemple: Si preveiem que el preu de les accions borsàries d'una empresa augmentaran (disminuiran), pagant la prima d'una opció *call* (*put*) que ens permeti comprar (vendre) una quantitat d'accions a un preu i en una data prèviament acordats, obrim la possibilitat a obtenir beneficis. Si es produeix l'escenari alcista (baixista) tal i com havíem predit, exercirem l'opció de compra (venda) i al vendre-les (comprar-les) al preu de mercat obtindrem beneficis. Si la nostra predicció no es compleix, aleshores no exercirem l'opció i la nostra pèrdua serà el cost de la prima.

Tot i així, el principal motiu pel qual els inversors compren opcions financeres és el de cobrir riscos i, en aquest cas, diem que les opcions s'utilitzen com a **instruments d'assegurança**. En canvi, els venedors d'opcions tenen com a principal objectiu el d'obtenir una font de finançament a través del cobrament de les primes i necessiten plans de cobertura per tal de poder afrontar els costos en cas que s'exerceixi l'opció. Nosaltres estem interessats en estudiar quina estratègia seguir per tal de, havent venut una opció financera, assegurar-nos que, arribada la data de venciment, si el comprador de l'opció decideix exercir-la podrem fer front al cost que això suposi. Aquesta tècnica rep el nom de **cobertura d'opcions**.

A continuació introduïm la lletra grega *delta*, un paràmetre molt important en la cobertura d'opcions, i el concepte de cartera *delta-neutral*.

Definició 2.4. La **delta d'una opció**, Δ , és la taxa de canvi del preu de l'opció respecte del preu de l'actiu subjacent. En general, la Δ d'una opció ve donada per l'expressió $\Delta = dV/dS$, on S és el preu de l'actiu subjacent i V és el valor de l'opció.

Definició 2.5. La **delta d'una cartera d'opcions** que depèn només d'un actiu subjacent, el preu del qual és S , és $\Delta = d\Pi/dS$, on Π és el valor de la cartera. Si la cartera conté una quantitat q_i de l'opció i , $1 \leq i \leq n$, la delta de la cartera ve donada per l'expressió

$$\Delta = \sum_{i=1}^n q_i \Delta_i$$

on la Δ_i és la delta de l'opció i -èsima. La fórmula es pot utilitzar per calcular la posició sobre l'actiu subjacent que necessitem per tal que la delta de la cartera sigui igual a 0. En aquest cas, diem que la cartera és **delta-neutral**.

En la secció 4 establim cobertures *delta-neutrals* per a la cobertura de les diferents carteres de valors que crearem per a cada tipus d'opció estudiada.

Finalment, cal distingir dos tipus d'opcions financeres que definirem a continuació: les opcions estàndard o *plain vanilla* i les opcions exòtiques.

2.1.1 Opcions *plain vanilla*

Definició 2.6. S'anomena **opció *plain vanilla* o estàndard** aquella opció amb un perfil de beneficis que no depèn del preu que pugui tenir l'actiu subjacent durant la vida de l'opció. Així mateix, el preu d'exercici, també anomenat *strike*, queda fixat en el moment de compra i venda de l'opció.

El perfil de beneficis o *payoff* d'una opció *plain vanilla* és $C(S_T, T) = \max\{S_T - K, 0\}$ en el cas d'una opció *call* i $P(S_T, T) = \max\{K - S_T, 0\}$ en el cas d'una opció *put*, on S_T és el preu de l'actiu subjacent en la data de venciment $t = T$ i K és l'*strike*.

2.1.2 Opcions exòtiques

Definició 2.7. S'anomena **opció *exòtica*** aquella opció les característiques (preu d'exercici, data de venciment, actiu subjacent, etc.) de la qual difereixen de les opcions estàndard.

Hi ha diferents tipus d'opcions exòtiques, com per exemple les opcions *barrera*, *lookback*, *asiàtica*, *basket*, *bermuda*, etc. A continuació definim les tres primeres opcions exòtiques esmentades, ja que formen part de l'objecte d'estudi d'aquest projecte, junt amb les opcions *plain vanilla*.

Definició 2.8. Una **opció *barrera*** és una opció exòtica que permet al comprador de l'opció comprar o vendre un actiu subjacent al preu d'exercici establert, però només si durant la vida de l'opció el preu de l'actiu subjacent assoleix (*in*) o no assoleix (*out*), respectivament, un determinat nivell anomenat *barrera*.

Comentari. El risc que suposa assolir o no la barrera comporta que les opcions *barrera* acostumin a tenir un valor inferior al de les opcions estàndard.

Definició 2.9. Una **opció *lookback*** és una opció exòtica que permet al comprador de l'opció comprar o vendre l'actiu subjacent al millor preu que ha cotitzat durant el període de vida de l'opció. Concretament, es caracteritzen per tenir un *payoff* que depèn del preu màxim o mínim que ha assolit l'actiu subjacent durant la vida de l'opció.

Comentari. Aquest tipus d'opcions exòtiques permeten al comprador beneficiar-se de cotitzacions passades si són més favorables, fet que les fa més costoses que les opcions estàndard.

Definició 2.10. Una **opció *asiàtica*** és una opció exòtica en la qual el preu d'exercici es calcula fent la mitjana del preu de l'actiu subjacent durant un període de temps preestablert i el qual està inclòs en el període de vida de l'opció.

Comentari. Amb les opcions asiàtiques es redueixen les possibilitats de manipulació del preu subjacent en dates properes a la data de venciment. Degut a que la mitjana de l'actiu subjacent és menys volàtil que el mateix actiu subjacent, aquestes opcions acostumen a tenir un valor inferior al de les opcions estàndard.

2.2 El model de Black-Scholes

En aquest apartat presentem els supòsits del model de Black-Scholes i la solució al problema de valoració d'una opció de compra europea estàndard que van obtenir Fisher Black i Myron Scholes sota aquests supòsits, la famosa fórmula de Black-Scholes.

Les suposicions del model de Black-Scholes, que seran les assumides durant tot el projecte, són les següents:

1. Les opcions són europees, és a dir, només poden ser exercides en la data de venciment.
2. El preu de l'actiu subjacent d'una opció segueix una distribució lognormal amb paràmetres μ i σ constants.
3. La taxa d'interès lliure de risc r i la volatilitat de l'actiu subjacent σ són conegudes i constants.
4. No hi ha possibilitats d'arbitratge.
5. Es permet la venda al descobert i els actius són perfectament divisibles. És a dir, suposem que podem comprar i vendre qualsevol nombre (no necessàriament un enter) de l'actiu subjacent i que podem vendre actius dels quals no som propietaris.
6. La negociació de l'actiu subjacent pot tenir lloc contínuament.
7. No hi ha costos de transacció ni impostos associats a la cobertura d'una cartera.
8. L'actiu subjacent no paga dividendes durant la vida de l'opció.

Comentaris.

- Anomenem *taxa d'interès lliure de risc* a aquella taxa d'interès que es pot guanyar amb una inversió sense córrer cap risc.
- El paràmetre σ de la distribució lognormal que defineix el comportament del preu de l'actiu subjacent és la mateixa σ que representa la volatilitat de l'actiu.
- Gairebé tota la teoria financera assumeix que no hi ha possibilitats d'arbitratge en el mercat, és a dir, que no existeixen oportunitats d'obtenir beneficis instantanis sense risc. Un exemple de possibilitat d'arbitratge seria que una mateixa acció tingués un valor diferent en el mercat de EEUU respecte del mercat de la UE.
- El model de Black-Scholes té algunes limitacions. Calcular el valor d'opcions que només es poden exercir en la data de venciment, exclou les opcions americanes. A més assumeix que les societats dels actius no paguen dividendes, suposició que no és certa per a tots els actius, i que tant la taxa d'interès lliure de risc com la volatilitat són constants, fet poc realista.

A continuació, definim la distribució lognormal, la qual hem suposat que defineix el comportament dels preus dels actius del mercat:

Definició 2.11. Una variable aleatòria X segueix una **distribució lognormal** amb paràmetres $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma \in (0, \infty)$, i ho denotem per $X \sim \text{Lognormal}(\mu, \sigma^2)$, si la variable aleatòria $\ln(X)$ segueix una distribució normal amb els mateixos paràmetres, és a dir, $\ln(X) \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$. La funció de densitat de la variable X és:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x > 0$$

La mitjana o valor esperat de X és $E(X) = e^{\mu + \sigma^2/2}$ i la variància de X és $\text{Var}(X) = e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$.

Sota el supòsit 2, tenim que $\ln(S_T)$ segueix una distribució normal amb paràmetres constants. Concretament, podem veure a [9] que la mitjana o valor esperat i la desviació estàndard de $\ln(S_T)$ són:

$$E(\ln(S_T)) = \ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T \quad \text{i} \quad S.D.(\ln(S_T)) = \sigma\sqrt{T}$$

i, per tant, tenim que la variable $\ln(S_T)$ segueix la distribució normal següent:

$$\ln(S_T) \sim N\left(\ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T, \sigma^2 T\right)$$

Observem que considerant la distribució de $\ln(S_T)$ i les propietats de la distribució normal, tenim que

$$\ln(S_T/S_0) \sim N(\nu T, \sigma^2 T)$$

on $\nu = \mu - \sigma^2/2$.

També podem veure a [9] que la mitjana i la variància de S_T són respectivament:

$$E(S_T) = S_0 e^{\mu T} \quad \text{i} \quad \text{Var}(S_T) = S_0^2 e^{2\mu T} (e^{\sigma^2 T} - 1)$$

. La distribució lognormal té dues característiques importants que fan que sigui adequada per representar el comportament dels preus dels actius. D'una banda, una variable que segueix una distribució lognormal, a diferència d'una variable amb distribució normal, no pot prendre valors negatius, com és el cas dels valors possibles que pot prendre un actiu. D'altra banda, la distribució lognormal presenta un biaix positiu i té una cua dreta molt llarga. Aquest fet es correspon també amb el cas dels preus dels actius, ja que la gran majoria d'actius no tenen uns valors desorbitats i es mouen entorn uns valors relativament propers.

En la figura 1 mostrem el gràfic de la distribució dels preus de les accions de les empreses que cotitzen a l'SP500 a data 24 de maig del 2021³. Podem observar una semblança notable entre aquesta i la distribució lognormal.

Finalment, podem presentar la **fórmula de Black-Scholes**, l'expressió de la qual es pot trobar a la referència [2]:

$$C_0 = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \tag{2.2}$$

³Les dades obtingudes per fer el gràfic les hem trobat a [10]

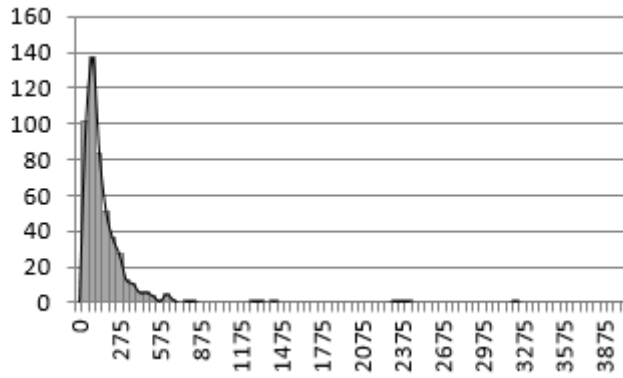


Figura 1: Histograma de freqüències que mostra la distribució dels preus de les accions de les empreses que cotitzen a l'SP500.

on $N(x)$ és la funció de distribució normal estàndard definida per

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy$$

i d_1 i d_2 són

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2) T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2) T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Aquesta fórmula proporciona el valor present ($t=0$) exacte d'una opció de compra europea sota els supòsits del model de Black-Scholes. A més, utilitzant el principi de paritat *call-put* (2.1) obtenim el valor present exacte de la corresponent opció de venda europea:

Tenim la igualtat

$$P(S_t, t) = C(S_t, t) - S + Ke^{-r(T-t)}$$

on $C(S_t, t)$ i $P(S_t, t)$ són els valors a temps t de les opcions *call* i *put*, respectivament. Prenent $t = 0$ i substituint $C(S_t, t)$ per (2.2), obtenim

$$\begin{aligned} P_0 &= S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) - S_0 + Ke^{-rT} \\ &= S_0(N(d_1) - 1) - Ke^{-rT}(N(d_2) - 1) \end{aligned}$$

i, com que $N(-d) = 1 - N(d)$, degut a la simetria de la distribució normal estàndard, podem reescriure la igualtat prèvia de la forma

$$P_0 = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

Comentari. En la secció següent presentarem l'equació de Black-Scholes, a partir de la qual se'n pot deduir la fórmula (2.2), que és la solució explícita al problema de valoració d'una opció de compra europea.

3 Equacions diferencials en derivades parcials de segon ordre

Aquesta secció està basada principalment en les referències [7], [11], [23] i [16]. Més endavant, veurem que el comportament dels preus dels actius pot ser descrit mitjançant una equació diferencial estocàstica i que podem modelar el valor d'un derivat financer utilitzant una equació en derivades parcials combinada amb unes condicions final i de frontera adequades. Aleshores, resolent el conseqüent problema de valors final i de frontera, obtenim el valor o preu del derivat financer corresponent.

Abans de tractar amb les equacions diferencials en derivades parcials de segon ordre i introduir el concepte d'equació diferencial estocàstica, és necessari explicar breument els conceptes d'operador i equació diferencial lineal.

3.1 Operadors i equacions diferencials lineals

En aquest apartat, definirem una sèrie de conceptes (explicats més extensament a [16]) necessaris per a la notació habitual de la teoria de les equacions diferencials en derivades parcials.

Definició 3.1. Una **transformació lineal** o **operador lineal** d'un espai vectorial $\mathcal{V}_1$ a un espai vectorial $\mathcal{V}_2$ és una funció A que associa tot vector $x \in \mathcal{V}_1$ a un únic vector $Ax \in \mathcal{V}_2$ i que compleix:

$$\begin{aligned} A(x_1 + x_2) &= A(x_1) + A(x_2) \\ A(ax) &= aA(x) \end{aligned}$$

on $x_1, x_2, x \in \mathcal{V}_1$ i $a \in \mathbb{R}$.

Exemple 3.2. Sigui $\mathcal{C}^1[a, b]$ l'espai de totes les funcions derivables amb derivades contínues en $[a, b]$. $D : \mathcal{C}^1[a, b] \rightarrow \mathcal{C}[a, b]$ definit per $D(f) := f'$, $\forall f \in \mathcal{C}^1[a, b]$, s'anomena **operador de diferenciació** i és una transformació lineal que va de $\mathcal{C}^1[a, b]$ a $\mathcal{C}[a, b]$. Més generalment, tot operador $D : \mathcal{C}^n[a, b] \rightarrow \mathcal{C}[a, b]$ que transformi una funció $f \in \mathcal{C}^n[a, b]$ en la seva derivada n -èsima és una transformació lineal. Succeeix el mateix amb els polinomis en D , com per exemple $x D^2 + D + x$.

Les transformacions lineals que involucren a D i les seves potències s'anomenen operadors diferencials lineals. A continuació, donem la seva definició formal.

Definició 3.3. Sigui $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval arbitrari i $\mathcal{C}^n(I)$, amb $n \geq 0$, l'espai vectorial del conjunt de funcions amb n derivades contínues en I . Una transformació lineal $L : \mathcal{C}^n(I) \rightarrow \mathcal{C}(I)$ s'anomena **operador diferencial lineal d'ordre n en l'interval I** si es pot expressar de la forma:

$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \dots + a_1(x)D + a_0(x),$$

on els coeficients $a_0(x), \dots, a_n(x)$ són funcions contínues en I i $a_n(x) \neq 0 \forall x \in I$. Per tant, $\forall f \in \mathcal{C}^n(I)$, tenim que:

$$Lf(x) = (L(f))(x) = a_n(x)\frac{d^n}{dx^n}f(x) + \dots + a_1(x)\frac{d}{dx}f(x) + a_0(x)f(x)$$

o, equivalentment, si denotem per $y', \dots, y^{(n)}$ les primeres n derivades de la funció $y = f(x)$:

$$Ly = a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y.$$

Direm que $Lf(x)$ és la **transformació lineal L aplicada a la funció $f(x)$** . A més, la transformació que envia $f \in \mathcal{C}^n(I)$ a la funció zero també és un operador diferencial lineal en I , tot i que no té cap ordre assignat.

La definició d'operador diferencial que acabem de donar es pot estendre fàcilment per tal d'incloure els operadors que involucren derivades parcials, és a dir, aquells operadors que actuen sobre funcions que depenen de diverses variables. Les equacions associades a aquest tipus d'operadors són precisament les equacions en derivades parcials.

Exemple 3.4. Un operador diferencial d'ordre 2 que actua sobre una funció que depèn de n variables independents és de la forma següent:

$$L = a_0(x) + a_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n} + b_{11}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + b_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \dots + b_{nn}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_n^2},$$

on $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, amb $n \geq 1$, són les variables independents.

Ara podem definir el concepte d'equació diferencial lineal utilitzant les definicions prèvies. Per fer-ho, generalitzarem la definició d'operador diferencial lineal d'ordre m fent que aquest actui sobre una funció $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$, derivable i amb derivades contínues. És clar que encara es podria generalitzar més, però la notació es complicaria i no és necessari.

Definició 3.5. Considerant la notació prèvia, una **equació diferencial lineal d'ordre m** és una expressió de la forma

$$Lf(x) = h(x), \quad (3.1)$$

on $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ és una funció derivable i amb derivades parcials contínues desconeguda, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ és una funció contínua en $\mathbb{R}^n$ coneguda i L és un operador diferencial lineal d'ordre m . Direm que l'equació és **homogènia** si $h \equiv 0$ en $\mathbb{R}$ i direm que és **no homogènia** en cas contrari. Finalment, direm que una funció $f(x)$ és una **solució** de l'equació (3.1) si, i només si, $f(x)$ satisfà l'equació $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Finalment, ja podem definir els conceptes d'equació diferencial en derivades parcials i d'equació diferencial estocàstica. Ho fem en el següent apartat.

3.2 EDPs de segon ordre i equacions diferencials estocàstiques

Degut a que, en aquest treball, només ens interessa conèixer les equacions en derivades parcials de segon ordre, presentarem la teoria necessària de les EDPs prenent per referència aquest cas particular.

Definició 3.6. Una **equació diferencial en derivades parcials o equació en derivades parcials (EDP)** de segon ordre és una expressió de la forma:

$$F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right) = 0,$$

on $F : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ amb $p \in \mathbb{N}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, amb $n > 1$, són les variables independents i $u = u(x)$, de classe $\mathcal{C}^2$, és la funció desconeguda.

Observació 3.7. En principi, $p = n + 1 + n + n^2 = (n + 1)^2$, però, com que $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$, aleshores $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$ i tenim que $p = n + 1 + n + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} + 2n + 1$.

Comentari. En el nostre cas, el nombre de variables independents serà gairebé sempre $n = 2$ i denotarem per $x_1 = S$ o $x_1 = x$ la variable espacial i per $x_2 = t$ la variable temporal.

Definició 3.8. Una *equació diferencial estocàstica (SDE)* és una equació diferencial en la qual un (o més) terme(s) és un procés estocàstic, fet que comporta que la solució de la equació diferencial estocàstica sigui també un procés estocàstic.

Les SDE s'utilitzen per modelar diferents fenòmens, com és el cas que ens concerneix de modelar els preus dels actius d'un mercat. Donat un model que suposi la volatilitat dels actius constant al llarg del temps, com és el cas del model de Black-Scholes, el preu dels actius segueixen l'anomenat **moviment brownià geomètric**⁴. L'equació en derivades parcials que defineix aquest moviment inclou com a variable la derivada del moviment brownià, també anomenat **procés de Wiener**⁵. Notem que, a part del moviment brownià, també són possibles altres tipus de comportaments aleatoris, però la resta de casos queden al marge de l'objectiu d'aquest treball.

Com acabem de comentar, els preus dels actius subjacents sota els supòsits del model de Black-Scholes segueixen un **moviment brownià geomètric**, l'equació diferencial estocàstica del qual és:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad t \in [0, \infty) \quad (3.2)$$

on $S_t \in [0, \infty)$ és el preu de l'actiu subjacent a temps t ; $\mu \in \mathbb{R}$ és constant, s'anomena paràmetre de *deriva* o *tendència* i mesura la mitjana del creixement del preu de l'actiu; $\sigma \in (0, \infty)$ és constant, s'anomena paràmetre de *difusió* o *volatilitat* i mesura la desviació estàndard del rendiment de l'actiu; i W_t denota el procés de Wiener. La segona component de l'equació, anomenada *component de difusió*, modela la volatilitat de la variable S_t .

Comentari. Degut a que els increments del procés de Wiener, $\Delta W_t = W_{t+s} - W_t$, són independents al llarg del temps, els increments futurs del procés de Wiener són impredecibles amb la informació donada a temps t .

Un teorema molt important del càlcul estocàstic, i que utilitzarem més endavant per deduir l'equació diferencial de Black-Scholes a partir de (3.2), és el següent:

Teorema 3.9. Lema d'Itô. Supposem que S satisfà l'equació diferencial estocàstica

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW,$$

on $W(t)$ és un procés de Wiener. Sigui $V = V(S, t) \in \mathcal{C}^2((0, \infty) \times (0, \infty))$ una funció que pren valors reals. Aleshores,

$$dV = \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW + \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt$$

A continuació, classificarem els diferents tipus d'equacions en derivades parcials lineals de segon ordre, estudiarem les EDPs parabòliques i presentarem un cas particular d'aquestes, l'anomenada equació de la calor o equació de difusió.

⁴Veure la definició de moviment brownià geomètric al glossari.

⁵Veure la definició de procés de Wiener al glossari.

3.3 Classificació: EDPs lineals parabòliques de segon ordre

Definició 3.10. Anomenem **EDP lineal de segon ordre** a una equació de la forma $Lu = f(x)$, on L és un operador diferencial lineal en derivades parcials de segon ordre lineal respecte la funció desconeguda $u(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Direm que aquesta equació és **homogènia** si $f(x) \equiv 0$ i que és **no homogènia** si $f(x) \not\equiv 0$. En cas contrari, és a dir, si l'equació no és lineal, direm que és **no-lineal**.

En el cas $n = 2$, una equació en derivades parcials de segon ordre amb dues variables independents és:

$$Lu \equiv Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = f(x). \quad (3.3)$$

Direm que l'EDP és lineal si els coeficients A, B, C, D, E, F no depenen de la funció desconeguda $u(x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. A més, si tots els coeficients són constants direm que (3.3) és una EDP lineal amb **coeficients constants**, i en cas contrari direm que (3.3) és una EDP lineal amb **coeficients variables**.

Notació 2. De forma general, denotem per u_x la derivada parcial de u respecte x , per u_{xx} la derivada parcial segona de u respecte x i per $u_{xy} = u_{yx}$ la derivada parcial segona de u respecte de x i y .

Proseguim a establir la classificació d'EDPs lineals de segon ordre en dues variables. Classificarem les equacions en derivades parcials en tres categories: parabòliques, hiperbòliques i el·líptiques. Per fer-ho, considerem els resultats principals que s'obtenen en un estudi detallat de l'equació (3.3) que es pot trobar a [4], on s'examina l'equació lineal homogènia següent:

$$A\xi_x^2 + 2B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = 0 \quad (3.4)$$

on $\xi(x, y)$ és una família de corbes en l'espai (x, y) .

Observació 3.11. La classificació només depèn dels termes amb derivades parcials de segon ordre.

Sigui $\Delta = B^2 - AC$, diem que la EDP (3.4) és **el·líptica** si $\Delta < 0$, **parabòlica** si $\Delta = 0$ i **hiperbòlica** si $\Delta > 0$. Notem que els coeficients A, B i C poden no ser constants i, en aquest cas, la classificació donada és en cada punt (x, y) del domini. En canvi, en cas que els coeficients siguin constants, la classificació és global, és a dir, és la mateixa per tot el domini.

Exemple 3.12. Un cas particular d'EDP parabòlica és l'anomenada **equació de la calor**, la qual s'escriu de la forma següent:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (3.5)$$

Notem que una de les dues variables independents representa el temps i, per aquest motiu, la denotem t .

Més endavant veurem que, mitjançant canvis de variables adequats, és possible transformar l'equació de Black-Scholes en l'equació de la calor.

Observació 3.13. L'expressió de l'equació de la calor que hem donat és per al cas d'una dimensió espacial, $x \in \mathbb{R}^1$, però es pot generalitzar per a qualsevol dimensió $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

A continuació, aprofundirem en les equacions parabòliques lineals de segon ordre, ja que l'equació de Black-Scholes és un cas particular d'aquesta categoria. Cal destacar que les EDPs el·líptiques també són rellevants en l'estudi de l'equació de Black-Scholes, ja que conformen la part independent del temps d'aquesta equació. Notem que les generalitzacions i extensions del model de Black-Scholes poden presentar equacions hiperbòliques, però aquestes queden fora del nostre objecte d'estudi.

Primer cal que definim dos operadors diferencials que anirem utilitzant des d'aquest moment.

Definició 3.14. Definim l'operador diferencial el·líptic, L_E , de la manera següent:

$$L_E u \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x,t)u \quad (3.6)$$

on $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $u = u(x,t)$ és una funció de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{n+1})$ i les funcions $a_{ij}(x,t)$, $b_j(x,t)$ i $c(x,t)$ prenen valors reals finits

$$a_{ij} = a_{ji} \quad i \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \alpha_i \alpha_j > 0 \quad \text{si} \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j^2 > 0, \quad \text{on} \quad \alpha_i, \alpha_j \in \mathbb{C}$$

Definició 3.15. Definim l'operador diferencial parabòlic, L , de la forma:

$$Lu \equiv -\frac{\partial u}{\partial t} + L_E u \quad (3.7)$$

on $u = u(x,t)$ és una funció de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{n+1})$ i L_E és l'operador diferencial el·líptic definit prèviament.

Comentari. Gairebé sempre tractarem amb dimensió $n = 1$.

Observació 3.16. Distingim les coordenades x i t perquè, quan resolguem els problemes numèricament, utilitzarem discretitzacions diferents per cadascuna.

Ara considerem l'expressió general d'una equació parabòlica lineal de segon ordre amb una dimensió espacial:

$$Lu \equiv -\frac{\partial u}{\partial t} + L_E u = f \quad (3.8)$$

on L_E és l'operador diferencial el·líptic (3.6) amb $n = 1$, L és l'operador diferencial parabòlic (3.7), $x \in \mathbb{R}$ és la variable espacial, $t \in [0, \infty)$ és la variable temporal, $u = u(x,t)$ és una funció derivable amb derivades parcials contínues desconeguda i $f = f(x,t)$ és una funció coneguda.

Definició 3.17. Anomenem **termes de difusió** als termes de segon ordre de (3.8) i **termes de convecció** als termes de primer ordre de (3.8). Si apareixen els termes de convecció i difusió, direm que és una **equació de convecció-difusió**. En canvi, si no apareixen els termes de convecció, direm que es tracta d'una **equació de difusió** i, si no apareixen els termes de difusió, direm que es tracta d'una **equació de convecció de primer ordre**.

Un cas particular de l'equació (3.8) és l'**equació diferencial parabòlica de Black-Scholes** amb una dimensió espacial:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0 \quad (3.9)$$

on $C = C(S, t)$ és el preu d'una opció *call* europea sobre un actiu subjacent de preu S a temps t i amb volatilitat σ i taxa lliure d'interès r constants.

Recuperant la classificació d'EDPs lineals de segon ordre, notem que, en el cas de l'equació diferencial de Black-Scholes, els coeficients no són constants. Tot i així, com que se satisfà que $B^2 - AC = 0 \quad \forall S$, ja que $A = 0$ i $B = 0$, l'equació de Black-Scholes és sempre parabòlica.

Observació 3.18. Notem que l'equació (3.9) és una equació de convecció-difusió. Més endavant, veurem que és possible transformar-la en una equació de difusió, concretament en l'equació de la calor (3.5).

En general, l'equació (3.8) té infinites solucions. Per tal d'obtenir una única solució es necessiten una sèrie de condicions auxiliars, les anomenades condicions inicial (o final) i de frontera.

Una propietat interessant de les equacions diferencials parabòliques ve donada pel *principi màxim de les equacions parabòliques*, el qual podem trobar a [7]. Aquest principi ens diu que si u és solució d'una EDP parabòlica, donades unes condicions inicial (o final) i de frontera positives, u serà sempre positiva a l'interior del seu domini, és a dir, u mai assolirà valors negatius d'*inputs* positius. Per tant, sabem que la solució de certs PVFFs amb l'EDP de Black-Scholes (3.9) serà positiva, resultat congruent amb el fet que el valor d'una opció mai pot ser negatiu.

3.4 Problemes de valors final i de frontera de tipus parabòlic

Les opcions financeres que modelarem en aquest treball estan descrites per l'anomenat **problema de valor final i de frontera de tipus parabòlic**. L'equació (3.8) generalitzada a l'espai n -dimensional és l'equació general que descriu el comportament de molts derivats financers. Per exemple, com hem dit anteriorment, un cas particular d'aquesta és l'equació de Black-Scholes, que descriu el comportament d'una opció *call plain vanilla* europea. Les equacions diferencials dels PVFFs que estudiarem són totes iguals o molt semblants a l'equació de Black-Scholes (3.9).

D'una banda, com veurem més endavant, plantejant adequadament el PVFF de Black-Scholes és possible resoldre'l i obtenir la solució exacta del problema, és a dir, la fórmula de Black-Scholes. A més, utilitzant la paritat *call-put*, tenim (2.1), que ens donarà el valor de la corresponent opció de venda. D'altra banda, per a les opcions exòtiques no sempre és possible trobar una solució analítica dels PVFFs. En aquest treball, prendrem un tipus particular de cadascuna de les opcions *lookback*, *barrera* i *asiàtica* que sí es poden resoldre analíticament. Tot i així, a la pràctica els PVFFs d'aquestes opcions s'acostumen a resoldre numèricament degut a la complexitat de les seves solucions analítiques. Sortosament, és possible trobar la solució numèrica d'una gran quantitat d'opcions financeres, fins i tot de moltes que no tenen solució analítica. En particular, estudiarem el mètode de

diferències finites per tal de resoldre el problema de valoració i cobertura de les opcions financeres europees que tractem en aquest treball.

Tornant a l'equació (3.9), veiem que aquesta presenta una derivada de segon ordre respecte S i una derivada de primer ordre respecte t . Per tant, podem esperar que definint dues condicions de frontera i una condició inicial o final adequades obtindrem una única solució del problema resultant.

Observació 3.19. Es pot veure a [7] que, donat un problema de valor inicial i de frontera amb una EDP parabòlica, existeix una solució i és única.

A continuació, presentem diferents tipus de condicions de frontera que considerarem en els PVFFs corresponents a les opcions que estudiarem. Per fer-ho anomenem $f(x, t)$, amb $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ i $t \geq 0$, a la funció desconeguda d'un PVFF.

Definició 3.20. Les *condicions de Dirichlet* ens donen el valor de la funció desconeguda en els valors frontera del domini de x , és a dir, en $x = a$ i/o en $x = b$. Per exemple:

$$f(a, t) = g(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (3.10)$$

per alguna funció g coneguda.

Definició 3.21. Les *condicions de Neumann* ens donen el valor de la derivada parcial de f respecte x en els valors frontera del domini de x , és a dir, en $x = a$ i/o quan $x = b$. Per exemple:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, t) = g(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (3.11)$$

per alguna funció g coneguda.

Definició 3.22. Les *condicions de Robin* són una combinació de les dues anteriors. Per exemple:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, t) + h(a, t)f(a, t) = g(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (3.12)$$

per algunes funcions h i g conegudes.

Observació 3.23. Notem que si $h(x, t) \equiv 0$ tenim les condicions de Neumann.

En el nostre cas, la variable x serà la variable corresponent al preu de l'actiu subjacent, és a dir, $S \in [0, L] \subset \mathbb{R}$, o una variable que hem utilitzat per fer una *reducció de semblança* del PVFF inicial. Tanmateix, la funció desconeguda serà la que determina el valor de l'opció de compra, $C(S, t)$, o un part d'aquesta funció i la variable t prendrà valors en $[0, T]$.

Observació 3.24. Hem presentat casos on l'interval de la variable x és finit, però podríem tenir $x \in (-\infty, \infty)$ o $x \in [a, \infty)$. És clar que, en el primer cas, les condicions frontera es determinarien en $x \rightarrow \pm\infty$ i, en el segon cas, en $x = a$ i en $x \rightarrow \infty$.

Analíticament sempre es considera $S \in (0, \infty)$, però a la pràctica és habitual resoldre els problemes de valoració d'opcions europees numèricament i assumir un domini de l'espai $[0, L]$ on L és un valor molt gran, però finit.

A continuació, partint de l'equació diferencial estocàstica (3.2), construirem el PVFF del model de Black-Scholes aplicat a les opcions *plain vanilla call* europees i, seguidament, el convertirem en un PVI on l'equació en derivades parcials del problema serà l'equació de la calor.

3.5 L'equació diferencial de Black-Scholes i l'equació de la calor

Les principals fonts consultades per a realitzar l'anàlisi d'aquest apartat són [8] i [6].

Sota els supòsits del model de Black-Scholes, hem vist que els preus dels actius subjacents segueixen un moviment brownià geomètric, el qual satisfà l'equació diferencial estocàstica (3.2). Amb l'objectiu d'obtenir l'equació en derivades parcials de Black-Scholes, recuperem l'SDE amb la variable temps $t \in [0, T]$, on T és la data de venciment:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Sigui $V(S_t, t)$ el valor d'una opció financera europea a l'instant t , on el preu de l'actiu subjacent és $S_t > 0$. Considerem una cartera de valors lliure de risc formada per una posició curta⁶ en aquesta opció i una posició llarga en Δ unitats de l'actiu subjacent d'aquesta. Aleshores, el valor de la cartera a temps t és:

$$\Pi_t = \Delta S_t - V_t$$

Observació 3.25. Δ representa la lletra grega *delta* de l'opció, és a dir, la taxa de canvi del preu de l'opció respecte del preu de l'actiu subjacent, i ve donada per l'expressió $\Delta = \partial V / \partial S$.

Observació 3.26. D'una banda, hem realitzat una venda al descobert d'una opció, és a dir, hem venut l'opció sense posseir-la. Per aquest motiu, el valor de l'opció a temps t resta valor a la cartera a temps t . D'altra banda, tenim Δ quantitat de l'actiu a temps t . Aquesta quantitat pot ser positiva o negativa en funció de si comprem o venem, respectivament, quantitats de l'actiu subjacent de l'opció.

Notació 3. *Per simplificar la notació, a partir d'ara considerarem que les variables que depenen del temps i no presenten subíndex estan evaluades a temps t .*

Derivant la igualtat anterior respecte t i, seguidament, substituint dS obtenim

$$d\Pi = \Delta dS - dV = \Delta(\mu S dt + \sigma S dW) - dV$$

Ara, utilitzant el lema d'Itô, tenim que

$$dV = \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW + \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt$$

i podem escriure l'equació prèvia de la forma

$$d\Pi = \Delta(\mu S dt + \sigma S dW) - \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW - \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt$$

Separant la part determinista de l'estocàstica i substituint Δ per $\partial V / \partial S$ obtenim

$$d\Pi = - \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt \quad (3.13)$$

⁶Es poden consultar les definicions de posició curta i posició llarga en el glossari.

A més, com que (3.13) no depèn de dW , és clar que la nostra cartera de valors és lliure de risc i, degut al supòsit que no existeixen possibilitats d'arbitratge, la rendibilitat de la nostra cartera és igual a la taxa d'interès lliure de risc de l'actiu subjacent, r . És a dir,

$$\frac{d\Pi}{\Pi} = rdt \Rightarrow d\Pi = \Pi rdt \quad (3.14)$$

Igualant (3.13) i (3.14) tenim que:

$$\Pi rdt = -\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt$$

Finalment, simplificant dt , substituint $\Pi = \Delta S - V = \frac{\partial V}{\partial S}S - V$ i multiplicant la igualtat per -1 ens queda:

$$\left(V - \frac{\partial V}{\partial S}S\right)r = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

o, equivalentment,

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Finalment, prenent $V = C$ obtenim **l'equació diferencial de Black-Scholes**:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0 \quad (3.15)$$

on $C = C(S, t)$ és el preu d'una opció *call* europea a temps t i S és el preu de l'actiu subjacent a temps t , el qual té volatilitat σ i taxa lliure de risc r constants.

Les condicions de frontera per una opció *call plain vanilla* són:

$$C(0, t) = 0 \quad \text{i} \quad C(S, t) \approx S, \quad \text{quan} \quad S \rightarrow \infty,$$

és a dir, si l'actiu té un valor igual a 0 a temps t , el valor de l'opció també és 0, i, si l'actiu té un valor molt elevat, l'opció té un valor proper a aquest. A més, en la data de venciment, el valor d'una opció *call plain vanilla* és $(S_T - K)^+$, on K és l'strike, és a dir, a temps $t = T$, el valor de l'opció és $S_T - K$ en cas que $S_T - K \geq 0$ i és 0 en cas contrari. Per tant, podem afegir la condició final donada pel *payoff* de l'opció:

$$C(S_T, T) = \max(S_T - K, 0) \quad (3.16)$$

Notem que hem obtingut un problema de valor final i de frontera (PVFF) que es correspon amb el problema de valoració d'una opció de compra europea *plain vanilla*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC &= 0 \\ C(0, t) &= 0 \\ C(S, t) &\approx S, \quad \text{quan} \quad S \rightarrow \infty \\ C(S_T, T) &= \max(S_T - K, 0) \end{aligned}$$

A continuació, mitjançant canvis de variables adequats, transformarem el PVFF anterior

en un PVI fàcil de resoldre. En particular, transformarem l'equació parabòlica de convecció-difusió de Black-Scholes en l'equació de la calor.

Primerament, observem que els coeficients de $\partial^2 C / \partial S^2$ i $\partial C / \partial S$ no són constants. A més, tenim una condició final i ens agradaria tenir una condició inicial, és a dir, una condició per a $t = 0$ enlloc de per a $t = T$. Per tal de modificar aquests aspectes, fem els canvis de variables següents:

$$x = \ln\left(\frac{S}{K}\right), \quad \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T - t), \quad v = v(x, \tau) = \frac{C(S, t)}{K}$$

Aleshores,

$$S = Ke^x, \quad t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2}, \quad C = Kv(x, \tau)$$

i les derivades parcials de (3.15) són

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial(Kv(x, \tau))}{\partial\left(T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2}\right)} = -\frac{1}{2}\sigma^2 K \frac{\partial v}{\partial \tau}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial S} &= \frac{\partial(Kv(x, \tau))}{\partial(Ke^x)} = \frac{\partial\left(Kv\left(\ln(S/K), \frac{1}{2}\sigma^2(T - t)\right)\right)}{\partial S} = K \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial(\ln S - \ln K)}{\partial S} \\ &= \frac{K}{S} \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} &= \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial C}{\partial S} \right) = \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{K}{S} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -K \frac{1}{S^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{K}{S} \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= -K \frac{1}{S^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{K}{S^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{K}{S^2} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \end{aligned}$$

Substituint a (3.15) obtenim

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} - 1 \right) \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} v \quad (3.17)$$

on $-\infty \leq x \leq \infty$ i $\tau \in [0, \frac{\sigma^2}{2}T]$, ja que tenim $t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2}$, $t \in [0, T]$ i $t = 0$ quan $\tau = T\frac{\sigma^2}{2}$ i $t = T$ quan $\tau = 0$.

A més, observem que la condició final (3.16) ara és la següent condició inicial de $v(x, t)$

$$v(x, 0) = \max(e^x - 1, 0) \quad (3.18)$$

ja que, d'una banda, tenim $C(S, T) = Kv(x, \tau)$ i $\tau = \frac{\sigma^2}{2}(T - t)$ i prenent $t = T$ ens queda $\tau = 0$ i, d'altra banda, $\max(S_T - K, 0) = \max(Ke^x - K, 0) = K\max(e^x - 1, 0)$. Per tant, tenim

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k - 1) \frac{\partial v}{\partial x} - kv \quad x \in \mathbb{R}, \quad \tau \in \left[0, T\frac{\sigma^2}{2}\right] \quad (3.19)$$

$$v(x, \tau) = \max(e^x - 1, 0), \quad x \in \mathbb{R}$$

on $k = 2r/\sigma^2$. Novament, fem un canvi de variable, aquest cop prenent $v = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau)$, amb α i β constants reals. Calculem les derivades parcials de v :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} \right)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \alpha^2 e^{\alpha x + \beta \tau} u + 2\alpha e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u}{\partial x} + e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Substituint les derivades parcials a (3.17) obtenim

$$e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) = e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + (k-1) e^{\alpha x + \beta \tau} \left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - k e^{\alpha x + \beta \tau} u \quad (3.20)$$

Simplificant $e^{\alpha x + \beta \tau}$ a (3.20) ens queda:

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (k-1) \left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} \right) - k u \quad (3.21)$$

Per tal de treure els termes amb u i el terme $\frac{\partial u}{\partial x}$ de (3.21) imposem, sense pèrdua de generalitat, el següent:

$$\begin{aligned} \beta &= \alpha^2 + (k-1)\alpha - k \\ 0 &= 2\alpha + (k-1) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Resolent el sistema tenim que

$$\alpha = \frac{1-k}{2} \quad (3.23)$$

$$\beta = \frac{(1-k)^2}{4} - \frac{(1-k)^2}{2} - k = -\frac{(1-k)^2 + 4k}{4} = -\frac{(1+k)^2}{4}$$

Finalment, obtenim l'**equació de la calor**

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.24)$$

on $x \in (-\infty, \infty)$ i $\tau \in \left[0, T \frac{\sigma^2}{2}\right]$

D'altra banda, com que $u(x, \tau) = v(x, \tau) e^{-\alpha x - \beta \tau}$, la **condició inicial** és

$$\begin{aligned} u_0(x) &= u(x, 0) = v(x, 0) e^{-\alpha x} = \max(e^x - 1, 0) e^{\frac{1}{2}(k-1)x} \\ &= \max\left(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0\right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

on $k = 2r/\sigma^2$.

Acabem de reduir l'equació de convecció-difusió de Black-Scholes (3.15) a l'equació de la calor (3.24) i hem passat de tenir dues condicions frontera i una condició final a simplement tenir una condició inicial (3.25). Per tant, per trobar el valor d'una opció *call* europea serà suficient resoldre el següent PVI:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad \tau \in \left[0, T \frac{\sigma^2}{2}\right], \quad (3.26)$$

$$u_0(x) = u(x, 0) = \max\left\{e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0\right\}, \quad k = 2r/\sigma^2.$$

3.6 Teoria de Fourier

En aquest apartat, presentem la teoria de Fourier necessària que utilitzarem en la secció 6 per a resoldre analíticament el problema del valor inicial (3.26). Les definicions i resultats d'aquest apartat es poden veure amb més detall a [7], [11] i [1].

Definició 3.27. Definim la **transformada de Fourier** com l'operador lineal de la forma:

$$F[\cdot] : L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

$$f(x) \longmapsto F[f](\omega) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx$$

La **transformada de Fourier inversa** és l'operador lineal següent:

$$F^{-1}[\cdot] : L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

$$g(\omega) \longmapsto F^{-1}[g](x) := \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{-i\omega x} d\omega$$

Comentari. $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ és l'espai de funcions de quadrat integrable definides de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$, és a dir, funcions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ tals que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$. Per a una definició més acurada cal estudiar Teoria de la Mesura, matèria que escapa dels objectius d'aquest treball. Assumirem que les funcions que utilitzem pertanyen a l'espai $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

La importància de la transformada de Fourier és que ens permet transformar equacions diferencials en equacions algebraiques, les quals podem resoldre, i després, aplicant la inversa, obtenir la solució de l'equació diferencial inicial.

Proposició 3.28. Siguin $f, g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, es compleixen les dues propietats següents:

$$(P1) \quad F[F^{-1}[f]](\omega) = f(\omega) \quad i \quad F^{-1}[F[f]](x) = f(x).$$

$$(P2) \quad Si \quad g(x) = \frac{df}{dx}(x) \Rightarrow F[g](\omega) = i\omega F[f](\omega).$$

Observació 3.29. Per la propietat (P2) tenim que:

$$g(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx}(x) \right) \Rightarrow F[g](\omega) = i\omega F \left[\frac{df}{dx} \right](\omega) = i\omega (i\omega F[f])(\omega) \quad (3.27)$$

$$= -\omega^2 F[f](\omega).$$

Definició 3.30. Siguin $f, g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, definim la **convolució de f i g** , i ho denotem $f * g$, de la manera següent:

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$$

Proposició 3.31. *La convolució té la propietat commutativa:*

$$f * g = g * f$$

Teorema 3.32. *Siguin $f, g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, aleshores $h = f * g \iff F[h](\omega) = 2\pi F[f](\omega)F[g](\omega)$*

Observació 3.33. Pel teorema anterior tenim que:

$$h(x) = (f * g)(x) \iff h(x) = 2\pi F^{-1} \left[F[f](\omega)F[g](\omega) \right] (x)$$

Lema 3.34. Regla de derivació sota la integral. *Sigui $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, es compleix la següent igualtat:*

$$\frac{d}{d\lambda} \int f(x, \lambda) dx = \int \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda) dx$$

Observació 3.35. La condició donada en el lema anterior podria ser més suau. En qualsevol cas, és una condició suficient i la necessitem per aplicar altres resultats.

Definició 3.36. *Anomenem **funcions Gaussians** a les funcions de la forma $G(\omega) = e^{-\alpha\omega^2}$, on $\alpha > 0$ és una constant.*

Proposició 3.37. *Sigui $G(\omega)$ una funció Gaussiana. Aleshores,*

$$F^{-1}[G](x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{-i\omega x} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\omega^2} e^{-i\omega x} d\omega = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}} \quad (3.28)$$

4 Mètode de diferències finites

Aquesta secció està basada principalment en les referències [7], [20] i [3].

El **mètode de diferències finites** és un mètode numèric que s'utilitza per resoldre equacions diferencials aproximant les seves derivades mitjançant **diferències dividides**. En el nostre cas, utilitzarem aquest mètode per resoldre aproximadament el problema de valoració d'opcions europees. Obtindrem solucions discretitzades, tal com expliquem a continuació.

El problema que se'ns presenta consisteix en un PVFF amb una equació en derivades parcials parabòlica lineal de segon ordre amb funció desconeguda $u(x, t)$, on $x \in \mathbb{R}$ és la variable espacial i $t \in [0, \infty)$ és la variable temporal. Aleshores, l'objectiu és aproximar la solució de l'equació diferencial, és a dir, aproximar $u(x, t)$. El primer pas és discretitzar l'interval de temps i el domini de l'espai en un nombre finit de passos, creant així una xarxa de punts (x_j, t_n) , $j = 0, \dots, J$, $n = 0, \dots, N$, tal i com podem observar a la figura 2. Tant els valors x_j 's com els t_n 's seran equidistants. Seguidament, s'escriuen l'equació diferencial i les condicions donades de forma discretitzada substituint les derivades parcials per les aproximacions d'aquestes utilitzant diferències dividides. D'aquesta manera transformem l'equació diferencial amb les respectives condicions en un sistema lineal d'equacions algebraiques que podem resoldre amb un mètode numèric. Concretament, el sistema d'equacions resultant tindrà tantes equacions com incògnites $u(x_j, t_n)$. Aquestes, una vegada trobades, seran aproximacions dels valors buscats. Notem que els errors seran més petits quant més petits siguin els passos de discretització.

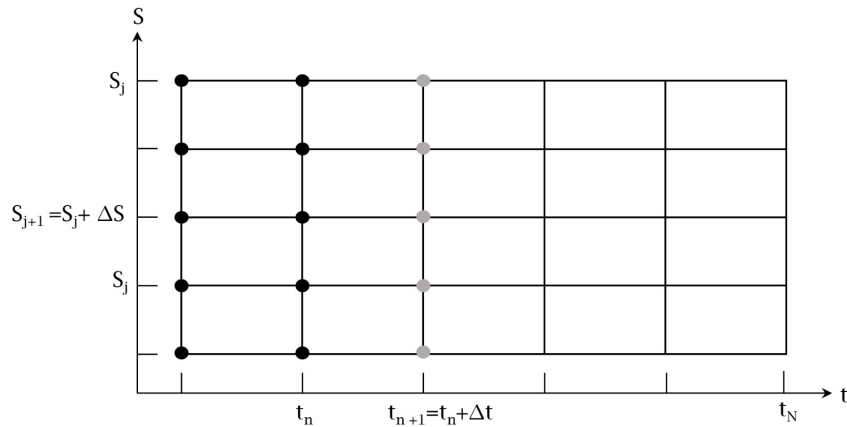


Figura 2: Xarxa discreta de punts (S_j, t_n) amb distància equidistant entre els punts.

A continuació, presentem les diferències dividides en les seves possibles formes i els tres mètodes de diferències finites més habituals.

4.1 Diferències dividides

Les *diferències dividides* s'utilitzen per aproximar derivades d'ordre $n \geq 1$ d'una funció que és desconeguda i, per tant, resulta impossible determinar les seves derivades analíticament. En el nostre cas, serà suficient considerar derivades de primer i segon

ordre. Considerem una funció derivable les vegades que calgui:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Hi ha tres fórmules bàsiques de diferències dividides que aproximem la primera derivada de la funció f : la *diferència central dividida*, la *diferència posterior dividida* i la *diferència anterior dividida*. Les seves respectives expressions són:

$$f'(a) \approx D_0 f(a) \equiv \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

$$f'(a) \approx D_+ f(a) \equiv \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f'(a) \approx D_- f(a) \equiv \frac{f(a) - f(a-h)}{h}$$

Les fórmules anteriors s'obtenen a partir del desenvolupament de Taylor de la funció f al voltant del punt $x = a$, avaluant-lo en els punts $x = a \pm h$ i operant. Es pot veure a [7] que D_0 és una aproximació de segon ordre de la primera derivada en el punt a quan h és suficientment petita i $f \in \mathcal{C}^3$, és a dir, $f'(a) - D_0 f(a) = O(h^2)$. Així mateix, D_+ i D_- són aproximacions de primer ordre si h és suficientment petita i $f \in \mathcal{C}^2$.

Finalment, per aproximar la segona derivada de f en el punt a considerem la popular *fórmula dels tres punts*:

$$f''(a) \approx D_+ D_- f(a) \equiv \frac{f(a-h) - 2f(a) + f(a+h)}{h^2}$$

Es pot veure a [7] que aquesta aproximació té una precisió de segon ordre quan $f \in \mathcal{C}^4$.

Notem que necessitarem prendre valors del pas de discretització h molt petits si volem molta precisió. Alhora, haurem de vigilar el comportament dels errors d'arrodoniment, ja que aquests revertirien la millora feta respecte la precisió.

Comentari. Tot i haver introduït aquestes definicions prenent una funció que només depèn d'una variable independent, nosaltres utilitzarem les diferències dividides per aproximar derivades parcials de primer i segon ordre d'una funció que en depèn de dues. En aquests casos, s'apliquen diferències dividides respecte una de les dues variables i es fixa l'altra. Per exemple, si $f = f(x, y)$ i volem aproximar la derivada parcial de f respecte x en el punt (a, b) , la fórmula anàloga a D_0 seria:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \approx \frac{f(a+h, b) - f(a-h, b)}{2h}.$$

4.2 Mètodes explícit, implícit i de Crank-Nicolson

En aquest apartat explicarem les tres formes més habituals en què es presenta el mètode de diferències finites: el *mètode explícit*, el *mètode implícit* i el *mètode de Crank-Nicolson*. També farem algunes observacions rellevants al respecte.

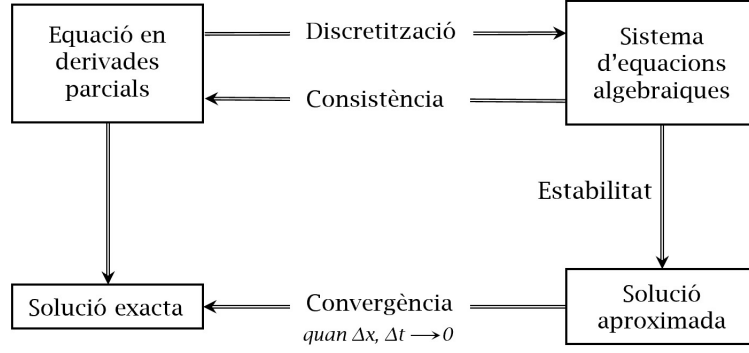


Figura 3: Relació conceptual entre la consistència, l'estabilitat i la convergència.

Abans introduïm els conceptes de consistència, estabilitat i convergència (podeu trobar informació més precisa a les referències [20] i [3]):

Siguin $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ i $t \in [0, \infty)$ les variables independents que volem discretitzar i Δx i Δt la distància entre els punts discretitzats x_j i t_n , respectivament.

Definició 4.1. *Diem que hi ha **consistència** si l'aproximació de l'EDP convergeix a l'EDP original quan Δx i Δt tendeixen a zero.*

Definició 4.2. *Diem que hi ha **convergència** si l'error de la solució aproximada evaluada en un punt qualsevol de la xarxa discreta tendeix a zero quan Δx i Δt tendeixen a zero.*

Definició 4.3. *Diem que hi ha **estabilitat** si l'aproximació de la solució es manté acotada a mesura que el nombre de passos del temps augmenta.*

Un teorema molt important que relaciona aquests tres conceptes és el següent:

Teorema 4.4. Equivalència de Lax. *Donat un mètode de diferències finites consistent aplicat a un problema de valor inicial lineal adequat, el mètode és convergent si, i només si, és estable.*

Aquest teorema ens diu que si tenim un mètode de diferències finites consistent, aleshores els conceptes de convergència i estabilitat són equivalents. Es pot veure a [7] que els mètodes que utilitzarem són consistents. Per tant, només caldrà estudiar les seves estabilitat i precisió.

Considerem l'expressió general d'una equació en derivades parcials parabòlica lineal amb una dimensió espacial:

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f(x, t), \quad (4.1)$$

on $f(x, t)$ és una funció coneguda i L és un operador diferencial el·líptic

$$Lu \equiv \sigma(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, t)u \quad (4.2)$$

i, per tant, defineix una equació de convecció-difusió. Aquesta serà l'equació que considerarem en tots els PVFF corresponents a la valoració de les opcions europees estudiades.

Els mètodes que presentarem discretitzen (4.1) respecte les variables x i t de manera simultània. Denotarem per h i per k la distància entre els punts de la xarxa en direcció x i en direcció t , respectivament. D'aquesta manera, si $a < x < b$ i $0 < t < T$ i dividim els intervals en J i N subinterval de distància h i k respectivament, obtenim:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{J-1} < x_J = b \quad \text{i} \quad h = x_j - x_{j-1} \quad \forall j = 1, \dots, J$$

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = T \quad \text{i} \quad k = t_n - t_{n-1} \quad \forall n = 1, \dots, N$$

Considerem la següent discretització de (4.2):

$$L_k^h u_j^n = \sigma_j^n D_+ D_- u_j^n + \mu_j^n D_0 u_j^n + b_j^n u_j^n,$$

on

$$u_j^n = u(x_j, t_n)$$

$$\sigma_j^n = \sigma(x_j, t_n)$$

$$\mu_j^n = \mu(x_j, t_n)$$

$$b_j^n = b(x_j, t_n)$$

i també la discretització de la funció coneguda $f(x, t)$ de (4.1): $f_j^n = f(x_j, t_n)$, on $0 \leq j \leq J$, $0 \leq n \leq T$,

Aleshores, definim els mètodes de diferències finites *explícit*, *implícit* i *Crank-Nicolson* aplicats a l'equació (4.1) de la manera següent:

Mètode explícit (d'Euler)

$$\begin{aligned} -\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} + L_k^h u_j^n &= -\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} + \sigma_j^n \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{h^2} + \mu_j^n \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} \\ &+ b_j^n u_j^n = f_j^n \end{aligned}$$

$$\forall j = 1, \dots, J-1.$$

Mètode implícit (d'Euler)

$$\begin{aligned} -\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} + L_k^h u_j^{n+1} &= -\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} + \sigma_j^{n+1} \frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{h^2} + \mu_j^{n+1} \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} \\ &+ b_j^{n+1} u_j^{n+1} = f_j^n \end{aligned}$$

$$\forall j = 1, \dots, J-1.$$

Mètode de Crank-Nicolson

$$-\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} + \frac{1}{2}(L_k^h u_j^{n+1} + L_k^h u_j^n) = f_j^n$$

$$\forall j = 1, \dots, J-1.$$

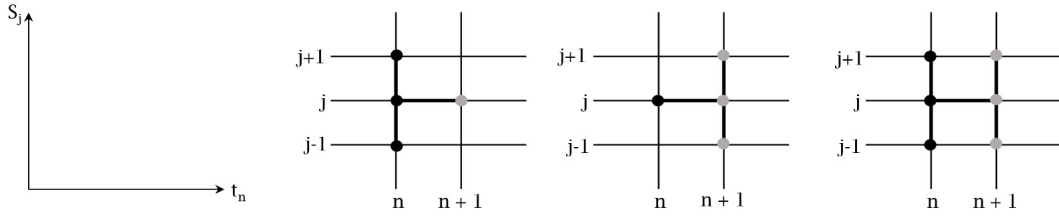


Figura 4: Mètodes *explícit*, *implícit* i de *Crank-Nicolson* respectivament.

Notem que els mètodes s'apliquen a cada pas del temps k , és a dir, $\forall n = 0, \dots, N - 1$. En els tres mètodes s'obtenen equacions amb valors desconeguts u_j^{n+1} , $\forall j = 1, \dots, J - 1$, i amb valors coneguts u_j^n , $\forall j = 0, \dots, J$. Cal tenir present que els valors de u_j^n en $n = 0$, $j = 0$ i $j = J$ són coneguts ja que tindrem condicions inicial i de frontera.

El mètode explícit s'anomena així degut a que els valors desconeguts es poden calcular directament. En canvi, els altres dos mètodes són implícits perquè en cada pas del temps $n = 1, \dots, T$ cal resoldre un sistema lineal per a trobar els valors u_j^{n+1} .

Observació 4.5. Notem que també podríem tenir una condició final en $n = N$ enlloc d'una condició inicial en $n = 0$ i, aleshores, començaríem aplicant el mètode en $n = N$ i acabaríem en $n = 1$. En aquest cas, els valors desconeguts serien u_j^{n-1} , $\forall j = 1, \dots, J - 1$, i els coneguts u_j^n , $\forall j = 0, \dots, J$.

Podem veure a [7] que el mètode *explícit* no és sempre estable, tot i que existeixen condicions suficients per a comprovar si ho és. Per evitar aquest problema d'estabilitat es pot aplicar el mètode *implícit*, que és incondicionalment estable. Tot i així, els dos mètodes comparteixen un inconvenient i és que, usant desenvolupaments de Taylor com es pot veure a [3], tenen una precisió d'ordre $O(k) + O(h^2)$. Aquest fet requereix que els intervals de temps siguin molt més petits que els intervals de l'espai per assegurar una bona precisió i això implica fer molts passos i augmentar els errors de propagació. Seria desitjable tenir un mètode amb precisió d'ordre $O(k^2)$ i $O(h^2)$, que és precisament el que s'aconsegueix amb el mètode de *Crank-Nicolson*, el qual és una combinació dels dos mètodes anteriors i és incondicionalment estable. Aquest mètode és implícit ja que requereix resoldre un sistema lineal a cada pas del temps, k , per tal d'obtenir els valors $u(x_j, t_{n+1})$, $\forall j = 1, \dots, J - 1$.

Observació 4.6. Notem que en els algoritmes dels mètodes *implícit* i *Crank-Nicolson*, en cada equació j , apareixen les variables desconegudes u_{j-1}^{n+1} , u_j^{n+1} i u_{j+1}^{n+1} i, per tant, per cada pas del temps, n , s'obté un sistema d'equacions lineal tridiagonal

$$A u^{n+1} = b^{n+1},$$

on A és una matriu tridiagonal de dimensió $(J - 1) \times (J - 1)$ coneguda, u^{n+1} és el vector de dimensió $J - 1$ format per les variables desconegudes $u(x_j, t_{n+1})$, $\forall j = 1, \dots, J - 1$, i b^{n+1} és el vector de dimensió $J - 1$ que depèn dels valors ja coneguts $u(x_j, t_n)$.

Degut a la precisió i la propietat de ser incondicionalment estable, el mètode que utilitzarem per resoldre numèricament els PVFFs que obtindrem serà el mètode de *Crank-Nicolson*.

4.3 Resolució de sistemes lineals tridiagonals usant la descomposició LU

Existeix un algoritme basat en la descomposició LU d'una matriu quadrada que és molt eficient per a resoldre els sistemes tridiagonals que apareixen en els mètodes implícits. L'expliquem a continuació.

Sigui M una matriu tridiagonal de dimensió $n \times n$ no singular de la forma:

$$M = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

Si es verifiquen unes condicions molt genèriques (les quals comentarem properament), M es pot descomposar com a producte de dues matrius $M = LU$, on L és una matriu triangular inferior amb valors 1 a la diagonal principal i U és una matriu triangular superior. Més concretament, L i U són de la forma següent:

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & l_3 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & l_{n-1} & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & l_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & u_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & u_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_{n-1} & u_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

Notem que el producte LU és una matriu tridiagonal de dimensió $n \times n$ amb vectors:

$$d = (d_1, l_2 u_1 + d_2, \dots, l_n u_{n-1} + d_n)$$

$$l = (l_2 d_1, l_3 d_2, \dots, l_n d_{n-1})$$

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$$

on d és la diagonal, l la diagonal inferior i u la diagonal superior.

Igualant els coeficients de M als coeficients de la matriu resultant del producte LU , és fàcil veure que

$$u_i = c_i, \quad \forall i = 1, \dots, n-1$$

$$d_1 = b_1$$

i que, $\forall i = 2, \dots, n$, es té la recurrència següent:

$$l_i = a_i / d_{i-1}$$

$$d_i = b_i - l_i u_{i-1}$$

Notem que el procediment anterior només es pot fer si $d_i \neq 0 \forall i$. Es pot veure a [3] que si la matriu M és diagonal dominant ($|b_i| > |a_i| + |c_i| \forall i$), aleshores $d_i \neq 0 \forall i$. D'aquesta manera, donat un sistema lineal $Mx = f$ tal que M és diagonal dominant, el podem

reescriure de la forma $LUx = f$ i per resoldre'l només ens cal fer el següent:

1. Prenem $y = Ux$ i resolem el sistema $Ly = f$. Observem que:

$$\begin{aligned}y_1 &= f_1, \\ y_i &= f_i - l_i y_{i-1}, \quad \forall i = 2, \dots, n\end{aligned}$$

2. Resolem el sistema $Ux = y$. Observem que:

$$\begin{aligned}x_n &= y_n/d_n \\ x_i &= \frac{y_i - u_i x_{i+1}}{d_i}, \quad \forall i = n-1, \dots, 1\end{aligned}$$

5 Problemes de valoració i cobertura d'opcions

En aquesta secció plantejarem els problemes de valoració de les opcions *plain vanilla*. També plantejarem els problemes de valoració d'unes determinades opcions de compra exòtiques: *barrera down-and-out call*, *lookback strike call* i *asiàtica arithmetic-average strike call*.

Notem que hem triat un tipus concret de cada opció exòtica. Això és degut a que el problema varia depenent de cada tipus d'opció i el nostre objectiu no és estudiar-les totes, sinó estudiar-ne algunes i valorar si el mètode de diferències finites és un bon mètode numèric per aproximar les solucions dels problemes de valoració i cobertura d'opcions.

Recordem que, en la secció 3, ja vam plantejar el problema de valoració d'opcions de compra *plain vanilla*. Aquest consistia en el següent problema de valor final i de frontera:

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC &= 0 \\ C(S_T, T) &= \max(S_T - K, 0) \\ C(0, t) &= 0 \\ C(S, t) &\approx S, \text{ quan } S \rightarrow \infty\end{aligned}\tag{5.1}$$

on $S \in [0, \infty)$ i $t \in [0, T]$.

Observació 5.1. Observem que una de les condicions frontera ens diu que quan S tendeix a infinit, aleshores $C(S, t)$ val aproximadament S . Més endavant, a l'apartat 6.1.1, veurem que quan S tendeix a infinit, $C(S, t)$ tendeix a $S - Ke^{-r(T-t)}$, que evidentment és un valor proper a S . Aquest fet el tindrem en compte quan discretitzem el PVFF per tal d'assegurar la continuïtat del punt comú entre les condicions final i de frontera esmentada.

Ens queda plantejar els problemes de valor final i de frontera de les opcions exòtiques europees esmentades prèviament. Ho fem a continuació.

5.1 Opcions *barrera down-and-out call*

Les formes bàsiques de les opcions *barrera* són les anomenades *down-and-out*, *put-and-out*, *down-and-in* i *up-and-in*. Totes elles es caracteritzen pel fet que el dret a exercir-les apareix (*in*) o desapareix (*out*) en un valor frontera en l'espai, X , que se situa per sobre (*up*) o per sota (*down*) de l'actual preu de l'actiu subjacent.

Nosaltres estudiarem les opcions *barrera down-and-out call*, el valor de les quals esdevé zero definitivament si el preu de l'actiu subjacent disminueix fins arribar a $S_t = X$ durant la vida de l'opció. Així doncs, en cas que el preu de l'actiu subjacent creu-hi la frontera, l'opció venç. Les opcions de venda anàlogues serien les *barrera up-and-out put*, les quals perden el seu valor si el valor de l'actiu subjacent augmenta fins arribar a $S_t = X$ durant la vida de l'opció.

Notem que la funció de valoració de l'opció *barrera down-and-out call* és $C(S_t, X, t)$, on X és un paràmetre constant i, per tant, podem considerar $C(S_t, t)$. El seu *payoff* és equivalent al de les opcions *plain vanilla* sempre i quan $S_t > X \quad \forall t \in [0, T]$:

$$C(S_T, T) = \max(S_T - K, 0).$$

En cas que $S_t = X$ en algun moment durant la vida de l'opció, aquesta venç amb valor zero. És per aquest motiu que les opcions *barrera* són més barates que les estàndard, perquè tenen el mateix *payoff* però amb el risc afegit que el preu pugui creuar la frontera i, aleshores, venci l'opció.

Comentari. Suposarem sempre que $K > X$.

Degut a que l'única diferència amb les opcions *plain vanilla* és l'esmentada prèviament, l'EDP associada al problema de valoració d'aquest tipus d'opcions és l'equació de Black-Scholes. El valor del paràmetre X estarà present en les condicions del PVFF. D'una banda, la condició final és el *payoff* esmentat i, d'altra banda, les condicions frontera venen donades pel fet que el valor de l'opció és aproximadament el valor de l'actiu subjacent quan aquest pren valors molt elevats i que el valor de l'opció és zero quan $S_t = X$.

Per tant, el PVFF corresponent a les opcions *barrera down-and-out call* és el següent:

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC &= 0 \\ C(S_T, T) &= \max(S_T - K, 0), \\ C(S, t) &\approx S, \quad \text{quan } S \rightarrow \infty, \\ C(S, t) &= 0, \quad \text{quan } S = X,\end{aligned}\tag{5.2}$$

on $S \in [0, \infty)$ i $t \in [0, T]$ i cal tenir en compte que si en algun moment $S_t = X$, aleshores venç l'opció i deixa de tenir valor.

5.2 Opcions *lookback strike call*

Una opció *lookback* es caracteritza per tenir un *payoff* que depèn del preu màxim o mínim que ha obtingut l'actiu subjacent durant la vida de l'opció. Nosaltres centrarem el nostre estudi en un tipus concret d'opció de compra *lookback*: les opcions *lookback strike call*. Aquestes tenen per preu d'exercici el valor mínim que ha obtingut l'actiu subjacent durant la vida de l'opció, és a dir, si de notem per

$$m_t = \min_{0 \leq \tau \leq t} S(\tau),$$

l'*strike* de l'opció és $K = m_T$. Per tant, el valor d'aquesta classe d'opcions ve donat per una funció de la forma $C(S_t, m_t, t)$ i el seu *payoff* és

$$C(S_T, m_T, T) = \max(S_T - m_T, 0), \quad \text{on } m_T = \min_{0 \leq t \leq T} S(t).$$

El mínim es pot mesurar de forma contínua o discreta. Nosaltres presentarem les opcions prenent un mostreig continu dels valors de S_t , tot i que a la pràctica ho farem com es fa habitualment, és a dir, prenent un mostreig discret.

Observació 5.2. En la respectiva opció de venda prendríem el màxim enlloc del mínim i el *payoff* seria $P(S_T, M_T, T) = \max(M_T - S_T, 0)$ on M_T seria el màxim de l'actiu subjacent a temps $t = T$.

Aquestes opcions són més cares que les estàndard per motius evidents: es compleix que $0 \leq m_t \leq S_t$, $\forall t \in [0, T]$ i, per tant, el comprador de l'opció podrà comprar les quantitats

acordades de l'actiu subjacent a un preu igual o inferior al de mercat arribada la data de venciment de l'opció. Notem que això implica que amb un mostreig continu del mínim la probabilitat que s'exerceixi l'opció és 1 i, per tant, no és, en essència, una opció.

Podem veure a [21] que l'equació en derivades parcials associada a aquesta opció és:

$$\frac{\partial C(S, m, t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C(S, m, t)}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C(S, m, t)}{\partial S} - rC(S, m, t) = 0 \quad (5.3)$$

Notem que és l'equació de Black-Scholes 1-dimensional estàndard però amb una variable afegida, m , la qual es comporta com un paràmetre variable en el temps.

Ara ja tenim l'EDP i la condició final del corresponent PVFF, però ens queda estudiar les condicions de frontera en $S = m$ i en $S \rightarrow \infty$. Ho fem a continuació:

D'una banda, quan $S_t \rightarrow \infty$, el valor de l'opció sera aproximadament S_t , com passava en el cas de les opcions de compra *plain vanilla*.

D'altra banda, per estudiar $C(S, m, t)$ quan $S_t = m_t$, considerem $S_t \approx m_t$, amb $t \in (0, T)$. Es pot veure a [22] que la probabilitat que el mínim a temps t sigui el mínim a temps T és zero. Això implica que el valor de l'opció no es pot veure afectat per petits canvis de m_t , és a dir,

$$\frac{\partial C(S, m, t)}{\partial m_t} = 0, \quad \text{quan } S_t = m_t.$$

Aleshores, obtenim que el PVFF corresponent a les opcions *lookback strike call* és:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(S, m, t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C(S, m, t)}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C(S, m, t)}{\partial S} - rC(S, m, t) &= 0 \\ \frac{\partial C(S, m, t)}{\partial m} &= 0, \quad \text{quan } S = m \\ C(S, m, t) &\approx S, \quad \text{quan } S \rightarrow \infty \\ C(S_T, m_T, T) &= \max(S_T - m_T, 0) \end{aligned} \quad (5.4)$$

on

$$m = m_t = \min_{0 \leq \tau \leq t} S(\tau),$$

i amb $S \in [0, \infty)$ i $t \in [0, T]$.

Podem veure a [22] que fent una restricció sobre $C(S, m, t)$, trobem una classe de *lookbacks* el problema de valoració dels quals es pot simplificar de tres a dues variables fent l'anomenada *reducció de semblança*. Aquesta restricció és que la funció $C(S, m, t)$ es pugui expressar de la manera següent:

$$C(S, m, t) = mW\left(\frac{S}{m}, t\right)$$

per alguna funció W . En aquest cas, el *payoff* de l'opció és:

$$C(S_T, m_T, T) = m_T \max\left\{\frac{S_T}{m_T} - 1, 0\right\}.$$

Nosaltres estudiarem aquesta classe de lookbacks ja que la solució explícita del PVFF resultant és coneguda i podrem comparar la solució numèrica amb la solució exacta.

Així doncs, definint la nova variable $x_t = S_t/m_t$ i prenent $C(S_t, m_t, t) = mW(x, t)$, les derivades parcials de (5.4) queden de la forma següent:

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial t} &= \frac{\partial(mW)}{\partial t} = m \frac{\partial W}{\partial t} \\ \frac{\partial C}{\partial S} &= \frac{\partial(mW)}{\partial S} = \frac{\partial W}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} &= \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial C}{\partial S} \right) = \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{1}{m}\end{aligned}$$

Substituint les derivades parcials a (5.3), prenent $x = S/m$ i dividint l'equació resultant entre m obtenim:

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2} + r x \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} - r W(x, t) = 0$$

Ens queda adaprar les condicions final i de frontera que teníem a (5.4). Hem vist prèviament que

$$C(S_T, m_T, T) = m_T \max\left\{\frac{S_T}{m_T} - 1, 0\right\}$$

i tenim $C(S, m, t) = mW(x, t)$ amb $x = S/m$. Aleshores, és clar que la condició final per a $W(x, t)$ és $W(x_T, T) = \max\{x_T - 1, 0\}$.

Observem que dividint entre m l'equació de la condició frontera per a $S \rightarrow \infty$, obtenim que $W(x, t) = x$ quan $x \rightarrow \infty$. L'altra condició frontera esdevé:

$$\frac{\partial(mW)}{\partial m} = W - x \frac{\partial W}{\partial x} = 0$$

quan $S = m$, és a dir, quan $x = 1$. Aleshores, obtenim la següent condició frontera per a $W(x, t)$:

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial x} = W(x, t), \quad \text{quan } x = 1.$$

Finalment, el PVFF que cal solucionar per resoldre el problema de valoració d'aquest tipus d'opcions *lookback strike call* és el següent:

$$\begin{aligned}\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2} + r x \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} - r W(x, t) &= 0 \\ \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} &= W(x, t), \quad \text{quan } x = 1 \\ W(x, t) &\approx x, \quad \text{quan } x \rightarrow \infty \\ W(x_T, T) &= \max(x_T - 1, 0)\end{aligned} \tag{5.5}$$

on $C(S, m, t) = mW(x, t)$ i $x = S/m$. Observem que $x \in [1, \infty)$ i $t \in [0, T]$.

Comentari. Notem que una de les condicions frontera és de tipus Neumann.

Observació 5.3. Resolent (5.5) s'obté $W(x_t, t)$ i fent $m_t W(x_t, t)$ i $x_t = S_t/m_t$ s'obté $C(S_t, m_t, t)$.

5.3 Opcions *asiàtiques arithmetic-average strike call*

L'opció asiàtica més comú és la que té per preu d'exercici un tipus de mitjana del preu de l'actiu subjacent en un període de temps prèviament establert i anterior a la data de venciment. La mitjana pot ser aritmètica o geomètrica i es pot mesurar contínuament o discretament.

A la pràctica, els problemes de valoració i cobertura d'opcions asiàtiques s'estudien de forma discreta degut a la complexitat de les seves solucions o a la incapacitat de poder-les trobar analíticament. Nosaltres estudiarem les opcions de compra *asiàtiques arithmetic-average strike*, les quals depenen de la mitjana aritmètica, i les presentarem amb un mostreig continu de la mitjana, tot i que a la pràctica prendrem un mostreig discret.

En general, les opcions asiàtiques depenen de tres variables independents, però certes opcions permeten fer el que s'anomenen *reduccions de semblança*, mitjaçant les quals es pot reduir el valor de l'opció a una funció que depèn només de dues variables. Això permet trobar la solució explícita, tot i que, com hem comentat prèviament, aquesta acostuma a ser complexa i el més habitual és recórrer als mètodes numèrics per aproximar-la.

En el nostre cas, el valor de l'opció ve donat per una funció $C(S_t, I_t, t)$ on

$$I_t = \int_0^t S(\tau) d\tau.$$

Observació 5.4. Notem que

$$\frac{1}{t} \int_0^t S(\tau) d\tau$$

és la mitjana aritmètica dels preus de l'actiu subjacent prenent un mostreig continu d'aquests des de $t = 0$ fins a $t \in (0, T)$.

Així doncs, el *payoff* de l'opció és

$$C(S_T, I_T, T) = \max\{S_T - \frac{1}{T}I_T, 0\}$$

Podem veure a [21] que l'equació en derivades parcials que representa el comportament del preu d'aquesta opció és:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + S \frac{\partial C}{\partial I} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0 \quad (5.6)$$

Per tal que sigui possible fer la *reducció de semblança*, cal que es compleixi la condició que el valor de l'opció sigui de la forma:

$$C(S, I, t) = S^\alpha F(I/S, t)$$

per alguna constant α , normalment 0 o 1, i alguna funció F .

En efecte, $C(S_T, I_T, T) = S_T \max\{1 - I_T/(TS_T), 0\}$. Això ens permet afirmar que el valor de l'opció és de la forma $C(S_t, R_t, t) = S_t H(R_t, t)$ amb $R_t = I_t/S_t$. Notem que en aquest cas $\alpha = 1$.

Ara, prenent $C(S, R, t) = SH(R, t)$ i $R = I/S$, les derivades parcials queden de la forma següent:

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial t} &= \frac{\partial(SH)}{\partial t} = S \frac{\partial H}{\partial t} \\ \frac{\partial C}{\partial I} &= \frac{\partial(SH)}{\partial I} = \frac{\partial H}{\partial R} \\ \frac{\partial C}{\partial S} &= \frac{\partial(SH)}{\partial S} = H + \frac{\partial H}{\partial R} \left(-\frac{I}{S}\right) \\ \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} &= \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial C}{\partial S}\right) = \frac{I^2}{S^3} \frac{\partial^2 H}{\partial R^2}\end{aligned}$$

Aleshores, substituint les derivades parcials a (5.6), prenent $R = I/S$ i dividint l'equació resultant entre S obtenim:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 R^2 \frac{\partial^2 H}{\partial R^2} + (1 - rR) \frac{\partial H}{\partial R} = 0. \quad (5.7)$$

Ara ja tenim l'EDP i la condició final (*payoff*) del PVFF, però ens queda establir les condicions de frontera en $R = 0$ i en $R \rightarrow \infty$. Ho fem a continuació:

D'una banda, $R \rightarrow \infty \iff S \rightarrow 0$, ja que $R = I/S$ i S està acotada quan l'interval de temps és finit. Sabem que quan $S \rightarrow 0$ l'opció no s'exercirà i, per tant, $H(R, t) = 0$.

D'altra banda, si $R = 0 \Rightarrow dR/dt > 0$ i R es mou ràpidament cap a $R > 0$. Per tant, no podem saber amb certesa el valor de la funció H quan $R = 0$, però el que sí sabem és que ha de ser finit. Observem que:

$$R \rightarrow 0 \Rightarrow R \frac{\partial H}{\partial R} << \frac{\partial H}{\partial R} \Rightarrow \text{Podem ignorar el terme de l'esquerra a (5.7)}$$

$$R \rightarrow 0 \Rightarrow R^2 \frac{\partial^2 H}{\partial R^2} \rightarrow 0 \Rightarrow \text{Podem ignorar el terme a (5.7)}$$

Observació 5.5. La segona implicació es demostra a [21] suposant que el terme convergeix a un valor diferent a zero i arribant a una contradicció amb el fet que H ha de ser finit.

Per tant, concloem que només els termes $\partial H/\partial t$ i $\partial H/\partial R$ contribueixen al comportament de H quan $R = 0$. Per tant, quan $R = 0$ tenim que:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial R} = 0$$

Finalment, obtenim que el PVFF que cal solucionar per a resoldre el problema de valoració de les opcions de compra *asiàtiques arithmetic-average strike* és el següent:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 R^2 \frac{\partial^2 H}{\partial R^2} + (1 - rR) \frac{\partial H}{\partial R} &= 0 \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial R} &= 0, \quad \text{quan } R = 0 \\ H(R, t) &\approx 0, \quad \text{quan } R \rightarrow \infty \\ C(S_T, R_T, T) &= S_T H(R_T, T) = S_T F(R_T)\end{aligned} \quad (5.8)$$

on $R \in [0, \infty)$ i $t \in [0, T]$.

Comentari. Notem que una de les condicions frontera és de tipus Robin.

Observació 5.6. Resolent (5.8) obtindríem $H(R_t, t)$ i fent $S_t H(R_t, t)$ i $R_t = I_t/S_t$ obtindríem $C(S_t, I_t, t)$.

Tot i que el problema de valoració té solució, aquesta s'expressa en termes d'una suma infinita de funcions hipergeomètriques. Degut a la seva complexitat, és molt més habitual resoldre el PVFF plantejat numèricament que avaluar la suma infinita. Per tant, només estudiarem la resolució numèrica del problema.

6 Solució als problemes de valoració i cobertura d'opcions

Aquest capítol està basat principalment en les referències: [7], [18] i [17].

En aquesta secció resoldrem analíticament i numèrica el problema de valoració de les opcions de compra *plain vanilla*. També resoldrem numèricament els PVFFs associats a les opcions de compra *barrera down-and-out*, *lookback strike* i *asiàtica arithmetic-average strike*, els quals hem plantejat en la secció anterior. La resolució numèrica es farà utilitzant el mètode de diferències finites de *Crank-Nicolson* explicat en la secció 4. En el cas de les opcions *plain vanilla*, també estudiarem analíticament les respectives opcions de venda utilitzant el *principi de paritat call-put*.

En el cas de les opcions *plain vanilla call* farem un estudi detallat de la resolució del PVI (3.26) i del problema de cobertura prenent temps continu. Tot i així, cal tenir present que a la pràctica les opcions es valoren a temps discret, ja que no és possible fer-ho d'una altra manera. Notem que en cas que fos possible valorar les opcions financeres a temps continu, obtindríem els seus valors exactes i unes cobertures *delta-neutral* d'aquestes perfectes.

En canvi, en el cas de les opcions exòtiques, exceptuant l'opció *asiàtica*, donarem la solució explícita dels PVFFs plantejats anteriorment de forma directa, és a dir, sense resoldre'ls analíticament. El motiu pel qual considerarem les solucions explícites és el de comprovar la fiabilitat de les aproximacions que obtindrem utilitzant el mètode de diferències finites. Així doncs, només estudiarem detalladament la solució del problema de valoració i cobertura de les opcions exòtiques numèricament.

6.1 Opcions *plain vanilla*

6.1.1 Solució analítica al problema de valoració

Les principals referències consultades per aquest apartat són [21], [6] i [8].

En la secció 3, vam obtenir que el problema de valoració d'una opció *call plain vanilla* consistia en resoldre el PVI (3.26). A continuació veurem que la seva solució és exactament la fórmula de Black Scholes (2.2) i establim la cobertura *delta-neutral* per a una cartera de valors lliure de risc amb una posició curta en una opció de venda i una posició llarga en l'actiu subjacent.

Havent introduït la teoria de Fourier necessària en la secció 3, recuperem el PVI (3.26) amb l'objectiu de resoldre'l mitjançant la transformada de Fourier i una sèrie de canvis de variables:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad \tau \in \left(0, T \frac{\sigma^2}{2}\right), \quad (6.1)$$

$$u_0(x) = u(x, 0) = \max\left\{e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0\right\}, \quad k = 2r/\sigma^2.$$

Recordem que les variables del sistema les vam definir a la secció 3 de la manera següent:

$$v = v(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau), \quad \text{on } \alpha = -\frac{1}{2}(k-1) \text{ i } \beta = -\frac{1}{4}(k+1)^2, \quad k = \frac{2r}{\sigma^2}, \quad (6.2)$$

i també

$$v = v(x, \tau) = \frac{C(S, t)}{K}, \quad x = \ln\left(\frac{S}{K}\right) \text{ i } \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T - t). \quad (6.3)$$

Per tal de simplificar el problema, apliquem la transformada de Fourier a l'equació de la calor i a la condició inicial que conformen el PVI.

D'una banda, aplicant el lema 3.34, tenim que

$$F\left[\frac{\partial u}{\partial \tau}\right](\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial \tau}(x, \tau) e^{i\omega x} dx = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, \tau) e^{i\omega x} dx = \frac{\partial}{\partial \tau} F[u](\omega).$$

D'altra banda, per l'observació (3.27), sabem que

$$F\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right](\omega) = -\omega^2 F[u](\omega).$$

Denotem $U(\omega, \tau) := F[u](\omega)$ i l'equació de la calor transformada queda de la forma

$$\frac{\partial U}{\partial \tau}(\omega, \tau) = -\omega^2 U(\omega, \tau). \quad (6.4)$$

Ara apliquem la transformada de Fourier a la condició inicial del PVI i obtenim

$$U(\omega, 0) = F[f](\omega).$$

Observem que hem transformat el PVI inicial, el qual tenia una EDP lineal, en un PVI amb una EDO lineal fàcil de resoldre. Solucionem ara el nou PVI:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau}(\omega, \tau) = -\omega^2 U(\omega, \tau), \quad (6.5)$$

$$U(\omega, 0) = F[f](\omega).$$

Observem que $e^{\omega^2 \tau}$ és un factor integrant de la EDO. Aleshores, ens queda

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau}(\omega, \tau) = -\omega^2 U(\omega, \tau) &\iff \frac{\partial U}{\partial \tau} e^{\omega^2 \tau} = -\omega^2 U e^{\omega^2 \tau} \iff \frac{\partial U}{\partial \tau} e^{\omega^2 \tau} + \omega^2 U e^{\omega^2 \tau} = 0 \\ &\iff \frac{\partial}{\partial \tau} \left(U e^{\omega^2 \tau} \right) = 0 \iff U(\omega, \tau) e^{\omega^2 \tau} = \Phi(\omega) \\ &\iff U(\omega, \tau) = \Phi(\omega) e^{-\omega^2 \tau}, \end{aligned}$$

on $\Phi(\omega)$ és una funció constant en τ . Ara, aplicant la condició inicial tenim que

$$F[f](\omega) = U(\omega, 0) = \Phi(\omega) \Rightarrow \Phi(\omega) = F[f](\omega).$$

Per tant, la solució del PVI (6.5) és $U(\omega, \tau) = (F[f](\omega)) e^{-\omega^2 \tau}$.

Ara, utilitzant la propietat (P1) de la proposició 3.28, desfem la transformació aplicant la transformada de Fourier inversa i per la definició de convolució i les seves propietats tenim

$$U(\omega, \tau) = F[u](\omega, \tau) = (F[f](\omega)) e^{-\omega^2 \tau} \iff u(x, \tau) = F^{-1}\left[(F[f](\omega)) e^{-\omega^2 \tau}\right]$$

$$\Longleftrightarrow 2\pi u(x, \tau) = \left(F^{-1}[F[f](\omega)] * F^{-1}[e^{-\omega^2 \tau}] \right)(x),$$

on recordem que $F^{-1}[F[f](\omega)] = f(x)$.

Per tant, hem obtingut que

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) F^{-1}[e^{-\omega^2 \tau}](x - \xi) d\xi.$$

Ara, utilitzant (3.28) amb $\alpha = \tau$, tenim que

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}} d\xi.$$

Finalment, obtenim que la solució de l'equació de la calor és

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\tau\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau}} d\xi, \quad (6.6)$$

on recordem que $f(x) = u(x, 0) = u_0(x) = \max\{e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0\}$ i que $-\infty < x < \infty$ i $\tau \in (0, T^{\frac{\sigma^2}{2}})$.

Ara cal resoldre la integral (6.6). Per fer-ho, fem el canvi de variable següent:

$$\begin{aligned} y &= \frac{(\xi - x)}{\sqrt{2\tau}}, \quad -\infty < y < \infty \quad \Rightarrow \quad \xi = \sqrt{2\tau}y + x \\ dy &= \frac{1}{\sqrt{2\tau}} d\xi \quad \Rightarrow \quad d\xi = \sqrt{2\tau} dy \end{aligned}$$

i ens queda que

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\tau\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y\sqrt{2\tau} + x) e^{-\frac{y^2}{2}} \sqrt{2\tau} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(y\sqrt{2\tau} + x) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy.$$

Observem que com $u_0(\xi) = \max\{e^{\frac{1}{2}(k+1)\xi} - e^{\frac{1}{2}(k-1)\xi}, 0\}$, aleshores,

$$\begin{aligned} u_0(\xi) = e^{\frac{1}{2}(k+1)\xi} - e^{\frac{1}{2}(k-1)\xi} &\Longleftrightarrow e^{\frac{1}{2}(k+1)\xi} \geq e^{\frac{1}{2}(k-1)\xi} \Longleftrightarrow \frac{k+1}{2}\xi \geq \frac{k-1}{2}\xi \\ &\Longleftrightarrow \xi \geq 0 \Longleftrightarrow y \geq -\frac{x}{\sqrt{2\tau}}. \end{aligned}$$

Per tant, tenint en compte el que acabem d'observar i que $\xi = x + y\sqrt{2\tau}$, podem reescriure la integral de la forma següent:

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+y\sqrt{2\tau})} - e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+y\sqrt{2\tau})} \right) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+y\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+y\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &= I_1 - I_2. \end{aligned}$$

Resolem I_1 :

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+y\sqrt{2\tau}) - \frac{1}{2}y^2} dy = \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(y\sqrt{2\tau}) - \frac{1}{2}y^2} dy.$$

Completant quadrats a l'exponent, és a dir, fent

$$\frac{1}{2}(k+1)(y\sqrt{2\tau}) - \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{4}(k+1)^2\tau - \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}\right)^2,$$

i fent el canvi de variable $\rho = y - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau} \Rightarrow d\rho = dy$ i $\rho \in \left(-\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}, \infty\right)$, ja que teníem $y \in \left(-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}, \infty\right)$ ens queda que:

$$I_1 = e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho.$$

Definim la variable següent:

$$d_1 := \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}.$$

Per tant, ens queda:

$$\begin{aligned} I_1 &= e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho \\ &= e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} (1 - N(-d_1)), \end{aligned}$$

on $N(d)$ és la funció de probabilitat de la distribució normal estàndard.

A més, per la propietat simètrica de la distribució normal, tenim que $1 - N(-d_1) = N(d_1)$. Per tant,

$$I_1 = e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_1).$$

El càlcul per resoldre la integral I_2 és anàleg al que acabem de fer, només cal tenir present que en I_2 tenim $k-1$ enlloc de $k+1$. La solució és

$$I_2 = e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N(d_2),$$

on

$$d_2 := \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau}.$$

Aleshores, tenim que

$$u(x, \tau) = I_1 - I_2 = e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_1) - e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N(d_2).$$

Ara, desfem els canvis de variables esmentats al començament, (6.2) i (6.3), per tal d'obtenir una expressió amb $C(S, t)$. D'una banda,

$$v(x, \tau) = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} u(x, \tau) = e^x N(d_1) - e^{-k\tau} N(d_2) = e^x N(d_1) - e^{-\frac{2\tau}{\sigma^2}} N(d_2)$$

$$= e^{\ln(S/K)} N(d_1) - e^{-\frac{2r}{\sigma^2} \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} N(d_2),$$

i, d'altra banda,

$$v(x, \tau) = \frac{C(S, t)}{K} \Rightarrow C(S, t) = Kv(x, \tau).$$

Per tant, tenim que

$$C(S, t) = Ke^{\ln(S/K)} N(d_1) - Ke^{-\frac{2r}{\sigma^2} \frac{1}{2} \sigma^2 (T-t)} N(d_2).$$

Finalment, simplificant, obtenim la solució analítica al problema de valoració d'una opció *call plain vanilla* a temps t :

$$C(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2),$$

on

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Notem que prenent $t = 0$ obtenim, efectivament, la fórmula de Black-Scholes, que ens dóna el valor exacte d'una opció *call plain vanilla* a temps present.

Observació 6.1. Si σ i τ són conegudes, aleshores $C(S, t)$ queda completament determinada.

A continuació, comprovem que la solució satisfà les condicions de frontera del PVFF que teníem inicialment a la secció 3. Efectivament, d'una banda tenim

$$\lim_{S \rightarrow 0} d_1(S, t) = -\infty \quad \text{i} \quad \lim_{S \rightarrow 0} d_2(S, t) = -\infty \Rightarrow \lim_{S \rightarrow 0} N(d_1) = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{S \rightarrow 0} N(d_2) = 0$$

$$\text{i, per tant, } \lim_{S \rightarrow 0} C(S, t) = 0, \quad \forall t \in (0, T),$$

i, d'altra banda,

$$\lim_{S \rightarrow \infty} d_1(S, t) = \infty \quad \text{i} \quad \lim_{S \rightarrow \infty} d_2(S, t) = \infty \Rightarrow \lim_{S \rightarrow \infty} N(d_1) = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{S \rightarrow \infty} N(d_2) = 1$$

$$\text{i, per tant, } \lim_{S \rightarrow \infty} C(S, t) = S - Ke^{-r(T-t)} \approx S, \quad \forall t \in (0, T).$$

(6.7)

Recordem que, a la secció 1, ja vam calcular el valor d'una opció *put plain vanilla* sobre el mateix actiu subjacent que l'opció *call plain vanilla* considerada i amb els mateixos valors de K i T . Aquest era el següent:

$$P(S, t) = Ke^{-r(T-t)} N(-d_2) - SN(-d_1), \quad (6.8)$$

on d_1 i d_2 són els definits anteriorment.

6.1.2 Solució analítica al problema de cobertura

Recordem que la *delta* d'una opció *call* és

$$\Delta_C = \frac{\partial C}{\partial S}.$$

Aleshores, en el cas d'una opció *call plain vanilla*, tenim que

$$\Delta_C = N(d_1) + SN'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S} - Ke^{-r(T-t)} N'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial S}.$$

A més, observem que

$$\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{\partial d_2}{\partial S} = \frac{1}{S} \frac{1}{\sigma \sqrt{T-t}}.$$

Aleshores,

$$\Delta_C = N(d_1) + \frac{SN'(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N'(d_2)}{S\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Observació 6.2. Notem que

$$\frac{N'(d_1)}{N'(d_2)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d_1^2}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d_2^2}} = e^{-\frac{1}{2}(d_1^2 - d_2^2)}.$$

A més,

$$d_1 - d_2 = \sigma\sqrt{T-t},$$

$$d_1 + d_2 = \frac{2\ln(S/K) + 2r(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

i, aleshores,

$$\begin{aligned} d_1^2 - d_2^2 &= (d_1 - d_2)(d_1 + d_2) = \sigma\sqrt{T-t} \left(\frac{2\ln(S/K) + 2r(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \\ &= 2\ln\left(\frac{S}{K}\right) + 2r(T-t). \end{aligned}$$

Per tant, ens queda

$$\frac{N'(d_1)}{N'(d_2)} = e^{-\ln(S/K) - r(T-t)} = \frac{K}{S} e^{-r(T-t)}.$$

Per l'observació obtenim que

$$SN'(d_1) = Ke^{-r(T-t)} N'(d_2)$$

i, finalment, obtenim:

$$\Delta_C = N(d_1). \tag{6.9}$$

Així doncs, si tenim una cartera formada per una posició curta sobre una opció *plain vanilla call* i per una posició llarga sobre l'actiu subjacent de l'opció i volem que aquesta sigui *delta-neutral*, cal que la quantitat de l'actiu subjacent que tinguem a temps t sigui $\Delta_C = N(d_1)$.

Si, en canvi, la nostra cartera està formada per una posició curta sobre una opció *plain vanilla put* i per una posició curta sobre l'actiu subjacent, cal que la quantitat de l'actiu subjacent que tinguem a temps t sigui $\Delta_P = N(d_1) - 1 = -N(-d_1)$. Vegem-ho:

Per la simetria de la distribució normal, tenim que

$$P(S, t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1) = Ke^{-r(T-t)}(1 - N(d_2)) - S(1 - N(d_1)).$$

Aleshores,

$$\Delta_P = \frac{\partial P}{\partial S} = -Ke^{-r(T-t)}N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial S} - (1 - N(d_1)) + SN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S}.$$

A més, abans hem vist que

$$\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{\partial d_2}{\partial S} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}}$$

i també que

$$SN'(d_1) = Ke^{-r(T-t)}N'(d_2).$$

Per tant,

$$\Delta_P = N(d_1) - 1 = -N(-d_1).$$

Observació 6.3. Notem que la *delta* d'una opció *put* és negativa. Això és degut a que, en el cas de vendre una opció de venda, l'estratègia consisteix en tenir venudes les quantitats de l'actiu subjacent adequades a temps t . Diem que fem una venda al descobert dels actius, ja que els venem sense posseir-los.

6.1.3 Solució numèrica

Considerem novament el PVFF (5.1), on recordem que $S_t \in [0, \infty)$ i $t \in [0, T]$. La discretització de l'espai i el temps que considerarem és de la forma següent:

D'una banda, definim $k := T/N$ triant $N \in \mathbb{N}$. Aleshores, $t_n := nk$, $\forall n = 0, \dots, N$. D'altra banda, prenem $S_{min} = 0$ i S_{max} igual a un valor suficientment gran i definim $h := S_{max}/J$ triant $J \in \mathbb{N}$. Aleshores, $S_j := jh$, $\forall j = 0, \dots, J$.

Observació 6.4. Notem que $t_0 = 0$, $t_N = T$, $S_0 = 0$ i S_J és un valor suficientment gran.

Com hem dit a la secció 4, per aproximar les derivades parcials de l'equació utilitzarem les diferències dividides. Concretament, utilitzarem les diferències posteriors per aproximar les derivades parcials respecte t i les diferències centrades per aproximar les derivades parcials respecte S . És a dir,

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial t}(S_j, t_{n-1}) &\approx \frac{C(S_j, t_n) - C(S_j, t_{n-1})}{k} \\ \frac{\partial C}{\partial S}(S_j, t_n) &\approx \frac{C(S_{j+1}, t_n) - C(S_{j-1}, t_n)}{2h} \\ \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S_j, t_n) &\approx \frac{C(S_{j+1}, t_n) - 2C(S_j, t_n) + C(S_{j-1}, t_n)}{h^2}\end{aligned}$$

Prenent $v_j^n = v(S_j, t_n) \approx C(S_j, t_n)$, considerant les discretitzacions esmentades i aplicant el mètode de *Crank-Nicolson*, l'equació diferencial de Black-Scholes es transforma en $J-1$ ($j = 1, \dots, J-1$) equacions de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{v_j^n - v_j^{n-1}}{k} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sigma^2 S_j^2 \frac{v_{j-1}^{n-1} - 2v_j^{n-1} + v_{j+1}^{n-1}}{h^2} + r S_j \frac{v_{j+1}^{n-1} - v_{j-1}^{n-1}}{2h} - r v_j^{n-1} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sigma^2 S_j^2 \frac{v_{j-1}^n - 2v_j^n + v_{j+1}^n}{h^2} + r S_j \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2h} - r v_j^n \right) = 0 \end{aligned}$$

Agrupant els termes, prenent $S_j = jh$ i multiplicant l'equació per k , obtenim:

$$-\alpha_j v_{j-1}^{n-1} + (1 - \beta_j) v_j^{n-1} - \gamma_j v_{j+1}^{n-1} = \alpha_j v_{j-1}^n + (1 + \beta_j) v_j^n + \gamma_j v_{j+1}^n, \quad (6.10)$$

$\forall j = 1, \dots, J-1$, on $\alpha_j = \frac{1}{4}k(\sigma^2 j^2 - rj)$, $\beta_j = -\frac{1}{2}k(\sigma^2 j^2 + r)$ i $\gamma_j = \frac{1}{4}k(\sigma^2 j^2 + rj)$.

Les condicions finals i de frontera del PVFF queden aproximades de la forma següent:

- c. final:* $v_j^N = \max\{S_j - K, 0\}$, $\forall j = 0, \dots, J$
- c. frontera 1:* $v_j^n = S_j - K e^{-r(t_N - t_n)}$, $\forall n = 0, \dots, N$
- c. frontera 2:* $v_0^n = 0$, $\forall n = 0, \dots, N$

Observació 6.5. Notem que la condició de frontera 1 pren $S_j - K e^{-r(t_N - t_n)}$ com una aproximació al valor de S quan aquest s'apropa a un valor molt gran (teòricament quan S s'apropa a l'infinit, però a la pràctica considerem que s'apropa a un valor suficientment gran). Aquest valor no és fortuït, sinó que és l'obtingut prèviament a (6.7). Això ens assegura la continuïtat de la condició final i la condició de frontera 1 en el punt comú (S_J, t_N) .

Degut a que tenim una condició final, es comença a aplicar el mètode prenent $n = N$ i s'acaba en $n = 1$. D'aquesta manera, els valors coneguts al pas n són les v_j^n , $\forall j = 0, \dots, J$, i els desconeguts són v_j^{n-1} , $\forall j = 1, \dots, J-1$ (ja que les condicions de frontera ens permeten conèixer els valors de v_j^{n-1} quan $j = 0$ i quan $j = J$).

Notem que l'equació (6.10) equival al següent sistema matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 - \beta_1 & -\gamma_1 & & & \\ -\alpha_2 & 1 - \beta_2 & -\gamma_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\alpha_{J-2} & 1 - \beta_{J-2} & -\gamma_{J-2} \\ & & & -\alpha_{J-1} & 1 - \beta_{J-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{n-1} \\ v_2^{n-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{J-1}^{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 + \beta_1 & \gamma_1 & & & \\ \alpha_2 & 1 + \beta_2 & \gamma_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha_{J-2} & 1 + \beta_{J-2} & \gamma_{J-2} \\ & & & \alpha_{J-1} & 1 + \beta_{J-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^n \\ v_2^n \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{J-1}^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1(v_0^n + v_0^{n-1}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma_{J-1}(v_J^n + v_J^{n-1}) \end{pmatrix}$$

Considerant les condicions final i de frontera discretitzades i resolent aquest sistema aplicant la descomposició *LU*, obtenim les aproximacions $v(S_j, t_n)$, $\forall j = 1, \dots, J - 1$ i $\forall n = 0, \dots, N - 1$. Notem que els valors de $C(S_j, t_n)$ en $j = 0$, $j = J$ i $t = N$ els coneixem amb exactitud degut a les condicions.

6.2 Opcions *barrera down-and-out call*

La solució explícita al problema de valoració (5.2) es pot trobar a [21] i és la següent:

$$C(S, t) = V(S, t) - \left(\frac{S}{X}\right)^{-(k_1-1)} V\left(\frac{X^2}{S}, t\right) \quad (6.11)$$

on $k_1 = \frac{r}{2\sigma^2}$ i $V(S, t)$ és la fórmula de Black-Scholes per a una opció de compra *plain vanilla*.

Observació 6.6. Notem que, efectivament, $C(X, t) = 0$.

6.2.1 Solució numèrica

En la secció 5, vam poder comprovar la gran similitud entre els PVFFs de les opcions de compra *plain vanilla* i *barrera down-and-out*. Concretament, comparteixen la mateixa EDP, la mateixa condició final (amb l'única diferència que si $S_t = X$ per algun $t \in [0, T]$, l'opció venç sense valor) i la mateixa condició de frontera quan S_t tendeix a infinit. Per tant, la resolució numèrica d'aquestes opcions és anàloga a la de les opcions *plain vanilla*, exceptuant que, en aquest cas, la condició de frontera restant és en $S_t = X$, on X és el valor frontera. Aquesta condició es discretitza i s'aproxima de la forma següent:

$$v_j^n = v(S_j, t_n) = 0, \quad \text{quan } S_j \leq X$$

Observació 6.7. Considerem $S_j \leq X$ enlloc de $S_j = X$ ja que, al prendre valors discrets, podria ser que en algun moment $S_t = X$ però no consideréssim l'instant de temps exacte en la xarxa discreta de punts en el qual es compleix l'igualtat.

6.3 Opcions *lookback strike call*

La solució explícita al problema de valoració (5.4) es pot trobar a [5] i és la següent:

$$C(S, m, t) = SN(d) - e^{-r(T-t)} m N(d - \sigma\sqrt{T-t}) + e^{-r(T-t)} \frac{\sigma^2}{2r} S \left[\left(\frac{S}{m}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} N\left(-d + \frac{2r}{\sigma}\sqrt{T-t}\right) - e^{r(T-t)} N(-d) \right] \quad (6.12)$$

on

$$d = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left(\ln\left(\frac{S}{m}\right) + r(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) \right)$$

i N és la funció de probabilitat de la distribució normal estàndard.

6.3.1 Solució numèrica

Recordem que, en la secció 5, vam obtenir el PVFF de dimensió 2 (5.5) mitjançant l'anomenada *reducció de semblança*, en la qual consideràvem que:

$$C(S_t, m_t, t) = m_t W(x_t, t), \quad \text{on} \quad x_t = \frac{S_t}{m_t} \quad i \quad m_t = \min_{0 \leq \tau \leq t} S(\tau)$$

La idea és discretitzar el problema i resoldre'l numèricament obtenint una aproximació dels valors de $W(x, t)$ en una xarxa discreta de punts (x_j, t_n) . Després, aplicant $C(S, m, t) = mW(x, t)$ amb els valors obtinguts que aproximen $W(x_j, t_n)$, obtindrem les aproximacions del valor de l'opció en la xarxa discreta de punts (S_j, m_j, t_n) .

Com en el cas de les opcions *plain vanilla* i *barrera*, definim $k := T/N$ triant $N \in \mathbb{N}$ de manera que $t_n := nk$, $\forall n = 0, \dots, N$. Aquesta vegada, volem discretitzar el domini de $x = S/m$, que clarament és $[1, \infty)$. Per fer-ho, prenem $x_{\min} = 1$ i $x_{\max}$ igual a un valor suficientment gran i definim $h := (x_{\max} - 1)/J$ triant $J \in \mathbb{N}$. Aleshores, $x_j := 1 + jh$, $\forall j = 0, \dots, J$.

Observació 6.8. Notem que $x_j := S_j/m_j$ i que el mínim m_j es mesura discretament.

Recordem que l'EDP del PVFF (5.5) és l'EDP de Black-Scholes però intercanviant S_t per x_t i amb la diferència que apareix el paràmetre m_t . Per tant, sigui $u_j^n \approx W(x_j, t_n)$, l'equació diferencial discretitzada es transforma en $J - 1$ ($j = 1, \dots, J - 1$) equacions de la forma següent:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{k} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sigma^2 x_j^2 \frac{u_{j-1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j+1}^{n-1}}{h^2} + r x_j \frac{u_{j+1}^{n-1} - u_{j-1}^{n-1}}{2h} - r u_j^{n-1} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sigma^2 x_j^2 \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{h^2} + r x_j \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} - r u_j^n \right) = 0 \end{aligned}$$

Agrupant els termes i multiplicant per k , obtenim:

$$-\alpha_j u_{j-1}^{n-1} + (1 - \beta_j) u_j^{n-1} - \gamma_j u_{j+1}^{n-1} = \alpha_j u_{j-1}^n + (1 + \beta_j) u_j^n + \gamma_j u_{j+1}^n, \quad (6.13)$$

$\forall j = 1, \dots, J$, on

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \frac{1}{4} k \left(\frac{\sigma^2 x_j^2}{h^2} - r \frac{x_j}{h} \right), \\ \beta_j &= -\frac{1}{2} k \left(\frac{\sigma^2 x_j^2}{h^2} + r \right), \\ \gamma_j &= \frac{1}{4} k \left(\frac{\sigma^2 x_j^2}{h^2} + r \frac{x_j}{h} \right). \end{aligned}$$

Recuperem les condicions finals i de frontera del PVFF amb la finalitat de discretitzar-les:

$$\begin{aligned} c. \text{ final: } & W(x_T, T) = \max(x_T - 1, 0) \\ c. \text{ frontera 1: } & W(x, t) \approx x, \text{ quan } x \rightarrow \infty \\ c. \text{ frontera 2: } & \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} = W(x, t), \text{ quan } x = 1 \end{aligned}$$

Les condicions finals i de frontera del PVFF queden discretitzades de la forma següent:

$$\begin{aligned} c. \text{ final: } & u_j^N = \max\{x_j - 1, 0\}, \quad \forall j = 0, \dots, J \\ c. \text{ frontera 1: } & u_j^n = x_J - e^{-r(t_N - t_n)}, \quad \text{quan } j = J, \quad \forall n = 0, \dots, N \\ c. \text{ frontera 2: } & \frac{u_1^n - u_0^n}{h} = u_0^n, \quad \text{quan } j = 0, \quad \forall n = 0, \dots, N \end{aligned}$$

Finalment, obtenim que si $v_j^n \approx C(S_j, m_j, t_n)$, aleshores $v_j^n = m_j u_j^n$.

6.4 Opcions asiàtiques *arithmetic-average strike call*

Com en el cas de les opcions *lookback*, en la secció 5 vam obtenir el PVFF de dimensió 2 (5.8) mitjançant l'anomenada *reducció de semblança*, en la qual consideràvem que:

$$C(S_t, I_t, t) = S_t H(R_t, t), \quad \text{on} \quad R_t = \frac{I_t}{S_t} \quad i \quad I_t = \int_0^t S(s) ds.$$

Novament, la idea és discretitzar el problema i resoldre'l numèricament obtenint una aproximació dels valors de $H(R, t)$ en una xarxa discreta de punts (R_j, t_n) . Després, aplicant $C(S, m, t) = S H(R, t)$ i evaluant l'equació en els punts de la xarxa, obtindrem les aproximacions del valor de l'opció en la xarxa discreta de punts (S_j, I_j, t_n) .

Considerem, una vegada més, $k = T/N$ triant $N \in \mathbb{N}$ de manera que $t_n := nk$, $\forall n = 0, \dots, N$. Per discretitzar el domini de $R = I/S$, que clarament és $(0, \infty)$, prenem $R_{min} = 0$ i R_{max} igual a un valor suficientment gran i definim $h = R_{max}/J$ triant $J \in \mathbb{N}$. Aleshores, $R_j := jh$, $\forall j = 0, \dots, J$.

Observació 6.9. Notem que $R_j := I_j/S_j$ i que la mitjana aritmètica es mesura discretament, és a dir, a temps t_m , $0 < m \leq N$, la mitjana aritmètica és

$$\frac{1}{m} I_j, \quad \text{on} \quad I_j = \sum_{n=0}^m S_j, \quad \forall j = 0, \dots, J.$$

Recuperem el PVFF (5.8) amb l'objectiu de discretitzar-lo:

$$\begin{aligned} \text{EDP: } & \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 R^2 \frac{\partial^2 H}{\partial R^2} + (1 - rR) \frac{\partial H}{\partial R} = 0 \\ c. \text{ frontera 1: } & \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial R} = 0, \quad \text{quan } R = 0 \\ c. \text{ frontera 2: } & H(R, t) = 0, \quad \text{quan } R \rightarrow \infty \\ c. \text{ final: } & H(R_T, T) = \max\{1 - R_T/T, 0\} \end{aligned}$$

Segui $u_j^n \approx H(R_j, t_n)$, l'equació diferencial discretitzada queda de la forma següent:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{k} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sigma^2 R_j^2 \frac{u_{j-1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j+1}^{n-1}}{h^2} + (1 - rR_j) \frac{u_{j+1}^{n-1} - u_{j-1}^{n-1}}{2h} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sigma^2 R_j^2 \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{h^2} + (1 - rR_j) \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} \right) = 0 \end{aligned}$$

Agrupant els termes, prenent $R_j = jh$ i multiplicant l'equació per k , obtenim:

$$-\alpha_j u_{j-1}^{n-1} + (1 - \beta_j) u_j^{n-1} - \gamma_j u_{j+1}^{n-1} = \alpha_j u_{j-1}^n + (1 + \beta_j) u_j^n + \gamma_j u_{j+1}^n \quad (6.14)$$

on $\alpha_j = \frac{1}{4}k(\sigma^2 j^2 - (1 - rj))$, $\beta_j = -\frac{1}{2}k\sigma^2 j^2$ i $\gamma_j = \frac{1}{4}k(\sigma^2 j^2 + (1 - rj))$.

Les condicions finals i de frontera del PVFF queden discretitzades de la forma següent:

$$\begin{aligned} c. \text{ frontera } 1: & \quad \frac{u_0^{n+1} - u_0^n}{k} + \frac{u_1^n - u_0^n}{h} = 0, \text{ quan } j = 0, \forall n = 0, \dots, N \\ c. \text{ frontera } 2: & \quad u_J^n = 0, \text{ quan } j = J, \forall n = 0, \dots, N \\ c. \text{ final: } & \quad u_j^N = \max\{1 - \frac{R_j}{kN}, 0\}, \forall j = 0, \dots, J \end{aligned}$$

Finalment, obtenim que si $v_j^n \approx C(S_j, R_j, t_n)$, aleshores $v_j^n = S_j u_j^n$.

6.5 Solució numèrica als problemes de cobertura

L'aproximació numèrica de la solució al problema de cobertura és anàloga per a totes les opcions, només cal considerar les aproximacions v_j^n del valor de l'opció obtingudes en cada cas.

Amb la finalitat d'aproximar $\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$, utilitzem les diferències dividides següents:

$$\begin{aligned} \Delta_j^n &= \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2h}, \quad \text{si } 1 \leq j \leq J-1, \\ \Delta_0^n &= \frac{v_1^n - v_0^n}{h}, \quad \text{si } j = 0, \\ \Delta_J^n &= \frac{v_J^n - v_{J-1}^n}{h}, \quad \text{si } j = J. \end{aligned}$$

Així doncs, al pas del temps n i amb un valor actual S_j del preu de l'actiu subjacent, posseint una quantitat Δ_j^n de l'actiu, obtenim aproximadament una cobertura *delta-neutral*.

7 Comparació entre les solucions analítiques i numèriques

En aquesta secció comparem les solucions exactes i aproximades al problema de valoració d'opcions que obtenim, d'una banda, aplicant les fórmules explícites i, d'altra banda, utilitzant el mètode de *Crank-Nicolson*. Concretament, compararem els valors exactes i aproximats de les opcions de compra europees *plain vanilla*, *barrera down-and-out* i *lookback strike*. Tanmateix, en el cas de les opcions de compra *plain vanilla*, també comparem les solucions exactes i aproximades del problema de cobertura. Podeu consultar en els annexos el codi en llenguatge C que hem programat per obtenir els valors de les taules que presentarem.

Notació 4. Denotem S_j el preu de l'actiu a temps present ($t = 0$), K l'*strike*, X el valor frontera, r la taxa lliure de risc, σ la volatilitat de l'actiu, T el temps de vida de l'opció en anys, m_j el mínim valor de l'actiu assolit, k el pas de discretització del temps i h el pas de discretització de l'espai.

Sigui $C(S_j, t_0)$ el valor exacte d'una opció de compra *plain vanilla*, a temps present ($t = 0$) i amb un preu de l'actiu subjacent S_j , i sigui $v(S_j, t_0)$ l'aproximació obtinguda. Considerem una cartera lliure de risc amb una posició curta en l'opció i una posició llarga en l'actiu subjacent d'aquesta. Sigui Δ_j el valor exacte de la *delta* que es necessita per realitzar una cobertura *delta-neutral* i δ_j l'aproximació obtinguda. Aleshores, obtenim els valors següents:

S_j	$v(S_j, t_0)$	$C(S_j, t_0)$	Precisió	δ_j	Δ_j	Precisió
80	1.859180	1.859420	99.99%	0.221915	0.221922	100.00%
85	3.213191	3.213599	99.99%	0.321811	0.321827	100.00%
90	5.090689	5.091222	99.99%	0.429811	0.429832	100.00%
95	7.510276	7.510872	99.99%	0.537241	0.537260	100.00%
100	10.449991	10.450584	99.99%	0.636816	0.636831	100.00%
105	13.857368	13.857906	100.00%	0.723717	0.723727	100.00%
110	17.662500	17.662954	100.00%	0.795748	0.795754	100.00%
115	21.790154	21.790513	100.00%	0.852864	0.852867	100.00%
120	26.168778	26.169044	100.00%	0.896453	0.896455	100.00%
125	30.735857	30.736044	100.00%	0.928637	0.928637	100.00%
130	35.440147	35.440271	100.00%	0.951725	0.951726	100.00%

Taula 1: A la part esquerra de la taula, comparem els valors presents ($t = 0$) exactes i aproximats d'opcions *plain vanilla call*. A la part dreta de la taula, comparem els valors presents exactes i aproximats de les Δ_j d'aquestes opcions. Per fer-ho, hem considerat $K = 100$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$ i $T = 1$ i hem pres els passos de discretització $h = 0.5$ i $k = 0.01$.

Siguin $C(S_j, t_0)$ i $C(S_j, m_j, t_0)$ els valors presents ($t = 0$) exactes d'opcions de compra *barrera down-and-out* i *lookback strike*, respectivament. Denotem les aproximacions obtingudes $u(S_j, t_n)$ en el primer cas i $w(S_j, m_j, t_n)$ en el segon. Aleshores, obtenim la taula de valors següent:

S_j	$u(S_j, t_0)$	$C(S_j, t_0)$	Precisió	$w(S_j, m_j, t_0)$	$C(S_j, m_j, t_0)$	Precisió
80	0.000000	0.000000	100.00%	79.524385	79.524385	100.00%
85	0.000000	0.000000	100.00%	84.524385	84.524385	100.00%
90	0.000000	0.000000	100.00%	89.524385	89.524385	100.00%
95	4.752223	4.144280	87.20%	94.524385	94.524385	100.00%
100	8.733170	8.275576	94.76%	99.524385	99.524385	100.00%
105	12.765162	12.482070	97.78%	104.524385	104.524385	100.00%
110	16.949808	16.808916	99.17%	109.524385	109.524385	100.00%
115	21.314041	21.269326	99.79%	114.524385	114.524385	100.00%
120	25.845086	25.855670	99.96%	119.524385	119.524385	100.00%
125	30.513606	30.550076	99.88%	124.524385	124.524385	100.00%
130	35.287133	35.331166	99.88%	129.524385	129.524385	100.00%

Taula 2: A la part esquerra de la taula, fem una comparació entre els valors presents ($t = 0$) exactes i aproximats d'opcions *barrera down-and-out call*. A la part dreta, fem una comparació entre els valors presents ($t = 0$) exactes i aproximats d'opcions *lookback strike call*. Per fer-ho, hem considerat els valors $K = 100$, $X = 90$, $m_j = 0.5$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.2$ i $T = 1$ i hem pres els passos de discretització $h = 0.5$ i $k = 0.01$.

Observant la taula 1, és clar que el mètode de *Crank-Nicolson* té una molt bona precisió a l'hora d'aproximar els valors de l'opció *plain vanilla call* i les Δ_j 's del problema de cobertura.

Ara bé, com podem veure a la taula 2, el mètode de *Crank-Nicolson* no és gaire precís aproximant els valors de les opcions *barrera down-and-out* quan el valor del preu de l'actiu és proper al valor frontera. Tot i així, la precisió millora quan el preu de l'actiu s'allunya d'aquest valor i el mètode ens proporciona bones aproximacions.

Observant la part dreta de la taula 2, veiem que el mètode aproxima gairebé a la perfecció els valors exactes de les opcions *lookback strike call*.

Finalment, notem que els resultats obtinguts es corresponen amb els esperats, ja que les opcions *barrera* són més barates que les opcions estàndard i les opcions *lookback* són molt més cares.

Degut a les limitacions de l'espai del projecte, queda pendent per a futures investigacions contrastar els resultats que s'obtenen en la resta de cobertures així com també els obtinguts en la valoració de les opcions *asiàtiques arithmetic-average strike call*.

8 Conclusions

En aquest projecte he descobert el món de les finances i m'he introduït en la teoria d'equacions diferencials en derivades parcials. També he pogut incrementar i portar a la pràctica els coneixements de mètodes numèrics obtinguts en el Grau de Matemàtiques.

Inicialment, he realitzat un recull de conceptes en l'àmbit financer, donant prioritat als derivats financers i, més concretament, a les opcions europees estudiades. Tanmateix, he pogut tractar amb un dels models més rellevants en aquest sector, el Model de Black-Scholes. Seguidament, he plantejat alguns dels problemes de valors final i de frontera que es presenten a l'hora de valorar opcions i he desenvolupat analíticament i numèrica la seva resolució, així com també he estudiat la cobertura de certes opcions. Finalment, he pogut comprovar l'eficiència del *mètode de Crank-Nicolson* a l'hora d'aproximar aquests valors amb un programa propi en llenguatge C.

Degut a la limitació tant de temps com d'espai d'un projecte de final de grau, em queden pendents alguns objectius personals com és el de conèixer i estudiar les opcions americanes.

Annexos

A Glossari

Actiu financer: Títol o anotació comptable que proporciona al comprador el dret a rebre ingressos futurs procedents del venedor. En altres paraules, és un dret que adquireix el comprador sobre els actius reals de l'emissor i l'efectiu que aquests generen. Per tant, el comprador d'un actiu financer posseeix un dret (un actiu) i el venedor una obligació (un passiu).

Els actius financers poden ser emesos per qualsevol entitat econòmica: empreses privades, governs, etc. i no acostumen a tenir un valor físic, sinó que obtenen el seu valor del dret contractual que proporcionen.

Gràcies a aquests instruments les entitats que posseeixen deute es poden finançar i, al seu torn, els compradors aconseguen una rendibilitat invertint en aquest deute.

La principal classificació entre actius financers és la següent:

- Actius financers de renda fixa: Són aquells que emeten administracions públiques o empreses amb el compromís de tornar el capital invertit amb una certa rendibilitat al final d'un període de temps prèviament establert. Un exemple serien els bons i les Lletres del Tresor.
- Actius financers de renda variable: Són la majoria dels actius financers i es caracteritzen per no garantir ni la rendibilitat ni la recuperació del capital invertit. La seva rendibilitat depèn de diferents factors com el balanç de resultats de la entitat que ven l'actiu o la situació econòmica del mercat on s'opera. Un exemple serien les accions i els fons d'inversió.

<https://economipedia.com/definiciones/activo-financiero.html>

<https://www.bbva.es/finanzas-vistazo/ef/fondos-inversion/activos-financieros.html>

Actiu real: Actiu que correspon a béns físics, generalment tangibles, objectes de consum com immobles, metalls, productes agrícoles, energies, etc.

La diferència principal entre els actius reals i els actius financers és que els primers tenen valor per sí mateixos i els segons tenen valor pel que representen. En altres paraules, els primers acostumen a tenir un valor físic i els segons no. Així doncs, el concepte oposat a l'actiu real és l'actiu financer tradicional.

Des del punt de vista de gestió de carteres, els actius reals, pel fet de tenir una baixa, o fins i tot negativa, correlació amb els actius financers, s'utilitzen per realitzar cobertures de carteres o disminuir el risc global d'una inversió predeterminada.

<https://economipedia.com/definiciones/activo-real.html>

<https://www.wiki-finanzas.com/index.php?seccion=Contenido&id=2011C0329>

Actiu subjacent: Actiu financer sobre el que recauen contractes financers, és a dir,

és el valor de referència de determinats derivats financers. Un actiu subjacent pot ser financer, per exemple una acció o un bo, o real, per exemple l'or o el petroli. Altres exemples de possibles actius subjacents són: matèries primeres, índexs, valors de renda fixa i renda variable, tipus d'interès, tipus interbancaris com l'euríbor, etc.

<https://economipedia.com/definiciones/activo-subyacente.html>

Arbitratge: Estratègia financera que consisteix en aprofitar la diferència de preu entre diferents mercats sobre un mateix actiu financer per obtenir un benefici econòmic sense risc. En altres paraules, és una estratègia d'inversió que ofereix la possibilitat de guanyar diners sense risc. Les finances modernes es basen en el principi que això no és possible.

C. Hull, John: *Fundamentals of Futures and Options Markets*, 8th edition, Prentice Hall Publishing, 2014.

Bo: Instrument de deute que emet una empresa o administració pública amb l'objectiu de finançar-se. L'emissor d'un bo es compromet a tornar els diners prestats al comprador d'aquest bo, generalment amb uns interessos fixats prèviament, coneguts com a cupó. És, per tant, un instrument de renda fixa.

C. Hull, John: *Fundamentals of Futures and Options Markets*, 8th edition, Prentice Hall Publishing, 2014.

<https://economipedia.com/definiciones/bono.html>

Bo del Tresor: Títol amb interès periòdic, en forma de cupó, emès per l'Estat amb l'objectiu de finançar el seu deute. Es caracteritza per ser un instrument financer a mig termini, generalment entre 2 i 5 anys, i de renda fixa. Forma part de les emissions del Tresor Públic d'un país per recolzar les seves operacions financeres.

C. Hull, John: *Fundamentals of Futures and Options Markets*, 8th edition, Prentice Hall Publishing, 2014.

<https://www.tesoro.es/deuda-publica/los-valores-del-tesoro/bonos-y-obligaciones-del-estado>

Càmera de compensació: Empresa que garanteix l'actuació de les parts implicades en una transacció amb derivats financers que es negocien en borsa.

C. Hull, John: *Fundamentals of Futures and Options Markets*, 8th edition, Prentice Hall Publishing, 2014.

Cartera d'inversió o cartera de valors: Combinació d'actius en els quals tenim diners invertits de manera diversificada i derivats financers que utilitzem per tal de cobrir riscos o especular amb els preus dels actius subjacents. El propòsit de tenir una cartera d'inversió és generar una plusvàlua.

Una cartera d'inversió no només pot estar formada d'accions que cotitzen en borsa, sinó també de tot tipus d'actius tals com els fons d'inversió, els índexs borsaris, les divises o les matèries primeres. Així mateix, també pot contenir derivats financers, com podrien

ser les opcions o els futurs.

<https://economipedia.com/definiciones/cartera-de-inversion.html>

Cartera *delta-neutral*: Cartera d'inversió amb una delta zero, és a dir, sense sensibilitat a canvis en el preu de l'actiu subjacent.

C. Hull, John: *Fundamentals of Futures and Options Markets*, 8th edition, Prentice Hall Publishing, 2014.

<https://www.rankia.com/blog/opciones-desde-cero/4279028-estrategias-delta-neutral-opciones>

Cobertura: Estratègia financera dissenyada per reduir o eliminar el risc. Hi ha diferents tipus de cobertura: cobertura curta, cobertura llarga, cobertura delta-neutral, etc.

C. Hull, John: *Fundamentals of Futures and Options Markets*, 8th edition, Prentice Hall Publishing, 2014.

Cobertura delta-neutral: Tipus de cobertura dissenyada per tal que el valor d'una cartera d'inversió no sigui susceptible als canvis de preu de l'actiu subjacent.

C. Hull, John: *Fundamentals of Futures and Options Markets*, 8th edition, Prentice Hall Publishing, 2014..

Cobertura d'opcions europees: Estratègia a seguir per tal de, havent venut una opció financera europea, assegurar que, arribada la data de venciment, es podrà fer front al cost que suposi l'exercici de l'opció en cas que el comprador l'exerceixi.

C. Hull, John: *Fundamentals of Futures and Options Markets*, 8th edition, Prentice Hall Publishing, 2014.

Contracte per diferències (CFD): Contracte financer en el qual s'acorda intercanviar la diferència entre el preu de compra i el preu de venda d'un actiu. Aquests contractes no tenen una data de venciment predeterminada. Els CFDs són derivats financers OTC.

<https://economipedia.com/definiciones/contrato-por-diferencia-cfd.html>

Correlació: Mesura que descriu en quin grau dos actius tendeixen a moure's en la mateixa direcció. Generalment es representa mitjançant el coeficient de correlació, un nombre que varia entre -1 i 1.

Els actius amb correlació positiva (coeficient major a 0) tendeixen a moure's en la mateixa direcció la major part del temps. En canvi, els actius amb correlació negativa (coeficient menor a 0) tendeixen a moure's en direccions oposades. Diem que dos actius tenen una correlació negativa perfecta quan el coeficient és igual a -1, que tenen una correlació positiva perfecta quan el coeficient és igual a 1 i que no hi ha correlació entre els actius quan el coeficient és igual a 0. En general, no s'acostuma a donar una correlació perfectament positiva o negativa.

En el moment de construir una cartera de valors és molt important tenir present la correlació entre els diferents actius financers. Intuïtivament, una cartera formada per un cert nombre d'actius que es mouen cap amunt o cap avall simultàniament serà més arriscada que una cartera en la qual alguns actius es mouen cap amunt quan altres es mouen cap avall.

<https://www.inbestme.com/blog/que-es-la-correlacion/>

Cupó: Pagament d'interès sobre un bo.

C. Hull, John: *Fundamentals of Futures and Options Markets*, 8th edition, Prentice Hall Publishing, 2014.

Data de venciment: Data en la que finalitza el període de vida d'un contracte. També s'anomena data d'exercici.

C. Hull, John: *Fundamentals of Futures and Options Markets*, 8th edition, Prentice Hall Publishing, 2014.

Delta: Taxa de canvi del preu d'un derivat financer respecte del preu de l'actiu subjacent.

C. Hull, John: *Fundamentals of Futures and Options Markets*, 8th edition, Prentice Hall Publishing, 2014.

Derivat financer: Actiu financer el valor del qual es deriva dels canvis d'un altre actiu, anomenat actiu subjacent. La finalitat de comprar un derivat financer pot ser especular amb el preu del subjacent, construir una cobertura de riscos o l'arbitratge.

Es poden classificar en funció de la seva regulació:

- Mercats organitzats: Mercats on els derivats estan controlats per una càmera de compensació. Els derivats d'aquest mercat s'anomenen derivats estandarditzats. Destaquen el mercat de futurs financers i el mercat d'opcions financeres.
- Mercats no organitzats (OTC, over-the-counter): Mercats sense regulació on els inversos acorden de forma bilateral les seves transaccions. Els derivats d'aquest mercat s'anomenen derivats no estandarditzats. Els principals tipus de derivats OTC són els CFDs, els swaps i els forwards.

<https://economipedia.com/definiciones/derivado-financiero.html>

<https://economipedia.com/definiciones/instrumento-financiero.html>

Deute: Obligació que té una persona física o jurídica de complir els seus compromisos de pagament, fruit de l'exercici de la seva activitat econòmica. L'emissió de deute té com a finalitat principal el finançament.

Existeixen dos tipus de deute diferenciats: el deute públic (emès pels governs) i el deute privat (emès per òrgans privats). Un tipus de deute és l'utilitzat com a actiu subjacent en productes derivats, com per exemple en els futurs.

<https://economipedia.com/definiciones/deuda.html>

Dividend: Pagament que realitza de manera periòdica una societat als propietaris de les seves accions. Representa la principal via de remuneració dels accionistes com a propietaris d'una empresa que reparteix dividends.

Els dividends formen part dels beneficis obtinguts d'una companyia i es reparteixen entre els seus accionistes de forma proporcional a la quantitat d'accions de la mateixa que aquests posseeixen.

C. Hull, John: *Fundamentals of Futures and Options Markets*, 8th edition, Prentice Hall Publishing, 2014.

<https://economipedia.com/definiciones/dividendo.html>

Especulador: Agent que opera en mercats borsaris comprant i venent títols amb la finalitat d'obtenir beneficis. En general, les seves operacions es basen en apostar que el preu d'un actiu determinat augmentarà o disminuirà. Opera a curt termini i acostuma a assumir riscos molt elevats.

C. Hull, John: *Fundamentals of Futures and Options Markets*, 8th edition, Prentice Hall Publishing, 2014.

<https://economipedia.com/definiciones/especulador.html>

Futur financier: Derivat financier que consisteix en un contracte en el qual s'acorda intercanviar un determinat actiu financier en una data futura i a un preu preestablerts. Ambdues parts tenen l'obligació de complir amb l'intercanvi. Les condicions d'aquests contractes solen ser estandarditzades.

<https://economipedia.com/definiciones/instrumento-financiero.html>

Instrument financier: Contracte entre dues parts que atorga un actiu financier al comprador de l'instrument i un passiu financier al venedor de l'instrument. L'objectiu del venedor és finançar-se i la finalitat del comprador és o bé cobrir riscos d'una inversió o bé obtenir una font de rendibilitat per a una inversió.

Existeixen dos grups principals d'instruments financers: els complexos i els no complexos. Els primers són els anomenats derivats financers i els segons són els valors de renda variable, com per exemple les accions, i els valors de renda fixa, com per exemple els bons.

<https://economipedia.com/definiciones/instrumento-financiero.html>

Lletra del Tresor: Títol de deute públic a curt termini emès pel Tresor Públic per tal de finançar l'Estat. S'emeten al descompte, és a dir, que el seu preu d'adquisició és inferior al seu valor nominal (valor de la Lletra). El rendiment per a l'inversor equival a la diferència entre el preu de compra de la lletra i l'import del reemborsament.

<https://www.bbva.com/es/instrumentos-financieros-todos/>

<https://economipedia.com/definiciones/letra-del-tesoro.html>

<https://www.tesoro.es/deuda-publica/los-valores-del-tesoro/letras-del-tesoro>

Món neutral al risc: Mercat en el qual se suposa que els inversionistes no exigeixen un rendiment addicional en mitjana pel fet de córrer riscos.

C. Hull, John: *Fundamentals of Futures and Options Markets*, 8th edition, Prentice Hall Publishing, 2014.

Moviment brownià (Procés de Wiener): Procés estocàstic a temps continu que simula el moviment de les partícules de pol·len en suspensió observat pel botànic Robert Brown l'any 1828. Norbert Wiener va ser qui, anys més tard, va establir un model matemàtic per al moviment brownià, motiu pel qual també és conegut pel nom de procés de Wiener. En matemàtica pura, ha donat lloc a l'estudi de martingales a temps continu. Aquest procés és el fonament a partir del qual es poden construir processos estocàstics més complexos i és el nucli de la majoria de models financers.

El moviment brownià es caracteritza per ser un procés estocàstic continu $(X_t)_{t \geq 0}$ que pren valors reals i té increments estacionaris i independents. És a dir,

- La variable X_t és continua respecte t .
- $\forall t, s \geq 0$, l'increment $X_{t+s} - X_t$ és independent dels valors passats X_r , on $r < t$.
- $\forall t, s \geq 0$ tals que $s \leq t$, els increments $X_t - X_s$ i $X_{t-s} - X_0$ tenen la mateixa llei de probabilitat.

A més, si $(X_t)_{t \geq 0}$ és un moviment brownià, $X_t - X_0 \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$, on μ i σ són nombres reals constants.

En particular, el procés de Wiener es diu que és estàndard si $X_0 = 0$, la mitjana de X_t és $E(X_t) = 0$ i $E(X_t^2) = t$. En aquest cas, la variància de X_t és $Var(X_t) = t$ i $X_t \sim N(0, t)$.

Lamberton, Damien; Lapeyre, Bernard: *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, 2nd edition, Chapman & Hall/CRC financial mathematics series, 2008.

Nualart, David: *Les matemàtiques dels mercats financers*, Revista Mètode, 2013.

Moviment brownià geomètric (GBM): Model que serveix per representar el preu de certs actius que fluctuen al llarg del temps en els mercats financers. Sota els supòsits del model de Black-Scholes, els preus dels actius segueixen un GBM.

Formalment, es diu que un procés estocàstic S_t segueix un GBM si aquest satisfà la següent equació en derivades parcials:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

on W_t és el moviment brownià o procés de Wiener i els paràmetres constants μ i σ s'anomenen deriva i volatilitat, respectivament.

Nualart, David: *Les matemàtiques dels mercats financers*, Revista Mètode, 2013.

Opció asiàtica: Opció financera en la qual el preu d'exercici es calcula fent la mitjana del preu del subjacent durant un període de temps determinat o bé fent la mitjana del preu del subjacent des de l'inici fins al venciment de l'opció.

Amb les opcions asiàtiques es redueixen les possibilitats de manipulació del preu subjacent en dates properes a la data de venciment. Aquestes opcions acostumen a ser més barates que les opcions europees tradicionals, ja que la mitjana de l'actiu subjacent és menys volàtil que el mateix actiu subjacent.

<https://www.ieb.es/diccionario-financiero-que-son-las-opciones-exoticas/>
https://www.asociacionmercadosfinancieros.com/producto_financiero/derivados-renta-fija/opciones-exoticas/

Opció barrera: Opció financera que permet al comprador comprar o vendre un actiu subjacent al preu d'exercici, però només si durant la vida de l'opció el preu de l'actiu subjacent assoleix (*in*) o no assoleix (*out*), respectivament, un determinat nivell anomenat barrera. En aquest cas, no només és rellevant el preu de l'actiu subjacent i l'strike, sinó que també ho és el valor de la barrera. Acostuma a tenir un preu inferior al preu d'una opció estàndard pel risc que suposa assolir o no la barrera.

<https://www.ieb.es/diccionario-financiero-que-son-las-opciones-exoticas/>

Opció exòtica: Opció financera les característiques de la qual difereixen de les opcions estàndard. Es caracteritza per negociar-se en mercats OTC i ser més complicada i difícil de valorar que una opció estàndard o *plain vanilla*. Les opcions exòtiques permeten als clients gestionar els riscos amb una major flexibilitat o minimitzar els costos de les opcions estàndard. Alguns exemples són les opcions asiàtiques, les opcions lookback o les opcions barrera.

<https://www.ieb.es/diccionario-financiero-que-son-las-opciones-exoticas/>

Opció financera: Derivat financer que consisteix en un contracte que proporciona el dret al comprador de l'opció de comprar o vendre un actiu determinat, anomenat actiu subjacent, a un preu determinat i en una data acordada prèviament.

El comprador d'una opció financera, en el moment de pagar la prima, està comprant el dret, és a dir, l'opció, que no l'obligació, d'executar la compra o venda establerta en el contracte i, al mateix temps, el venedor de l'opció financera, en el moment de rebre la prima, assumeix l'obligació de satisfer el dret del comprador de l'opció, en cas que l'exerceixi.

Si l'opció pot ser exercida en qualsevol moment entre el dia de la compra de l'opció i la data de venciment (inclosos), s'anomena opció americana. En canvi, si l'opció només pot ser exercida en la data de venciment, es tracta d'una opció europea. Existeixen dos tipus d'opcions financeres: les opcions estàndard o *plain vanilla* i les opcions exòtiques.

<https://economipedia.com/definiciones/opcion-financiera.html>
<https://www.rankia.mx/blog/analisis-ipsa/3850526-que-son-opciones-vanilla-ejemplos>

Opció lookback: Opció financera que permet al comprador comprar o vendre l'ac-

tiu subjacent al millor preu que ha cotitzat durant el període de vida de l'opció. Amb això s'aconsegueix que el comprador de l'opció es benefici de cotitzacions passades si són més favorables, fet que la fa més costosa que una opció estàndard.

<https://www.ieb.es/diccionario-financiero-que-son-las-opciones-exoticas/>

Opció *plain vanilla* o estàndard: Opció clàssica per excel·lència. Consisteix en un contracte que proporciona al comprador de l'opció el dret, però no la obligació, de comprar (opció *call*) o vendre (opció *put*) un determinat actiu, anomenat actiu subjacent, a un preu i en una data predeterminats.

Una opció *plain vanilla* es caracteritza pel fet que el seu perfil de beneficis no depèn dels preus que pugui tenir l'actiu subjacent durant la vida de l'opció. Així mateix, el preu d'exercici o strike es fixa en el moment de compra i venda de l'opció.

<https://www.rankia.mx/blog/analisis-ipsa/3850526-que-son-opciones-vanilla-ejemplos>

Palanquejament financer: Estratègia basada en utilitzar algun mecanisme (com a deute) per augmentar la quantitat de diners que podem destinar a una inversió i així tenir la possibilitat d'obtenir més beneficis (o més pèrdues). És la relació entre el capital propi i el realment utilitzat en una operació financera.

El principal mecanisme per generar palanquejament és el deute. El deute permet que invertim més diners dels que tenim gràcies al que hem demanat prestat. A canvi, com és lògic, hem de pagar uns interessos. També es pot fer palanquejament financer utilitzant altres instruments financers com les opcions o els futurs. Per exemple, amb les opcions financeres, donat que comprem un dret sobre un actiu subjacent, que generalment té un preu molt superior a la prima, es genera un efecte de palanquejament.

<https://economipedia.com/definiciones/apalancamiento-financiero.html>

Paritat *call-put*: Relació entre el preu d'una opció *call* i una opció *put* europees quan aquestes tenen el mateix preu d'exercici i la mateixa data de venciment.

C. Hull, John: *Fundamentals of Futures and Options Markets*, 8th edition, Prentice Hall Publishing, 2014.

Passiu financer: Obligació, deute o compromís de pagament en un termini exigible curt, mitjà o llarg determinat.

<https://economipedia.com/definiciones/pasivo-financiero.html>

Perfil de beneficis o *payoff* d'una opció: Valor d'una opció en la data de venciment. És, per tant, el pagament que rep el comprador d'una opció arribada la data de venciment. Per exemple, en el cas d'una opció de compra europea *plain vanilla*, el *payoff* és el màxim entre 0 i la diferència entre el preu de l'actiu subjacent i el preu d'exercici. En canvi, en el cas d'una opció de venda europea *plain vanilla*, el *payoff* és el màxim entre 0 i la diferència entre el preu d'exercici i el preu de l'actiu subjacent.

<https://www.rankia.com/blog/opciones-desde-cero/3077796-opciones-relacion-precio-subyacente-ejercicio>

Posició curta: Posició que implica la venda d'un actiu financer.

C. Hull, John: *Fundamentals of Futures and Options Markets*, 8th edition, Prentice Hall Publishing, 2014.

Posició descoberta: Posició curta en una opció de compra que no es combina amb una posició llarga en l'actiu subjacent. És a dir, posició que implica vendre l'actiu subjacent sense tenir-lo en propietat.

C. Hull, John: *Fundamentals of Futures and Options Markets*, 8th edition, Prentice Hall Publishing, 2014.

Posició llarga: Posició que implica la compra d'un actiu financer.

C. Hull, John: *Fundamentals of Futures and Options Markets*, 8th edition, Prentice Hall Publishing, 2014.

Prima: Preu d'una opció financera.

C. Hull, John: *Fundamentals of Futures and Options Markets*, 8th edition, Prentice Hall Publishing, 2014.

Rendibilitat: Rendiment produït per una inversió en un determinat període de temps. Es mesura com el ràtio de guanys o pèrdues obtingudes sobre la quantitat invertida i s'acostuma a expressar en forma de percentatge.

Tota inversió implica un risc, ja que existeix la possibilitat que es produeixin pèrdues. Habitualment, quant major risc té un actiu, major és la seva rendibilitat esperada.

<https://speedqueeninvestor.com/es/rentabilidad-retorno-de-inversion-y-rendimiento-diferencias-calculos-y-explicaciones/>
<https://www.andbank.es/observatoriodelinversor/que-es-la-rentabilidad/>

Rendiment: Benefici, guany o retorn en unitats monetàries que genera una determinada inversió. El rendiment s'utilitza per determinar la rentabilitat que proporciona una inversió.

C. Hull, John: *Fundamentals of Futures and Options Markets*, 8th edition, Prentice Hall Publishing, 2014.

<https://speedqueeninvestor.com/es/rentabilidad-retorno-de-inversion-y-rendimiento-diferencias-calculos-y-explicaciones/>

Taxa lliure de risc: Taxa d'interès que es pot guanyar sense córrer cap tipus de risc. S'utilitza per referir-nos a la rendibilitat que s'obté al invertir en un actiu lliure de risc.

C. Hull, John: *Fundamentals of Futures and Options Markets*, 8th edition, Prentice

Hall Publishing, 2014. <https://www.raisin.es/educacion-financiera/que-es-la-tasa-libre-de-riesgo-y-como-se-calcula/>

Títol financer: Document que genera un dret privat patrimonial i que, per tant, suposa la propietat d'un actiu financer. Un exemple seria una acció d'una societat.

<https://economipedia.com/definiciones/titulo-financiero.html>

Tresor Públic: Organisme públic encarregat de gestionar el finançament d'un Estat. Les seves funcions depenen del país en qüestió, però la funció comú és la d'aconseguir finançament per l'Estat mitjançant l'emissió del deute públic. Els valors de deute emesos pel Tresor Públic són actius de renda fixa i es divideixen segons el termini de venciment que tenen en: les Lletres del Tresor (curt termini), els bons (mig termini) i les obligacions (llarg termini).

<https://economipedia.com/definiciones/letra-del-tesoro.html>

Valoració d'opcions financeres: Estudi financer que busca trobar el valor o preu actual de les diferents opcions financeres del mercat. El valor o preu d'una opció és la prima que haurà de pagar tot inversor que vulgui comprar-la a temps present i que, simultàniament, rebrà el venedor d'aquesta opció.

C. Hull, John: *Fundamentals of Futures and Options Markets*, 8th edition, Prentice Hall Publishing, 2014.

<https://economipedia.com/definiciones/teoria-valoracion-opciones.html>

Valoració neutral al risc: Valoració d'un derivat financer, com per exemple d'una opció financera, suposant que estem en un món neutral al risc.

C. Hull, John: *Fundamentals of Futures and Options Markets*, 8th edition, Prentice Hall Publishing, 2014.

Valor o preu d'exercici (strike): Preu acordat al qual es pot comprar (en el cas d'una opció *call*) o vendre (en el cas d'una opció *put*) un actiu subjacent.

<https://www.bbva.com/es/que-son-las-opciones-financieras/>

Volatilitat: Mesura de la variabilitat de les trajectòries o fluctuacions dels preus d'un actiu financer en el mercat. Si el preu d'un actiu varia molt i molt ràpid es diu que és un actiu molt volàtil i, en cas contrari, es diu que és un actiu poc volàtil. En molts casos s'utilitza la desviació típica com a mesura de la volatilitat.

<https://economipedia.com/definiciones/volatilidad.html>

B Resolució dels problemes de valoració i cobertura d'opcions en C

```
1 #include <stdio.h>
2 #include <stdlib.h>
3 #include <math.h>
4 #include <time.h>
5
6 void CrankNicolsonPlain(int, double, double, double, double, double, double, double, double *, double *, double *,
7 double *, double *, double *, double *, double *, double *, double *);
8 void CrankNicolsonBarrera(int, double, double, double, double, double, double, double, double, double *, double *,
9 double *, double *, double *, double *, double *, double *, double *);
10 void CrankNicolsonLookback(int, double, double, double, double, double, double, double *, double *, double *,
11 double *, double *, double *, double *, double *, double *, double *);
12 void CrankNicolsonAsian(int, double, double, double, double, double, double, double *, double *, double *, double
13 *, double *, double *, double *, double *, double *, double *, double *);
14 void descomposicioLU(int, double *, double *, double *, double *, double *, double *);
15
16 void sol_sistemaLU(int, double *, double *, double *, double *, double *);
17
18 void cobertura(int, double, double *, double *);
19
20 void coberturaasian(int, double, double *, double *);
21
22
23 int main(void){
24     clock_t time;
25     /*Nombre de passos temporals (N) i espacials (J)*/
26     int N, J;
27
28     printf("Escriu enters N>=100 i J>=1000\n");
29     scanf("%d %d", &N, &J);
30     printf("\n");
31
32     /*Preu màxim (Smax) i temps de vida de l'opció en anys (T)*/
33     double Smax=500., T=1.;
34
35     /*Pas temporal (k) i espacial (h), volatilitat (sigma), taxa lliure de risc (r) i strike (K)*/
36     double k=T/N, h=Smax/J, sigma=0.2, r=0.05, K=100.;
37
38     int n,j;
39     double *t, *S, *v, *v1;
40     double *alpha, *beta, *gamma, *delta, *l, *d, *u;
41
42     /*Guardem memòria dels vectors*/
43     t = (double *) calloc(N+1, sizeof(double));
44     S = (double *) calloc(J+1, sizeof(double));
45     v = (double *) calloc(J+1, sizeof(double));
46     v1 = (double *) calloc(J+1, sizeof(double));
47     alpha = (double *) calloc(J+1, sizeof(double));
48     gamma = (double *) calloc(J+1, sizeof(double));
49     beta = (double *) calloc(J+1, sizeof(double));
50     delta = (double *) calloc(J+1, sizeof(double));
51     l = (double *) calloc(J+1, sizeof(double));
52     d = (double *) calloc(J+1, sizeof(double));
53     u = (double *) calloc(J+1, sizeof(double));
54     if( v == NULL || v1 == NULL || alpha == NULL || gamma == NULL || beta == NULL || l == NULL || d ==
55         NULL || u == NULL){
56         printf("No hi ha suficient memòria\n");
57         exit (1);
58     }
59     /*Omplim la xarxa discreta de punts*/
60     for(n=0; n<N+1; n++){
61         t[n] = n*k;
62     }
63     for(j=0; j<J+1; j++){
64         S[j] = j*h;
65     }
66
67     /*PLAIN VANILLA CALL*/
68
69     printf("OPCIONES PLAIN VANILLA CALL\n\n");
70
71     /*Omplim el vector v_N, és a dir, imposem la condició final*/
72     for(j=1; j<J; j++){
73         if(S[j]-K>0){
74             v[j] = S[j]-K;
75         }else{
76             v[j]=0;
77         }
78     }
79     v[0] = 0;
80
81     /*Definim i obrim fitxer de sortida*/
82     FILE *out2;
83     out2 = fopen("valorsplain.out", "w");
84 }
```

```

85     if (out2 == NULL){
86         printf("Error al obrir el fitxer de sortida\n");
87         exit (-1);
88     }
89
90     /*Calculem v_0 utilitzant el mètode de Crank-Nicolson*/
91     time = clock();
92     CrankNicolsonPlain(J, N, K, h, k, sigma, r, v, v1, alpha, beta, gamma, l, d, u, delta);
93     time = clock()-time; /* Inclou càlculs de cobertura */
94     double t_out = ((double) time)/CLOCKS_PER_SEC;
95
96     /*Imprimim el vector solució: v=v_0*/
97     fprintf(out2, "SOLUCIÓ (t=0): S_j \t C(S_j,t_0)\n\n");
98     for(j=0; j<J+1; j++){
99         fprintf(out2, "%16.8e \t %16.8e \n", S[j], v[j]);
100     }
101     printf("\nTemps d'execució: %16.8e\n\n", t_out);
102
103     /*BARRERA DOWN-AND-OUT CALL*/
104
105     printf("OPCIONES BARRERA DOWN-AND-OUT CALL\n\n");
106
107     /*Valor frontera*/
108     double X=90.;
109
110     /*Omplim el vector v_N, és a dir, imposem la condició final*/
111     for(j=1; j<J; j++){
112         if(S[j]-X>0){
113             v[j] = S[j]-K;
114         }else{
115             v[j]=0;
116         }
117     }
118     v[0] = 0;
119
120     /*Definim i obrim el fitxer de sortida*/
121     FILE *out3;
122     out3 = fopen("valorsbarrera.out", "w");
123     if (out3 == NULL){
124         printf("Error al obrir el fitxer de sortida\n");
125         exit (-1);
126     }
127
128     /*Calculem v_0 utilitzant el mètode de Crank-Nicolson*/
129     time = clock();
130     CrankNicolsonBarrera(J, N, K, X, h, k, sigma, r, v, v1, alpha, beta, gamma, l, d, u, delta);
131     time = clock()-time; /* Inclou càlculs de cobertura */
132     t_out = ((double) time)/CLOCKS_PER_SEC;
133
134     /*Imprimim el vector solució: v=v_0*/
135     fprintf(out3, "SOLUCIÓ (t=0): S_j \t C(S_j,t_0)\n\n");
136     for(j=0; j<J+1; j++){
137         fprintf(out3, "%16.8e \t %16.8e \n", S[j], v[j]);
138     }
139     printf("\nTemps d'execució: %16.8e\n\n", t_out);
140
141
142     /*LOOKBACK STRIKE CALL*/
143
144     /*
145      Observació: Prenem el mínim concret m_j = S_min = S[1] constant.
146      x_j = S_j/m_j. x[0]=1, x[1]=1,..., x[j]=S[j]/S[1],..., x[J]=S[J]/S[1].
147      */
148
149     printf("OPCIONES LOOKBACK STRIKE CALL\n\n");
150
151     /*Declarem el vector v0_n, el qual aproxima W(x_j,t_n)*/
152     double *v0;
153     v0 = (double *) calloc(J+1, sizeof(double));
154
155     /*Declarem x_j = S_j/m_j*/
156     double *x;
157     x = (double *) calloc(J+1, sizeof(double));
158
159     /*Omplim el vector x_j*/
160     x[0]=1.; x[1]=1.;
161     for(j=2; j<J+1; j++){
162         x[j] = S[j]/S[1];
163     }
164
165     /*Omplim el vector v0_N, és a dir, imposem la condició final*/
166     for(j=1; j<J; j++){
167         if(x[j]-1>0){
168             v0[j] = x[j]-1;
169         }else{
170             v0[j]=0;
171         }
172     }
173     v0[0] = v0[1]/((1-1/J)+1);
174
175     /*Definim i obrim fitxer de sortida*/
176     FILE *out4;
177     out4 = fopen("valorslookback.out", "w");
178     if (out4 == NULL){
179

```

```

180     printf("Error al obrir el fixer de sortida\n");
181     exit (-1);
182 }
183
184 /*Calculem v_0 utilitzant el mètode de Crank-Nicolson*/
185 time = clock();
186 CrankNicolsonLookback(J, N, h, k, sigma, r, v, v0, v1, x, alpha, beta, gamma, l, d, u, delta);
187 time = clock()-time; /*Inclou càlculs de cobertura*/
188 t_out = ((double) time)/CLOCKS_PER_SEC;
189
190 /*Imprimim el vector solució: v=v_0*/
191 fprintf(out4, "SOLUCIÓ (t=0):\n\n");
192 fprintf(out4, "Observació: Prenem m_j = S_1 = %16.8e sempre.\n\n", S[1]);
193 fprintf(out4, "S_j \t\t\t\t\t m_j \t\t\t\t\t C(S_j, m_j, t_0)\n\n");
194 for(j=0; j<J+1; j++){
195     fprintf(out4, "%16.8e \t\t %16.8e \t\t %16.8e \n", S[j], S[j]/x[j], v[j]);
196 }
197 printf("\nTemps d'execució: %16.8e\n\n", t_out);
198
199
200 /*ASIÀTIQUES ARITHMETIC-AVERAGE STRIKE CALL*/
201
202 /*
203     v0_n és el vector que aproxima H(R_j, t_n)
204     x és el vector R_j = I_j / S_j, on I_j = mitjana dels preus a t_n
205     Observació: Prenem una mitjana I_j concreta.
206 */
207
208 printf("OPCIONES ASIÀTIQUES ARITHMETIC-AVERAGE STRIKE CALL\n\n");
209
210 /* Omplim el vector x_j = I_j / S_j */
211 int i = J-50;
212 x[0]=0.; /*zero*/
213 for(j=1; j<50; j++){
214     x[j] = (S[J-j]/i)/S[J-j]; /*aprox 0*/
215     i--;
216 }
217 double aux = 0.95;
218 for(j=50; j<J/2; j++){
219     x[j] = (S[J-j]*aux)/S[J-j]; /*aprox 1, inferior*/
220 }
221 aux = 1.05;
222 for(j=J/2; j<J-50; j++){
223     x[j] = (S[J-j]*aux)/S[J-j]; /*aprox 1, superior*/
224 }
225 i = 2;
226 for(j=J-50; j<J; j++){
227     x[j] = (S[J-j]*i)/S[J-j]; /*aprox infinit*/
228     i++;
229 }
230 x[J]=Smax; /*Aproximadament infinit (Smax)*/
231
232 /* Omplim el vector v0_N, és a dir, imposem la condició final */
233 for(j=0; j<J; j++){
234     if(1 > x[j]/T ){
235         v0[j] = 1-(x[j]/T);
236     }else{
237         v0[j]=0;
238     }
239 }
240 v0[J] = 0;
241
242 /*Definim i obrim el fitxer de sortida*/
243 FILE *out5;
244 out5 = fopen("valorsasiàtica.out", "w");
245 if (out5 == NULL){
246     printf("Error al obrir el fixer de sortida\n");
247     exit (-1);
248 }
249
250 /*Calculem v_0 utilitzant el mètode de Crank-Nicolson*/
251 time = clock();
252 CrankNicolsonAsian(J, N, h, k, sigma, r, v, v0, v1, x, alpha, beta, gamma, l, d, u, delta);
253 time = clock()-time; /*Inclou càlculs de cobertura*/
254 t_out = ((double) time)/CLOCKS_PER_SEC;
255
256 /*Imprimim el vector solució: v=v_0*/
257 fprintf(out5, "SOLUCIÓ (t=0):\n\n");
258 fprintf(out5, "Observació: Prenem I_j molt propera a S quan S pren valors intermitjos i I_j llunyana a
259     S quan S propera a 0 o a infinit\n\n");
260 fprintf(out5, "S_j \t\t\t\t\t I_j \t\t\t\t\t C(S_j, m_j, t_0)\n\n");
261 for(j=0; j<J+1; j++){
262     fprintf(out5, "%16.8e \t\t %16.8e \t\t %16.8e \n", S[j], S[j]*x[j], v[j]);
263 }
264 printf("\nTemps d'execució: %16.8e\n\n", t_out);
265
266 /*FINAL DEL MAIN*/
267
268 /*Alliberem memòria dels vectors*/
269 free(t);
270 free(S);
271 free(v);
272 free(v1);
273 free(v0);
274 free(x);

```



```

274 free(l);
275 free(d);
276 free(u);
277 free(alpha);
278 free(beta);
279 free(gamma);
280 free(delta);
281
282 /*Tanquem fitxers de sortida*/
283 fclose(out2);
284 fclose(out3);
285 fclose(out4);
286 fclose(out5);
287
288 return 0;
289 }
290
291 /*MÉTODO DE CRANK-NICOLSON PER OPCIONS PLAIN VANILLA CALL*/
292
293 void CrankNicolsonPlain(int J, double N, double K, double h, double k, double sigma, double r, double *v,
double *v1, double *alpha, double *beta, double *gamma, double *l, double *d, double *u, double *
delta){
294 int j, n;
295 double *f;
296
297 f = (double *) calloc(J+1, sizeof(double));
298
299 FILE *outcobi;
300 outcobi = fopen("coberturaplain.out", "w");
301 if (outcobi == NULL){
302 printf("Error al obrir el fixer de sortida\n");
303 exit (-1);
304 }
305
306 /*v=v_n conegut, v1=v_{n-1} desconegut*/
307 for(n=N-1; n>=0; n--){
308
309 /*Omplim vectors alpha, beta, gamma, f*/
310 for(j=1; j<=J-1; j++){
311 alpha[j] = (1./4)*k*(pow(sigma,2)*pow(j,2) - r*j);
312 gamma[j] = (1./4)*k*(pow(sigma,2)*pow(j,2) + r*j);
313 beta[j] = -(1./2)*k*(pow(sigma,2)*pow(j,2) + r);
314 }
315 for(j=1; j<=J-1; j++){
316 f[j] = alpha[j]*v[j-1] + (1+beta[j])*v[j] + gamma[j]*v[j+1];
317 }
318
319 /*Redefinim alpha, beta, gamma com les diagonals d'una matriu A*/
320 for(j=1; j<=J-1; j++){
321 alpha[j] = -alpha[j];
322 gamma[j] = -gamma[j];
323 beta[j] = 1-beta[j];
324 }
325
326 /*Retoquem els valors extrems del vector f*/
327 f[1] = f[1]-alpha[1]*v[0];
328 f[J-1] = f[J-1]-gamma[J-1]*v[J];
329
330 /*Aplicuem descomposició LU a la matriu A*/
331 descomposicioLU(J, alpha, beta, gamma, l, d, u);
332
333 /*Resolem el sistema L*U*v1=f*/
334 sol_sistemaLU(J, l, d, u, v1, f);
335
336 for(j=1; j<J; j++){
337 v[j]=v1[j];
338 }
339 v[J] = J*h-K*exp(-r*(k*(N-n)));
340
341 /*Fem la cobertura delta-neutral a cada pas del temps*/
342 cobertura(J,h,v,delta);
343
344 /*Imprimim cobertura a temps t_n pensant en la situació a temps t_{n+1}*/
345 fprintf(outcobi, "Cobertura a temps: %16.8e\n\n", n*k);
346 for(j=0; j<J+1; j=j+10){
347 fprintf(outcobi, "j=%d \t S=%16.8e \t Delta=%16.8e\n", j, j*h, delta[j]);
348 }
349 fprintf(outcobi, "\n");
350
351 }
352
353 /*Imprimim els valors propers a K per comparar*/
354 printf("n=0:\n");
355 for(j=160; j<=260; j=j+10){
356 printf("j=%d, v_j=%10.8le\t", j, v[j]);
357 }
358 printf("\n");
359
360 free(f);
361 fclose(outcobi);
362
363 return;
364 }
365
366 /*MÉTODO DE CRANK-NICOLSON PER OPCIONS BARRERA DOWN-AND-OUT CALL*/

```

```

367
368 void CrankNicolsonBarrera(int J, double N, double K, double X, double h, double k, double sigma, double r,
    double *v, double *v1, double *alpha, double *beta, double *gamma, double *l, double *d, double *u,
    double *delta){
369     int j, n;
370     double *f;
371
372     f = (double *) calloc(J+1, sizeof(double));
373
374     FILE *outcob2;
375     outcob2 = fopen("coberturabarrera.out", "w");
376     if (outcob2 == NULL){
377         printf("Error al obrir el fixer de sortida\n");
378         exit (-1);
379     }
380
381     /*v=v_n conegut, v1=v_{n-1} desconegut*/
382     for(n=N-1; n>=0; n--){
383
384         /*Omplim vectors alpha, beta, gamma, f*/
385         for(j=1; j<=J-1; j++){
386             alpha[j] = (1./4)*k*(pow(sigma,2)*pow(j,2) - r*j);
387             gamma[j] = (1./4)*k*(pow(sigma,2)*pow(j,2) + r*j);
388             beta[j] = -(1./2)*k*(pow(sigma,2)*pow(j,2) + r);
389         }
390         for(j=1; j<=J-1; j++){
391             f[j] = alpha[j]*v[j-1] + (1+beta[j])*v[j] + gamma[j]*v[j+1];
392         }
393
394         /*Redefinim alpha, beta, gamma com les diagonals d'una matriu A*/
395         for(j=1; j<=J-1; j++){
396             alpha[j] = -alpha[j];
397             gamma[j] = -gamma[j];
398             beta[j] = 1-beta[j];
399         }
400
401         /*Retoquem els valors extrems del vector f*/
402         f[1] = f[1]-alpha[1]*v[0];
403         f[J-1] = f[J-1]-gamma[J-1]*v[J];
404
405         /*Aplicuem la descomposició LU a la matriu A*/
406         descomposicioLU(J, alpha, beta, gamma, l, d, u);
407
408         /*Resolem el sistema L*U*v1=f*/
409         sol_sistemaLU(J, l, d, u, v1, f);
410
411         for(j=1; j<J; j++){
412             if(j*h>X){
413                 v[j]=v1[j];
414             }else{
415                 v[j]=0;
416             }
417         }
418         v[J] = J*h-K*exp(-r*(k*(N-n)));
419
420         /*Fem la cobertura delta-neutral a cada pas del temps*/
421         cobertura(J,h,v,delta);
422
423         /*Imprimim cobertura a temps n (pensant en la situació a temps n+1)*/
424         fprintf(outcob2, "Cobertura a temps: %16.8e\n\n", n*k);
425         for(j=0; j<J+1; j=j+10){
426             if(j*h>X){
427                 fprintf(outcob2, "j=%d \t S=%16.8e \t Delta=%16.8e\n", j, j*h, delta[j]);
428             }
429         }
430         fprintf(outcob2, "\n");
431     }
432 }
433
434 /*Imprimim els valors propers a K per comparar*/
435 printf("n=0:\n");
436 for(j=160; j<=260; j=j+10){
437     printf("j=%d, v_j=%10.81e\t", j, v[j]);
438 }
439 printf("\n");
440
441 free(f);
442 fclose(outcob2);
443
444 return;
445 }
446
447 /*MÉTODO DE CRANK-NICOLSON PER OPCIONS LOOKBACK STRIKE CALL*/
448
449 /*
450     v0 vector conegut que aproxima W_n,
451     v1 vector desconegut que aproxima W_{n-1},
452     Finalment calculem v = min*v0, que aproxima C_n.
453 */
454
455 void CrankNicolsonLookback(int J, double N, double h, double k, double sigma, double r, double *v, double
    *v0, double *v1, double *x, double *alpha, double *beta, double *gamma, double *l, double *d, double
    *u, double *delta){
456     int j, n;
457     double *f;

```

```

458
459     f = (double *) calloc(J+1, sizeof(double));
460
461     FILE *outcob3;
462     outcob3 = fopen("coberturalllookback.out", "w");
463     if (outcob3 == NULL){
464         printf("Error al obrir el fixer de sortida\n");
465         exit (-1);
466     }
467
468     /*Definim una nova h de manera que sigui adequada a la xarxa (x_j,t_n) del main*/
469     double h0 = 1-(1/J);
470
471     /*v0=v0_n conegut, v1=v_{n-1} desconegut*/
472     for(n=N-1; n>=0; n--){
473
474         /*Omplim vectors alpha, beta, gamma, f*/
475         for(j=1; j<=J-1; j++){
476             alpha[j] = (1./4)*k*((pow(sigma,2)*pow(x[j],2)/pow(h0,2)) - r*(x[j]/h0));
477             gamma[j] = (1./4)*k*((pow(sigma,2)*pow(j,2)/pow(h0,2)) + r*(x[j]/h0));
478             beta[j] = -(1./2)*k*((pow(sigma,2)*pow(j,2)/pow(h0,2)) + r);
479         }
480         for(j=1; j<=J-1; j++){
481             f[j] = alpha[j]*v0[j-1] + (1+beta[j])*v0[j] + gamma[j]*v0[j+1];
482         }
483
484         /*Redefinim alpha, beta, gamma com les diagonals d'una matriu A*/
485         for(j=1; j<=J-1; j++){
486             alpha[j] = -alpha[j];
487             gamma[j] = -gamma[j];
488             beta[j] = 1-beta[j];
489         }
490
491         /*Retoquem els valors extrems del vector f*/
492         f[1] = f[1]-alpha[1]*v[0];
493         f[J-1] = f[J-1]-gamma[J-1]*v0[J];
494
495         /*Aplicuem descomposició LU a la matriu A*/
496         descomposicioLU(J, alpha, beta, gamma, 1, d, u);
497
498         /*Resolem el sistema L*U*v1=f*/
499         sol_sistemaLU(J, 1, d, u, v1, f);
500
501         /*condició frontera quan j=0*/
502         v1[0] = v1[1]/(h0+1);
503
504         /*condició frontera quan j=J*/
505         v1[J] = x[J]-exp(-r*(k*(N-n)));
506
507         for(j=0; j<J; j++){
508             v0[j] = v1[j];
509             v[j] = ((j*h)/x[j])*v0[j];
510         }
511         /* v0 = v1 aproxima W(x_j,t_n) */
512         /* v aproxima C(S_j,m_j,t_n) */
513
514         /*Fem la cobertura delta-neutral a cada pas del temps*/
515         cobertura(J,h,v,delta);
516
517         /*Imprimim cobertura a temps n (pensant en la situació a temps n+1)*/
518         fprintf(outcob3, "Cobertura a temps: %16.8e\n\n", n*k);
519         for(j=0; j<J+1; j=j+10){
520             fprintf(outcob3, "j=%d \t Smin=%16.8e \t S=%16.8e \t Delta=%16.8e\n", j, ((j*h)/x[j]), (j*h),
521                 delta[j]);
522         }
523         fprintf(outcob3, "\n");
524     }
525
526     /*Imprimim els valors a comparar*/
527     printf("n=0:\n");
528     for(j=160; j<=260; j=j+10){
529         printf("j=%d, v_j=%10.8le\t", j, v[j]);
530     }
531     printf("\n");
532
533     free(f);
534     fclose(outcob3);
535
536     return;
537 }
538
539 /*MÉTODO DE CRANK-NICOLSON PER OPCIONS ASIÀTIQUES ARITHMETIC-AVERAGE STRIKE CALL*/
540
541 /*
542     v0 vector conegut que aproxima H_n,
543     v1 vector desconegut que aproxima H_{n-1},
544     Finalment calculem v_{n-1} = S_j*v1 que aproxima C_{n-1}=S*H_{n-1}.
545     Observació: Al main considerarem I_j d'una forma concreta.
546 */
547
548 void CrankNicolsonAsian(int J, double N, double h, double k, double sigma, double r, double *v, double *v0,
549     double *v1, double *x, double *alpha, double *beta, double *gamma, double *l, double *d, double *u,
550     double *delta){
551     int j, n;

```

```

550 double *f;
551
552 f = (double *) calloc(J+1, sizeof(double));
553
554 FILE *outcob4;
555 outcob4 = fopen("coberturaasiatica.out", "w");
556 if (outcob4 == NULL){
557     printf("Error al obrir el fixer de sortida\n");
558     exit (-1);
559 }
560
561 for(n=N-1; n>=0; n--){
562     /*Omplim vectors alpha, beta, gamma, f*/
563     for(j=1; j<=J-1; j++){
564         alpha[j] = (1./4)*k*(pow(sigma,2)*pow(j,2) - (1-r*j));
565         gamma[j] = (1./4)*k*(pow(sigma,2)*pow(j,2) + (1-r*j));
566         beta[j] = -(1./2)*k*pow(sigma,2)*pow(j,2);
567     }
568     for(j=1; j<=J-1; j++){
569         f[j] = alpha[j]*v0[j-1] + (1+beta[j])*v0[j] + gamma[j]*v0[j+1];
570     }
571
572     /*Redefinim alpha, beta, gamma com les diagonals d'una matriu A*/
573     for(j=1; j<=J-1; j++){
574         alpha[j] = -alpha[j];
575         gamma[j] = -gamma[j];
576         beta[j] = 1-beta[j];
577     }
578
579     /*Retoquem els valors extrems del vector f*/
580     f[1] = f[1]-alpha[1]*v0[0];
581     f[J-1] = f[J-1]-gamma[J-1]*v0[J];
582
583     /*Apliquem descomposició LU a la matriu A*/
584     descomposicioLU(J, alpha, beta, gamma, 1, d, u);
585
586     /*Resolem el sistema L*U*v1=f*/
587     sol_sistemaLU(J, 1, d, u, v1, f);
588
589     /*condició frontera quan j=0*/
590     v1[0] = (h*v0[0]+k*v1[1])/(h+k);
591
592     for(j=0; j<J; j++){
593         v0[j] = v1[j];
594         v[j] = (j*h)*v0[j];
595     }
596     /* v0 = v1 aproxima H(x_j, t_n) */
597     /* v aproxima C(S_j, I_j, t_n) */
598
599     /*Fem la cobertura delta-neutral a cada pas del temps*/
600     coberturaasian(J,h,v,delta);
601
602     /*Imprimim cobertura a temps n (pensant en la situació a temps n+1)*/
603     fprintf(outcob4, "Cobertura a temps: %16.8e\n\n", n*k);
604     for(j=0; j<J+1; j=j+10){
605         fprintf(outcob4, "j=%d \t I=%16.8e \t S=%16.8e \t Delta=%16.8e\n", j, j*h*x[j], j*h, delta[j]);
606     }
607     fprintf(outcob4, "\n");
608 }
609
610 /*Imprimim els valors a comparar*/
611 printf("n=0:\n");
612 for(j=160; j<=260; j=j+10){
613     printf("j=%d, v_j=%10.8le\t", j, v[j]);
614 }
615 printf("\n");
616
617 free(f);
618 fclose(outcob4);
619
620 return;
621 }
622
623
624 /*DESCOMPOSICIÓ LU PER MATRIUS TRIDIAGONALS*/
625 void descomposicioLU(int J, double *a, double *b, double *c, double *l, double *d, double *u){
626     int j;
627
628     d[1]=b[1];
629     u[1]=c[1];
630     for(j=2; j<=J-2; j++){
631         l[j] = a[j]/d[j-1];
632         u[j] = c[j];
633         d[j] = b[j]-l[j]*u[j-1];
634     }
635     l[J-1] = a[J-1]/d[J-2];
636     d[J-1] = b[J-1]-l[J-1]*u[J-2];
637
638     return;
639 }
640
641 /*RESOLUCIÓ SISTEMA LU=f*/
642 void sol_sistemaLU(int J, double *l, double *d, double *u, double *v1, double *f){
643     int j;

```

```

644     double *y;
645
646     y = (double *) calloc(J+1, sizeof(double));
647     if (y == NULL){
648         printf("No hi ha suficient memòria\n");
649         exit (1);
650     }
651
652     /*Resolem Ly=f*/
653     y[1] = f[1];
654     for(j=2; j<=J-1; j++){
655         y[j] = f[j] - l[j]*y[j-1];
656     }
657
658     /*Resolem Ux=y, on x=v1=v_{n-1}*/
659     v1[J-1] = y[J-1]/d[J-1];
660     for(j=J-2; j>=1; j--){
661         v1[j] = (y[j]-u[j]*v1[j+1])/d[j];
662     }
663
664     return;
665 }
666
667 /*COBERTURA DELTA-NEUTRAL*/
668 void cobertura(int J, double h, double *v, double *delta){
669     int j;
670
671     delta[0] = (v[1]-v[0])/h;
672     for(j=1; j<J; j++){
673         delta[j] = (v[j+1]-v[j-1])/(2*h);
674     }
675     delta[J] = (v[J]-v[J-1])/h;
676
677     return;
678 }
679
680 /*COBERTURA DELTA-NEUTRAL ASIÀTIQUES*/
681 void coberturaasian(int J, double h, double *v, double *delta){
682     int j;
683
684     delta[0] = (v[1]-v[0])/h;
685     for(j=1; j<J; j++){
686         delta[j] = (v[j+1]-v[j-1])/(2*h);
687     }
688     delta[J] = (v[J]-v[J-1])/h;
689
690     return;
691 }

```

Referències

- [1] Almira, J.M. *Matemáticas para la recuperación de señales*. [LAFA. Laboratorio de Analisis de Fourier Aplicado. Transformada de Fourier] Grupo Editorial Universitario, 2005. [Consulta: 10 de maig del 2021]. Disponible a <http://www4.ujaen.es/~jmalmira/transformada_fourier_almira.pdf>
- [2] Black, Fischer; Scholes, Myron. *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. A: *The Journal of Political Economy*. Chicago, USA: The University of Chicago Press, 1973. Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.
- [3] Burden, Richard L.; Faires, Douglas J.; Burden, Annette M. *Numerical analysis*. 10th edition. Boston, USA: Cengage Learning, 2016. ISBN 978-130-525-366-7.
- [4] Carrier, George F.; Pearson, Carl E. *Partial Differential Equations, Theory and Technique*. 1st Edition. New York, USA: Academic Press, 1976. ISBN 9781483259161.
- [5] Conze, Antoine. *Path Dependent Options: The Case of Lookback Options*. [Rekurs electrònic]. The Journal Of Finance. JSTOR, 1991. Pages 1893-1907. [consulta: 1 de juny del 2021]. Disponible a <<https://doi.org/10.2307/2328577>>
- [6] Duana, D; Millán, César G. *Model Black-Scholes-Merton, para la toma de decisiones financieras*. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México. [Consultat: 25 de maig de 2021]. Disponible a <https://www.uaeh.edu.mx/investigacion/icea/LI_EcoReg/Danae_Duana/modelo.pdf>
- [7] Duffy, Daniel J. *Finite difference methods in financial engineering: A partial differential equation approach*. Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd., 2006. ISBN 0-470-85882-6.
- [8] Fontanals, Hortensia; Lacayo, Ramon. *Alternative Solutions of the Black-Scholes Equation*. 2006. [Consulta: 17 de maig del 2021]. Disponible a <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0893965905002478>>
- [9] Hull, John C. *Fundamentals of futures and options markets*. 8th edition. Pearson Education, Inc., publishing as Prentice Hall, 2013. ISBN 978-0132993340.
- [10] Investing [en línia]. *United States Stocks*. [Consulta: 1 de juny del 2021]. Disponible a <<https://www.investing.com/equities/united-states>>
- [11] Ivrii, Victor. *Partial Differential Equations*. Department of Mathematics, University of Toronto. 2017. [Consulta: 20 d'abril del 2021]. Disponible a <<http://www.math.toronto.edu/ivrii/PDE-textbook/PDE-textbook.pdf>>

- [12] Lamberton, Damien; Lapeyre, Bernard. *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*. 2nd edition. Boca Raton, FL, USA: Chapman & Hall/CRC financial mathematics series, 2008. ISBN 978-1-58488-626-6.
- [13] Merton, Robert C. *Theory of Rational Option Pricing*. A: *Bell Journal of Economics and Management Science*. USA: RAND Corporation, 1973, Vol. 4, No 1, pp. 141-183.
- [14] Neftci, Salith N. *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*. 2nd edition. San Diego, USA: Academic Press, An Imprint of Elsevier, 2000. ISBN 0-12-515392-9.
- [15] Nualart, David. *Les matemàtiques dels mercats financers*. A: *Mètode* [en línia]. Espanya: Universitat de València, 2014. Editorial número 24. [consulta: 10 de març del 2021]. Disponible a <<https://metode.cat/revistes-metode/monografics/les-matematiques-dels-mercats-financers.html>>
- [16] Ostberg Donald R.; Perkins Fred W. *An Introduction to Linear Analysis*. Indiana University and Dartmouth Collage, USA, 1966. ISBN 65-23656.
- [17] Palczewski, Andrzej. *Numerical PDE methods for exotic options* [document electrònic]. [Consulta: 18 de maig del 2021]. Disponible a <https://www.mimuw.edu.pl/~apalczew/CFP_lecture8.pdf>
- [18] Palczewski, Jan. *Numerical methods for PDEs* [document electrònic]. [Consulta: 18 de maig del 2021]. Disponible a <https://www.mimuw.edu.pl/~apalczew/CFP_lecture7.pdf>
- [19] Schachermayer, D. Walter. *Palabras pronunciadas por el profesor Dr. D. Walter Schachermayer con motivo de su investidura como Doctor Honoris Causa por la Universidad de Murcia* [en línea]. Murcia, Espanya: desembre del 2017, [consulta: 1 d'abril del 2021]. Disponible a <<https://www.um.es/documents/118351/9637033/DHC+Schachermayer+-+Matematicas+y+finanzas+%28Schachermayer%29.pdf/>>>
- [20] Tavella, Domingo. *Quantitative methods in derivatives pricing: An introduction to computational finance*. Hoboken, New Jersey, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2002, Vol. 00158. ISBN 0-471-39447-5.
- [21] Wilmott, Paul; Dewynne, Jeff; Howison, Sam; *Option pricing : mathematical models and computation*. Oxford, UK: Oxford Financial Press, 1995. ISBN 0-952-20820-2.
- [22] Wilmott, Paul; Dewynne, Jeff; Howison, Sam; *The Mathematics of Financial Introduction*. 11a edició. New York, USA: Cambridge University Press, 2005. ISBN 0-521-49789-2.

- [23] Zuazua, Enrique. *Ecuaciones en derivadas parciales*. [Consulta: 5 de maig del 2021]. Disponible a <https://verso.mat.uam.es/web/ezuazua/documentos_public/archivos/personal/comites/1.ecudepa.pdf>