Tema 4. L'elecció del consumidor

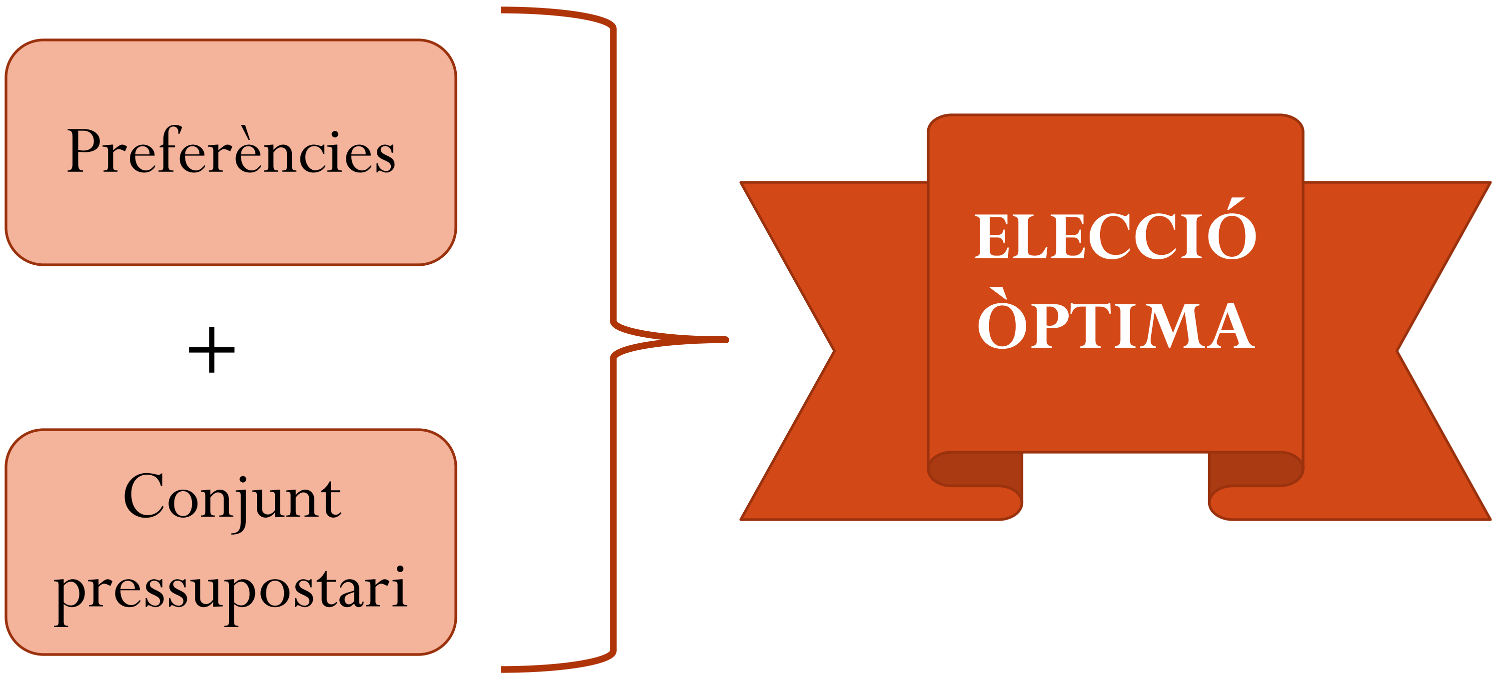
Montse Vilalta

Microeconomia II

Universitat de Barcelona

Introducció

- Volem estudiar quina és l'elecció òptima del consumidor, donades les seves preferències, els preus i la seva renda.



Dos enfocaments

PRIMAL

$$\left.\begin{array}{l}\max\limits_{x_1,x_2} \ u(x_1,x_2) \\ \text{s.a } \ p_1x_1 + p_2x_2 = m\end{array}\right\}$$

Funció de demanda ordinària o marshalliana

$x_1^* = x_1(p_1, p_2, m)$ i $x_2^* = x_2(p_1, p_2, m)$

Funció d'utilitat indirecta

$V = u(x_1^*, x_2^*) = V(p_1, p_2, m)$

DUAL

$$\left.\begin{array}{l}\min\limits_{x_1,x_2} \ p_1x_1 + p_2x_2 \\ \text{s.a } \ u(x_1,x_2) = \bar{u}\end{array}\right\}$$

Funció de demanda compensada o hicksiana

$x_1^{h*} = x_1^h(p_1, p_2, \bar{u})$ i $x_2^{h*} = x_2^h(p_1, p_2, \bar{u})$

Funció de despesa

E*=$p_1x_1^{h*} + p_2x_2^{h*} = E(p_1, p_2, \bar{u})$

Enfocament primal

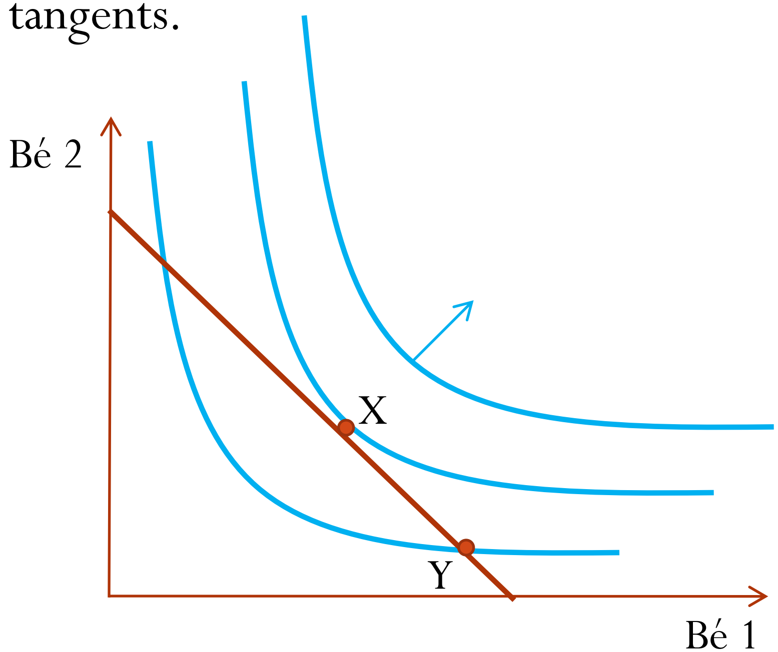
La maximització de la utilitat

Enfocament primal: gràficament

Es tracta d'escollir la cistella preferida entre totes les cistelles assequibles (maximitzar la utilitat donada la RP).

<u>CAS 1:</u> Preferències estrictament convexes i restricció lineal.

La cistella òptima és aquella cistella de la recta pressupostària on la CI i la RP són tangents.

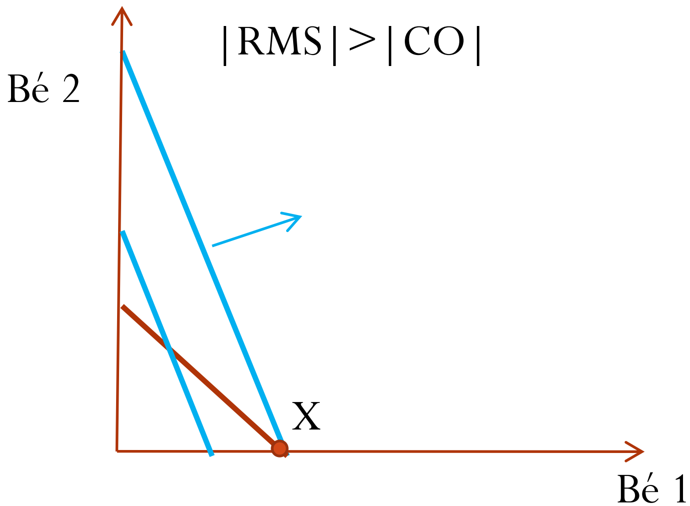


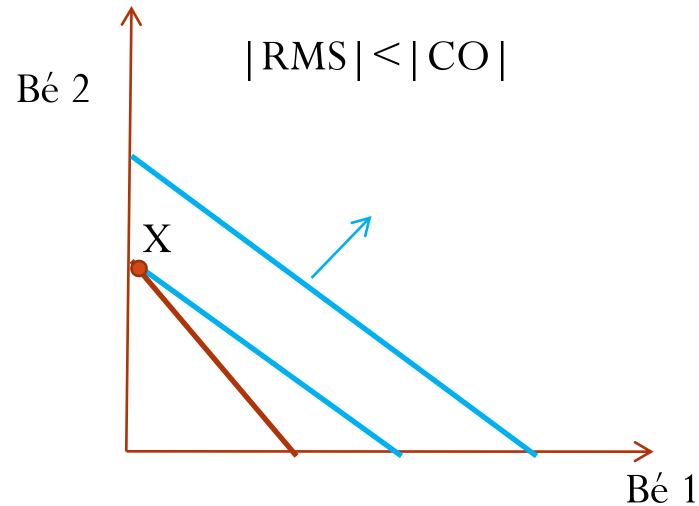
Interpretació econòmica de la **<u>condició de tangència</u>**:
a la cistella òptima es compleix que la RMS és igual al CO.

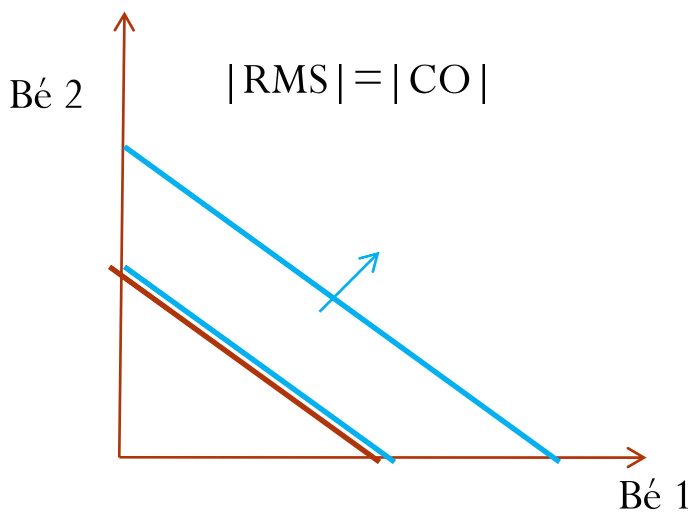
Fixeu-vos també que en aquest cas només hi ha una cistella òptima.

Enfocament primal: gràficament

<u>CAS 2:</u> Béns substitutius perfectes i restricció lineal.





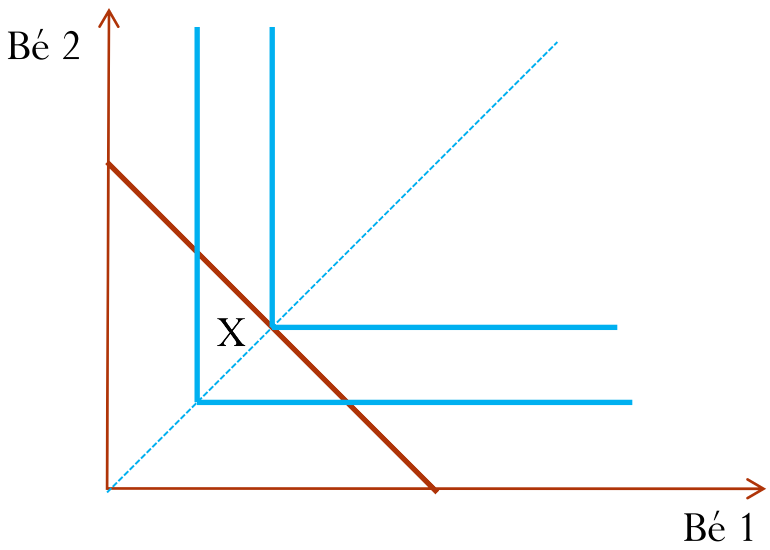


- Quan la RMS és diferent al CO, només hi ha una cistella òptima, i és un òptim de cantonada. Fixeu-vos que en aquest cas la cistella òptima **no** compleix la condició de tangència.

- Quan RMS=CO, llavors tenim molts òptims. En aquest cas es compleix la condició de tangència.

Enfocament primal: gràficament

<u>CAS 3:</u> Béns complementaris perfectes i restricció lineal.

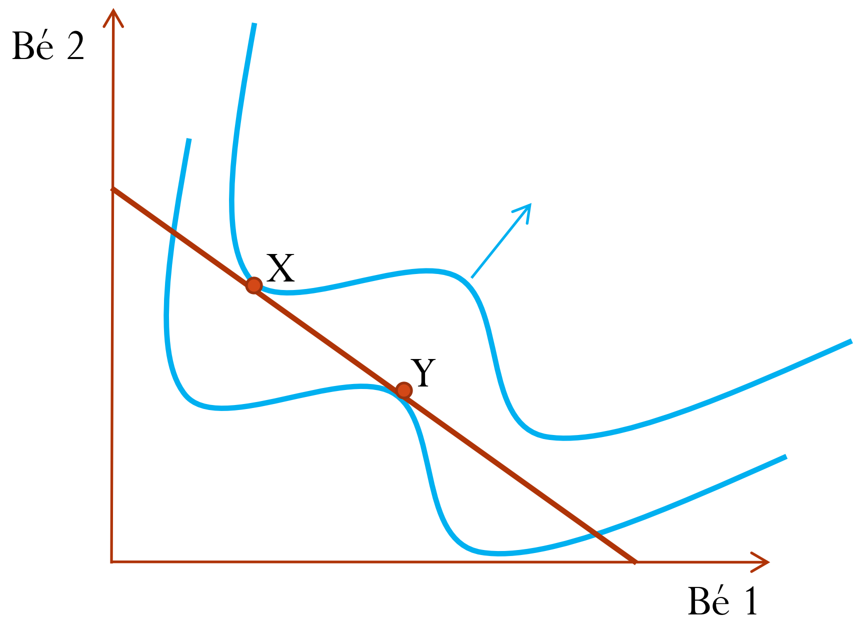


Només hi ha una cistella òptima.

Es compleix en aquest cas
la condició de tangència?
Per què?

Enfocament primal: gràficament

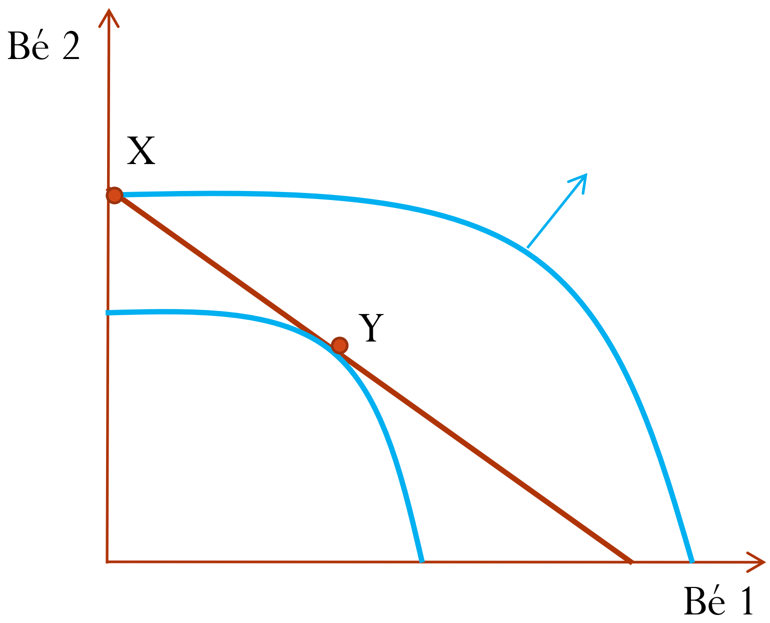
<u>CAS 4:</u> Preferències **no** convexes i restricció lineal.



Quina és la cistella òptima?
En quines cistelles es compleix la condició de tangència?

Enfocament primal: gràficament

CAS 5: Preferències estrictament concaves



Quina és la cistella òptima?

En quines cistelles es compleix la condició de tangència?

Es compleix la condició de tangència en la cistella òptima?

Enfocament primal: Observacions

- Si les preferències són estrictament convexes, llavors la condició de tangència ens indica quina és la cistella òptima.
- Si les preferències **no** són estrictament convexes, la condició de tangència es pot complir en cistelles no òptimes.
- Si les preferències són estrictament convexes, llavors podem assegurar que només hi ha una cistella òptima.
- En qualsevol cas, observeu que en la cistella òptima la CI i la RP no es creuen, sempre es toquen però mai es creuen. Ara bé, no sempre que es toquen sense creuar indiquen que la cistella és òptima (ex: vegeu cistella Y de la pàgina 9).

Enfocament primal: anàlisi matemàtic

Suposa que les preferències són estrictament convexes.

- El problema matemàtic a resoldre és el següent:

$$\left.\begin{aligned} &\max_{x_1,x_2}\ u(x_1,x_2) \\ &\text{s.a}\ \ p_1x_1 + p_2x_2 = m \end{aligned}\right\}$$

- De totes les cistelles que satisfan la restricció pressupostària volem trobar aquella cistella (x_1,x_2) que dóna el nivell d'utilitat màxim.
- Dos mètodes per resoldre el problema:
  1) Substituir x_2 a la funció objectiu.
  2) Mètode de Lagrange.

1) Substituir x_2 a la funció objectiu

De la RP trobem: $x_2 = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1.$

Substituïm a la funció objectiu.

$$\max_{x_1} \; u\left(x_1, \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1 \right)$$

CPO:

$$\frac{du}{dx_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dx_1} = 0$$

Fixeu-vos que de la RP sabem que $\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{p_1}{p_2}.$

Aquesta equació ens dóna la x_1^* òptima.

Si substituïm x_1^* a l'expressió de x_2, trobem la x_2^*.

2) Mètode de Lagrange

Escrivim el Lagrangià:

$$L = u(x_1, x_2) - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m)$$

$$CPO:$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= \frac{\partial u}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial u}{\partial x_2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = p_1 x_1 + p_2 x_2 - m = 0$$

Solució matemàtica

- Tots dos mètodes ens porten a la mateixa solució. La cistella òptima és aquella (x_1,x_2) que satisfà les següents equacions:
  - Recta pressupostària.
  - Condició de tangència.

Identifica les dues equacions a les solucions matemàtiques que hem trobat anteriorment.

- Mètode Lagrangià: λ és el multiplicador de Lagrange. El seu valor ens indica com varia la nostra utilitat si augmentem la renda (m) en una unitat.

Funció de demanda ordinària

- L'elecció òptima dels béns 1 i 2 donats uns preus i una renda determinats s'anomena **<u>cistella demandada</u>** pel consumidor. x_1^* i x_2^*.
- En general, quan varien els preus i la renda, també varia l'elecció òptima del consumidor. La **<u>funció de demanda ordinària (o marshalliana)</u>** és aquella que relaciona l'elecció òptima amb els diferents valors dels preus i les rendes.
- Les **<u>funcions de demanda ordinària</u>** depenen tant dels preus com de la renda. $X_1(p_1,p_2,m)$ i $X_2(p_1,p_2,m)$.
- Cada preferències portarà a funcions de demanda diferents.

Exemple: cas Cobb-Douglas

- Hem vist gràficament i analíticament que en aquest cas l'elecció òptima satisfà la RP i la Condició de tangència.

$$u(x) = x_1^2 x_2^3$$

$$RMS = -\frac{UMg_1}{UMg_2} = -\frac{2x_1x_2^3}{3x_1^2x_2^2} = -\frac{2x_2}{3x_1}.$$

Condició de tangència:

RMS=CO: $-\frac{2x_2}{3x_1} = -\frac{p_1}{p_2} \rightarrow 2x_2p_2 = 3x_1p_1$

Recta pressupostària:

$$p_1x_1 + p_2x_2 = m \rightarrow p_2x_2 = m - p_1x_1$$

Solucionem les dues equacions.

$$2\ \ m - p_1x_1\ \ = 3x_1p_1 \rightarrow \boxed{x_1^* = \frac{2m}{5p_1}} \text{ i } \boxed{x_2^* = \frac{3m}{5p_2}}.$$

Exemple: substitutius perfectes

- De l'anàlisi gràfic (pàgina 6), podem derivar les següents funcions de demanda:

$$x_1^* = \begin{cases} \dfrac{m}{p_1} & \text{si } |\text{RMS}| > \dfrac{p_1}{p_2} \\ 0 & \text{si } |\text{RMS}| < \dfrac{p_1}{p_2} \\ [0, \dfrac{m}{p_1}] & \text{si } |\text{RMS}| = \dfrac{p_1}{p_2} \end{cases} \qquad x_2^* = \begin{cases} 0 & \text{si } |\text{RMS}| > \dfrac{p_1}{p_2} \\ \dfrac{m}{p_2} & \text{si } |\text{RMS}| < \dfrac{p_1}{p_2} \\ [0, \dfrac{m}{p_2}] & \text{si } |\text{RMS}| = \dfrac{p_1}{p_2} \end{cases}$$

Exemple: complementaris perfectes

- De l'anàlisi gràfic (pàgina 7), veiem que l'elecció òptima estarà sempre al vèrtex de la CI. A més estarà sobre la recta pressupostària. Aquestes dues condicions determinen l'elecció òptima.
- Matemàticament:

$$u(x) = \min \; ax_1, bx_2$$

$$Vèrtex \rightarrow ax_1 = bx_2$$

$$RP \rightarrow p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$$

Solució (substituïnt):

$$\boxed{x_1^* = \frac{bm}{bp_1 + ap_2}} \quad \text{i} \quad \boxed{x_2^* = \frac{am}{bp_1 + ap_2}}$$

Exemple: béns neutrals i mals

- L'individu es gastarà tota la renda en el bé que li agrada i no comprarà gens del bé neutral o mal.
- Si el bé 1 és el bé i el bé 2 és neutral o mal, llavors tindrem que $x_1^*=m/p_1$ i $x_2^*=0$.

Funció d'utilitat indirecta

- Donades les funcions de demanda ordinàries podem determinar quin és el nivell màxim d'utilitat assequible pel consumidor per a cada nivell de preus i renda. Només hem de substituir les funcions de demanda a la funció d'utilitat.
- La **funció d'utilitat indirecta V** és la funció que relaciona els diferents nivells de preu i renda amb el nivell d'utilitat màxim assolible donats aquests preus i renda.
- $V(p_1,p_2,m)=u(x_1(p_1,p_2,m),x_2(p_1,p_2,m))$

Exercici: determina la funció d'utilitat indirecta pel cas de béns complementaris perfectes (pàgina 18) i pel cas Cobb-Douglas (pàgina 16).

La identitat de Roy

- Si coneixem la funció d'utilitat indirecta podem trobar les funcions de demanda ordinàries. Com?

En el problema de maximització d'utilitat,

donat el Lagrangià: $\mathrm{L{=}u}(\mathrm{x}_1, x_2) - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - m)$,

i la funció d'utilitat indirecta: $\mathrm{V}(\mathrm{p}_1, p_2, m) = u(x_1^*, x_2^*)$,

el teorema de l'envoltant ens diu que:

$$\frac{\partial V}{\partial p_1} = \frac{\partial L}{\partial p_1} \quad \text{i} \quad \frac{\partial V}{\partial p_2} = \frac{\partial L}{\partial p_2} \quad \text{i} \quad \frac{\partial V}{\partial m} = \frac{\partial L}{\partial m}.$$

Com que coneixem L podem calcular les derivades anteriors.

I obtenim el següent:

(1) $$\frac{\partial V}{\partial p_1} = -\lambda x_1,$$

(2) $$\frac{\partial V}{\partial p_2} = -\lambda x_2,$$

(3) $$\frac{\partial V}{\partial m} = \lambda.$$

Si dividim (1)/(3) i (2)/(3) obtenim les funcions de demanda.

$$\boxed{x_1 = -\frac{\frac{\partial V}{\partial p_1}}{\frac{\partial V}{\partial m}}} \quad \text{i} \quad \boxed{x_2 = -\frac{\frac{\partial V}{\partial p_2}}{\frac{\partial V}{\partial m}}}.$$

Aquestes igualtats s'anomenen la **identitat de Roy**. Ens indiquen com trobar x_1 i x_2 a partir de $V(p_1,p_2,m)$.

Comprova que la identitat de Roy es compleix en l'exemple Cobb-Douglas (pàgina 16).

ENFOCAMENT PRIMAL

Matemàticament,

$$\left.\begin{array}{l} \max\limits_{x_1, x_2} \; u(x_1, x_2) \\ \text{s.a } \; p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \end{array}\right\}$$

I també, gràficament

Hem après a trobar…

La funció de demanda ordinària

o marshalliana

$$x_1^* = x_1(p_1, p_2, m) \text{ i } x_2^* = x_2(p_1, p_2, m)$$

Identitat de Roy

Funció d'utilitat indirecta

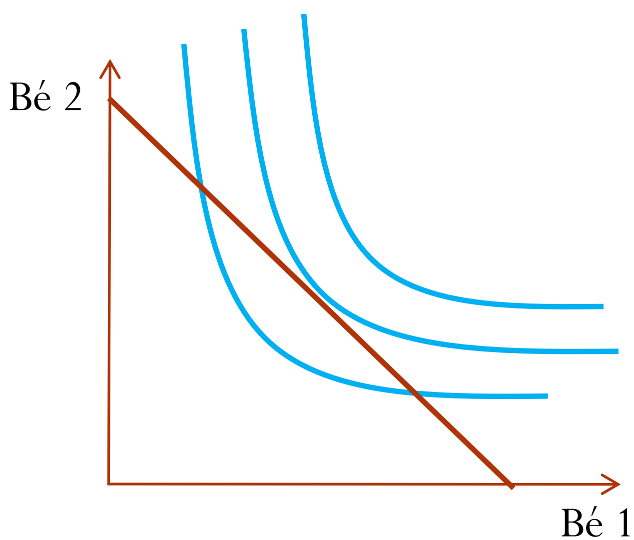
$$V = u(x_1^*, x_2^*) = V(p_1, p_2, m)$$

Enfocament dual

La minimització de la despesa

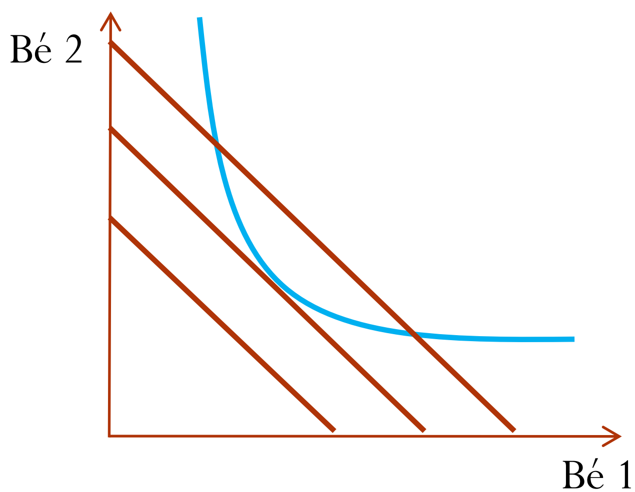
Maximització de la utilitat

- Donada una renda i uns preus, quina és la cistella que maximitza la utilitat?
- Fixem la renda que volem gastar en els dos béns.



Minimització de la despesa

- Donat un nivell d'utilitat i uns preus, quina és la cistella que minimitza la despesa?
- Fixem el nivell d'utilitat que volem obtenir.



Problema matemàtic (cas pref. estrictament convexes)

$$\left.\begin{aligned}&\min_{x_1,x_2}\; p_1x_1+p_2x_2\\&s.a\;\; \mathrm{u}(\mathrm{x}_1,x_2)=\overline{u}\end{aligned}\right\}$$

$$L=p_1x_1+p_2x_2-\lambda(\mathrm{u}(\mathrm{x}_1,x_2)-\overline{u})$$

$$CPO:$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial L}{\partial x_1}=p_1-\lambda UMg_1=0\\&\frac{\partial L}{\partial x_2}=p_2-\lambda UMg_2=0\end{aligned}\right\}\rightarrow\boxed{\frac{UMg_1}{UMg_2}=\frac{p_1}{p_2}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=-(\mathrm{u}(\mathrm{x}_1,x_2)-\overline{u})=0\rightarrow\boxed{\mathrm{u}(\mathrm{x}_1,x_2)=\overline{u}}$$

- La cistella òptima és aquella (x_1, x_2) que satisfà les següents equacions:
  - Té nivell d'utilitat $\bar{u}$.
  - Condició de tangència.

Identifica les dues equacions a la solució matemàtica que hem trobat anteriorment.

- Amb aquestes dues equacions podem trobar les funcions de demanda compensades o hicksianes. La **<u>funció de demanda compensada (o hicksiana)</u>** és aquella que relaciona l'elecció òptima amb els diferents valors dels preus i el nivell d'utilitat. $x_1^h(p_1, p_2, \bar{u}), x_2^h(p_1, p_2, \bar{u})$

Exemple: $u(x_1,x_2)=x_1x_2$

Condició de tangència:

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{x_2}{x_1}$$

Corba d'indiferència (nivell $\bar{u}$):

$$x_1x_2=\bar{u}$$

Resolem les dues equacions substituïnt

i obtenim les funcions de demanda compensada:

$$\boxed{x_1^h=\sqrt{\bar{u}\frac{p_2}{p_1}}} \quad \text{i} \quad \boxed{x_2^h=\sqrt{\bar{u}\frac{p_1}{p_2}}}.$$

Funció de despesa

- La **<u>funció de despesa E</u>** és la funció que ens informa de la despesa mínima necessària per assolir un nivell d'utilitat determinat donats els preus.

$$E(p_1, p_2, \overline{u}) = p_1 x_1^h(p_1, p_2, \overline{u}) + p_2 x_2^h(p_1, p_2, \overline{u}).$$

Lema de Shepard

- El lema de Shepard ens permet trobar la funció de demanda compensada a partir de la funció de despesa.
- Per derivar el lema de Shepard utilitzem el teorema de l'envoltant.

El Lagrangià del problema dual és:

$$L = p_1 x_1 + p_2 x_2 - \lambda(\mathrm{u}(\mathrm{x}_1, x_2) - \overline{u})$$

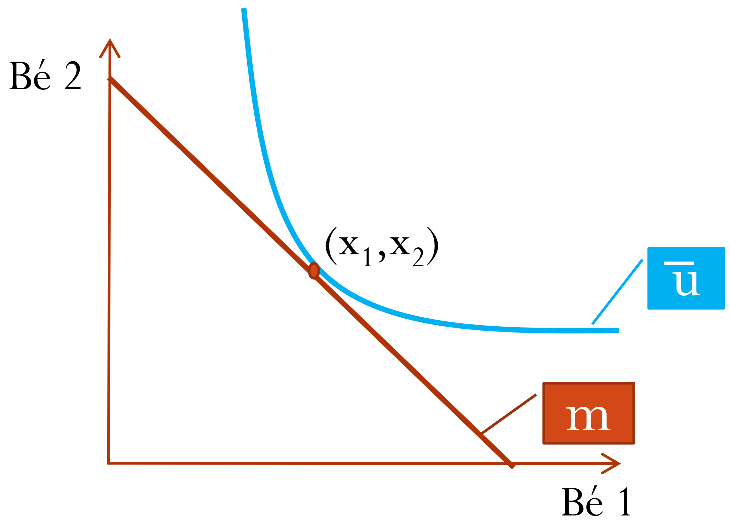
El teorema de l'envoltant diu que:

$$\frac{\partial E}{\partial p_1} = \frac{\partial L}{\partial p_1} \quad \text{i} \quad \frac{\partial E}{\partial p_2} = \frac{\partial L}{\partial p_2}$$

Per tant, si coneixem E, podem recuperar les funcions de demanda compensada:

$$\boxed{x_1^h = \frac{\partial E}{\partial p_1}} \quad \text{i} \quad \boxed{x_2^h = \frac{\partial E}{\partial p_2}}$$

Relació entre el problema primal i dual



$$V(p_1, p_2, E(p_1, p_2, \bar{u})) \equiv ....$$

$$E(p_1, p_2, V(p_1, p_2, m)) \equiv ....$$

$$x_1(p_1, p_2, m) \equiv x_1^h(p_1, p_2, V(p_1, p_2, m))$$

$$x_1^h(p_1, p_2, \bar{u}) \equiv x_1(p_1, p_2, E(p_1, p_2, \bar{u}))$$

Aplicació

Comparació de l'efecte de dos impostos sobre el benestar de l'individu

Problema

- Situació inicial:

  La funció d'utilitat d'en Pepet és $u(x)=x_1x_2$. Disposa d'una renda de 100 euros i tant el preu del bé 1 com del bé 2 és 1 euro.

  Troba les funcions de demanda ordinària i la funció d'utilitat indirecta.

  Quina és la cistella òptima d'en Pepet? Quin nivell d'utilitat assoleix en Pepet?

- El govern vol introduir un impost. Ha calculat que necessita recaptar 20 euros més de cada ciutadà per poder sobreviure la crisis.
- Està considerant dues options:
  1) Introduir un impost sobre la renda del 20%.
  2) Introduir un impost sobre la quantitat de consum del bé 1.
- Evidentment, el govern decidirà introduir aquell impost que afecti menys al benestar del ciutadà. Pots ajudar al govern a decidir?

Tens algún dubte?

L'enfocament primal i l'aplicació final els trobaràs molt ben explicats al Varian.

L'enfocament dual i la identitat de Roy els trobaràs explicats al Nicholson.