



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

EL MÈTODE DELS ELEMENTS FINITS

Autor: Guillem Capellera Font

Director: Dr. Àngel Jorba Monte

Realitzat a: Departament de Matemàtiques i Informàtica
(Matemàtica Aplicada)

Barcelona, 20 de juny de 2021

Abstract

The finite element method (FEM) is one of the most widely used tools for solving different problems governed by partial differential equations (PDE's). In this work we study the theoretical basis on which the FEM is based and we deal with two general problems: elliptic and parabolic. The main numerical and computational methods used to implement the FEM are also explained. Finally we apply the method in the one-dimensional and two-dimensional case. In the one-dimensional case we solve two examples by programming code in MATLAB language. In the two-dimensional case we solve an example using the *FEATool Multiphysics* software.

Resum

El mètode dels elements finits (FEM) és una de les eines més utilitzades per tal de solucionar diferents problemes de medis continus governats per equacions en derivades parcials (PDE's). En aquest treball estudiem la base teòrica que fonamenta el FEM i es tracten dos problemes generals de medis continus: els el·líptics i els parabòlics. També s'expliquen els principals mètodes numèrics i computacionals utilitzats per tal d'implementar el FEM. Finalment apliquem el mètode en el cas unidimensional i bidimensional. En el cas unidimensional solucionem dos exemples programant codi en llenguatge MATLAB. En el cas bidimensional solucionem un exemple utilitzant el software *FEATool Multiphysics*.

Agraïments

Primer de tot, vull expressar el meu agraïment al tutor del treball, el Dr. Àngel Jorba, per la seva dedicació i empatia a l'hora d'explicar-me qualsevol concepte, i per fer-me de guia en aquest treball.

Moltes gràcies a la meva família i amics, que m'han recolzat durant tota la carrera. Especialment, m'agradaria mencionar a la Cristina, als meus pares i a la meva germana, pel suport incondicional i per creure en mi en tot moment. Sense ells, res d'això hagués estat possible.

Finalment, voldria dedicar aquest treball a una persona molt especial per mi: va per tu tia, allà on siguis, no t'oblidaré.

Índex

1	Introducció	1
2	Espais de Sóbolev	2
2.1	Espai vectorial i producte intern	2
2.2	Espais de Lebesgue	3
2.3	Formes lineals i bilineals	5
2.3.1	Forma bilineal	7
2.4	Distribucions	7
2.4.1	Espai $L^2(\Omega)$	9
2.5	Derivada generalitzada (dèbil)	10
2.6	L'espai de Sóbolev $H^1(\Omega)$	12
2.6.1	Teorema de traça i aplicacions	13
2.6.2	Els espais de Sóbolev $H^m(\Omega)$	14
3	Problemes el·líptics	15
3.1	Problema de Dirichlet	15
3.2	Problema de Neumann	16
3.3	Problemes variacionals abstractes	17
3.4	Aproximació variacional	20
4	Problemes parabòlics	23
4.1	Equació de la calor	23
4.2	Mètode de discretització	24
5	Mètodes numèrics i computacionals	27
5.1	Discretització temporal	27
5.2	Triangulació del domini	30
5.3	Regles de quadratura sobre triangles	31
5.4	Mètode del gradient conjugat	34
5.4.1	Mètode de direccions conjugades	35
5.4.2	Mètode del gradient conjugat	36
6	Aplicació al cas unidimensional	37
6.1	Problema el·líptic de Dirichlet	37
6.1.1	Discretització i base de funcions	37
6.1.2	Sistema d'equacions	38

6.1.3	Exemple	40
6.2	Problema parabòlic: equació de la calor	41
6.2.1	Discretització i base de funcions	42
6.2.2	Sistema d'equacions diferencials	42
6.2.3	Exemple	43
7	Aplicació al cas bidimensional	45
7.1	Discretització i base de funcions	45
7.2	Sistema d'equacions	47
7.2.1	Exemple	48
8	Conclusions	49

1 Introducció

Darrera la majoria de problemes fenomenològics i processos que s'estudien en el camp de l'enginyeria i models matemàtics de la física, s'hi fonamenten una o diverses equacions en derivades parcials (PDE's). El mètode d'elements finits (FEM) és l'eina de càlcul aproximatiu més utilitzada a l'hora de solucionar problemes de condicions de contorn governats per aquestes PDE's. El seu elevat grau d'adaptabilitat al domini del model fa que esdevingui una de les tècniques més eficaces i eficients a l'hora de donar resposta a aquests tipus de problemes.

Durant l'estiu de 2020 vaig realitzar pràctiques a una empresa on tractaven amb metalls. La tasca principal era, mitjançant un software de FEM, predir les deformacions que patia una peça metàl·lica quan se sotmetia al procés de soldadura. Aquest problema implicava dos fenòmens: la transferència de calor i el desplaçament mecànic del material. Així doncs, vaig aprendre a fer servir el software per modelar el problema i poder oferir uns resultats. Quan vaig acabar les pràctiques, la meua motivació era aprofundir el FEM per entendre'n les seves bases i així poder programar pel meu compte algun dels problemes que havia resolt amb el software. Aquest és el motiu que em va fer escollir el FEM com el tema del treball final de grau.

El primer objectiu d'aquest treball és entendre la base teòrica sobre la qual es fonamenta el FEM. Per fer-ho, cal tenir coneixement d'una sèrie de conceptes d'anàlisi real i funcional que s'expliquen a una assignatura optativa del grau que no he cursat. Per tant, es partirà de "zero" i s'explicitaran les idees claus d'anàlisi real i funcional per poder explicar la teoria del FEM. Degut a la llarga extensió d'aquesta part i al nombre significatiu de teoremes i proposicions, no s'han fet algunes demostracions però s'han citat per poder-les trobar a la bibliografia. El segon objectiu del treball és aprendre a implementar el mètode sobre el cas unidimensional i el cas bidimensional. El FEM requereix el càlcul computacional i una sèrie de mètodes numèrics per resoldre el problema de condicions de contorn. No he cursat l'assignatura de *Mètodes Numèrics II*, així que els mètodes implicats que s'imparteixen en l'assignatura els he introduït en el treball. Pel cas unidimensional es programarà codi en llenguatge MATLAB per solucionar dos exemples de problemes. Pel cas bidimensional, s'utilitzarà un software de MATLAB anomenat *FEATool Multiphysics* [6] per resoldre un exemple.

El treball es resumeix en quatre parts conceptualment diferenciades. L'objectiu de la primera part (capítol 2) és introduir els espais de Sóbolev. Tal com s'ha dit prèviament, per fer-ho s'establirà una base teòrica i simplificada amb conceptes propis d'anàlisi real i funcional. A la segona part del treball (capítols 3 i 4) es tractaran dos tipus de problemes generals de condicions de contorn: el·líptics i parabòlics. A la tercera part (capítol 5) s'estudiaran els mètodes numèrics i computacionals que s'utilitzen a l'hora d'implementar el FEM. També s'explicaran les principals eines que utilitza el software amb el que resoldrem un exemple al darrer capítol. La quarta part (capítols 6 i 7) correspon a l'aplicació del mètode pel cas unidimensional i bidimensional. En el capítol 6 s'implementarà el FEM en el cas unidimensional sobre els dos tipus de problemes treballats: el·líptic i parabòlic. Per a cada problema es proposarà un exemple i es solucionarà mitjançant el llenguatge MATLAB. En el capítol 7 s'implementarà el FEM en el cas bidimensional pel problema el·líptic. Per aquest problema també es proposarà un exemple que es resoldrà utilitzant el software *FEATool Multiphysics*.

2 Espais de Sóbolev

Aquest capítol serveix per introduir l'espai de funcions que constitueix la base del mètode dels elements finits. Els espais de Sóbolev són espais vectorials els elements dels quals són funcions definides en dominis de l'espai n -dimensional euclidià \mathbb{R}^n i les seves derivades parcials satisfan certes condicions d'integrabilitat. Per tal de desenvolupar les propietats d'aquests espais necessitem conceptes propis d'anàlisi real i funcional.

2.1 Espai vectorial i producte intern

Un dels objectius principals del capítol és demostrar que l'espai de Sóbolev és un espai de Hilbert per un producte intern (o producte escalar) que definirem més endavant. Per aquesta raó, cal tenir en compte una sèrie de definicions bàsiques d'anàlisi que són detallades en aquesta secció. D'ara endavant, l'espai vectorial que tractarem és sobre el subcòs \mathbb{R} .

Definició 2.1. (Norma). *Sigui V un espai vectorial. La norma de V és una funció real definida a V , que denotem $\|\cdot\|$, que satisfà les següents propietats:*

1. $\|u\| \geq 0 \quad \forall u \in V$, i $\|u\| = 0$ si i només si $u = 0$.
2. $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\| \quad \forall u \in V$ i $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \forall u, v \in V$ (desigualtat triangular).

En aquest cas, V és un espai vectorial normat.

Definició 2.2. *Sigui $\{v_n\}$ una successió de vectors a un espai vectorial normat V . La successió s'anomena successió de Cauchy si donat $\varepsilon > 0$, existeix un nombre natural $M \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\forall k, m > M, \quad \|v_k - v_m\| < \varepsilon.$$

Definició 2.3. (Espai complet). *Sigui V un espai vectorial normat. Direm V és complet respecte la mètrica induïda per la norma si tota successió de Cauchy de V convergeix a un element de V . També s'anomena espai de Banach.*

Definició 2.4. (Producte intern). *Sigui V un espai vectorial. Un producte intern a V és una operació $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfà les següents propietats:*

1. $(u, v) = (v, u) \quad \forall u, v \in V$.
2. $(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u, w) + \beta(v, w) \quad \forall u, v, w \in V$ i $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
3. $(u, u) \geq 0 \quad \forall u \in V$, i $(u, u) = 0$ si i només si $u = 0$.

En aquest cas, V és un espai vectorial amb producte intern, també anomenat espai pre-hilbertià.

Observació 2.5. Sigui $u \in V$, és fàcil veure que $\sqrt{(u, u)}$ és una norma.

Definició 2.6. (Espai de Hilbert). *Sigui V un espai vectorial i (\cdot, \cdot) un producte intern dins d'aquest espai. Direm que V és un espai de Hilbert pel producte (\cdot, \cdot) si és complet respecte la norma associada al producte intern $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$.*

2.2 Espais de Lebesgue

Aquesta secció serveix d'introducció pels espais de Lebesgue. En particular, com veurem més endavant, els espais de Sóbolev estan dins de l'espai de funcions de quadrat integrable. Així doncs, és necessari estudiar-ne algunes propietats bàsiques.

A partir d'ara i durant tot el que resta de capítol, considerarem el domini Ω un obert no buit de \mathbb{R}^n amb punt genèric $x = (x_1, \dots, x_n)$. També suposarem que totes les funcions considerades prenen valors reals.

Sigui f una funció real i mesurable a Ω , denotem

$$\int_{\Omega} f(x) dx,$$

la integral de Lebesgue de f (dx denota la mesura de Lebesgue).

Definició 2.7. *Sigui f una funció real i mesurable a Ω . Fixat $1 \leq p < \infty$ aleshores definim la L^p -norma com*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Per evitar diferències trivials entre funcions, identifiquem dues funcions f i g quan satisfan $\|f - g\|_{L^p(\Omega)} = 0$. Més endavant, a la demostració del Teorema 2.13, veurem que $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ és una norma.

Definició 2.8. *Definim els espais de Lebesgue on $1 \leq p < \infty$:*

$$L^p(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ mesurable i } \|f\|_{L^p(\Omega)} < +\infty\}.$$

Exemple 2.9. Si prenem $n = 1$, $\Omega = [-1, 1]$ i

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Com que f i g difereixen només en un conjunt de mesura zero (un punt en aquest cas), observem que representen la mateixa funció a l'espai de Lebesgue.

Definició 2.10. *Sigui $1 \leq p \leq \infty$, direm que p' és l'element conjugat de p si*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Proposició 2.11. *(Desigualtat de Hölder). Sigui $f \in L^p(\Omega)$ i $g \in L^{p'}(\Omega)$ amb $1 \leq p \leq \infty$. Aleshores $fg \in L^1(\Omega)$ i*

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

DEMOSTRACIÓ: Es pot trobar a la pàgina 92 del llibre [5].

Proposició 2.12. *Un espai vectorial normat V és de Banach si i només si per tota successió $\{v_n\}$ de V tal que $\sum_n \|v_n\| < +\infty$ es compleix que existeix $v \in V$ tal que*

$$\left\| v - \sum_{n=1}^N v_n \right\| \xrightarrow{N} 0.$$

DEMOSTRACIÓ: Es pot trobar a la pàgina 20 del llibre [9]

Teorema 2.13. *Si $1 \leq p < \infty$, aleshores $L^p(\Omega)$ és un espai de Banach.*

DEMOSTRACIÓ: Primer de tot cal demostrar que $L^p(\Omega)$ és normat respecte $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$.

1. $\|f\|_{L^p(\Omega)} \geq 0$ i $\|f\|_{L^p(\Omega)} = 0$ si i només si $f = 0$ es dedueix de les propietats de les funcions integrables.
2. $\|\alpha f\|_{L^p(\Omega)} = |\alpha| \|f\|_{L^p(\Omega)}$ es dedueix de les propietats de les integrals.
3. La demostració de la desigualtat triangular per $p = 1$ és immediata. Suposem doncs que $1 < p < \infty$:

$$\begin{aligned} (\|f + g\|_{L^p(\Omega)})^p &= \int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^p dx = \int_{\Omega} |f(x) + g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} dx \leq \\ &\leq \int_{\Omega} |f(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} dx + \int_{\Omega} |g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} dx = \\ &= \int_{\Omega} |f(x)(f(x) + g(x))^{p-1}| dx + \int_{\Omega} |g(x)(f(x) + g(x))^{p-1}| dx. \end{aligned}$$

Com que $(f(x) + g(x))^{p-1} \in L^p(\Omega)$ apliquem la desigualtat de Hölder i seguidament fem $(p-1)p' = p$

$$\begin{aligned} (\|f + g\|_{L^p(\Omega)})^p &\leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \left(\int_{\Omega} |(f(x) + g(x))^{p-1}|^{p'} dx \right)^{1/p'} + \\ &+ \|g\|_{L^p(\Omega)} \left(\int_{\Omega} |(f(x) + g(x))^{p-1}|^{p'} dx \right)^{1/p'} = \\ &= \left[\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)} \right] \left(\int_{\Omega} |(f(x) + g(x))|^p dx \right)^{1/p'} = \\ &= \left[\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)} \right] (\|f + g\|_{L^p(\Omega)})^{p/p'} = \\ &= \left[\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)} \right] (\|f + g\|_{L^p(\Omega)})^{p-1}. \end{aligned}$$

Per tant, passant el terme de més a la dreta dividint a l'altra banda arribem a la desigualtat triangular

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Ara provarem que aquest espai normat és de Banach usant la Proposició 2.12. Suposem que $\{f_n\}$ és una successió tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{L^p(\Omega)} \leq C < +\infty$. Definim $G_N := \sum_{n=1}^N |f_n|$ i $G := \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$. Observem que per la desigualtat triangular tenim que $\forall N$:

$$\|G_N\|_{L^p(\Omega)} \leq \sum_{n=1}^N \|f_n\|_{L^p(\Omega)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{L^p(\Omega)} \leq C.$$

Ara, si apliquem el teorema de la convergència monòtona ($\lim_n \int f_n = \int \lim_n f_n$) tenim

$$\|G\|_{L^p(\Omega)} = \|\lim_N G_N\|_{L^p(\Omega)} \leq C.$$

aleshores $G \in L^p(\Omega)$ i $G(x) < \infty$ quasi per tot x . Així doncs, les sumes parcials $F_N(x) := \sum_{n=1}^N f_n(x)$, convergeixen absolutament quasi per tot x . En aquests punts anomenem $F(x) = \lim_N F_N(x)$. Utilitzem ara que $|F(x) - F_N(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(x)|$, i apliquem normes, aleshores es compleix

$$\|F - F_N\|_{L^p(\Omega)} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \|f_n\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0, \quad \text{si } N \longrightarrow \infty.$$

□

Teorema 2.14. *L'espai $L^2(\Omega)$, també anomenat espai de funcions de quadrat integrable, és un espai de Hilbert pel producte escalar.*

$$(f, g)_{0, \Omega} = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx.$$

DEMOSTRACIÓ: Observem que la norma que indueix aquest producte escalar és

$$\|f\|_{0, \Omega} = (f, f)_{0, \Omega} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Pel Teorema 2.13 tenim que $L^2(\Omega)$ és un espai complet respecte la norma del producte escalar $(\cdot, \cdot)_{0, \Omega}$, per tant $L^2(\Omega)$ és un espai de Hilbert. □

Notació 1. *En el cas $L^2(\Omega)$, denotarem la norma com $\|\cdot\|_{0, \Omega}$.*

2.3 Formes lineals i bilineals

Els espais de Sóbolev són espais vectorials de dimensió infinita. Per tal de caracteritzar la naturalesa d'aquest tipus d'espais, estudiarem les aplicacions lineals sobre aquests. A la primera part d'aquesta secció s'introdueixen les formes lineals, la seva condició de continuïtat i un teorema fonamental que estableix una bijecció entre l'espai d'origen i l'espai de les formes. A la segona part d'aquesta secció es defineixen les formes bilineals i la seva condició de continuïtat.

Definició 2.15. *Sigui V un espai vectorial normat. Una forma lineal ℓ de V és una funció $\ell : V \rightarrow \mathbb{R}$ que és lineal, i.e.*

$$\ell(\alpha u + \beta v) = \alpha \ell(u) + \beta \ell(v) \quad \forall u, v \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

La continuïtat d'una forma lineal es defineix de la mateixa manera que qualsevol altra funció.

Definició 2.16. *Direm que ℓ és contínua a $u \in V$ si*

$$\lim_{v \rightarrow u} \ell(v) = \ell(u),$$

o de forma equivalent

$$\|u - v\| \rightarrow 0 \quad \implies \quad |\ell(u) - \ell(v)| \rightarrow 0.$$

La linealitat té dues implicacions importants per la continuïtat:

Proposició 2.17. *Sigui ℓ una forma lineal contínua a $u \in V$, aleshores ℓ ha de ser contínua per tot $u \in V$.*

DEMOSTRACIÓ: Siguin u_0 i v vectors qualssevol de V . Demostrem que ℓ és contínua a u_0 si i només si ℓ és contínua a u . Definim $z := u_0 + v - u$ que és un vector de V per ser espai vectorial. Tot seguit, usant la linealitat trobem:

$$|\ell(u) - \ell(v)| = |\ell(u - v)| = |\ell(u_0 - (u_0 + v - u))| = |\ell(u_0 - z)| = |\ell(u_0) - \ell(z)|.$$

Per construcció tenim que $u_0 - z = u - v$, per tant, aplicant normes:

$$\|u - v\| \rightarrow 0 \iff \|u_0 - z\| \rightarrow 0.$$

Aleshores ℓ és contínua a u si i només si, ℓ és contínua a u_0 . □

Observació 2.18. En particular, si ℓ és una forma lineal contínua a u , aleshores també ho serà a $0 \in V$.

Proposició 2.19. *Sigui ℓ una forma lineal de V . Direm que ℓ és contínua a $0 \in V$ (i, per tant, $\forall u \in V$) si i només si, existeix una constant no negativa M tal que*

$$|\ell(u)| \leq M\|u\| \text{ per tot } u \in V.$$

DEMOSTRACIÓ: Si ℓ és contínua a 0 , aleshores $\forall \epsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ tal que $\forall u \in V$ amb $\|u - 0\| \leq \delta$ implica que

$$|\ell(u)| = |\ell(u - 0)| = |\ell(u) - \ell(0)| \leq \epsilon.$$

Escollim $\epsilon = 1$. Però ara, per qualsevol $u \in V$, el vector $(\delta/\|u\|)u$ té una norma igual a δ , i per tant:

$$\left| \ell \left(\frac{\delta}{\|u\|} u \right) \right| \leq 1 \implies |\ell(u)| \leq \frac{1}{\delta} \|u\|.$$

Si definim $M = \delta^{-1}$ arribem a la desigualtat que volíem veure.

Recíprocament, per demostrar que ℓ és contínua a 0 només cal prendre $\delta = \frac{\epsilon}{M} > 0$ i aleshores tenim que $\forall u \in V$ amb $\|u\| \leq \delta$:

$$|\ell(u)| \leq M\|u\| \leq M\delta \leq \epsilon.$$

□

El conjunt de formes lineals definides a V formen un espai vectorial normat que s'anomena *espai dual* de V i el denotem V' . Sigui $\ell \in V'$ definim la seva norma a V' de la següent forma:

$$\|\ell\|_{V'} = \sup_{u \in V, u \neq 0} \frac{|\ell(u)|}{\|u\|}.$$

A continuació es presenta un teorema fonamental dels espais de Hilbert que consisteix en la base de l'existència i unicitat de la teoria dels problemes variacionals que explicarem més endavant. Aquest teorema demostra la bijecció entre un espai de Hilbert V i el seu dual V' i com a conseqüència permet representar els elements del dual V' a partir dels elements de V .

Teorema 2.20. (Teorema de representació de Riesz). Sigui V un espai de Hilbert pel producte intern (\cdot, \cdot) , aleshores el seu espai dual V' s'identifica amb V en el següent sentit:

1. Per cada $u \in V$, la forma lineal ℓ definida per $\ell(v) = (u, v)$ és contínua, i.e. $\ell \in V'$,
i

$$\|\ell\|_{V'} = \|u\|_V.$$

2. Per cada forma lineal contínua $\ell \in V'$, existeix una única $u \in V$ tal que

$$\forall v \in V, \quad \ell(v) = (u, v) \quad \text{i} \quad \|\ell\|_{V'} = \|u\|_V.$$

DEMOSTRACIÓ: Es pot trobar a la pàgina 135 del llibre [5].

2.3.1 Forma bilineal

Definició 2.21. Sigui V un espai de Hilbert. L'expressió $a(\cdot, \cdot)$ és una forma bilineal simètrica si satisfà les següents propietats:

1. $a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in V.$
2. $a(\alpha u + \beta v, w) = \alpha a(u, w) + \beta a(v, w) \quad \forall u, v, w \in V \text{ i } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$
3. $a(u, u) \geq 0$, i $u = 0$ implica que $a(u, u) = 0.$

D'una forma similar al cas de les formes lineals, una forma bilineal $a(u, v)$ és contínua si existeix una constant M no negativa tal que:

$$a(u, v) \leq M\|u\|\|v\| \quad \forall u, v \in V.$$

2.4 Distribucions

Aquest apartat serveix per contextualitzar les formes lineals en un determinat espai de funcions que tot seguit es definirà.

Definició 2.22. Es denomina suport d'una funció a la clausura del conjunt de punts on la funció no és zero.

Notem que el suport d'una funció és un conjunt tancat per ser clausura. Direm que una funció és de suport compacte si el suport de la funció és un subconjunt acotat.

Definició 2.23. Sigui Ω un obert no buit, definim $\mathcal{D}(\Omega)$ com l'espai de funcions infinitament diferenciables al conjunt Ω i de suport compacte a Ω . Les funcions que pertanyen a aquest espai $\mathcal{D}(\Omega)$ s'anomenen funcions test.

La condició que ha de complir una funció que pertanyi a $\mathcal{D}(\Omega)$ pot semblar excessivament forta. En efecte, si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, aleshores φ i totes les seves derivades han de tendir a zero si x s'apropa a la frontera del suport de φ . A continuació demostrem que $\mathcal{D}(\Omega)$ trobant una funció que compleixi aquestes condicions.

Exemple 2.24. Considerem un punt $a \in \Omega$ i $R \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que la bola de \mathbb{R}^n de centre a i de radi R estigui continguda a Ω . Sigui $B_R(a)$ la bola esmentada, definim una funció φ de $\mathcal{D}(\Omega)$ com:

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x-a\|^2 - R^2}} & \text{si } x \in B_R(a) \\ 0 & \text{si } x \notin B_R(a) \end{cases}$$

on $\|x - a\|$ és la norma eculidiana de $x - a$ a \mathbb{R}^n . Observem que si $x \in B_R(a)$ i fem $x \rightarrow \partial B_R(a)$, i.e, $\|x - a\| \rightarrow R$ aleshores:

$$\frac{1}{\|x - a\|^2 - R^2} \rightarrow -\infty,$$

i per tant,

$$\varphi(x) \rightarrow 0.$$

A més, notem que cada derivada parcial de φ dins de $B_R(a)$ consisteix en la mateixa funció multiplicada per per una funció racional. Aleshores totes les derivades convergeixen a zero si ens apropem a la frontera del suport de φ .

En primer lloc, introduïm algunes notacions per a derivades parcials, la notació multi-índex.

Notació 2. Sigui $\phi \in \mathcal{C}^\infty$ i $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ és un vector de nombres sencers positius:

$$\partial^\alpha \phi = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} \phi = \frac{\partial^{|\alpha|} \phi}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

amb

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

Seguidament, proporcionem una definició de successió convergent a $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definició 2.25. (Successió convergent). Sigui $\{\varphi_m\}$ una successió de $\mathcal{D}(\Omega)$. Direm que φ_m tendeix a $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, ho denotem $\varphi_m \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} \varphi$, si es compleix:

1. El suport de φ_m es manté dins un compacte fix K de Ω .
2. Per qualsevol $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\partial^\alpha \varphi_m \rightarrow \partial^\alpha \varphi$ uniformement sobre K .

Definició 2.26. (Distribució). Una distribució T a Ω és una forma lineal contínua a $\mathcal{D}(\Omega)$. Més explícitament, la funció

$$\begin{aligned} T: \mathcal{D}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

és una distribució si compleix:

1. $\langle T, \alpha\varphi + \beta\phi \rangle = \langle \alpha T, \varphi \rangle + \langle \beta T, \phi \rangle \quad \forall \varphi, \phi \in \mathcal{D}(\Omega), i \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
2. Sigui $\{\varphi_m\}$ una successió de $\mathcal{D}(\Omega)$: $\varphi_m \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} \varphi \implies \langle T, \varphi_m \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$.

L'espai de les distribucions el denotarem $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Observació 2.27. L'espai de les distribucions $\mathcal{D}'(\Omega)$ és l'espai dual de $\mathcal{D}(\Omega)$.

De forma anàloga amb el que hem fet amb l'espai $\mathcal{D}(\Omega)$, proporcionem una definició de successió convergent a $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Definició 2.28. Si $\{T_m\}$ és una successió de $\mathcal{D}'(\Omega)$, direm que T_m tendeix a T de $\mathcal{D}'(\Omega)$ si per tota funció φ de $\mathcal{D}(\Omega)$, $\langle T_m, \varphi \rangle$ tendeix a $\langle T, \varphi \rangle$.

Exemple 2.29. Un exemple comú de distribució és la *massa de Dirac*. Sigui a un punt de Ω , definim la distribució *massa de Dirac* δ_a al punt a com

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a).$$

2.4.1 Espai $L^2(\Omega)$

Un altre exemple que abordarem més profundament, degut a la seva gran importància en el context d'aquest capítol, és l'espai de funcions de quadrat integrable, $L^2(\Omega)$. Recordem pel Teorema 2.14 que és un espai de Hilbert pel producte escalar $(\cdot, \cdot)_{0,\Omega}$ i amb la norma definida com:

$$\|f\|_{0,\Omega} = (f, f)_{0,\Omega}^{1/2} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

L'objectiu és establir una relació entre les funcions de $L^2(\Omega)$ amb les distribucions de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Primer de tot notem un resultat clàssic de la teoria de la integració que utilitzarem tot seguit.

Proposició 2.30. $\mathcal{D}(\Omega)$ és dens a $L^2(\Omega)$

DEMOSTRACIÓ: Es pot trobar a la pàgina 245 del llibre [7].

Donada una funció f de $L^2(\Omega)$, l'associem a la distribució T_f a Ω definida com:

$$\begin{aligned} T_f: \mathcal{D}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx. \end{aligned}$$

Proposició 2.31. L'aplicació

$$\begin{aligned} L^2(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \\ f &\longmapsto T_f, \end{aligned}$$

és injectiva.

DEMOSTRACIÓ: Sigui f una funció de $L^2(\Omega)$ tal que $T_f = 0$, i.e.

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx = 0.$$

Degut a la Proposició 2.30, tenim:

$$\forall \varphi \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx = 0.$$

fet que implica que $f = 0$. Per la linealitat de les distribucions, això implica que la igualtat entre dos distribucions T_f i T_g implica la igualtat de les funcions f i g en el sentit de $L^2(\Omega)$. \square

Així doncs, podem identificar f i T_f , que equival a identificar $L^2(\Omega)$ com un subespai de $\mathcal{D}'(\Omega)$. A continuació, aquesta identificació es farà de forma sistemàtica i escriurem

$$L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega).$$

Proposició 2.32. *L'aplicació identitat de $L^2(\Omega)$ a $\mathcal{D}'(\Omega)$, també anomenada injecció canònica, és contínua. Per tant, si f_m tendeix a f dins $L^2(\Omega)$, aleshores f_m tendeix a f dins $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

DEMOSTRACIÓ: Si $\|f_m - f\|_{0,\Omega} \rightarrow 0$, volem demostrar que f_m tendeix a f dins $\mathcal{D}'(\Omega)$ que per la Definició 2.28 això equival a veure que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ es té que $\langle T_f, \varphi \rangle$ tendeix a $\langle T_{f_m}, \varphi \rangle$. En efecte per linealitat i utilitzant la desigualtat de Hölder trobem:

$$\left| \langle T_f, \varphi \rangle - \langle T_{f_m}, \varphi \rangle \right| = \left| \langle T_f - T_{f_m}, \varphi \rangle \right| = \left| \int_{\Omega} (f - f_m)\varphi dx \right| \leq \|f - f_m\|_{0,\Omega} \|\varphi\|_{0,\Omega} \rightarrow 0.$$

\square

2.5 Derivada generalitzada (dèbil)

Hi ha una gran varietat de definicions de derivades que són útils a diferents situacions. La definició en la branca del “càlcul” correspon a

$$u'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h},$$

i es tracta d'una definició “local” que dona informació sobre la funció u en un entorn proper al punt x .

La formulació variacional que es desenvoluparà en aquest apartat pren un sentit més global perquè no són necessaris els valors puntuals de la derivada. En efecte, en els problemes que analitzarem en capítols posteriors apareixen derivades que es poden interpretar com a funcions a $L^2(\Omega)$. Recordem l'exemple vist anteriorment on els valors puntuals de les funcions de l'espai de Lebesgue són irrellevants (Exemple 2.9). Per tant, una funció d'aquest espai està determinada pel seu comportament global. Així doncs, és natural desenvolupar una noció global de derivada més adequada a aquest tipus d'espais.

Definició 2.33. *Sigui T una distribució a Ω , definim la derivada en el sentit de distribucions, $\frac{\partial T}{\partial x_i}$, com*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle. \quad (2.1)$$

Observació 2.34. Observem que

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x_i} : \mathcal{D}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle, \end{aligned}$$

és fàcil veure que és una forma lineal contínua a $\mathcal{D}(\Omega)$. Això defineix $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ com una distribució.

Ara usem la identificació que hem explicat a l'apartat anterior, $L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. Si prenem $f \in \mathcal{C}^1 \subset L^2(\Omega)$, la seva derivada en el sentit clàssic $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ coincideix amb la seva derivada en el sentit de les distribucions. Vegem-ho a continuació:

- Per una banda, la definició de la derivada en el sentit de distribucions:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \left\langle \frac{\partial T_f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T_f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = - \int_{\Omega} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx. \quad (2.2)$$

- Per altra banda, en el sentit clàssic i fent ús de la integració per parts:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \left\langle T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}}, \varphi \right\rangle = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx. \quad (2.3)$$

on s'ha utilitzat que les funcions φ són de suport compacte a Ω .

Definició 2.35. D'una forma més general, si T és una distribució a Ω i $\alpha \in \mathbb{N}^n$ és un multi-índex qualsevol, definim la derivada en el sentit de distribucions $\partial^\alpha T = \frac{\partial^{|\alpha|} T}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ com

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle. \quad (2.4)$$

Per tant, una distribució a Ω és infinitament diferenciable en el sentit de distribucions, ja que φ són infinitament diferenciables.

Proposició 2.36. L'aplicació

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \\ T &\longmapsto \partial^\alpha T, \end{aligned}$$

és contínua.

DEMOSTRACIÓ: Sigui $\{T_m\}$ una successió de distribucions de $\mathcal{D}'(\Omega)$ i $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, tenim que per a tot $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\left| \langle \partial^\alpha T_m, \varphi \rangle - \langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle \right| = \left| \langle \partial^\alpha (T_m - T), \varphi \rangle \right| = \left| \langle T_m - T, \partial^\alpha \varphi \rangle \right| = \left| \langle T_m, \partial^\alpha \varphi \rangle - \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle \right|.$$

Fent ús de la Definició 2.28 tenim que si $T_m \longrightarrow T$ aleshores $\langle T_m, \partial^\alpha \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle$ i per tant

$$\langle \partial^\alpha T_m, \varphi \rangle \longrightarrow \langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle.$$

□

2.6 L'espai de Sóbolev $H^1(\Omega)$

En aquest apartat es definirà l'espai de Sóbolev d'ordre 1 i les seves propietats corresponents. Sigui v una funció de $L^2(\Omega)$; la identifiquem amb una distribució a Ω que l'anomenem també v . Així doncs, podem definir les seves derivades $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ on $1 \leq i \leq n$ també com a distribucions a Ω .

Observació 2.37. En general, $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ no pertanyen al subespai $L^2(\Omega)$.

Definició 2.38. Anomenem espai de Sóbolev d'ordre 1 a Ω l'espai

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n \right\}.$$

Dotem $H^1(\Omega)$ del producte escalar

$$(u, v)_{1,\Omega} = \int_{\Omega} \left(uv + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx, \quad (2.5)$$

i per tant la seva norma és

$$\|v\|_{1,\Omega} = (v, v)_{1,\Omega}^{1/2}. \quad (2.6)$$

Teorema 2.39. L'espai $H^1(\Omega)$ és un espai de Hilbert pel producte escalar (2.5).

DEMOSTRACIÓ: Es pot trobar a la pagina 14 del llibre [11].

Teorema 2.40. L'espai $H^1(\Omega)$ és separable, i.e., conté un conjunt dens i numerable.

DEMOSTRACIÓ: Es pot trobar a la pagina 15 del llibre [11].

Recordant la Proposició 2.30 que diu que l'espai $\mathcal{D}(\Omega)$ és dens a $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_{0,\Omega})$, ara ens podem preguntar si aquest espai és també dens a $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{1,\Omega})$. En general no, per això pren sentit definir-ne la seva adherència.

Definició 2.41. Definim $H_0^1(\Omega)$ com l'adherència de $\mathcal{D}(\Omega)$ a $H^1(\Omega)$.

No obstant tenim el següent resultat en el cas on $\Omega = \mathbb{R}^n$:

Teorema 2.42. L'espai $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ és dens a $H^1(\mathbb{R}^n)$, i.e.,

$$H_0^1(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n).$$

DEMOSTRACIÓ: Es pot trobar a la pàgina 16 del llibre [11].

Teorema 2.43. (Desigualtat de Poincaré). Si Ω és acotat, existeix una constant C que únicament depèn de tot el domini ($C = C(\Omega) > 0$) tal que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \|v\|_{0,\Omega} \leq C(\Omega) \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}.$$

DEMOSTRACIÓ: Es pot trobar a la pàgina 18 del llibre [11].

Corol·lari 2.44. Si Ω és acotat, la seminorma

$$|v|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2},$$

és una norma a $H_0^1(\Omega)$ equivalent a la norma induïda per $\|\cdot\|_{1,\Omega}$

DEMOSTRACIÓ: La demostració de que $|\cdot|_{1,\Omega}$ és una norma és trivial menys quan volem demostrar que si la norma d'un element és nul·la, aleshores l'element és nul. Per fer-ho utilitzem la desigualtat de Poincaré. En efecte:

$$|v|_{1,\Omega} = 0 \implies \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2 = 0 \implies \|v\|_{0,\Omega} = 0 \implies v = 0,$$

on s'ha utilitzat que $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ és norma. □

2.6.1 Teorema de traça i aplicacions

Fins ara s'han estudiat les funcions de l'espai de Sóbolev sota un conjunt obert i actotat Ω , però no sabem com es comporten aquestes funcions sobre la frontera d'aquest conjunt, que anomenarem $\Gamma = \partial\Omega$.

Primer de tot vegem el resultat general que parteix del supòsit que tenim una frontera \mathcal{C}^1 a trossos.

Teorema 2.45. (Teorema de traça). *Suposem que Ω és un obert acotat de \mathbb{R}^n de frontera $\Gamma \mathcal{C}^1$ a trossos. Aleshores $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ és dens a $H^1(\Omega)$ i l'aplicació $\gamma_0 : v \mapsto v|_{\Gamma}$ de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ a $\mathcal{C}^0(\Gamma)$ s'estén per continuïtat a una aplicació lineal i contínua de $H^1(\Omega)$ a $L^2(\Gamma)$ també anomenada γ_0 .*

DEMOSTRACIÓ: Es pot trobar a la pàgina 23 del llibre [11].

Teorema 2.46. *Sigui Ω un obert acotat dins \mathbb{R}^n de frontera $\Gamma \mathcal{C}^1$ a trossos. Aleshores*

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega); v|_{\Gamma} = 0\}.$$

DEMOSTRACIÓ: Es pot trobar a la pàgina 25 del llibre [11].

Una altra aplicació que s'utilitzarà del Teorema de traça és la fórmula de Green generalitzada al conjunt Ω i la seva frontera Γ .

Teorema 2.47. (Fórmula de Green). *Sigui Ω un obert acotat dins \mathbb{R}^n de frontera $\Gamma \mathcal{C}^1$ a trossos. Aleshores, si u i v són funcions de $H^1(\Omega)$, tenim*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx + \int_{\Gamma} uv \nu_i \, d\sigma, \quad 1 \leq i \leq n.$$

DEMOSTRACIÓ: Es pot trobar a la pàgina 27 del llibre [11].

2.6.2 Els espais de Sóbolev $H^m(\Omega)$

Quan tractem exemples de problemes de condicions de contorn més endavant, suposarem inicialment que existeixen solucions prou regulars que compleixen equacions on apareixen derivades d'ordre superior a 1. Això implica que farem ús dels espais de Sóbolev en general d'ordre m .

Definició 2.48. Anomenem espai de Sóbolev d'ordre m a Ω l'espai

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega); \partial^\alpha v \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\}.$$

De forma anàloga dotem $H^m(\Omega)$ del producte escalar

$$(u, v)_{m, \Omega} = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha u \partial^\alpha v \right\} dx, \quad (2.7)$$

i per tant la seva norma és

$$\|v\|_{m, \Omega} = (v, v)_{m, \Omega}^{1/2}.$$

Teorema 2.49. L'espai $H^m(\Omega)$ és un espai de Hilbert separable pel producte escalar (2.7).

DEMOSTRACIÓ: Es pot trobar a la pàgina 31 del llibre [11].

Corol·lari 2.50. Sigui Ω un obert acotat dins \mathbb{R}^n de frontera $\Gamma \in \mathcal{C}^1$ a trossos. Per tota funció u de $H^2(\Omega)$, tenim la següent fórmula de Green:

$$- \int_{\Omega} (\Delta u)v \, dx = + \int_{\Omega} (\nabla u)(\nabla v) \, dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, d\sigma.$$

3 Problemes el·líptics

Mostrarem en el cas de dos exemples simples de problemes de contorn el·líptics com és possible trobar una nova formulació d'aquests problemes, denominada formulació variacional o dèbil.

3.1 Problema de Dirichlet

Una bona forma per entendre com transformar un problema de condicions de contorn a la seva formulació dèbil és inicialment particularitzar-ho al cas més senzill, que correspon al problema de Dirichlet. Aquesta transformació és anàloga pels altres casos però amb certes singularitats.

Sigui Ω un obert acotat de \mathbb{R}^n amb frontera $\Gamma \in \mathcal{C}^1$ a trossos. Donada una funció $f \in L^2(\Omega)$, aleshores la funció u definida a Ω és solució del problema de Dirichlet si compleix:

$$-\Delta u = f \quad \text{a } \Omega, \quad (3.1a)$$

$$u = 0 \quad \text{a } \Gamma. \quad (3.1b)$$

Per simplificar la discussió, suposem que aquest problema (3.1) admet una solució suficientment regular, per exemple que u pertanyi a l'espai de Sóbolev $H^2(\Omega)$.

L'objectiu principal de la transformació a la forma dèbil és baixar l'ordre de la derivada de la banda esquerra de (3.1a). Intuïtivament, una forma per aconseguir-ho seria integrar a banda i banda de l'equació sobre el domini corresponent al problema.

Partim doncs de que $u \in H^2(\Omega)$ és solució de (3.1). Prenem ara una *funció test* que compleixi les condicions de contorn, $v \in H_0^1(\Omega)$, i la multipliquem a banda i banda de l'equació:

$$-(\Delta u)v = fv.$$

Si ara considerem cada banda de l'equació com a funcions, vegem que són iguals a Ω , aleshores les seves integrals sobre el mateix domini també ho són. En efecte:

$$-\int_{\Omega} (\Delta u)v \, dx = \int_{\Omega} fv \, dx. \quad (3.2)$$

Usant la fórmula de Green (Corol·lari 2.50) a la banda esquerra de (3.2) ens permet baixar un ordre la derivada parcial corresponent:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, d\sigma = \int_{\Omega} fv \, dx.$$

Ara apliquem que v és zero a Γ , ja que $v \in H_0^1(\Omega)$, i per tant la integral a la frontera s'anul·la. L'expressió resultant és:

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} fv \, dx. \quad (3.3)$$

Anteriorment, s'ha suposat que $u \in H^2(\Omega)$ per tal de que sigui suficientment regular. Ara, com que l'ordre de la derivada ha disminuït i degut a la condició de contorn (3.1b)

és suficient prendre $u \in H_0^1(\Omega)$. Així doncs, s'obté la formulació variacional del problema de Dirichlet (3.1):

Donada $f \in L^2(\Omega)$, trobar una funció $u \in H_0^1(\Omega)$ que verifiqui

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

3.2 Problema de Neumann

Estudiem un altre problema que difereix del primer principalment degut a la tipologia de la condició de contorn: en comptes de donar-se sobre la funció, s'imposa sobre la seva derivada. Sota els mateixos supòsits sobre els conjunts Ω i Γ definim el problema següent: Donada una funció $f \in L^2(\Omega)$, aleshores la funció u definida a Ω és solució del problema de Neumann si compleix:

$$-\Delta u + u = f \quad \text{a } \Omega, \quad (3.4a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{a } \Gamma. \quad (3.4b)$$

Per simplificar la discussió, suposem que aquest problema (3.4) admet una solució suficientment regular, per exemple que u pertanyi a l'espai de Sóbolev $H^2(\Omega)$.

Anàlogament al problema de Dirichlet, l'objectiu és disminuir l'ordre de la derivada de la banda esquerra de (3.4a). Per fer-ho, multipliquem a banda i banda per una funció test $v \in H^1(\Omega)$ (observem que ara no és necessari que la funció test s'anul·li a la frontera) i integrem sobre el domini Ω :

$$-\int_{\Omega} (\Delta u)v + \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} fv. \quad (3.5)$$

De nou, aplicant la identitat de Green a la primera integral de la banda esquerra de (3.5) s'obté:

$$-\int_{\Omega} (\Delta u)v = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\Gamma} v \frac{\partial u}{\partial \nu} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v,$$

on s'ha aplicat la condició de contorn (3.4b), i per tant integral a la frontera s'anul·la. Per tant, l'expressió resultant és:

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} fv. \quad (3.6)$$

De la mateixa manera que l'apartat anterior, amb aquesta darrera expressió obtinguda, és suficient que $u \in H^1(\Omega)$.

Així doncs, s'obté una nova formulació del problema de Neumann (3.4), l'anomenada *formulació variacional*:

Donada $f \in L^2(\Omega)$, trobar una funció $u \in H^1(\Omega)$ que verifiqui

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} fv.$$

3.3 Problemes variacionals abstractes

El següent apartat té com a objectiu expressar les formulacions variacionals dels dos problemes anteriors d'una forma general abstracte que resultarà adequat per la resolució de nombrosos problemes de condicions de contorn el·líptics. Suposem que tenim:

1. un espai de Hilbert V (sobre \mathbb{R}) de norma $\|\cdot\|$.
2. una forma bilineal $u, v \mapsto a(u, v)$ contínua a $V \times V$.
3. una forma lineal $v \mapsto L(v)$ contínua a V , és a dir un element L del dual V' de V que l'hem dotat de la norma dual:

$$\|L\|_{V'} = \sup_{u \in V, u \neq 0} \frac{|L(u)|}{\|u\|}.$$

Definim el *problema variacional* general, que l'anomenarem *problema \mathcal{P}* :

Trobar una funció $u \in V$ que verifiqui
 $\forall v \in V, \quad a(u, v) = L(v).$

Per tal de que el problema descrit anteriorment pugui admetre una solució, i a més que aquesta sigui única, hem de donar una condició suficient.

Definició 3.1. La forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ s'anomena *V-el·líptica* si existeix una constant $\alpha > 0$ tal que

$$\forall v \in V, \quad a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2.$$

Teorema 3.2. (*Lax-Milgram*). Sigui la forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ V-el·líptica. Aleshores el problema (\mathcal{P}) admet una solució única $u \in V$; a més l'aplicació lineal $L \mapsto u$ és contínua de V' a V .

DEMOSTRACIÓ: Denotem $((\cdot, \cdot))$ el producte escalar a V . Com que L és una forma lineal contínua a V , aleshores pel Teorema de representació de Riesz (Teorema 2.20) tenim que existeix un únic element de V que anomenarem τL tal que

$$\forall v \in V, \quad L(v) = ((\tau L, v)). \tag{3.7}$$

Demostrem ara que (3.7) defineix

$$\begin{aligned} \tau : V' &\longrightarrow V \\ L &\longmapsto \tau L, \end{aligned}$$

una bijecció lineal. Provem primer la linealitat:

- Sigui $\alpha \in \mathbb{R}$, si multipliquem α a la expressió (3.7) obtenim $\forall v \in V \quad \alpha L(v) = \alpha((\tau L, v)) = ((\alpha\tau L, v))$ on hem usat la bilinearitat del producte escalar. D'altra banda, si considerem $\alpha L \in V'$ tornant a utilitzar (3.7) tenim $\forall v \in V \quad \alpha L(v) = ((\tau\alpha L, v))$. Per tant identificant les dues igualtats trobades tenim $((\alpha\tau L, v)) = ((\tau\alpha L, v))$, aleshores $((\alpha\tau L - \tau\alpha L, v)) = 0 \quad \forall v \in V$. Si ara prenem $v = \alpha\tau L - \tau\alpha L$ aleshores per la propietat 3 del producte intern tenim que $\alpha\tau L - \tau\alpha L = 0$. D'aquesta manera arribem a $\alpha\tau L = \tau\alpha L$.

- Siguin $L, G \in V$, tenim que $\forall v \in V$ $L(v) = ((\tau L, v))$ i $G(v) = ((\tau G, v))$. Sumant les dues expressions trobem $(L + G)(v) = L(v) + G(v) = ((\tau L + \tau G, v))$. D'altra banda tenim que $(L + G)(v) = ((\tau(L + G), v))$. Per tant, identificant les dues igualtats trobades i seguint el mateix procés que el punt anterior tenim $\tau(L + G) = \tau L + \tau G$.

Ara per provar la injectivitat és suficient veure que el nucli és el zero. En efecte, si $\tau L = 0$ aleshores $\forall v \in V$ $((\tau L, v)) = 0$, per tant $L(v) = 0 \forall v \in V$ que és equivalent a dir que $L = 0$. Per veure l'exhaustivitat prenem $w \in V$, aleshores podem definir la següent forma lineal $L_w(v) = ((w, v)) \forall v \in V$, que pel Teorema de Riesz és contínua i per tant $L_w \in V'$. D'aquesta manera hem trobat que $\tau L_w = w$.

A més, com que

$$\|\tau L\| = \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{((\tau L, v))}{\|v\|} = \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{L(v)}{\|v\|} = \|L\|_{V'}.$$

tenim que τ és una isometria.

Ara si fixem $u \in V$ definim la següent tenim forma lineal

$$\begin{aligned} a(u, \cdot) : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto a(u, v), \end{aligned}$$

que és contínua a V , ja que $a(\cdot, \cdot)$ és contínua a $V \times V$. Doncs, pel Teorema de representació de Riesz, tenim que existeix un únic element $\mathcal{A}u \in V$ tal que

$$\forall v \in V, \quad a(u, v) = ((\mathcal{A}u, v)). \quad (3.8)$$

Això defineix un operador lineal i continu $\mathcal{A} : u \rightarrow \mathcal{A}u$. És lineal degut a que $a(u, \cdot)$ és lineal i continu, ja que

$$\|\mathcal{A}u\| = \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{a(u, v)}{\|v\|} \leq M\|u\|.$$

Notem doncs, que problema (\mathcal{P}) és equivalent a buscar $u \in V$ tal que sigui solució de

$$\mathcal{A}u = \tau L.$$

Per provar-ho, és suficient demostrar que \mathcal{A} és una bijecció de V a V . En efecte, com que hem demostrat que \mathcal{A} és un operador lineal i continu, aleshores \mathcal{A}^{-1} serà continu de V a V . De fet, es mostrarà que \mathcal{A}^{-1} és un operador acotat, i per tant, continu de V a V . Primer, per demostrar la injectivitat utilitzem la hipòtesi de V -el·lipticitat de $a(\cdot, \cdot)$. En efecte tenim que

$$\forall v \in V, \quad \alpha\|v\|^2 \leq a(v, v) = ((\mathcal{A}v, v)) \leq \|\mathcal{A}v\|\|v\|,$$

aleshores

$$\forall v \in V, \quad \|\mathcal{A}v\| \geq \alpha\|v\|, \quad (3.9)$$

i, per tant, si $\mathcal{A}u = 0 \Rightarrow \|\mathcal{A}u\| = 0 \Rightarrow 0 \geq \alpha\|v\| \Rightarrow \|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$.

Per demostrar l'exhaustivitat volem veure que $\mathcal{A}V = V$. Per fer-ho, comprovarem que $\mathcal{A}V$ és un tancat de V i que l'ortogonal $(\mathcal{A}V)^\perp$ és igual a $\{0\}$. Anem a veure que és un tancat: sigui $w \in \bar{\mathcal{A}V}$ i $(\mathcal{A}v_m)$ una successió de $\mathcal{A}V$ que convergeix a $w \in V$, tenim per (3.9) que

$$\|\mathcal{A}v_m - \mathcal{A}v_n\| = \|\mathcal{A}(v_m - v_n)\| \geq \alpha\|v_m - v_n\|,$$

de forma que (v_m) és una successió de Cauchy a l'espai V . Com que és espai de Hilbert aleshores (v_m) convergeix a un element $v \in V$. Aleshores, utilitzant la continuïtat de \mathcal{A} , tenim

$$\|\mathcal{A}v_m - \mathcal{A}v\| \leq \|v_m - v\| \rightarrow 0,$$

per tant $(\mathcal{A}v_m)$ convergeix a $\mathcal{A}v$. Aleshores tenim que $w = \mathcal{A}v \in \mathcal{A}V$, fet que demostra que $\mathcal{A}V$ és un tancat de V . Considerem $v_0 \in (\mathcal{A}V)^\perp$, aleshores tenim per la V -el·lipticitat

$$\alpha\|v_0\|^2 \leq a(v_0, v_0) = ((\mathcal{A}v_0, v_0)) = 0.$$

Per tant arribem a $v_0 = 0$. Doncs s'ha demostrat que $(\mathcal{A}V)^\perp$ és $\{0\}$ i per tant, que \mathcal{A} és exhaustiu.

Una vegada vist que \mathcal{A} és bijectiu de V a V falta demostrar que està acotat, per demostrar que és continu. En efecte, usant (3.9) tenim

$$\forall v \in V, \quad \|\mathcal{A}^{-1}v\| \leq \frac{1}{\alpha}\|v\|.$$

Aleshores usant (3.8) tenim que la solució u del problema (\mathcal{P}) verifica

$$\|u\| = \|\mathcal{A}^{-1}\tau L\| \leq \frac{1}{\alpha}\|\tau L\| = \frac{1}{\alpha}\|L\|_{V'}.$$

□

Si a més suposem que la forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ és simètrica, podem introduir el funcional quadràtic definit per tot $v \in V$ com

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v),$$

i considerem el *problema de minimització*:

Trobar una funció $u \in V$ que verifiqui

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v).$$

(3.10)

Teorema 3.3. *Suposem que la forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ és simètrica i V -el·líptica. Aleshores el problema (3.10) admet una solució única $u \in V$ que coincideix amb la solució del problema (\mathcal{P}) .*

DEMOSTRACIÓ: Es pot trobar a la pàgina 38 del llibre [11].

Exemple 3.4. Apliquem els resultats al problema de Dirichlet (3.1). Un cop obtinguda la formulació variacional identifiquem els següents termes respecte el problema variacional general \mathcal{P} :

- $V = H_0^1(\Omega)$ dotat de la norma $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{1,\Omega}$.
- $a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx$.
- $L(v) = \int_\Omega f v \, dx$.

Observem que la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ (resp. la forma lineal $L(\cdot)$) és contínua a $V \times V$ (resp. a V). En efecte:

$$\begin{aligned} a(u, v) &\leq |u|_{1,\Omega} |v|_{1,\Omega} \leq \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}, \\ L(v) &\leq \|f\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} \leq \|f\|_{0,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

D'altra banda, com que Ω és un obert acotat de \mathbb{R}^n , la forma bilineal és $H_0^1(\Omega)$ -el·líptica. Tenim degut a la desigualtat de Poincaré:

$$\forall v \in H_0^1, \quad a(v, v) \geq \frac{1}{1 + C^2(\Omega)} \|v\|_{1,\Omega}^2.$$

Pel Teorema de Lax-Milgram existeix, doncs, una funció $u \in H_0^1(\Omega)$ i una sola tal que compleix la forma variacional del problema de Dirichlet. A més, com que la forma bilineal és simètrica, degut al Teorema 3.3, aquesta funció u minimitza el funcional quadràtic

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla v \nabla v \, dx - \int_{\Omega} f v \, dx.$$

3.4 Aproximació variacional

Fins ara, tots els problemes que s'han plantejat parteixen d'espais de funcions V de dimensió infinita. En aquest capítol s'aborda l'estudi de la resolució numèrica d'aquests problemes. L'objectiu és trobar una aproximació de la solució exacta que anomenarem u_h . Per fer-ho, considerarem un subespai $V_h \in V$ de dimensió finita I , de tal manera que s'adapti el millor possible a la solució del problema. El paràmetre h depèn de la dimensió de I de manera que quan h tendeix a zero, I tendeix a infinit. Al final d'aquesta secció s'explicarà quins espais V_h escollirem per resoldre els exemples dels darrers capítols. Partim de les mateixes hipòtesis fetes en la formulació abstracta dels problemes el·líptics: V un espai de Hilbert dotat de la norma $\|\cdot\|$; una forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ contínua a $V \times V$ i V -el·líptica; una forma lineal L contínua a V . També considerem el problema \mathcal{P} descrit prèviament: trobar $u \in V$ tal que

$$\forall v \in V, \quad a(u, v) = L(v).$$

admet una solució i només una. Suposant que ens trobem en el cas on la forma bilineal és simètrica, per obtenir una aproximació de u podem considerar el problema de minimització de J (3.10) sobre el subespai V_h i buscar u_h la solució de

$$J(u_h) = \min_{v \in V_h} J(v). \tag{3.11}$$

Proposició 3.5. *El problema de minimització (3.11) admet una solució única u_h , i aquesta solució es caracteritza per ser l'únic element de V_h tal que*

$$\forall v_h \in V_h, \quad a(u_h, v_h) = L(v_h).$$

DEMOSTRACIÓ: Apliquem el Teorema 3.3.

Així doncs, definim el problema aproximat \mathcal{P}_h al subespai $V_h \subset V$: trobar $u_h \in V_h$ que sigui solució de:

$$\forall v_h \in V_h, \quad a(u_h, v_h) = L(v_h).$$

Teorema 3.6. *El problema aproximat \mathcal{P}_h , admet una única solució u_h de V_h .*

DEMOSTRACIÓ: És la versió del Teorema de Lax-Milgram en dimensió finita. Sigui $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_I)$ una base de l'espai V_h , podem expressar la solució u_h de la següent forma

$$u_h = \sum_{j=1}^I \xi_j \varphi_j, \quad \xi_j \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq I.$$

El problema \mathcal{P}_h equival a la resolució del sistema lineal de I equacions amb I incògnites

$$\sum_{j=1}^I a(\varphi_j, \varphi_i) \xi_j = L(\varphi_i), \quad 1 \leq i \leq I. \quad (3.12)$$

Observem que, sota la hipòtesi de que $a(\cdot, \cdot)$ és V-el·líptica, tenim que la matriu $(a(\varphi_j, \varphi_i))_{1 \leq i, j \leq I}$ és invertible i per tant, el sistema sempre tindrà solució. Suposem que tenim la següent situació:

$$\sum_{j=1}^I a(\varphi_j, \varphi_i) \xi_j = 0, \quad 1 \leq i \leq I,$$

si imposem la condició de V-el·lipticitat tenim

$$\alpha \left\| \sum_{j=1}^I \xi_j \varphi_j \right\|^2 \leq a \left(\sum_{j=1}^I \xi_j \varphi_j, \sum_{i=1}^I \xi_i \varphi_i \right) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^I a(\varphi_j, \varphi_i) \xi_j \xi_i = 0,$$

i per tant, com que $\alpha > 0$ tenim

$$\sum_{j=1}^I \xi_j \varphi_j = 0,$$

i com que $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq I}$ és una base de V_h , aleshores

$$\xi_j = 0, \quad 1 \leq j \leq I.$$

Així, (3.12) defineix de manera única les coordenades de la solució u_h a la solució base $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_I)$ de V_h . \square

Observació 3.7. La solució del problema (\mathcal{P}_h) es correspon amb la solució del sistema lineal (3.12) sempre i quan la forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ és simètrica.

Observació 3.8. Suposant que la forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ és simètrica i V-el·líptica, la matriu de coeficients del sistema lineal (3.12) és una matriu simètrica i definida positiva. Per veure-ho, denotem per A la matriu de coeficients que es defineix de la següent manera:

$$a(\varphi_i, \varphi_j) = A_{ij}, \quad 0 \leq i, j \leq I,$$

on A_{ij} són les components de la matriu, i $\{\varphi_1, \dots, \varphi_I\}$ són les funcions de la base de V_h . Clarament, si $a(\cdot, \cdot)$ és simètrica, aleshores la matriu A també ho serà. En cas de que es vulgui calcular $a(u, v)$, on $u, v \in V_h$ són dues funcions qualssevol, aleshores ho podem fer de la següent forma:

$$a(u, v) = u^T A v.$$

Si $a(\cdot, \cdot)$ és V_h -el·líptica, tenim que existeix $\alpha > 0$ tal que per tot $v \in V_h$ no nul tenim

$$0 < \alpha \|v\|^2 \leq a(v, v) = v^T A v,$$

per tant, A és definida positiva.

Observació 3.9. Els termes independents del sistema lineal (3.12) es calculen mitjançant una integral. Sovint s'utilitzen mètodes per aproximar aquestes integrals. Pel cas unidimensional farem servir la regla del trapezi. Pel cas bidimensional s'utilitzaran regles de quadratura sobre triangles. Més endavant, al capítol de Mètodes Numèrics i Computacionals, ho tractarem amb més detall.

Tal com s'ha dit a l'inici de la secció, abans de parlar de l'ordre del mètode d'aproximació variacional, ens centrarem en els subespais V_h . El factor clau a l'hora d'obtenir una bona aproximació és escollir V_h de tal manera que la solució aproximada u_h s'adapti el millor possible a la solució u . Pels exemples que tractarem als darrers capítols, la solució u es pot aproximar bé per una poligonal u_h i, per tant, prendrem V_h com un espai de funcions afins a trossos. Pel cas unidimensional dividirem Ω en intervals d'amplada h . Pel cas bidimensional construirem sobre Ω una malla de triangles on h dependrà del diàmetre d'aquests. En aquest cas les funcions afins a trossos tindran dues variables corresponents a la dimensió del problema.

Un cop trobada la solució aproximada u_h del problema (\mathcal{P}_h) , ens podem preguntar quin és l'error comès respecte la solució exacta u del problema (\mathcal{P}) . El fet és que no podem calcular l'error com si u_h interpolés a u , ja que no sabem si realment l'interpolava. El següent resultat fonamental il·lustra que aquest error dependrà de si l'espai escollit V_h aproxima de forma raonable o no la solució del problema (\mathcal{P}) .

Teorema 3.10. *Existeix una constant $C > 0$ independent del subespai $V_h \subset V$ tal que*

$$\|u - u_h\| \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|.$$

Definició 3.11. *Direm que el mètode d'aproximació variacional convergeix si*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\| = 0.$$

Sempre que el mètode d'aproximació variacional convergeixi, el Teorema 3.10 mostra que el problema del càlcul de l'error d'aquest mètode es redueix a avaluar $\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|$, que correspon a l'error d'interpolació de l'espai V_h . Volem conèixer la rapidesa de la convergència quan $h \rightarrow 0$. L'objectiu, doncs, és trobar una cota superior de l'error:

$$\|u - u_h\| \leq \psi(h),$$

on $\psi(h)$ és una funció que tendeix a anul·lar-se quan h tendeix a zero. Apel·lant de nou el Teorema 3.10 tenim que, a la pràctica, aquesta funció és de la forma $\psi(h) = Ch^k$, on C és una constant independent de h però depèn de la solució u , i k és una constant positiva. Direm que el mètode d'aproximació variacional té *ordre k* i escriurem

$$\|u - u_h\| = O(h^k).$$

Observació 3.12. Pel cas unidimensional quan construïm V_h usant funcions lineals a trossos sobre intervals de llargada h tenim que $\psi(h) = Ch^2$. Per tant, l'error de interpolació té ordre 2 en aquest cas. Usant el Teorema 3.10 podem concloure que:

$$\|u - u_h\| = O(h^2).$$

4 Problemes parabòlics

Fins ara hem vist problemes les solucions dels quals només depenen de la coordenada espacial. Aquest capítol serveix d'introducció pels problemes evolutius on el temps és una variable més de la solució. Per fer-ho ens centrarem en el problema parabòlic més habitual: l'equació de la calor; i en donarem una formulació *feble*.

4.1 Equació de la calor

Sigui Ω un obert acotat de \mathbb{R}^n amb frontera $\Gamma \in \mathcal{C}^1$ a trossos. A més de les condicions de contorn, com que es tracta d'un problema evolutiu, cal definir el domini temporal i les condicions inicials. Prenem $T > 0$, definim

$$Q_T = \Omega \times (0, T), \quad \Sigma_T = \Gamma \times (0, T),$$

i considerem el problema següent: donades les funcions $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (temperatura inicial) i $f : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ (font de calor), trobar una funció (temperatura):

$$\begin{aligned} u : Q_T &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\mapsto u(x, t), \end{aligned}$$

que sigui solució de les equacions:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad \text{a } Q_T \text{ (equació de la calor),} \quad (4.1a)$$

$$u = 0 \quad \text{a } \Sigma_T \text{ (condició de contorn),} \quad (4.1b)$$

$$u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{a } \Omega \text{ (condició inicial).} \quad (4.1c)$$

Les equacions descrites representen l'evolució de la temperatura u en funció del temps t a un medi suposem continu, homogeni i isòtrop. L'equació de la calor hauria d'incloure una sèrie de constants físiques, com la conductivitat tèrmica. Per centrar-nos en la part matemàtica, hem considerat les unitats adients de u per tal de que no apareixin aquestes constants. En les condicions de contorn, s'ha definit una temperatura igual a zero i per les condicions inicials la temperatura inicial u_0 .

Suposem que la solució de (4.1) és suficientment regular. Anàlogament al problema de Dirichlet, l'objectiu és disminuir l'ordre de la derivada de la banda esquerra de (4.1a). Per fer-ho, multipliquem a banda i banda per una funció test $v \in H_0^1(\Omega)$ i integrem sobre el domini Ω :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} v(x) dx - \int_{\Omega} \Delta u(x, t) v(x) dx = \int_{\Omega} f(x, t) v(x) dx. \quad (4.2)$$

Observem que la derivada temporal pot "sortir" de la integral:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} v(x) dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t) v(x) dx.$$

Usem la identitat de Green a la integral de la banda esquerra de (4.2), que conté la laplaciana, i obtenim:

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t) v(x) dx + \int_{\Omega} \nabla u(x, t) \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x, t) v(x) dx. \quad (4.3)$$

El següent pas serà integrar les funcions $u(x, t)$ i $f(x, t)$ en funció de la variable espacial x , deixant fixada $t \in (0, T)$. Formalment, equival a resoldre la integral per trobar $\forall t \in (0, T)$ la funció

$$\begin{aligned} u(t): \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto u(t)(x) = u(x, t). \end{aligned}$$

de manera que la funció u pugui identificar-se amb la funció $t \mapsto u(t)$ definida a $(0, T)$, amb valors dins un espai de funcions de Ω a \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} (0, T) &\longrightarrow \{f \mid f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\} \\ t &\longmapsto u(t), \end{aligned}$$

Observem doncs, que un cop feta la integració, la solució només dependrà de la variable temporal i obtindrem un sistema d'equacions diferencials.

Notació 3. Sigui $\varphi, \psi \in L^2(\Omega)$

$$(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \varphi(x)\psi(x) dx,$$

i per tot $\varphi, \psi \in H^1(\Omega)$

$$a(\varphi, \psi) = \int_{\Omega} \nabla \varphi \nabla \psi dx.$$

D'aquesta manera arribem a una nova formulació del problema de la calor:

<p>Trobar una funció $u: t \in (0, T) \mapsto u(t) \in H_0^1(\Omega)$ que verifiqui</p> $\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \frac{d}{dt}(u(t), v) + a(u(t), v) = (f(t), v),$ $u(0) = u_0,$ <p>on la derivada $\frac{d}{dt}$ es pren en el sentit de distribucions a $(0, T)$.</p>	(4.4)
--	-------

4.2 Mètode de discretització

De la mateixa forma que hem fet al capítol d'aproximació variacional pels problemes el·líptics, escollim un subespai V_h de V de dimensió finita I per tal de construir una solució aproximada

$$\begin{aligned} u_h: [0, T] &\longrightarrow V_h \\ t &\longmapsto u_h(t), \end{aligned}$$

solució del sistema diferencial ordinari:

$$\frac{d}{dt}(u_h(t), v) + a(u_h(t), v_h) = (f(t), v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \quad (4.5a)$$

$$u_h(0) = u_h^0. \quad (4.5b)$$

Ara introduïm una base $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq I}$ de l'espai V_h i, per tant, podem expressar la funció u_h com a combinació lineal d'aquestes bases:

$$u_h(t) = \sum_{j=1}^I \xi_j(t) \varphi_j.$$

En particular també tenim

$$u_h^0 = \sum_{j=1}^I \xi_j^0 \varphi_j.$$

D'aquesta forma podem “factoritzar” les solucions aproximades en el sumatori de dos components: un que depèn únicament del temps (els coeficients) i l'altre que depèn de l'espai (funcions de la base de l'espai). Així doncs, un cop substituïm la solució aproximada en el problema (5.1), la part temporal del sumatori es pot extreure de la integral de tal manera que en resulta:

$$\sum_{j=1}^I (\varphi_j, \varphi_i) \frac{d\xi_j(t)}{dt} + \sum_{j=1}^I a(\varphi_j, \varphi_i) \xi_j(t) = (f(t), \varphi_i), \quad 1 \leq i \leq I, \quad (4.6a)$$

$$\xi_i(0) = \xi_i^0. \quad (4.6b)$$

Notació 4. *Anomenem:*

- *Matriu de rigidesa a* $R = (a(\varphi_j, \varphi_i))_{1 \leq i, j \leq I}$.
- *Matriu de massa a* $M = ((\varphi_j, \varphi_i))_{1 \leq i, j \leq I}$.
- $\beta(t) = (\beta_1(t), \dots, \beta_I(t))^T$, on $\beta_i(t) = (f(t), \varphi_i)$ per tot $1 \leq i \leq I$.
- $\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_I(t))^T$.

El sistema d'equacions diferencials, doncs, es pot expressar com a equació diferencial matricial:

$$M \frac{d\xi(t)}{dt} + R\xi(t) = \beta(t), \quad (4.7a)$$

$$\xi(0) = \xi^0. \quad (4.7b)$$

Hi ha varis mètodes de discretització temporal per resoldre (4.7). En el cas que ens ocupa, utilitzarem el mètode de Crank-Nicolson, un dels més comuns en el context del mètode dels elements finits. Aquest mètode s'explica més endavant a la secció 5.1 del treball i s'aplica al problema general de Cauchy (5.1). Així doncs, primer de tot identifiquem els termes del problema (5.1) amb el problema (4.7):

- $y(t) \rightarrow \xi(t)$.
- $\phi(t, y(t)) \rightarrow \phi(t, \xi(t)) = M^{-1}\beta(t) - M^{-1}R\xi(t)$.

obtenim per $0 \leq n \leq N - 1$:

$$\frac{1}{\Delta t} (\xi^{n+1} - \xi^n) = \frac{1}{2} \phi(t_{n+1}, \xi^{n+1}) + \frac{1}{2} \phi(t_n, \xi^n),$$

i aleshores, per $0 \leq n \leq N - 1$

$$\frac{1}{\Delta t}(\xi^{n+1} - \xi^n) = \frac{1}{2}(M^{-1}\beta^{n+1} - M^{-1}R\xi^{n+1}) + \frac{1}{2}(M^{-1}\beta^n - M^{-1}R\xi^n).$$

Multiplicant per M , reagrupant termes i aïllant ξ^{n+1} trobem la següent expressió:

$$\left(M + \frac{\Delta t}{2}R\right)\xi^{n+1} = \left(M - \frac{\Delta t}{2}R\right)\xi^n + \frac{\Delta t}{2}(\beta^{n+1} + \beta^n), \quad 0 \leq n \leq N - 1. \quad (4.8)$$

Observació 4.1. Per obtenir el sistema lineal (4.8) hem multiplicat per M per tal d'evitar tenir M^{-1} . El motiu rau en que invertir una matriu és un procés computacionalment costós. A més, com veurem més endavant, M és una matriu que conté molts zeros, fet que es pot aprofitar per accelerar el càlcul computacional.

Observació 4.2. La matriu de coeficients del sistema lineal (4.8), que és $M + \frac{\Delta t}{2}R$, és una matriu simètrica i definida positiva.

Així doncs, el mètode de Crank-Nicolson permet reduir una equació diferencial matricial a un mètode iteratiu d'equacions lineals matricials. Així doncs, obtindrem per cada pas de temps n la solució ξ^n . Per tant, tenint en compte la base que hem usat abans, trobem la respectiva solució aproximada a l'instant t_n :

$$u_h^n = u_h(t_n) = \sum_{j=1}^I \xi_j^n \varphi_j, \quad 1 \leq n \leq N.$$

5 Mètodes numèrics i computacionals

5.1 Discretització temporal

Considerem el següent problema de Cauchy:

$$y'(t) = \phi(t, y(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5.1a)$$

$$y(0) = y_0, \quad (5.1b)$$

on $\varphi : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és una funció contínua.

L'objectiu és estudiar com resoldre'l usant un mètode numèric per obtenir-ne una solució aproximada. Comencem discretitzant l'interval $[0, T]$ mitjançant un *pas de temps* que definim com

$$\Delta t = \frac{T}{N},$$

associat a un enter $N \geq 1$ i aleshores, obtenim l'instant de temps en el pas n :

$$t_n = n\Delta t, \quad 0 \leq n \leq N.$$

Així doncs, per cada $n = 1, \dots, N$ volem calcular una aproximació y^n de $y(t_n)$. Un mètode consisteix en transformar l'equació diferencial en una equació de diferències finites:

$$\frac{1}{\Delta t}(y^{n+1} - y^n) = \theta\phi(t_{n+1}, y^{n+1}) + (1 - \theta)\phi(t_n, y^n), \quad 0 \leq n \leq N - 1, \quad (5.2)$$

on $\theta \in [0, 1]$ és un paràmetre. Observem que es tracta d'un mètode on la solució aproximada a l'instant t_{n+1} , y^{n+1} , es pot calcular si sabem la solució aproximada a l'instant t_n , y^n . Distingim dos tipus de mètode segons el paràmetre θ :

1. Mètode explícit ($\theta = 0$): en aquest cas podem trobar de forma explícita y^{n+1} en funció de y^n .
2. Mètode implícit ($\theta > 0$): en aquest cas y^{n+1} s'obté implícitament com una solució d'una equació, en general, no lineal.

En primer lloc, estudiem l'ordre de l'error d'aquest mètode. Suposem que la solució $y : t \rightarrow y(t)$ del problema de Cauchy (5.1) és prou regular. Volem calcular l'error ϵ_n de l'aproximació, i per fer-ho avaluem la solució exacta a l'expressió (5.2). En efecte, tenim:

$$\frac{1}{\Delta t}(y(t_{n+1}) - y(t_n)) = \theta\phi(t_{n+1}, y(t_{n+1})) + (1 - \theta)\phi(t_n, y(t_n)) + \epsilon_n. \quad (5.3)$$

Per calcular la banda esquerra de (5.3) considerem primer el desenvolupament de Taylor de la solució:

$$y(t) = y(t_n) + y'(t_n)(t - t_n) + y''(t_n)\frac{(t - t_n)^2}{2} + O((t - t_n)^3).$$

Si ara ho avaluem al punt t_{n+1} i fem $(t_{n+1} - t_n) = \Delta t$ obtenim

$$y(t_{n+1}) - y(t_n) = y'(t_n)\Delta t + y''(t_n)\frac{\Delta t^2}{2} + O(\Delta t^3).$$

Dividint per Δt l'expressió arribarem a l'expressió que volíem:

$$\frac{1}{\Delta t}(y(t_{n+1}) - y(t_n)) = y'(t_n) + y''(t_n)\frac{\Delta t}{2} + O(\Delta t^2). \quad (5.4)$$

Per calcular els termes de la banda dreta de (5.3) usem que $y(t)$ és solució de (5.1a) i per tant:

$$\begin{aligned} \theta\phi(t_{n+1}, y(t_{n+1})) + (1 - \theta)\phi(t_n, y(t_n)) &= \theta y'(t_{n+1}) + (1 - \theta)y'(t_n) = \\ &= y'(t_n) + \theta[y'(t_{n+1}) - y'(t_n)]. \end{aligned}$$

Si ara utilitzem el desenvolupament de Taylor de $y'(t_{n+1}) - y'(t_n)$ obtenim

$$\theta\phi(t_{n+1}, y(t_{n+1})) + (1 - \theta)\phi(t_n, y(t_n)) = y'(t_n) + \theta\Delta t y''(t_n) + O(\Delta t^2). \quad (5.5)$$

Així doncs, sabem que l'error de l'aproximació serà la diferència entre (5.4) i (5.5):

$$\epsilon_n = y''(t_n)\Delta t \left(\frac{1}{2} - \theta\right) + O(\Delta t^2).$$

Podem concloure que tenim dos casos:

- Si $\theta \neq \frac{1}{2}$, aleshores $\epsilon_n = O(\Delta t)$, i.e, el mètode tindrà ordre 1.
- Si $\theta = \frac{1}{2}$, aleshores $\epsilon_n = O(\Delta t^2)$, i.e, el mètode tindrà ordre 2.

El següent objectiu és estudiar l'estabilitat del mètode. Per fer-ho, aplicarem el mètode al següent problema test:

$$y' = -\lambda y, \quad t \geq 0, \quad (5.6)$$

$$y(0) = y^0, \quad (5.7)$$

on λ és un valor real positiu i en coneixem la solució:

$$y(t) = y^0 e^{-\lambda t}.$$

Observem que està acotada pels valors de $t \in (0, \infty)$. Si el mètode és estable, aleshores les solucions que genera també són acotades.

Apliquem el mètode a l'equació diferencial (5.6) i obtenim:

$$\frac{1}{\Delta t}(y^{n+1} - y^n) = -\theta\lambda y^{n+1} - (1 - \theta)\lambda y^n, \quad 0 \leq n \leq N - 1,$$

on reagrupant termes i aïllant y^{n+1} s'obté:

$$y^{n+1} = \frac{1 - (1 - \theta)\lambda\Delta t}{1 + \theta\lambda\Delta t} y^n, \quad 0 \leq n \leq N - 1.$$

Si ara volem expressar cada solució y^n en funció de y^0 arribem a:

$$y^n = \left(\frac{1 - (1 - \theta)\lambda\Delta t}{1 + \theta\lambda\Delta t}\right)^n y^0, \quad 0 \leq n \leq N - 1.$$

Ara considerant el canvi de variable $x = \lambda\Delta t$, definim la funció següent:

$$r(x) = \frac{1 - (1 - \theta)x}{1 + \theta x} = 1 - \frac{x}{1 + \theta x}.$$

I per tant, obtenim finalment la solució aproximada de $y(t^n)$:

$$y^n = (r(\lambda\Delta t))^n y^0.$$

Per tal de que sigui una bona aproximació, és necessari que la successió $(y^n)_{n \geq 0}$ sigui acotada. Aquest fet tindrà lloc quan:

$$|r(\lambda\Delta t)| \leq 1.$$

Així, per estudiar l'estabilitat del mètode, ens reduïm a estudiar les solucions d'aquesta desigualtat:

$$|r(x)| = \left| 1 - \frac{x}{1 + \theta x} \right| \leq 1.$$

Contemplem dos casos:

- Si $\frac{x}{1 + \theta x} < 1$, és fàcil veure que la desigualtat es compleix sempre, ja que la fracció és positiva. Aquest cas correspon als valors:

$$\theta > 1 - \frac{1}{x}.$$

- Si $\frac{x}{1 + \theta x} \geq 1$, i.e.

$$\theta \leq 1 - \frac{1}{x},$$

aleshores la desigualtat es compleix si:

$$\left| 1 - \frac{x}{1 + \theta x} \right| = \frac{x}{1 + \theta x} - 1 < 1 \iff \theta \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{x}.$$

Per tant, observem que el mètode serà estable sense cap condició si $\theta \geq \frac{1}{2}$. Ara, si suposem que $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$, tenim que la condició que ha de complir x és:

$$\left| 1 - \frac{x}{1 + \theta x} \right| = \frac{x}{1 + \theta x} - 1 < 1 \iff x \leq \frac{2}{1 - 2\theta}.$$

Si interpretem els resultats obtinguts desferent el canvi $x = \lambda\Delta t$:

- Si $\theta \geq \frac{1}{2}$, el mètode és estable.
- Si $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$, el mètode és estable només si $\lambda\Delta t \leq \frac{2}{1 - 2\theta}$.

Notació 5. En el cas de $\theta = 1/2$ el mètode s'anomena mètode de Crank-Nicolson.

5.2 Triangulació del domini

Una de les bases fonamentals del mètode dels elements finits és la discretització del domini espacial del problema en subdominis anomenats *elements finits*. Tal com s'ha comentat a la secció d'aproximació variacional, per tal de construir el subespai V_h en el cas bidimensional construirem una malla de triangles sobre el domini $\bar{\Omega}$. Per fer-ho, utilitzarem la triangulació de Delaunay, que optimitza el càlcul posterior i minimitza l'error d'aproximació.

Definició 5.1. *Sigui X un conjunt de punts del pla, anomenem triangulació \mathcal{T} a la família de triangles $\{T_i\}_{i \in I}$, tals que*

- $\forall x \in X$ existeix T_i tal que x n'és vèrtex.
- $\bar{\Omega} = \bigcup_{i \in I} T_i$.
- Si $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ per $i \neq j$ aleshores $T_i \cap T_j$ és un vèrtex de T_i i de T_j , o bé és un costat de T_i i de T_j .

L'objectiu principal és: donat un conjunt de punts (vèrtexs) volem trobar la “millor” triangulació possible per tal de que la implementació del mètode dels elements finits pugui efectuar-se de la forma més eficient possible. La qualitat de la malla no es determina pel nombre de triangles, sinó per la *forma* d'aquests. Sabem que per caracteritzar un triangle podem recórrer a la mesura dels seus angles, la llargada de les arestes, l'altura i l'àrea. Així doncs, la mesura d'una triangulació vindrà determinada per la suma, el màxim o el mínim de les mesures de tots els triangles.

El nombre de condició de les matrius que construeix el mètode dels elements finits depèn de l'angle mínim de la triangulació. L'error de l'aproximació per elements finits també està relacionada amb l'angle mínim i l'angle màxim.

Notació 6. *Denotarem $\Theta(\mathcal{T})$ el conjunt dels angles de la triangulació \mathcal{T} .*

Definició 5.2. *Siguin \mathcal{T} i \mathcal{T}' dues triangulacions d'un conjunt de punts del pla X , direm que la triangulació \mathcal{T} és millor que \mathcal{T}' si es compleix*

$$\min_{\delta} \{\delta \in \Theta(\mathcal{T})\} \geq \min_{\delta} \{\delta' \in \Theta(\mathcal{T}')\}.$$

Definició 5.3. *Sigui X un conjunt de punts del pla. Definim la triangulació de Delaunay \mathcal{T}_D aquella triangulació que compleix que la circumferència circumscriu de cada triangle de \mathcal{T}_D no té cap punt de X al seu interior.*

Teorema 5.4. *De totes les triangulacions possibles, la triangulació de Delaunay \mathcal{T}_D :*

1. *Minimitza el cercle circumscriu més gran.*
2. *Maximitza l'angle mínim de la triangulació.*

DEMOSTRACIÓ: Es pot trobar a la pagina 13 del document [3].

Observació 5.5. Notem que pel punt 3 del Teorema 5.4 tenim que la triangulació de Delaunay és la millor de totes les triangulacions possibles.

Observació 5.6. Si triangulem el domini amb triangles de diàmetre h i prenem V_h com l'espai de funcions lineals sobre aquests triangles, es pot demostrar que el mètode d'aproximació variacional tindrà ordre 2, i.e.

$$\|u - u_h\| = O(h^2).$$

5.3 Regles de quadratura sobre triangles

En el cas unidimensional, existeixen mètodes numèrics senzills que permeten donar una aproximació de l'integral definida sobre un determinat interval. Un clar exemple és la regla del Trapezi o la regla de Simpson. En efecte, són mètodes que converteixen l'integral en una mena de promig ponderat. Sigui f una funció localment integrable, considerant l'interval de referència $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$, tenim la regla de n -punts definida com:

$$\int_{-1}^1 f(t) dt \approx \sum_{i=1}^n \omega_i f(t_i),$$

on $t_1, t_2, \dots, t_n \in [-1, 1]$ són els anomenats nodes de quadratura i $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ són els corresponents pesos.

Exemple 5.7. En el cas de la regla del Trapezi els nodes són $t_1 = -1$ i $t_2 = 1$ i els pesos són $\omega_1 = 1$ i $\omega_2 = 1$ (regla de 2-punts). En el cas de la regla de Simpson els nodes són $t_1 = -1$, $t_2 = 0$ i $t_3 = 1$ i els pesos corresponents són $\omega_1 = 1/3$, $\omega_2 = 4/3$ i $\omega_3 = 1/3$ (regla de 3-punts).

De forma general, si considerem l'interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tenim que la regla de n -punts resulta:

$$\int_a^b f(t) dt \approx \frac{b-a}{2n} \sum_{i=1}^n \omega_i f(t_i).$$

Aquestes regles de quadratura també es poden estendre en el cas bidimensional per tal de resoldre integrals sobre triangles lineals. De la mateixa manera que el cas unidimensional, comencem considerant el triangle de referència T_R , que és aquell que té com a vèrtexs els punts del pla $(0, 0)$, $(1, 0)$, i $(0, 1)$. La regla de n -punts pren la forma:

$$\int_{T_R} f \approx \sum_{i=1}^n \omega_i f(s_i, t_i),$$

on $(s_1, t_1), (s_2, t_2), \dots, (s_n, t_n)$ són els nodes que s'han d'escollir i $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ són els corresponents pesos.

Exemple 5.8. Dos exemples, un pel cas de 3-punts i l'altre pel cas de 4-punts:

	3-punts	4-punts
(s_1, t_1)	$(1/6, 1/6)$	$(1/3, 1/3)$
(s_2, t_2)	$(2/3, 1/6)$	$(1/5, 1/5)$
(s_3, t_3)	$(1/6, 2/3)$	$(3/5, 1/5)$
(s_4, t_4)	-	$(1/5, 3/5)$
ω_1	$1/6$	$-9/32$
ω_2	$1/6$	$25/96$
ω_3	$1/6$	$25/96$
ω_4	-	$25/96$

Taula 1: Dues regles de quadratura per T_R : 3-punts [8] i 4-punts [1].

Considerem ara un triangle arbitrari T amb vèrtexs (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , i (x_3, y_3) . L'objectiu és fer un canvi de variable per obtenir el triangle de referència T_R com a límit

d'integració. Aquest canvi envia $(0, 0)$ a (x_1, y_1) , $(1, 0)$ a (x_2, y_2) i $(0, 1)$ a (x_3, y_3) :

$$\begin{aligned} T_R &\rightarrow T \\ (s, t) &\mapsto (x, y), \end{aligned}$$

on

$$\begin{aligned} x &= x_1 + (x_2 - x_1)s + (x_3 - x_1)t, \\ y &= y_1 + (y_2 - y_1)s + (y_3 - y_1)t. \end{aligned}$$

Per tant, podem definir la transformació en forma matricial com:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

on la matriu és la jacobiana del canvi, que l'anomenem J .

Així doncs, tenint en compte la fórmula del canvi de variable en integrals, tenim:

$$\int_T f(x, y) dA = \int_{T_R} g(s, t) |det(J)| dA, \quad (5.8)$$

on

$$g(s, t) = f(x_1 + (x_2 - x_1)s + (x_3 - x_1)t, y_1 + (y_2 - y_1)s + (y_3 - y_1)t),$$

i el determinant de la Jacobiana és constant:

$$\mathcal{J} = |det(J)| = |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|.$$

Observació 5.9. Es pot demostrar que l'àrea del triangle T , que denotarem $A(T)$, és igual a $\frac{\mathcal{J}}{2}$.

Exemple 5.10. Estudiem el cas de 1-punt. Aquesta regla assigna $(s, t) = (1/3, 1/3)$ i el pes $\omega_1 = 1/2$. Per tant, sobre el triangle de referència s'expressa:

$$\int_{T_R} g(s, t) dA \approx \frac{1}{2} g\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3}, \frac{y_1}{3} + \frac{y_2}{3} + \frac{y_3}{3}\right).$$

Per qualsevol triangle T resulta:

$$\int_T f(x, y) dA = \mathcal{J} \int_{T_R} g(s, t) dA \approx \frac{\mathcal{J}}{2} f(\bar{x}, \bar{y}) = A(T) f(\bar{x}, \bar{y}), \quad (5.9)$$

on

$$\bar{x} = \left(\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3}\right), \quad \bar{y} = \left(\frac{y_1}{3} + \frac{y_2}{3} + \frac{y_3}{3}\right).$$

Notem que el node (\bar{x}, \bar{y}) es troba al centre de T , de la mateixa manera que el node $(1/3, 1/3)$ és el centre de T_R .

Exemple 5.11. Estudiem el cas de 3-punts usant la regla de la Taula 1. En efecte, per qualsevol triangle T tenim:

$$\begin{aligned} \int_T f(x, y) dA &= \mathcal{J} \int_{T_R} g(s, t) dA \approx \frac{A(T)}{3} \left[g\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) + g\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right) + g\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right) \right] = \\ &= \frac{A(T)}{3} [f(\bar{x}_1, \bar{y}_1) + f(\bar{x}_2, \bar{y}_2) + f(\bar{x}_3, \bar{y}_3)], \end{aligned}$$

on

$$\begin{aligned}(\bar{x}_1, \bar{y}_1) &= \left(\frac{2}{3}(x_1, y_1) + \frac{1}{6}(x_2, y_2) + \frac{1}{6}(x_3, y_3) \right), \\(\bar{x}_2, \bar{y}_2) &= \left(\frac{1}{6}(x_1, y_1) + \frac{2}{3}(x_2, y_2) + \frac{1}{6}(x_3, y_3) \right), \\(\bar{x}_3, \bar{y}_3) &= \left(\frac{1}{6}(x_1, y_1) + \frac{1}{6}(x_2, y_2) + \frac{2}{3}(x_3, y_3) \right).\end{aligned}$$

Exemple 5.12. Estudiem el cas de 4-punts usant la regla de la Taula 1. En efecte, per qualsevol triangle T tenim:

$$\begin{aligned}\int_T f(x, y) dA &\approx A(T) \left\{ -\frac{1}{16}g\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{48} \left[g\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right) + g\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right) + g\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right) \right] \right\} = \\&= A(T) \left\{ -\frac{1}{16}f(\bar{x}_1, \bar{y}_1) + \frac{1}{48} [f(\bar{x}_2, \bar{y}_2) + f(\bar{x}_3, \bar{y}_3) + f(\bar{x}_4, \bar{y}_4)] \right\},\end{aligned}$$

on

$$\begin{aligned}(\bar{x}_1, \bar{y}_1) &= \left(\frac{1}{3}(x_1, y_1) + \frac{1}{3}(x_2, y_2) + \frac{1}{3}(x_3, y_3) \right), \\(\bar{x}_2, \bar{y}_2) &= \left(\frac{3}{5}(x_1, y_1) + \frac{1}{5}(x_2, y_2) + \frac{1}{5}(x_3, y_3) \right), \\(\bar{x}_3, \bar{y}_3) &= \left(\frac{1}{5}(x_1, y_1) + \frac{3}{5}(x_2, y_2) + \frac{1}{5}(x_3, y_3) \right), \\(\bar{x}_4, \bar{y}_4) &= \left(\frac{1}{5}(x_1, y_1) + \frac{1}{5}(x_2, y_2) + \frac{3}{5}(x_3, y_3) \right).\end{aligned}$$

Observació 5.13. Recordem que l'aproximació del problema variacional es tracta de buscar la solució $u_h \in V_h$ que compleix

$$\forall v_h \in V_h, \quad a(u_h, v_h) = L(v_h),$$

i sabem que si V_h el conformen funcions lineals a trossos sobre triangles, és un mètode d'ordre 2, i.e. $\|u - u_h\| = O(h^2)$. Les regles de quadratura s'utilitzaran per donar una aproximació de la forma lineal $L(v_h)$. Si denotem $L_h(v_h)$ aquesta aproximació, el problema queda modificat de la següent manera: buscar la solució $\bar{u}_h \in V_h$ que compleix

$$\forall v_h \in V_h, \quad a(\bar{u}_h, v_h) = L_h(v_h).$$

L'error d'aquesta nova formulació es pot acotar utilitzant la desigualtat triangular

$$\|u - \bar{u}_h\| \leq \|u - u_h\| + \|u_h - \bar{u}_h\|,$$

on l'ordre $\|u_h - \bar{u}_h\|$ depèn de la regla de quadratura utilitzada. L'objectiu és que l'ordre d'aquest nou problema no disminueixi, per tant és suficient que $\|u_h - \bar{u}_h\|$ tingui ordre igual o major que 2. En efecte, a la pàgina 893 llibre [1] podem trobar que l'error de la regla de quadratura per 4-punts té ordre 3, aleshores $\|u_h - \bar{u}_h\| = O(h^3)$. Per tant, la regla de 4-punts és una bona aproximació en el sentit que no disminuirà l'ordre de precisió del mètode. Així doncs, utilitzant aquesta regla tindrem

$$\|u - \bar{u}_h\| = O(h^2).$$

5.4 Mètode del gradient conjugat

A continuació s'explicarà un mètode numèric per tal de resoldre els sistemes d'equacions lineals que apareixeran en el cas bidimensional: el mètode del gradient conjugat. Es tracta d'un algorisme que es basa en minimitzar una forma quadràtica. Sigui $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriu simètrica definida positiva i sigui $f \in \mathbb{R}^n$, definim la funció quadràtica següent:

$$\begin{aligned}\phi: \mathbb{R}^N &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \phi(u) = \frac{1}{2}u^T K u - f^T u.\end{aligned}$$

Si ara en fem la derivada respecte u obtenim:

$$\nabla \phi(u) = K u - f,$$

per tant, l'únic punt estacionari de ϕ és

$$u = K^{-1} f.$$

Estudiem ara la segona derivada i observem que

$$\text{Hess}(\phi(u)) = K.$$

Així doncs, la segona derivada és definida positiva. Obtenim, doncs, que resoldre el sistema $K u = f$ és equivalent a minimitzar la funció ϕ . Hi ha un gran nombre de mètodes iteratius per minimitzar la funció ϕ . Molts d'aquests mètodes tenen la forma general

$$u^{k+1} = u^k - \alpha_k p^k \quad k = 0, 1, \dots, \quad (5.10)$$

on p^k són els vectors de *direcció* i els α_k els escalars que determinen la distància recorreguda al llarg de p^k . La varietat del mètode depèn de quina α_k i p^k escollim. Per exemple, el camí més natural per escollir α_k és el que minimitza ϕ en la direcció p^k , de tal manera que α_k satisfaci:

$$\phi(u^k - \alpha_k p^k) = \min_{\alpha} \phi(u^k - \alpha p^k).$$

Si fixem u^k i p^k , l'equació anterior esdevé un problema de minimització respecte una variable α i es pot resoldre de forma explícita. Fent abús de notació, eliminem els superíndexs de u^k i p^k . Aleshores:

$$\begin{aligned}q(\alpha) &:= \phi(u - \alpha p) = \frac{1}{2}(u - \alpha p)^T K (u - \alpha p) - f^T (u - \alpha p) \\ &= \frac{1}{2}u^T K u - \alpha p^T K u + \frac{1}{2}\alpha^2 p^T K p + \alpha p^T f - f^T u \\ &= \frac{1}{2}p^T K p \alpha^2 - p^T (K u - f) \alpha + \frac{1}{2}u^T (K u - 2f).\end{aligned}$$

Com que K és definida positiva, aleshores $p^T K p > 0$ i la funció quadràtica q respecte α és minimitzada quan $q'(\alpha) = 0$ o, en termes de u^k i p^k , quan

$$\alpha_k = \frac{(p^k)^T (K u^k - f)}{(p^k)^T K p^k}. \quad (5.11)$$

5.4.1 Mètode de direccions conjugades

Una classe de mètode interessant és el mètode de direccions conjugades. Siguin n vectors de direcció p^0, \dots, p^{n-1} que satisfan:

$$(p^i)^T K p^j = 0, \quad i \neq j.$$

Aquests vectors són ortogonals respecte el producte intern $(u, v) = u^T K v$ definit per K . També s'anomenen *conjugats* respecte K .

Una de les propietats bàsiques dels mètodes de direcció conjugada és el següent teorema:

Teorema 5.14. *Sigui $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriu simètrica definida positiva i p^0, \dots, p^{n-1} són vectors no nuls conjugats dos a dos respecte K , aleshores per qualsevol u^0 els iterats $u^{k+1} = u^k - \alpha_k p^k$, on α_k s'escull pel principi de minimització (5.11), convergeixen a una solució exacta del sistema $Ku = f$ en no més de n passos.*

DEMOSTRACIÓ: Primer de tot observem que usant l'expressió (5.10) i que K és simètrica (és a dir $K^T = K$):

$$\begin{aligned} (Ku^{k+1} - f)^T p^j &= (Ku^k - \alpha_k K p^k - f)^T p^j = (Ku^k - f)^T p^j - \alpha_k (K p^k)^T p^j = \\ &= (Ku^k - f)^T p^j - \alpha_k (p^k)^T K p^j. \end{aligned}$$

Ara, si $j \neq k$ i usem que p^j i p^k són conjugats tenim que per tot $j < k$

$$(Ku^{k+1} - f)^T p^j = (Ku^k - f)^T p^j,$$

i, en canvi, si $j = k$ usem la definició (5.11) per obtenir

$$\begin{aligned} (Ku^{k+1} - f)^T p^j &= (Ku^k - f)^T p^j - \frac{(p^k)^T (Ku^k - f)}{(p^k)^T K p^k} (p^k)^T K p^j = \\ &= (Ku^k - f)^T p^j - (p^k)^T (Ku^k - f) = 0, \end{aligned}$$

on hem utilitzat la commutativitat del producte escalar. Per tant, tenim que per a tot $j = 0, \dots, n-1$:

$$(Ku^n - f)^T p^j = (Ku^{n-1} - f)^T p^j = \dots = (Ku^{j+1} - f)^T p^j = 0,$$

i com que p^0, \dots, p^{n-1} són linealment independents, aleshores $Ku^n - f = 0$. Pot ser que es doni el cas en què $Ku^m = f$ per algun $m < n$. En aquest cas ja haurem arribat a la solució en m passos. \square

Per tal d'utilitzar el mètode de direccions conjugades cal tenir un conjunt de vectors p^j amb $j = 0, \dots, n-1$ tals que siguin conjugats dos a dos respecte K . Un conjunt clàssic de vectors són els vectors propis de K . Siguin u_1, \dots, u_n els n vectors propis ortogonals amb els seus corresponents valors propis $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Aleshores si $i \neq j$:

$$(u_i)^T K u_j = \lambda_j (u_i)^T u_j = 0,$$

per tant, els vectors propis són conjugats dos a dos respecte K . Tot i així, aquesta elecció no és pràctica, ja que trobar tots els vectors propis de la matriu K és un problema molt més substancial que resoldre el sistema lineal.

5.4.2 Mètode del gradient conjugat

La forma més eficient d'escollir el conjunt de vectors de direcció, conjugats dos a dos, és el mètode del gradient conjugat, que genera els vectors de direcció conjuntament amb l'aplicació del mètode de direcció conjugada explicat a priori. L'algoritme bàsic es pot trobar a la pàgina 191 del llibre [10] i està basat en el mètode d'ortogonalització de Gram-Schmidt.

Observació 5.15. El mètode de gradient conjugat presenta dos grans avantatges respecte els mètodes de resolució directa de sistemes lineals:

- Si estem davant un problema que depèn del temps, el mètode del gradient conjugat és molt més ràpid degut a que les solucions per a cada pas són “properes”. Això proporciona una bona llavor al mètode del gradient conjugat, que fa que trobi molt més ràpid la solució sense haver de resoldre, per a cada pas, tot el sistema.
- Amb mètode del gradient conjugat no cal emmagatzemar la matriu de coeficients del sistema. Es pot calcular directament el producte de la matriu per un vector.
- El mètode del gradient conjugat és un mètode directe si s'efectuen els n passos. Però en el context del FEM s'utilitza de forma iterativa. En efecte, a cada pas es busquen vectors de direcció conjugats a mesura que ens aproximem a la solució. Si l'error és prou raonable a un cert pas, decidim aturar el mètode i quedar-nos amb la solució trobada en aquest pas. D'aquesta forma, no farà falta tenir en compte tot el conjunt de n vectors conjugats dos a dos.

6 Aplicació al cas unidimensional

En el següent capítol es desenvoluparan dos exemples unidimensionals: el primer correspon a un problema el·líptic de Dirichlet i l'altre a un problema parabòlic corresponent a l'equació de la calor.

6.1 Problema el·líptic de Dirichlet

Sigui $\Omega = (0, 1)$ (obert i acotat de \mathbb{R}), $\Gamma = \{0, 1\}$ i donada $f \in L^2(\Omega)$, hem de trobar $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que verifiqui el problema de Dirichlet (3.1), en particular

$$-\frac{d^2u(x)}{dx^2} = f(x), \quad x \in (0, 1), \quad (6.1a)$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \{0, 1\}. \quad (6.1b)$$

Si anomenem V a $H_0^1((0, 1))$, la formulació variacional corresponent consisteix en trobar $u \in V$ tal que verifiqui l'equació integral següent:

$$\forall v \in V, \quad \int_0^1 \frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} dx = \int_0^1 f v dx.$$

Definim:

- $a(u, v) = \int_0^1 \frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} dx.$
- $L(v) = \int_0^1 f v dx.$

Ja hem vist que la forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ és contínua a $V \times V$ i és V -el·líptica. Per tant, pel Teorema 3.2 (Lax-Milgram) tenim que el problema

$$\forall v \in V, \quad a(u, v) = L(v), \quad (6.2)$$

admet una solució $u \in V$ i només una.

6.1.1 Discretització i base de funcions

Ara volem construir una solució aproximada u_h de u . L'objectiu és dividir el domini en un nombre finit d'interval·ls (elements), considerar una base de funcions adequada a la discretització efectuada i expressar la solució aproximada com a combinació lineal dels elements d'aquesta base.

Suposem que volem dividir $\bar{\Omega} = [0, 1]$ en $I + 1$ interval·ls de mateixa longitud, que correspon a:

$$h = \frac{1}{I + 1}.$$

Denotem

$$a_i = ih, \quad 0 \leq i \leq I + 1,$$

per definir aquests interval·ls $K_i = [a_i, a_{i+1}]$, $0 \leq i \leq I$.

Prenem un subespai $V_h \in V$ de dimensió finita. Designem P_1 com a espai de funcions polinòmiques de grau igual o inferior a 1:

$$V_h = \{v \in V : v|_{K_i} \in P_1, 0 \leq i \leq I\}.$$

Ara caracteritzem aquest espai usant una definició més comuna. Recordem que $V = H_0^1((0,1))$ i per tant, tota funció $v \in V$ és (gairebé per tot igual a una funció) contínua a $[0,1]$ i verifica $v(0) = v(1) = 0$. D'altra banda, tota funció v contínua a $[0,1]$, \mathcal{C}^1 per intervals i tal que $v(0) = v(1) = 0$, pertany a $H_0^1((0,1))$. Així, tenim la següent caracterització del subespai de funcions

$$V_h = \{v \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) : v(0) = v(1) = 0, v|_{K_i} \in P_1, 0 \leq i \leq I\}.$$

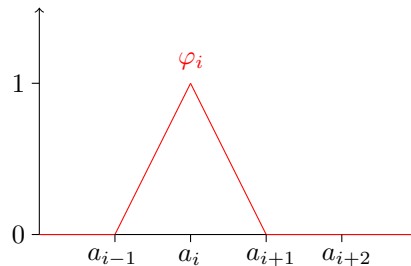
Observem, doncs, que la dimensió de V_h és I . Un conjunt de funcions que podria constituir una base d'aquest espai és la successió de funcions $\varphi_i \in V_h$, $1 \leq i \leq I$, tals que prenen valor 1 al punt a_i i s'anul·len al conjunt $\{a_0, a_1, \dots, a_i, \dots, a_I\}$, i.e.

$$\varphi_i(a_j) = \delta_{i,j}, \quad 1 \leq j \leq I.$$

Més explícitament, per la seva condició de continuïtat, les definim analíticament de la següent forma:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}(x - a_{i-1}) & \text{si } x \in [a_{i-1}, a_i] \\ -\frac{1}{h}(x - a_{i+1}) & \text{si } x \in [a_i, a_{i+1}] \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Gràficament es representen de la següent manera:



6.1.2 Sistema d'equacions

Un cop fixada la base, podem determinar la funció aproximada com

$$u_h = \sum_{i=1}^I \xi_i \varphi_i, \quad \xi_i \in \mathbb{R}.$$

Observem que $\xi_i = u_h(a_i)$, $1 \leq i \leq I$, són les coordenades de u_h en funció de la base fixada. Doncs el problema per trobar u_h rau en conèixer el valor d'aquestes coordenades.

Recordem que un cop definit el problema (7.3) a l'espai V , pel Teorema 3.6 podem considerar el problema aproximat a l'espai V_h :

$$\forall v_h \in V_h, \quad a(u_h, v_h) = L(v_h),$$

admet una solució $u_h \in V_h$ i només una. En conseqüència, el problema aproximat equival a la resolució del sistema lineal de I equacions amb I incògnites. Recordem-ne l'expressió (3.12) corresponent:

$$\sum_{j=1}^I a(\varphi_j, \varphi_i) \xi_j = L(\varphi_i), \quad 1 \leq i \leq I. \quad (6.3)$$

Expressant-lo de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a(\varphi_1, \varphi_1) & a(\varphi_1, \varphi_2) & \dots & a(\varphi_1, \varphi_I) \\ a(\varphi_2, \varphi_1) & a(\varphi_2, \varphi_2) & \dots & a(\varphi_2, \varphi_I) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a(\varphi_I, \varphi_1) & a(\varphi_I, \varphi_2) & \dots & a(\varphi_I, \varphi_I) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L(\varphi_1) \\ L(\varphi_2) \\ \vdots \\ L(\varphi_I) \end{pmatrix}$$

Observem que tal com estan definides les funcions de la base, el valor $a(\varphi_j, \varphi_i)$ s'anul·len si $|i - j| > 1$. Per tant, la matriu de coeficients $(a(\varphi_j, \varphi_i))_{i,j}$ és tridiagonal. En efecte, tenim:

$$\frac{d\varphi_i(x)}{dx} = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{si } x \in [a_{i-1}, a_i] \\ -\frac{1}{h} & \text{si } x \in [a_i, a_{i+1}] \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Tenint en compte que $a_i = ih$, calculem els valors de la diagonal:

$$\begin{aligned} a(\varphi_i, \varphi_i) &= \int_0^1 \frac{d\varphi_i}{dx} \cdot \frac{d\varphi_i}{dx} dx = \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{h} dx + \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{-1}{h} \cdot \frac{-1}{h} dx = \\ &= \frac{1}{h^2} \int_{a_{i-1}}^{a_{i+1}} dx = \frac{1}{h^2} (a_{i+1} - a_{i-1}) = \frac{1}{h^2} (h(i+1) - h(i-1)) = \frac{2}{h}. \end{aligned}$$

Degut a que la forma bilineal és evidentment simètrica, la matriu serà simètrica, per tant només fa falta calcular els valors de la diagonal superior:

$$\begin{aligned} a(\varphi_i, \varphi_{i+1}) &= \int_0^1 \frac{d\varphi_i}{dx} \cdot \frac{d\varphi_{i+1}}{dx} dx = \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{1}{h} \cdot 0 dx + \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{-1}{h} \cdot \frac{1}{h} dx + \int_{a_{i+1}}^{a_{i+2}} 0 \cdot \frac{-1}{h} dx = \\ &= -\frac{1}{h^2} \int_{a_i}^{a_{i+1}} dx = -\frac{1}{h^2} (a_{i+1} - a_i) = -\frac{1}{h^2} (h(i+1) - h(i)) = -\frac{1}{h}. \end{aligned}$$

Observem, doncs, que la matriu de coeficients, com que només depèn de la discretització del domini, es pot calcular de forma general per tots els casos unidimensionals considerant que els intervals tenen la mateixa longitud h .

Recordem ara la regla del trapezi:

$$\int_b^a g(x) \approx (a - b) \left[\frac{g(a) + g(b)}{2} \right].$$

És evident que els termes independents depenen del problema, ja que ens cal conèixer la funció $f \in L^2(\Omega)$, però usant la regla del trapezi arribem a una forma general considera-

blement compacta. En efecte, tenim:

$$\begin{aligned} L(\varphi_i) &= \int_0^1 f \varphi_i dx = \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x) \frac{1}{h} (x - a_{i-1}) dx + \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) \frac{-1}{h} (x - a_{i+1}) dx \approx \\ &\approx (a_i - a_{i-1}) \left[\frac{f(a_i)(a_i - a_{i-1}) + 0}{2h} \right] + (a_{i+1} - a_i) \left[-\frac{0 + f(a_i)(a_i - a_{i+1})}{2h} \right] = \\ &= \frac{f(a_i)}{2h} [(a_i - a_{i-1})^2 + (a_{i+1} - a_i)^2] = \frac{f(a_i)}{2h} 2h^2 = hf(a_i). \end{aligned}$$

Observació 6.1. A major nombre d'elements, i.e., a major I , el càlcul dels termes independents serà molt més precís.

En resum, el sistema lineal que caldrà resoldre és el següent:

$$\frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \xi_I \end{pmatrix} \approx h \begin{pmatrix} f(a_1) \\ f(a_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f(a_I) \end{pmatrix}$$

6.1.3 Exemple

Ara resoldrem un exemple de problema el·líptic de Dirichlet on prèviament ja coneixem la solució i en calcularem l'aproximada per comparar-les. He utilitzat el llenguatge de programació MATLAB per calcular el sistema d'equacions corresponent.

Considerem doncs, una solució del problema (6.1)

$$u(x) = x^2(1 - x),$$

i volem trobar quina és la $f(x)$ que verifica

$$-\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = f(x).$$

Fàcilment trobem que

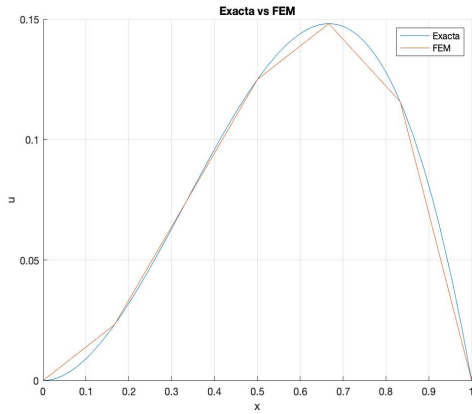
$$f(x) = 2 - 6x,$$

que clarament pertany a $L^2(\Omega)$.

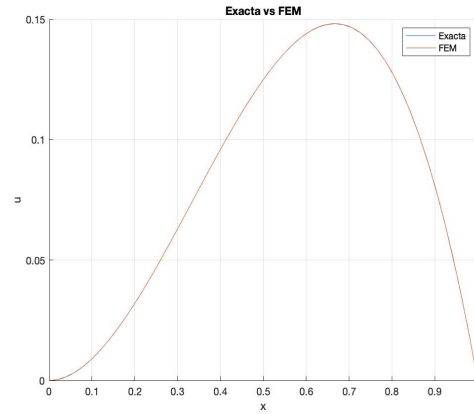
Per construir el sistema lineal d'equacions (6.3), l'únic que falta trobar són els termes independents:

$$L(\varphi_i) \approx hf(a_i) = h(2 - 6a_i).$$

L'error ϵ que calcularem correspon al màxim valor absolut de la diferència entre la solució aproximada u_h i la solució exacta u , avaluades a $[0, 1]$ amb intervals de 0.01.



(a) $I = 5$. $\epsilon = 0.0122$.



(b) $I = 50$. $\epsilon = 1.8931e^{-04}$.

Figura 1: Problema el·líptic amb condicions de contorn de Dirichlet: comparativa entre solució exacta i solució aproximada segons diferents valors de I .

6.2 Problema parabòlic: equació de la calor

Definim el domini espacial de forma anàloga a l'apartat anterior: $\Omega = (0, 1)$ (obert i acotat de \mathbb{R}) i $\Gamma = \{0, 1\}$. Ara hem d'afegir el domini temporal i en resulten els dominis:

$$Q_T = \Omega \times (0, T), \quad \Sigma_T = \Gamma \times (0, T).$$

Reformulem el problema (4.1) en la seva versió unidimensional: donades les funcions $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (temperatura inicial) i $f : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ (font de calor), trobar una funció $u : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ (temperatura), que sigui solució de les equacions:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = f(x, t) \quad \text{a } Q_T \text{ (equació de la calor),} \quad (6.7a)$$

$$u = 0 \quad \text{a } \Sigma_T \text{ (condició de contorn),} \quad (6.7b)$$

$$u(\cdot, 0) = u_0 \quad \text{a } \Omega \text{ (condició inicial).} \quad (6.7c)$$

Tal com s'ha explicat al capítol anterior, la diferència entre aquest problema i el de Dirichlet és que la formulació variacional consisteix en un sistema d'equacions diferencials. Per tant, i resumint, si anomenem $V = H_0^1((0, 1))$ i definim:

- $(u(t), v) = \int_0^1 u(t)v \, dx$,
- $(f(t), v) = \int_0^1 f(t)v \, dx$,
- $a(u(t), v) = \int_0^1 \frac{\partial u(t)}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \, dx$,

la formulació variacional que cal resoldre és la següent:

$$\forall v \in V, \quad \frac{d}{dt}(u(t), v) + a(u(t), v) = (f(t), v).$$

6.2.1 Discretització i base de funcions

Discretitzem el domini espacial de la mateixa forma que el problema de Dirichlet unidimensional i n'escollim la mateixa base. Per tant, considerem l'espai de funcions $V_h \subset V$ de dimensió I que admet la base de funcions com la successió $\varphi_i \in V_h$, amb $1 \leq i \leq I$, definida a l'apartat anterior.

Si recordem el capítol anterior, el domini temporal també es discretitza d'una forma senzilla. Ho hem fet mitjançant un *pas de temps* que definim com

$$\Delta t = \frac{T}{N},$$

associat a un enter $N \geq 1$ i aleshores, obtenim l'instant de temps en el pas n :

$$t_n = n\Delta t, \quad 0 \leq n \leq N.$$

Així doncs, a diferència de l'apartat anterior, aquí haurem de buscar les solucions aproximades $u_h^n(x) = u(x, t_n)$, $1 \leq n \leq N$, que corresponen a l'instant de temps t_n .

6.2.2 Sistema d'equacions diferencials

Un cop fixada la base podem expressar les solucions aproximades de la següent forma:

$$u_h^n = u_h(t_n) = \sum_{j=1}^I \xi_j^n \varphi_j, \quad 1 \leq n \leq N,$$

on els coeficients $\xi_j^n = \xi_j(t_n)$ depenen només del temps i la base fixada depèn només de la posició. L'objectiu per determinar u_h^n és conèixer el valor d'aquests coeficients. Per tant, tal com s'ha explicat en el capítol anterior, substituint l'expressió de les solucions u_h en la formulació variacional aproximada (5.1) el sistema d'equacions diferencials aproximat es pot reexpressar de forma matricial (4.7). Aplicant-ho al nostre cas, tenim que la condició inicial correspon a $\xi_j^0 = 0$ per tot $1 \leq j \leq I$. Per trobar-los, s'utilitzarà el mètode de Crank-Nicolson, ja explicat i que es resumeix a resoldre el següent sistema d'equacions (4.8):

$$\left(M + \frac{\Delta t}{2}R\right)\xi^{n+1} = \left(M - \frac{\Delta t}{2}R\right)\xi^n + \frac{\Delta t}{2}(\beta^{n+1} + \beta^n), \quad 0 \leq n \leq N-1,$$

on recordem que anomenavem:

- Matriu de rigidesa a $R = (a(\varphi_j, \varphi_i))_{1 \leq i, j \leq I}$.
- Matriu de massa a $M = ((\varphi_j, \varphi_i))_{1 \leq i, j \leq I}$.
- $\beta(t_n) = \beta^n = (\beta_1^n, \dots, \beta_I^n)^T$, on $\beta_i^n = (f(t_n), \varphi_i)$ per tot $1 \leq i \leq I$ i per tot $0 \leq n \leq N$.
- $\xi(t_n) = \xi^n = (\xi_1^n, \dots, \xi_I^n)^T$ per tot $0 \leq n \leq N$.

Igual que a l'apartat anterior podem determinar les matrius R i M de forma general, ja que no depenen de f . Observem que R , per definició, correspon a la matriu tridiagonal calculada a l'apartat anterior. Cal notar que la matriu de massa M també serà una matriu

tridiagonal simètrica. Per tant, només farà falta calcular-ne els elements de la diagonal i els de la diagonal superior:

$$\begin{aligned}(\varphi_i, \varphi_i) &= \int_0^1 \varphi_i \varphi_i dx = \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{1}{h^2} (x - a_{i-1})^2 dx + \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{1}{h^2} (x - a_{i+1})^2 dx = \\ &= \frac{1}{3h^2} [(a_i - a_{i-1})^3 - (a_i - a_{i+1})^3] = \frac{1}{3h^2} [(h)^3 - (-h)^3] = \frac{2}{3}h,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\varphi_i, \varphi_{i+1}) &= \int_0^1 \varphi_i \varphi_{i+1} dx = \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{-1}{h^2} (x - a_i)(x - a_{i+1}) dx = \\ &= \int_{ih}^{(i+1)h} \frac{-1}{h^2} (x - ih)(x - (i+1)h) dx \\ &= -\frac{1}{h^2} \left[\int_{ih}^{(i+1)h} (x - ih)^2 dx - \int_{ih}^{(i+1)h} (x - ih)h dx \right] \\ &= -\frac{1}{h^2} \left[\frac{1}{3}h^3 - \frac{h}{2}h^2 \right] = \left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right] h = \frac{1}{6}h.\end{aligned}$$

Ara només falta calcular els vectors β^n i β^{n+1} del sistema. Usant la mateixa aproximació temporal que hem fet servir anteriorment per la solució, identificarem $f(x, t_n)$ amb $f^n(x)$. De nou farem ús de la regla de la cadena, de tal manera que el càlcul és idèntic al que hem realitzat a l'apartat anterior, tenint en compte que abans era f i ara és f^n :

$$\beta_i^n = (f^n, \varphi_i) = \int_0^1 f^n \varphi_i dx \approx hf^n(a_i).$$

6.2.3 Exemple

Anàlogament, resoldrem un exemple de problema parabòlic on prèviament ja coneixem la solució i en calcularem l'aproximada per comparar-les. He utilitzat el llenguatge de programació MATLAB per resoldre el sistema.

Considerem doncs, una solució del problema (6.7)

$$u(x, t) = x(1 - x)t(1 + t),$$

i volem trobar quina és la $f(x, t)$ que verifica

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = f(x, t).$$

Fàcilment trobem que

$$f(x, t) = x(1 - x)(1 + 2t) + 2t(t + 1).$$

Per construir el sistema lineal d'equacions (4.8) sols falta trobar exactament els valors de β^n i β^{n+1} :

$$\begin{aligned}\beta_i^n &= hf^n(a_i) = h a_i(1 - a_i)(1 + 2t_n) + 2t_n(t_n + 1), \\ \beta_i^{n+1} &= hf^{n+1}(a_i) = h a_i(1 - a_i)(1 + 2t_{n+1}) + 2t_{n+1}(t_{n+1} + 1).\end{aligned}$$

L'error $\epsilon(t)$ el calcularem per a cada pas de temps, i correspon al màxim valor absolut de la diferència entre la solució aproximada u_h i la solució exacta u , avaluades a $[0, 1]$ amb intervals de 0.01.

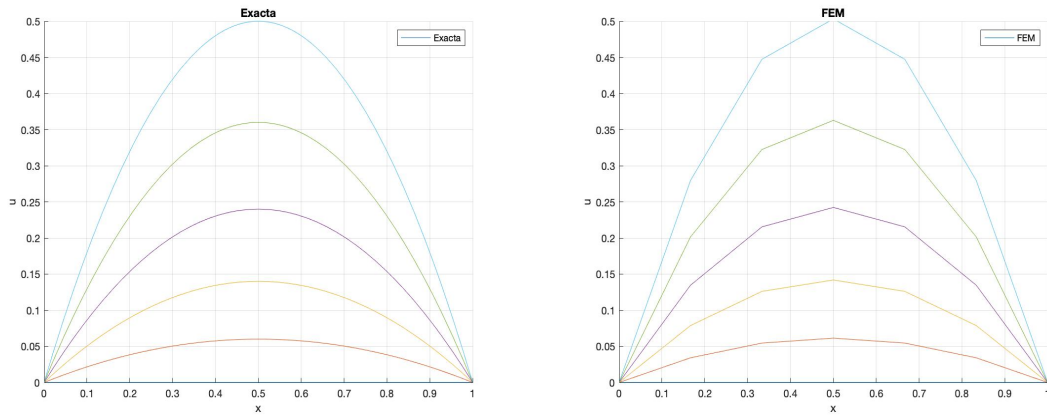


Figura 2: Problema parabòlic (equació de la calor): comparativa entre solució exacta i solució aproximada prenent $I = 5$ i $N = 5$.

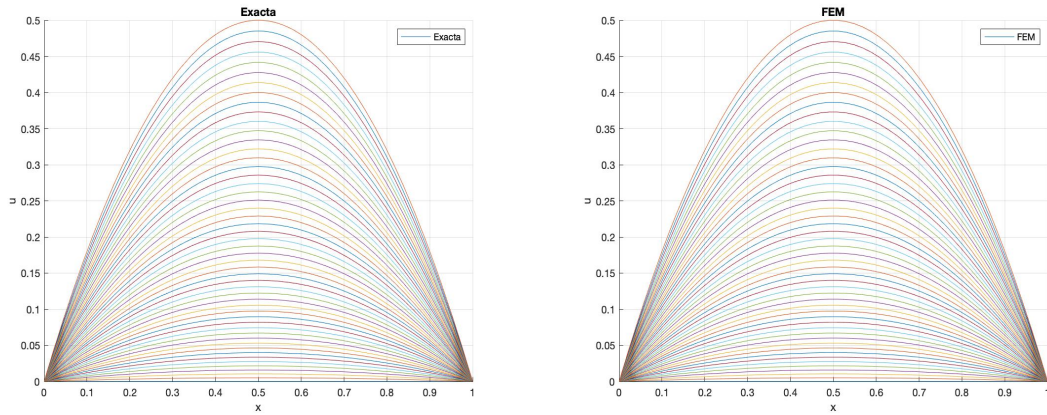
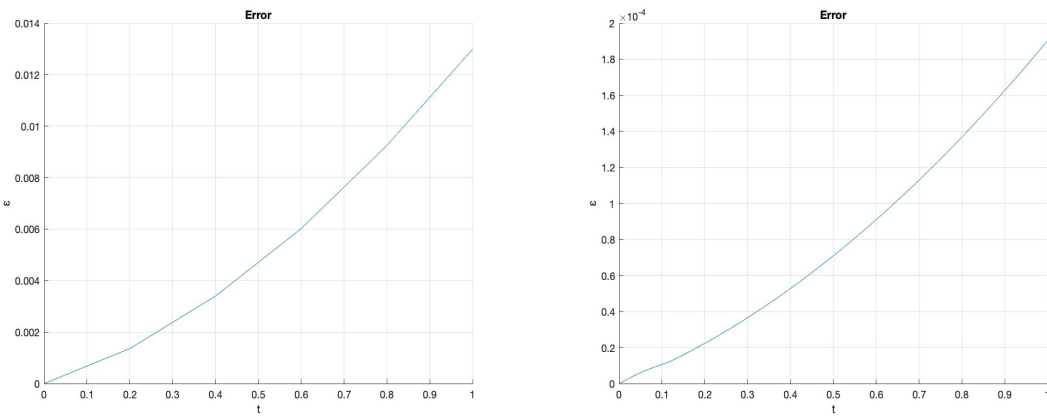


Figura 3: Problema parabòlic (equació de la calor): comparativa entre solució exacta i solució aproximada prenent $I = 50$ i $N = 50$.



(a) $I = 5, N = 5$.

(b) $I = 50, N = 50$.

Figura 4: Error en funció del temps de les dues solucions trobades.

7 Aplicació al cas bidimensional

En el següent capítol es desenvoluparà el cas bidimensional corresponent al problema el·líptic de Dirichlet: sigui $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ el quadrat unitat de \mathbb{R}^2 , $\Gamma = \partial\Omega$ (vora \mathcal{C}^1 a trossos) i donada $f \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$, hem de trobar $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que verifiqui el problema següent:

$$-\nabla u(x, y) = f(x, y), \quad x \in \Omega, \quad (7.1a)$$

$$u(x, y) = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (7.1b)$$

Si anomenem V a $H_0^1(\Omega)$, la formulació variacional corresponent consisteix en trobar $u \in V$ tal que verifiqui l'equació integral següent:

$$\forall v \in V, \quad \int_{\Omega} \nabla u(x, y) \nabla v(x, y) \, d(x, y) = \int_{\Omega} f v \, dx \, dy. \quad (7.2)$$

Definim:

- $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x, y) \nabla v(x, y) \, dx \, dy.$
- $L(v) = \int_{\Omega} f v \, dx \, dy.$

Ja hem vist que la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ és contínua a $V \times V$ i és V -el·líptica. Per tant, pel Teorema 3.2 (Lax-Milgram) tenim que el problema

$$\forall v \in V, \quad a(u, v) = L(v), \quad (7.3)$$

admet una solució $u \in V$ i només una.

7.1 Discretització i base de funcions

Ara volem construir una solució aproximada u_h de u . L'objectiu és dividir el domini en un nombre finit de triangles, considerar una base de funcions adequada a la discretització efectuada i expressar la solució aproximada com a combinació lineal dels elements d'aquesta base per construir el sistema lineal.

Així doncs, primerament obtenim una triangulació de $\bar{\Omega} = [0, 1] \times [0, 1]$, \mathcal{T} , usant la triangulació de Delaunay. Suposem que tenim un total de $M+1$ triangles amb $I+n$ vèrtexs diferents. Anomenarem $K_k \subset \bar{\Omega}$ al domini de cada triangle obtingut, on $0 \leq k \leq M$. L'algoritme proporciona una enumeració convenient dels $I+n$ vèrtexs diferents a l'hora de construir, més endavant, la matriu de coeficients.

De forma anàloga al cas unidimensional, volem construir un subespai $V_h \in V$ de dimensió finita. Designem P_1 com l'espai de funcions polinòmiques de grau igual o inferior a 1. Es tractarà d'un espai de dimensió 3 generat per la base de polinomis $\{1, x, y\}$. Definim l'espai V_h com:

$$V_h = \{v \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) : v|_{\Gamma} = 0, v|_{K_i} \in P_1, 0 \leq k \leq M\}.$$

Suposem que n vèrtexs formen part de Γ , aleshores la dimensió del subespai serà I . Cada un dels I vèrtexs restants l'anomenarem a_i , on $1 \leq i \leq I$. Un conjunt de funcions que

podria constituir una base d'aquest espai és la successió de funcions $\varphi_i \in V_h$, $1 \leq i \leq I$, tals que prenen valor 1 al punt a_i i s'anul·len al conjunt $\{a_0, a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_I\}$, i.e.

$$\varphi_i(a_j) = \delta_{i,j}, \quad 1 \leq j \leq I.$$

Seguidament s'explicarà com avaluar aquestes funcions sobre un dels triangles. Donat un conjunt de punts de Ω , l'algoritme de la triangulació de Delaunay efectua la millor triangulació possible i per a cada triangle sabem quins són els seus vèrtexs. Si prenem un triangle qualsevol de la triangulació, anomenem-lo T_k , amb vèrtexs suposem $a_1 = (x_1, y_1)$, $a_2 = (x_2, y_2)$, $a_3 = (x_3, y_3)$, per construcció sabem que només hi ha tres funcions de la base que seran no nul·les, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. En efecte, aquestes funcions es defineixen:

$$\varphi_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3$$

i es poden representar de la següent forma:

$$\varphi_i(x, y) = p_i + q_i x + r_i y, \quad (x, y) \in T_k, \quad i = 1, 2, 3,$$

on els coeficients $p_i, q_i, r_i \in \mathbb{R}$ es poden trobar resolent un sistema d'equacions. Per $i = 1$ tenim:

$$\begin{cases} p_1 + q_1 x_1 + r_1 y_1 = \varphi_1(x_1, y_1) = 1 \\ p_1 + q_1 x_2 + r_1 y_2 = \varphi_1(x_2, y_2) = 0 \\ p_1 + q_1 x_3 + r_1 y_3 = \varphi_1(x_3, y_3) = 0 \end{cases}$$

que de forma matricial resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ara, si ho fem per $i = 1, 2, 3$ alhora, és fàcil veure que l'equació matricial a resoldre és la següent:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, tenim que

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}^{-1}$$

Així, repetint el procés per cada triangle T_k per tot $0 \leq k \leq M$ podrem trobar les funcions base φ_i per tot $1 \leq i \leq I$.

Observació 7.1. És fàcil observar que

$$\nabla \varphi_i = \begin{pmatrix} q_i \\ r_i \end{pmatrix} \tag{7.4}$$

és un vector constant.

7.2 Sistema d'equacions

Un cop trobada la base, podem determinar la funció aproximada com

$$u_h = \sum_{i=1}^I \xi_i \varphi_i, \quad \xi_i \in \mathbb{R}.$$

Pel Teorema 3.6 podem considerar el problema aproximat a l'espai V_h :

$$\forall v_h \in V_h, \quad a(u_h, v_h) = L(v_h),$$

admet una solució $u_h \in V_h$ i només una.

En aquest cas bidimensional utilitzarem directament la notació integral. Partint de l'equació (7.2) i un cop obtinguda la triangulació $\mathcal{T}(\Omega)$ tenim:

$$\forall v_h \in V_h, \quad \int_{\mathcal{T}(\Omega)} \nabla u_h \nabla v_h \, dx \, dy = \int_{\mathcal{T}(\Omega)} f v_h \, dx \, dy.$$

Fent ús servir la linealitat de les integrals s'arriba a:

$$\forall v_h \in V_h, \quad \sum_{k=0}^M \int_{T_k} \nabla u_h \nabla v_h \, dx \, dy = \sum_{k=0}^M \int_{T_k} f v_h \, dx \, dy.$$

Ara doncs, usant les funcions de la base obtenim el següent sistema d'equacions:

$$\sum_{k=0}^M \sum_{j=1}^I \xi_j \int_{T_k} \nabla \varphi_j(x, y) \nabla \varphi_i(x, y) \, dx \, dy = \sum_{k=0}^M \sum_{j=1}^I \int_{T_k} f(x, y) \varphi_i(x, y) \, dx \, dy, \quad 1 \leq i \leq I. \quad (7.5)$$

Fent ús de l'observació 7.4, tenim que el producte escalar de gradients de les funcions base és constant, per tant pot sortir de l'integral. Aleshores ens queda la integral sobre un triangle d'una funció constant, que no és res més que la seva àrea, que denotarem $A(\cdot)$. Per tant, la banda dreta queda de la següent forma:'

$$\sum_{j=1}^I \xi_j \sum_{k=0}^M \nabla \varphi_j \nabla \varphi_i \int_{T_k} d(x, y) = \sum_{j=1}^I \xi_j \sum_{k=0}^M \nabla \varphi_j \nabla \varphi_i A(T_k).$$

Per simplificar la banda dreta de l'expressió (7.5) usarem la fórmula (5.8) del canvi de variable per passar d'una integral sobre un triangle qualsevol T_k a una integral sobre el triangle referència T_R . Després, tal com es justifica a l'observació 5.13, podem prendre la regla de quadratura de 4-punts sobre triangles per tal d'obtenir una aproximació de cada integral. En efecte, tenim:

$$\int_{T_k} f(x, y) \varphi_i(x, y) \, dA \approx A(T_k) \left\{ -\frac{1}{16} f(\bar{x}_{1_k}, \bar{y}_{1_k}) \varphi_i(\bar{x}_{1_k}, \bar{y}_{1_k}) + \frac{1}{48} \left[f(\bar{x}_{2_k}, \bar{y}_{2_k}) \varphi_i(\bar{x}_{2_k}, \bar{y}_{2_k}) + f(\bar{x}_{3_k}, \bar{y}_{3_k}) \varphi_i(\bar{x}_{3_k}, \bar{y}_{3_k}) + f(\bar{x}_{4_k}, \bar{y}_{4_k}) \varphi_i(\bar{x}_{4_k}, \bar{y}_{4_k}) \right] \right\},$$

on, si denotem (x_{1_k}, y_{1_k}) , (x_{2_k}, y_{2_k}) i (x_{3_k}, y_{3_k}) els vèrtexs de cada triangle, tenim

$$\begin{aligned}(\bar{x}_{1_k}, \bar{y}_{1_k}) &= \left(\frac{1}{3}(x_{1_k}, y_{1_k}) + \frac{1}{3}(x_{2_k}, y_{2_k}) + \frac{1}{3}(x_{3_k}, y_{3_k}) \right), \\(\bar{x}_{2_k}, \bar{y}_{2_k}) &= \left(\frac{3}{5}(x_{1_k}, y_{1_k}) + \frac{1}{5}(x_{2_k}, y_{2_k}) + \frac{1}{5}(x_{3_k}, y_{3_k}) \right), \\(\bar{x}_{3_k}, \bar{y}_{3_k}) &= \left(\frac{1}{5}(x_{1_k}, y_{1_k}) + \frac{3}{5}(x_{2_k}, y_{2_k}) + \frac{1}{5}(x_{3_k}, y_{3_k}) \right), \\(\bar{x}_{4_k}, \bar{y}_{4_k}) &= \left(\frac{1}{5}(x_{1_k}, y_{1_k}) + \frac{1}{5}(x_{2_k}, y_{2_k}) + \frac{3}{5}(x_{3_k}, y_{3_k}) \right).\end{aligned}$$

Per tant, podem reescriure l'expressió (7.5) tenint en compte les dues simplificacions que hem fet a banda i banda i les dues observacions en resulta el següent sistema:

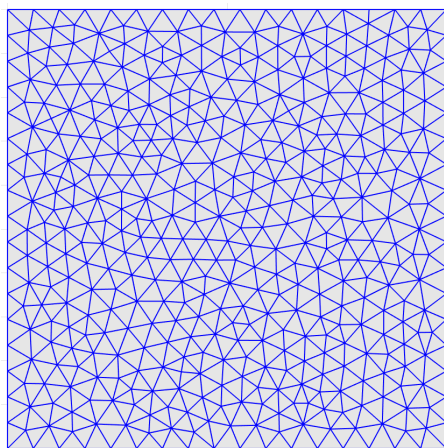
$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^I \xi_j \sum_{k=0}^M \nabla \varphi_j(x_k, y_k) \nabla \varphi_i(x_k, y_k) A(T_k) \approx \sum_{j=1}^I \sum_{k=0}^M A(T_k) \left\{ -\frac{1}{16} f(\bar{x}_{1_k}, \bar{y}_{1_k}) \varphi_i(\bar{x}_{1_k}, \bar{y}_{1_k}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{48} \left[f(\bar{x}_{2_k}, \bar{y}_{2_k}) \varphi_i(\bar{x}_{2_k}, \bar{y}_{2_k}) + f(\bar{x}_{3_k}, \bar{y}_{3_k}) \varphi_i(\bar{x}_{3_k}, \bar{y}_{3_k}) + f(\bar{x}_{4_k}, \bar{y}_{4_k}) \varphi_i(\bar{x}_{4_k}, \bar{y}_{4_k}) \right] \right\}, \quad 1 \leq i \leq I.\end{aligned}$$

7.2.1 Exemple

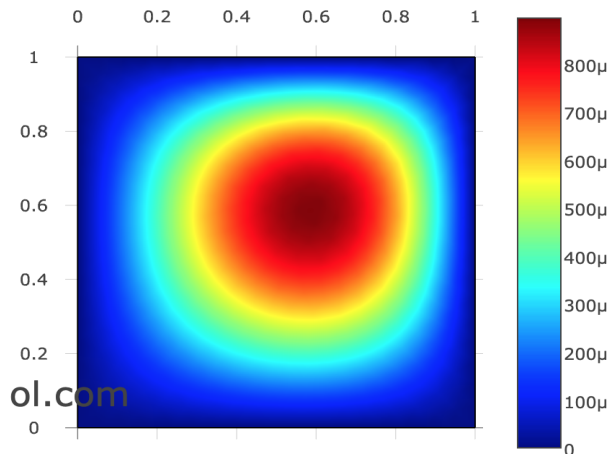
Ara resoldrem un exemple de problema el·líptic de Dirichlet utilitzant un software de MATLAB anomenat *FEATool Multiphysics*. Aquest software ofereix una sèrie de mètodes diferents per fer el mallatge i varis algorismes per tal de resoldre el sistema d'equacions corresponent:

- Per construir la malla a Ω s'ha seleccionat l'algorisme *Triangle*, que utilitza la triangulació de Delaunay (veure Figura 5a).
- Per construir l'espai de funcions aproximat V_h s'ha seleccionat polinomis que tenen grau igual o inferior a 1 per a cada triangle. En el software són els polinomis $(P1/Q1)$.
- Per solucionar el sistema d'equacions s'ha seleccionat l'algorisme *bicgstab*, que està basat en el mètode iteratiu del gradient conjugat.
- Per aproximar les integrals s'ha seleccionat la regla d'integració per 4-punts.

Ara suposem que $f(x, y) = (x - 1)(y - 1)x^2y^2$, aleshores la solució corresponent la podem visualitzar a la Figura 5b.



(a) Triangulació de Delaunay mitjançant l'algorisme *Triangle*. S'han obtingut 452 punts i 834 triangles.



(b) Solució del problema el·líptic amb condicions de contorn de Dirichlet sobre el quadrat unitat on $f(x, y) = (x - 1)(y - 1)x^2y^2$.

Figura 5: Problema el·líptic amb condicions de contorn de Dirichlet.

8 Conclusions

El FEM és un mètode amb uns fonaments extensos i diversos que fa que inclogui conceptes procedents de nombroses branques de les matemàtiques. En aquest treball s'han inclòs alguns dels temes bàsics que conformen el mètode: l'anàlisi, l'àlgebra, els mètodes numèrics, els mètodes computacionals i la programació. A més, el mètode també utilitza altres branques, com per exemple la topologia i geometria diferencial a l'hora de demostrar el teorema de traça. Per aquest motiu, han sigut necessàries nombroses reunions amb el tutor que m'han servit de guia per detectar els temes més rellevants.

Un dels objectius del treball era entendre la base teòrica que fonamenta el FEM. El fet de no tenir prèviament consolidats una sèrie de conceptes bàsics d'anàlisi real i funcional ha dificultat el camí per aconseguir-ho. De fet, hi ha molts conceptes referents a la convergència del mètode que m'hagués agradat treballar, però l'extensió del treball i el temps no m'ho han permès.

Un altre dels objectius era poder aplicar el FEM a exemples mitjançant un llenguatge de programació. S'han pogut programar dos problemes pel cas unidimensional, un estacionari i l'altre dependent del temps. He utilitzat MATLAB perquè trobo que és un llenguatge senzill i disposa de moltes funcions que poden ser de molta utilitat si se'n fa un ús auxiliar. També m'hauria agradat programar el cas bidimensional, però el temps dedicat a la base teòrica no m'ho ha permès. Per això he decidit resoldre-ho amb un software i explicar-ne les eines màximes que aquest fa servir. Gràcies a l'aprenentatge dels mètodes numèrics i computacionals que intervenen, el maneig del software ha resultat ser molt més entenedor.

Una bona continuació d'aquest treball seria programar exemples pel cas bidimensional i seguidament pel tridimensional. També es podrien combinar diferents condicions de contorn, tant homogènies com inhomogènies.

Referències

- [1] Abramowitz, M., & Stegun, I. A. (Eds.). (1964). *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables* (Vol. 55). US Government printing office.
- [2] Adams, R. A., & Fournier, J. J. (2003). *Sobolev spaces*. Elsevier.
- [3] Bern, M., & Eppstein, D. (1995). *Mesh generation and optimal triangulation*. In *Computing in Euclidean geometry* (pp. 47-123).
- [4] Brenner, S., & Scott, R. (2007). *The mathematical theory of finite element methods* (Vol. 15). Springer Science & Business Media.
- [5] Brezis, H. (2010). *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media.
- [6] FEATool Multiphysics (2021) *Precise Simulation* <https://www.featool.com/doc/> .
- [7] Folland, G. B. (1999). *Real analysis: modern techniques and their applications* (Vol. 40). John Wiley & Sons.
- [8] Gockenbach, M. S. (2006). *Understanding and implementing the finite element method* (Vol. 97). SIAM.
- [9] Megginson, R. E. (2012). *An introduction to Banach space theory* (Vol. 183). Springer Science & Business Media.
- [10] Ortega, J. M. (2013). *Introduction to parallel and vector solution of linear systems*. Springer Science & Business Media.
- [11] Raviart, P. A., Thomas, J. M., Ciarlet, P. G., & Lions, J. L. (1998). *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles* (Vol. 2). Paris: Dunod.